На правах рукописи

ХИБИЕВ АСЛАНБЕК ХИЗИРОВИЧ

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛОКАЛЬНЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1.6 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нальчик — 2024

Работа выполнена в Институте прикладной математики и автоматизации — филиале Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук».

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент **АЛИХАНОВ Анатолий Алиевич**
Официальные оппоненты:	**ЛАПИН Александр Васильевич,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, механики и математического моделирования института компьютерных наук и математического моделирования ФГАОУ ВО Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова Минздрава России (Сеченовский Университет)
	СУХИНОВ Александр Иванович доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой математики и информатики ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет»
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится «____» ________ 2025 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.073.03 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Институте математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН»
https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.03

Автореферат разослан «____» ________ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук — Огородников Ю. Ю.

Общая характеристика работы

<u>**Актуальность темы.**</u> Большинство физических процессов описываются с помощью дифференциальных уравнений, содержащих производные невысоких порядков по времени. Эволюционные уравнения первого порядка описывают такие системы, эволюция которых $f(t)$ полностью определяется их динамическим состоянием в начальный момент t_0 и не зависит от предыстории $f(t'),\ t' < t$. Такие системы называются системами без памяти. В противном случае, если будущее системы зависит от ее предыстории $f(t'),\ t' < t_0$, находящейся в фиксированном состоянии $f(t_0)$ в момент времени t_0, тогда принято называть это системой с памятью (свойство эредитарности)[1].

Ключевую роль в эредитарной теории играет функция влияния (функция памяти). Определенно, экспонента является самой популярной функцией в теоретической физике, с ее помощью описываются многочисленные неравновесные процессы. Однако, существуют процессы, которые происходят не по экспоненциальному, а по степенному закону $t^{-\gamma}$, где $\gamma \approx 1$[2].

Теория дробного исчисления признана важным инструментом для описания явлений, для которых классическое исчисление целых порядков не применимо. Она имеет дело с исследованием и применением производных и интегралов произвольного (вещественного или комплексного) порядка и за последние десятилетия все больший интерес привлекли ее приложения. Список исследователей и сама теория представлены во многих монографиях[3].

Для более точного описания физических и химических процессов, для которых необходимо учитывать предысторию процесса, используют дифференциальные уравнения с производными дробного порядка. Характеристиками, учитывающими память в таких уравнениях, являются функции памяти, которые представляют собой ядра интегралов, определяющих операторы дробного интегро-дифференцирования. Для операторов дробного интегро-дифференцирования, таковой является степенная функция. Показатель степенной функции памяти определяет порядок производной и связан с фрактальной размерностью среды, в которой протекает исследуемый процесс.

Моделирование диффузии в пористой среде (во фрактальных средах) определенного типа является одним из наиболее важных применений производных дробного порядка. В простейшем случае уравнение одномерной пространственной диффузии принимает вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Так как порядок α производной по времени может быть произвольным вещественным числом, включая $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, то его называют диффузионно-волновым уравнением дробного порядка. При $\alpha = 1$ последнее уравнение является классическим уравнением диффузии, а для $\alpha = 2$ оно становится классическим волновым уравнением. При $0 < \alpha < 1$ имеем так называемую ультрамедленную диффузию, а значения $1 < \alpha < 2$ соответствуют «промежуточным» процессам.

---

[1] *Uchaikin, V. V.* Heredity and nonlocality / V. V. Uchaikin // Fractional derivatives for physicists and engineers: background and theory / ed. by V. V. Uchaikin. Berlin, Heidelberg : Springer, 2013. P. 3—58. (Nonlinear Physical Science).

[2] *Учайкин, В. В.* Метод дробных производных / В. В. Учайкин. Ульяновск : Артишок, 2008. 510 с.

[3] *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. Минск : Наука и техника, 1987. 687 с.; *Нахушев, А. М.* Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. Москва : Физматлит, 2003. 271 с.; *Псху, А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка: монография / А. В. Псху. М : Наука, 2005. 199 с.; *Oldham, K. B.* The fractional calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. New York : Academic Press, 1974. 322 p.; *Podlubny, I.* Fractional differential equations / I. Podlubny. San Diego : Academic Press, 1999. 340 p.; *Kilbas, A. A.* Theory and applications of fractional differential equation / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. Amsterdam : Elsevier, 2006. 540 p.; Fractional Calculus: Models And Numerical Methods / D. Baleanu [et al.]. World Scientific, 2012. 426 p.

