

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Хайлов Е.Н.

(кафедра оптимального управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова)

## АННОТАЦИЯ

Настоящее выступление дает представление о содержании докторской диссертации докладчика, которая состоит из четырех глав. Основным объектом диссертационного исследования являются задачи минимизации со свободным правым концом на фиксированном отрезке времени для управляемых аффинных систем дифференциальных уравнений, имеющих приложения в эпидемиологии и медицине. Первая и вторая глава посвящены оценкам числа различных нулей функций переключений, или оценкам числа переключений соответствующих оптимальных управлений, в рассматриваемом классе задач минимизации. В третьей и четвертой главах изучаются задачи минимизации, оптимальные управления в которых могут содержать особые режимы различных порядков.

Именно, первая глава описывает подход для обоснования продолжимости решений неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений, основанный на использовании дифференциальных неравенств и теоремы сравнения Чаплыгина. Такая система возникает при анализе неавтономной линейной системы дифференциальных уравнений для функции переключений и отвечающих ей вспомогательных функций. Подробно рассматриваются неавтономные линейные системы второго и третьего порядков. В них выполняется замена переменных, которая преобразует матрицу линейной системы к специальному верхне-треугольному виду, что позволяет оценить число нулей соответствующих функций переключений. В случае линейной системы второго порядка это преобразование осуществляется с помощью функции, удовлетворяющей неавтономному уравнению Риккати, а в случае линейной системы третьего порядка – с помощью трех функций, удовлетворяющих неавтономной системе квадратичных дифференциальных уравнений. Сформулировано и доказано утверждение, дающее достаточное условие продолжимости решения как неавтономного уравнения Риккати, так и неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений на весь заданный отрезок времени. Применимость такого подхода демонстрируется при анализе неавтономных линейных систем второго и третьего порядков для функций переключений и отвечающей им вспомогательных функций в задачах минимизации из эпидемиологии.

Вторая глава описывает подход для обоснования продолжимости решений неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений, основанный на сочетании расщепления системы квадратичных дифференциальных уравнений на подсистемы меньшей размерности с последующим применением условия квазиположительности к этим подсистемам. Такая ситуация возникает при анализе неавтономной линейной системы дифференциальных уравнений для функции переключений и отвечающих ей двух вспомогательных функций. Применимость этого

подхода демонстрируется при анализе неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений третьего порядка для функций переключений и отвечающих им вспомогательных функций в задачах минимизации из медицины.

В третьей главе рассматривается прикладная модель из медицины, состоящая из трех дифференциальных уравнений. Эта модель преобразуется в три управляемые модели благодаря введению двух управлений. Первая и вторая модели содержат по одному управлению, третья модель имеет два управления. Для каждой такой модели ставится соответствующая задача минимизации. В первой задаче минимизации применение принципа максимума Понтрягина показывает возможный вид оптимального управления. Оно может содержать особый режим второго порядка. Предлагается способ приближения оптимального управления с таким особым режимом последовательностью релейных управлений, являющихся оптимальными в некоторых возмущенных задачах минимизации. Обосновывается сходимость семейства возмущенных оптимальных решений к оптимальному решению невозмущенной задачи минимизации в соответствующих метриках. Далее показывается возможность возникновения у оптимального управления в рассматриваемой задаче минимизации особого режима третьего порядка. Изучается соединение такого особого режима с соседними релейными участками оптимального управления. Использование принципа максимума Понтрягина во второй задаче минимизации тоже показывает возможный вид оптимального управления. Оно может содержать особый режим первого порядка. В третьей задаче минимизации применение принципа максимума Понтрягина также дает возможный вид оптимальных управлений. При этом изучается возможность одновременного возникновения особых режимов у этих управлений. После того, как показывается, что такого быть не может, исследуется возможный вид каждого управления по отдельности.

В четвертой главе рассматривается модель конкуренции Лотки-Вольтерры, состоящая из двух дифференциальных уравнений и имеющая приложение в медицине. Эта модель далее преобразуется в две управляемые модели благодаря введению двух управлений. Для этих моделей ставятся соответствующие задачи минимизации. Использование в них принципа максимума Понтрягина демонстрирует возможный вид соответствующих оптимальных управлений. Далее показывается, каким образом такие управляемые модели используются для формирования гибридной управляемой модели и постановки соответствующей задачи минимизации. Для ее анализа применяется принцип максимума Понтрягина, который показывает возможный вид оптимального управления в каждой модели. Также рассматривается ситуация, когда в первую управляемую модель дополнительно вводится линейное дифференциальное уравнение, содержащее управление. Привлечение принципа максимума Понтрягина к возникающей здесь задаче минимизации дает возможный вид оптимального управления. Подробно изучаются особые режимы, которые могут возникнуть.