Для более точного описания процессов в неоднородных пористых средах, используются дифференциальные уравнения с дробными производными распределенного порядка. В ряде работ[4], методом энергетических неравенств, были получены априорные оценки для решения первой и третьей краевых задач для уравнения диффузии дробного, переменного и распределенного порядков как для дифференциальных, так и для разностных задач. С помощью принципа максимума, в работе[5] получены априорные оценки для разностных задач аппроксимирующих уравнение диффузии дробного по времени порядка.

За последние несколько лет все большее внимание исследователей было направлено на разработку численных алгоритмов для решения волновых уравнений дробного порядка по времени. В работе[6] был разработан разностный аналог с порядком аппроксимации $3-\alpha$ для дробной производной порядка α, $1<\alpha<2$. Численное решение задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра были исследованы П. Н. Вабищевичем[7].

В различных явлениях реального мира, таких как экономика, системы автоматического управления с обратной связью, медицина и динамика численности населения обычно встречается запаздывание по времени[8]. В работе[9] был предложен эффективный численный метод для решения нелинейного уравнения диффузии дробного порядка с запаздыванием. Этот метод сочетает линеаризованный метод Кранка-Николсон по времени и разностный аналог второго порядка аппроксимации дробной производной по пространственной переменной. Разностная схема повышенного порядка $3-\alpha$ для аппроксимации диффузионно-волнового уравнения дробного порядка с запаздыванием и с переменными коэффициентами, где $1<\alpha<2$, была рассмотрена в работе[10].

Для решения многомерных задач применяют схемы называемые экономичными. Основной идеей построения экономичных разностных схем является сведение многомерной задачи к цепочке одномерных задач. Одной из первых экономичных схем является построенная в 1955 году Писменом и Рэкфордом схема переменных направлений (продольно-поперечная схема). Схему переменных направлений нельзя обобщить на трехмерный случай, поэтому используют метод суммарной аппроксимации (ЛОС – локально-одномерные схемы) для построения многомерных схем[11].

---

[4] *Alikhanov, A. A.* Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings / A. A. Alikhanov // Applied Mathematics and Computation. 2012. Dec. Vol. 219, no. 8. P. 3938—3946; *Alikhanov, A. A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation / A. A. Alikhanov // Comput. Methods Appl. Math. 2015. Jan. Vol. 218. P. 424—438; *Alikhanov, A. A.* Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation / A. A. Alikhanov // Appl. Math. Comput. 2015. Oct. Vol. 268. P. 12—22.

[5] *Таукенова, Ф. И.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка / Ф. И. Таукенова, М. Х. Шхануков-Лафишев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1871—1881.

[6] *Sun, Z.-z.* A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system / Z.-z. Sun, X. Wu // Appl. Numer. Math. 2006. Feb. Vol. 56, no. 2. P. 193—209.

[7] *Vabishchevich, P. N.* Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels / P. N. Vabishchevich // Applied Numerical Mathematics. 2022. Apr. 1. Vol. 174. P. 177—190; *Vabishchevich, P. N.* Approximate solution of the Cauchy problem for a first-order integrodifferential equation with solution derivative memory / P. N. Vabishchevich // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023. Apr. 1. Vol. 422. P. 114887.

[8] *Pimenov, V. G.* On a class of non-linear delay distributed order fractional diffusion equations / V. G. Pimenov, A. S. Hendy, R. H. De Staelen // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 318. P. 433—443.

[9] *Ran, M.* Linearized Crank–Nicolson method for solving the nonlinear fractional diffusion equation with multi-delay / M. Ran, Y. He // International Journal of Computer Mathematics. 2018. Vol. 95, no. 12. P. 2458—2470.

[10] *Zhang, Q.* Compact scheme for fractional diffusion-wave equation with spatial variable coefficient and delays / Q. Zhang, L. Liu, C. Zhang // Applicable Analysis. 2022. Vol. 101, no. 6. P. 1911—1932.

[11] *Peaceman, D. W.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations / D. W. Peaceman, H. H. Rachford Jr. // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1955. Mar. Vol. 3, no. 1. P. 28—41.

Метод суммарной аппроксимации является общим методом получения экономичных схем, пригодных для уравнений с переменными и даже разрывными коэффициентами, для квазилинейных нестационарных уравнений в случае произвольной области любого числа измерений. Отказ от понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации расширяет класс задач и приводит к аддитивным схемам.

Основную роль при построении ЛОС играет возможность построения цепочки одномерных задач, то есть представления оператора $\mathcal{L}$ исходной задачи в виде суммы одномерных операторов: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \ldots + \mathcal{L}_p$. Аддитивные схемы имеют две основные черты: 1) переход от слоя S на слой $S+1$ осуществляется при помощи обычных (двухслойных, трехслойных и т.д.) схем; 2) погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем (аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией). Каждая из промежуточных схем цепочки уравнений может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок[12].

В работе А. А. Самарского[13] был представлен экономичный разностный метод решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Сходимость локально одномерной схемы решения первой краевой задачи в произвольной области и второй и третьей краевых задач в ступенчатых областях для уравнения теплопроводности, не содержащего смешанных производных, на последовательности неравномерных сеток была исследована в работе[14].

Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка была рассмотрена в публикациях[15]. В работе[16] было исследовано параболическое уравнение с нелокальным интегральным источником. Разностные схемы для параболических уравнений в средах, обладающих памятью были представлены в статьях[17]. Получены априорные оценки для решения уравнения переноса примесей дробного порядка и для параболического уравнения с нелокальным источником по времени.

Целью данной работы является разработка эффективных методов численного решения начально-краевых задач для уравнений в частных производных с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования, а также для параболических уравнений с нелокальными интегральными источниками по дополнительному параметру.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построение и исследование разностных методов решения краевых задач для некоторых классов нелокальных диффузионно-волновых уравнений в частных производных с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования, определяемыми произвольными функциями памяти.

---

[12] *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. Москва : Наука, 1977. 656 с.

[13] *Самарский, А. А.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области / А. А. Самарский // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2, № 5. С. 787—811.

[14] *Самарский, А. А.* О сходимости локально одномерной схемы решения многомерного уравнения теплопроводности на неравномерных сетках / А. А. Самарский, И. В. Фрязинов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11, № 3. С. 642—657.

[15] *Лафишева, М. М.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка / М. М. Лафишева, М. Х. Шхануков-Лафишев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1878—1887.

[16] *Бештокова, З. В.* Локально-одномерные разностные схемы для параболических уравнений в средах, обладающих "памятью" / З. В. Бештокова, М. М. Лафишева, М. Х. Шхануков-Лафишев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 9. С. 1531—1542.

[17] *Ашабоков, Б. А.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения переноса примесей дробного порядка / Б. А. Ашабоков, З. В. Бештокова, М. Х. Шхануков-Лафишев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 9. С. 1517—1529; *Бештокова, З. В.* Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником / З. В. Бештокова // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2017. № 3. С. 5—12.

2. Построение локально-одномерных разностных схем для решения многомерных задач для параболических уравнений с нелокальными интегральными источниками по дополнительному параметру.
3. Программная реализация предложенных разностных схем на ЭВМ.

Научная новизна:

1. Построены и исследованы разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для решения первых краевых задач для уравнения диффузии, уравнения Аллера дробных порядков и разностные схемы для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с переменными коэффициентами и произвольными функциями памяти.
2. Построены разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для обобщенного линейного и нелинейного (в том числе с запаздыванием по времени) диффузионно-волнового уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами и произвольной функцией памяти.
3. Построены локально-одномерные разностные схемы для уравнения параболического типа в p-мерном параллелепипеде с нелокальными интегральными источниками по дополнительному параметру и доказаны их устойчивость и сходимость.

Практическая значимость состоит в том, что результаты исследований позволят более эффективно (в смысле устойчивости, сходимости и экономичности) решать математические модели, определяемые с помощью обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования по данным измерений, и могут быть использованы для изучения микрофизических процессов в смешанных конвективных облаках, которые могут быть применены для исследования роли системных свойств облаков в формировании их микроструктурных характеристик и технологии управления процессами осадкообразования в конвективных облаках путем внесения частиц льдообразующих реагентов.

Методология и методы исследования. Вычислительные алгоримы разработаны на основе классических методов. При решении поставленных задач использовались методы конечных разностей, энергетических неравенств и метод суммарной аппроксимации. Для проверки алгоритмов были посчитаны тестовые задачи. Алгоритмы реализованы на языке программирования Julia.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложены разностные схемы для уравнения диффузии и уравнения Аллера дробных порядков и уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти. Доказана устойчивость и сходимость предложенных разностных схем. Возможности алгоритмов проиллюстрированы на решении тестовых задач;
2. Построены разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для решения линейного и нелинейного диффузионно-волновых уравнений дробного порядка с произвольной функцией памяти и запаздыванием по времени. Доказана устойчивость и сходимость разностных схем. Представлены результаты расчетов проведенных для тестовых задач;
3. Построены локально-одномерные разностные схемы для уравнения параболического типа в p-мерном параллелепипеде с нелокальными интегральными источниками по дополнительному параметру. Доказаны устойчивость и сходимость разностных схем. Представлены численные решения тестовых задач;

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. III Международная научная конференция «Осенние математические чтения в Адыгее» 2019 г.

2. Международная конференция «Numerical solution of fractional differential equations and applications» Созополь, Болгария, 2020 г.
3. Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики» Нальчик, 2020 г.
4. Международная конференция «Intelligent information technology and mathematical modeling» пос. Дивноморское, Геленджик, 2021 г.
5. V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», Москва, 2022 г.
6. VII Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2023 г.

Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались неоднократно на научно-исследовательских семинарах:

– по актуальным проблемам прикладной математики Института прикладной математики и автоматизации под руководством кандидата физико-математических наук Алиханова А. А.
– по современному анализу, информатике и физике Института прикладной математики и автоматизации под руководством доктора физико-математических наук Псху А. В.
– кафедры вычислительной математики и компьютерных наук Уральского федерального университета под руководством доктора физико-математических наук, профессора Пименова В. Г.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают основные теоретические результаты проведенного исследования и персональный вклад автора, который заключается в

– непосредственном участии в получении, анализе и систематизации исходных теоретических данных;
– активной подготовке к публикации научных статей для российских и международных рецензируемых журналов совместно с соавторами;
– разработке, реализации и тестировании алгоритмов численного решения рассмотренных дифференциальных задач;
– выступлениях с докладами по теме диссертации на научных конференциях различного уровня и на научно-исследовательских семинарах.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1—6]. В совместных работах [2—6] научному руководителю или соавторам принадлежат постановки задач и общие методики исследования, а диссертанту — разработка численных методов, доказательства основных теорем и программная реализация алгоритмов для тестовых примеров.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях, 6 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и/или Scopus. Зарегистрированы 4 программы для ЭВМ.

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90094 (конкурс «Аспиранты»).

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена разработке и обоснованию вычислительных алгоритмов приближенного решения первой краевой задачи для обобщенных уравнения диффузии, уравнения Аллера дробных по времени порядков и уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с произвольными функциями памяти и переменными коэффициентами.

В параграфе 1.1 рассмотрена первая краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка по времени с обобщенной функцией памяти

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda(t)}u = \mathcal{L}u + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u,$$

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda(t)}u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{\lambda(t-\eta)}{(t-\eta)^\alpha}\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,\eta)d\eta \tag{4}$$

— обобщенная дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, с весовой функцией $\lambda(t) \in \mathcal{C}^2[0,T]$, где $\lambda(t) > 0$, $\lambda'(t) \leq 0$ для всех $t \in [0,T]$; $0 < c_1 \leq k(x,t) \leq c_2$, $q(x,t) \geq 0$ для всех $(x,t) \in \bar{Q}_T$.

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ введем сетки $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N;\ hN = l\}$ и $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots, M, \tau M = T\}$.

Построен разностный аналог повышенного порядка аппроксимации для обобщенной дробной производной Капуто порядка α с весовой функцией $\lambda(t)$ $(0 < \alpha < 1, \lambda(t) > 0, \lambda'(t) \leq 0)$

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)}v = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha)}v_{t,s}, \tag{5}$$

где

$$c_0^{(\alpha)} = \lambda_{\sigma-1/2}a_0^{(\alpha)}, \quad \text{при} \quad j = 0; \quad \text{и} \quad j \geq 1,$$

$$c_s^{(\alpha)} = \begin{cases} \lambda_{\sigma-1/2}a_0^{(\alpha)} + \lambda_\sigma b_1^{(\alpha)}, & s = 0, \\ \lambda_{s+\sigma-1/2}a_s^{(\alpha)} + \lambda_{s+\sigma}b_{s+1}^{(\alpha)} - \lambda_{s+\sigma}b_s^{(\alpha)}, & 1 \leq s \leq j-1, \\ \lambda_{j+\sigma-1/2}a_j^{(\alpha)} - \lambda_{j+\sigma}b_j^{(\alpha)}, & s = j, \end{cases} \tag{6}$$

$$a_0^{(\alpha)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha},$$

$$b_l^{(\alpha)} = \frac{1}{2-\alpha}\left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\right] - \frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\right], \quad l \geq 1,$$

Формула (5) — это обобщение L2-1_σ-формулы для дробной производной Капуто.

Построена разностная схема второго порядка аппроксимации по времени

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)}y_i = \Lambda y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^{j+\sigma}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad j = 0,1,\ldots,M-1, \tag{7}$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{8}$$

где

$$\Lambda y_i = \left((ay_{\bar{x}})_x - dy\right)_i = \frac{a_{i+1}y_{i+1} - (a_{i+1}+a_i)y_i + a_iy_{i-1}}{h^2} - d_iy_i,$$
$$i = 1, \ldots, N-1,$$

$$
\begin{gathered}
y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j, \quad \sigma = 1 - \alpha/2, \\
y_{\bar{x},i} = (y_i - y_{i-1})/h, \quad y_{x,i} = (y_{i+1} - y_i)/h, \\
a_i^{j+\sigma} = k(x_{i-1/2}, t_{j+\sigma}), \quad d_i^{j+\sigma} = q(x_i, t_{j+\sigma}), \quad \varphi_i^{j+\sigma} = f(x_i, t_{j+\sigma}).
\end{gathered}
$$

Если решение задачи (2)–(3) $u \in \mathcal{C}^{4,3}_{x,t}$, то порядок аппроксимации разностной схемы (7)–(8) равен $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$.

Теорема 1. Разностная схема (7)–(8) безусловно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка:

$$
\|y^{j+1}\|_0^2 \le \|y^0\|_0^2 + \frac{T^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{2\lambda(T) c_1} \max_{0 \le j \le M} \|\varphi^j\|_0^2. \tag{9}
$$

Для дифференциальной задачи (2)–(3) построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации с коэффициентами $k = k(t)$ и $q = q(t)$, не зависящими от пространственной переменной:

$$
\begin{gathered}
\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} \mathcal{H}_h y_i = a^{j+\sigma} y^{(\sigma)}_{\bar{x}x,i} - d^{j+\sigma} \mathcal{H}_h y_i^{(\sigma)} + \mathcal{H}_h \varphi_i^{j+\sigma}, \\
i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, 1, \ldots, M-1,
\end{gathered} \tag{10}
$$

$$
y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{11}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\mathcal{H}_h v_i = v_i + h^2 v_{\bar{x}x,i}/12, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\
a^{j+\sigma} = k(t_{j+\sigma}), \quad d^{j+\sigma} = q(t_{j+\sigma}), \\
\varphi_i^{j+\sigma} = f(x_i, t_{j+\sigma}), \quad y^{j+\sigma} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j.
\end{gathered}
$$

Если $u \in \mathcal{C}^{6,3}_{x,t}$, тогда разностная схема имеет порядок аппроксимации $\mathcal{O}(\tau^2 + h^4)$.

Теорема 2. Разностная схема (10)–(11) безусловно устойчива и для ее решения справедлива следующая априорная оценка:

$$
\|\mathcal{H}_h y^{j+1}\|_0^2 \le \|\mathcal{H}_h y^0\|_0^2 + \frac{T^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{\lambda(T) c_1} \max_{0 \le j \le M} \|\mathcal{H}_h \varphi^j\|_0^2, \tag{12}
$$

$$
\frac{5}{12} \|y\|_0^2 \le \|\mathcal{H}_h y\|_0^2 \le \|y\|_0^2.
$$

Для негладкого решения задачи (2)–(3) была рассмотрена следующая разностная схема на неравномерной сетке $\overline{\omega}_\tau^{(l)} = \{t_j = T(j/M)^l, l \ge 1, \; j = 0, 1, 2, \ldots, M, \}$ с переменным шагом $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$:

$$
\begin{gathered}
\Delta_{0t_{j+\sigma\tau_{j+1}}}^{\alpha} y_i + \sigma \Lambda y_i^{j+1} + (1-\sigma) \Lambda y_i^j = \phi_i(t_j + \sigma \tau_{j+1}), \\
j = 0, 1, \ldots, M-1, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,
\end{gathered} \tag{13}
$$

$$
y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau^{(l)}. \tag{14}
$$

Как и в равномерном случае, аппроксимируем функцию $v(t)$ используя интерполяционные многочлены Лагранжа второй и первой степени в каждом из интервалов (t_{s-1},t_{s+1}) и (t_j,t_{j+1}), соответственно

$$\partial_{0t_j+\sigma\tau_{j+1}}^{\alpha,\lambda(t)} v(t) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{s=1}^{j} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\lambda(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)}{(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)^\alpha} \left(L_{2,s}v(\zeta)\right)' d\zeta \right.$$

$$\left. + \int_{t_j}^{t_j+\sigma\tau_{j+1}} \frac{\lambda(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)}{(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)^\alpha} \left(L_{1,j}v(\zeta)\right)' d\zeta \right) = \sum_{s=0}^{j} d_s^{(j+1)} (y^{s+1}-y^s)$$

$$= \Delta_{0t_j+\sigma\tau_{j+1}}^{\alpha} y,$$

где

$$d_s^{(j+1)} = \begin{cases} c_{j+1}^{(j+1)} + a_j^{(j+1)}, & s = j, \\ a_s^{(j+1)} + b_{s+1}^{(j+1)}, & 1 \le s \le j-1, \\ b_1^{(j+1)}, & s = 0, \end{cases}$$

$$a_s^{(j+1)} = \frac{1}{\tau_{s+1}(\tau_s+\tau_{s+1})\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\lambda(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)}{(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)^\alpha} (2\zeta - (t_{s-1}+t_s)) d\zeta,$$

$$b_s^{(j+1)} = \frac{1}{\tau_s(\tau_s+\tau_{s+1})\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\lambda(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)}{(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)^\alpha} ((t_s+t_{s+1}) - 2\zeta) d\zeta, \quad s = 1,2,\ldots,j,$$

$$c_{j+1}^{(j+1)} = \frac{1}{\tau_{j+1}\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_j}^{t_j+\sigma\tau_{j+1}} \frac{\lambda(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)}{(t_j+\sigma\tau_{j+1}-\zeta)^\alpha} d\zeta.$$

В параграфе 1.2 рассмотрена первая краевая задача для уравнения Аллера дробного порядка с обобщенными функциями памяти

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda(t)} u = \mathcal{L}_1 u + \partial_{0t}^{\alpha,\mu(t)} \mathcal{L}_2 u + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{15}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{L}_r u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_r(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q_r(x)u, \quad r = 1,2,$$

$0 < c_1 \le k_r(x) \le c_2$, $q_r(x) \ge 0$ для всех $(x,t) \in \bar{Q}_T$, $r = 1,2$. Обобщенные дробные производные Капуто $\partial_{0t}^{\alpha,\lambda(t)}$, $\partial_{0t}^{\alpha,\mu(t)}$ порядка α , $0 < \alpha < 1$ с весовыми функциями $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ определяются аналогично уравнению (4). Для дифференциальной задачи (15)–(16) представлена разностная схема

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)} y_i = \Lambda_1 y_i^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)} \Lambda_2 y_i + \varphi_i^{j+\sigma}, \quad \begin{cases} i = 1,2,\ldots,N-1, \\ j = 0,1,\ldots,M-1, \end{cases} \tag{17}$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{18}$$

Разностная схема (17)–(18) аппроксимирует дифференциальную задачу (15)–(16) с порядком $\mathcal{O}(h^2+\tau^2)$.

Теорема 3. Разностная схема (17)–(18) безусловно устойчива, а для ее решения справедлива следующая априорная оценка

$$\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(c_{j-s}^{(\alpha,\lambda)}\|y^{s+1}\|_0^2+c_{j-s}^{(\alpha,\mu)}\|y_{\bar{x}}^{s+1}]|_0^2\right)+\sum_{s=0}^{j}\|\sigma y_{\bar{x}}^{s+1}+(1-\sigma)y_{\bar{x}}^{s}]|_0^2\tau$$
$$\le C_2\left(\|y^0\|_0^2+\|y_{\bar{x}}^0]|_0^2+\sum_{s=0}^{j}\|\varphi^{s+\sigma}\|_0^2\tau\right). \quad (19)$$

Построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации для задачи (15)–(16) в случае постоянных коэффициентов $k_r(x)=k_r>0$ и $q_r(x)=q_r\ge 0$:

$$\begin{gathered}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda(t)}\mathcal{H}_h y_i=k_1 y_{\bar{x}x,i}^{(\sigma)}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\mu(t)}\left(k_2 y_{\bar{x}x,i}-q_2\mathcal{H}_h y\right)-q_1\mathcal{H}_h y_i^{(\sigma)}+\mathcal{H}_h\varphi_i^{j+\sigma},\\ i=1,2,\ldots,N-1,\quad j=0,1,\ldots,M-1,\end{gathered} \quad (20)$$

$$y(0,t)=0,\quad y(l,t)=0,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\quad y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h, \quad (21)$$

Если решение задачи (15)–(16) $u\in\mathcal{C}_{x,t}^{6,3}$, то разностная схема имеет порядок аппроксимации $\mathcal{O}(\tau^2+h^4)$.

Теорема 4. Разностная схема (20)–(21) является безусловно устойчивой и для ее решения справедлива априорная оценка (19).

В параграфе 1.3 рассмотрена первая краевая задача для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти и переменными коэффициентами

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\partial_{0t})\,u=\mathcal{L}u+f(x,t),\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T, \quad (22)$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad 0\le t\le T,\quad u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le 1, \quad (23)$$

где

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\partial_{0t})\,u=\sum_{r=0}^{m}\partial_{0t}^{\alpha_r,\lambda_r(t)}\,u(x,t),$$

$0<\alpha_m<\alpha_{m-1}<\ldots<\alpha_0<1$, $\lambda_r(t)>0$, $\lambda_r'(t)\le 0$ для всех $t\in[0,T]$ и $r=0,1,\ldots,m$; $0<c_1\le k(x,t)\le c_2$, $q(x,t)\ge 0$ для всех $(x,t)\in\bar{Q}_T$. Дробную производную дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти аппроксимируем следующим дискретным аналогом:

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})\,v=\sum_{r=0}^{m}\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha_r,\lambda_r(t)}\,v,$$

где

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha_r,\lambda_r(t)}v=\sum_{s=0}^{j}c_{j-s}^{(r)}\left(v(t_{s+1})-v(t_s)\right), \quad (24)$$

$$c_l^{(r)}=\frac{\tau^{-\alpha_r}}{\Gamma(2-\alpha_r)}\left(\lambda_r^{l+1/2}a_l^{(r)}+(\lambda_r^l-\lambda_r^{l+1})b_l^{(r)}\right),\quad l\ge 0.$$

$$a_l^{(r)}=(l+1)^{1-\alpha_r}-l^{1-\alpha_r},\quad \lambda_r^l=\lambda_r(t_l),$$

$$b_l^{(r)} = \frac{1}{2-\alpha_r}\left[(l+1)^{2-\alpha_r} - l^{2-\alpha_r}\right] - \frac{1}{2}\left[(l+1)^{1-\alpha_r} + l^{1-\alpha_r}\right], \quad l \geq 1.$$

Рассмотрим следующую разностную схему

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})y_i = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^{j+1}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad j = 0,1,\ldots,M-1, \tag{25}$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{26}$$

Если решение задачи (22)–(23) $u(x,t) \in \mathcal{C}_{x,t}^{4,2}$, тогда порядок аппроксимации разностной схемы (25)–(26) равен $\mathcal{O}(h^2 + \tau^{2-\alpha_0})$.

Теорема 5. Разностная схема (25)–(26) безусловно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка:

$$\left\|y^{j+1}\right\|_0^2 \leq \left\|y^0\right\|_0^2 + \frac{1}{4c_1\sum_{r=0}^{m}\frac{\lambda_r(T)}{\Gamma(1-\alpha_r)T^{\alpha_r}}}\max_{0\leq j\leq M}\left\|\varphi^j\right\|_0^2. \tag{27}$$

Для дифференциальной задачи (22)–(23), в случае не зависящих от пространственной переменной коэффициентов $k = k(t)$ и $q = q(t)$, построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации:

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})\mathcal{H}_h y_i = a^{j+1}y_{\bar{x}x,i}^{j+1} - d^{j+1}\mathcal{H}_h y_i^{j+1} + \mathcal{H}_h\varphi_i^{j+1}, \tag{28}$$

$$i = 1,\ldots,N-1, \quad j = 0,1,\ldots,M-1,$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{29}$$

Разностная схема (28)–(29) имеет порядок аппроксимации $\mathcal{O}(\tau^{2-\alpha_0} + h^4)$, если $u \in \mathcal{C}_{x,t}^{6,2}$.

Теорема 6. Разностная схема (28)–(29) безусловно устойчива и для ее решения справедлива следующая априорная оценка:

$$\left\|\mathcal{H}_h y^{j+1}\right\|_0^2 \leq \left\|\mathcal{H}_h y^0\right\|_0^2 + \frac{1}{8c_1\sum_{r=0}^{m}\frac{\lambda_r(T)}{\Gamma(1-\alpha_r)T^{\alpha_r}}}\max_{0\leq j\leq M}\left\|\mathcal{H}_h\varphi^j\right\|_0^2 \tag{30}$$

Проведены тестовые расчеты для предложенных разностных схем.

Вторая глава посвящена исследованию задач для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка по времени с обобщенными функциями памяти.

В параграфе 2.1 рассмотрена задача для ОДУ дробного порядка

$$\partial_{0t}^{\alpha+1}u(t) + \varkappa u(t) = g(t), \tag{31}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \tag{32}$$

Здесь $\varkappa$ — положительная константа, $0 < \alpha < 1$ и $0 < t \leq T$. Производная Капуто определяется следующим образом:

$$\partial_{0t}^{\alpha+1}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\eta)^{-\alpha}u''(\eta)d\eta, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{33}$$

Применяя оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\alpha}u(t)$, к обеим сторонам (31), приходим к

$$\frac{du}{dt} + \varkappa\mathcal{D}_{0t}^{-\alpha}u = f(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{34}$$

где $f(t) = \mathcal{D}_{0t}^{-\alpha} g(t) + u_1$, а оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля определяется как

$$D_{0t}^{-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} u(\xi) d\xi.$$

Исследована более общая форма уравнения (34) следующего вида

$$\frac{du}{dt} + \varkappa \mathcal{D}_{0t}^{-\alpha,\lambda(t)} u = f(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{35}$$

$$u(0) = u_0. \tag{36}$$

где

$$\mathcal{D}_{0t}^{-\alpha,\lambda(t)} u(x,t) = \int\limits_0^t \mathcal{K}_\lambda^{(\alpha)}(t-\eta) u(x,\eta) d\eta, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{37}$$

является обобщенным дробным интегралом порядка α, в смысле Римана-Лиувилля, с весовой функцией $\lambda(t)$, в котором ядро обозначается через $\mathcal{K}_\lambda^{(\alpha)}(t) = \lambda(t) t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, $t > 0$ и для всех $t \in [0,T]$ весовая функция $\lambda(t)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\lambda(t) \in C^2[0,T], \quad \lambda(t) > 0, \quad \lambda'(t) \leq 0, \quad \lambda''(t) \geq 0. \tag{38}$$

Разностный аналог второго порядка аппроксимации для дробного интеграла Римана-Лиувилля с обобщенной функцией памяти имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}_{0t_{j+1}}^{-\alpha,\lambda(t)} v(t) \approx \tau^\alpha \left[a_0 v^{j+1} + \sum_{s=1}^{j} (a_{j-s+1} + b_{j-s}) v^s + b_j v^0 \right] = \Delta_{0t_{j+1}}^{-\alpha,\lambda(t)} v, \tag{39}$$

где

$$a_s = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \lambda(t_s + \xi\tau)(s+\xi)^{\alpha-1}(1-\xi) d\xi,$$

$$b_s = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \lambda(t_s + \xi\tau)(s+\xi)^{\alpha-1} \xi d\xi.$$

Теорема 7. Решение $u(t)$ задачи (35)–(36) удовлетворяет следующей априорной оценке

$$u^2(t) \leq K_1 \left(u_0^2 + \int\limits_0^t f^2(s) ds \right), \quad K_1 = \max\{2, 4T\}. \tag{40}$$

Применяя предложенную формулу численного интегрирования, приходим к следующей разностной задаче

$$\frac{3y^{j+1} - 4y^j + y^{j-1}}{2\tau} + \varkappa \Delta_{0t_{j+1}}^{-\alpha,\lambda(t)} y = f(t_{j+1}), \tag{41}$$

$$y^0 = u_0. \tag{42}$$

На начальном временном шаге t_1, оцениваем значение y^1 используя теорему Тейлора:

$$y^1 = u_0 + \tau u_1 + \mathcal{O}\left(\tau^2\right). \tag{43}$$

В параграфе 2.2 рассмотрена начально-краевая задача для диффузионно-волнового уравнения в частных производных

$$\partial_{0t}^{\alpha+1} u = \mathcal{L}u + g(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{44}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{45}$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{46}$$

Применяя ту же методологию, что и для ОДУ переходим к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D}_{0t}^{-\alpha} \mathcal{L}u + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \tag{47}$$

где $f(x,t) = \mathcal{D}_{0t}^{-\alpha} g(x,t) + u_1(x)$. Рассмотрим более общую форму уравнения (47):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D}_{0t}^{-\alpha,\lambda(t)} \mathcal{L}u + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \tag{48}$$

с такими же граничными условиями, что и в (46) и начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{49}$$

Построена разностная схема с порядком аппроксимации $\mathcal{O}\left(h^2 + \tau^2\right)$ для обобщенной задачи (48), (49), (46).

$$\frac{3y_i^{j+1} - 4y_i^j + y_i^{j-1}}{2\tau} = \tilde{\Delta}_{0t_{j+1}}^{-\alpha,\lambda(t)} \Lambda y_i + f(x_i,t_{j+1}), \tag{50}$$
$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_i^1 = u_0(x_i) + \tau u_1(x_i), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{51}$$
$$y_0^j = 0, \quad y_N^j = 0, \quad j = 0, \ldots, M, \tag{52}$$

где

$$\tilde{\Delta}_{0t_{j+1}}^{-\alpha,\lambda(t)} y = \tau^\alpha \left(\sum_{s=0}^{j} d_{j-s} y^{s+1} + d_{j+1} y^0 \right), \tag{53}$$

а коэффициенты

$$d_0 = a_0, \qquad d_s = (a_s + b_{s-1}),\ s = 1,2,\ldots,j, \qquad d_{j+1} = b_j. \tag{54}$$

Теорема 8. Разностная схема (50)–(52) безусловно устойчива и существует τ^* такое, что для $\tau \leq \tau^*$ справедлива следующая априорная оценка

$$\|e^{j+1}\|_0^2 \leq K_3 \left(\sum_{s=1}^{j} \|R^{s+1}\|_0^2 \tau + \|\mu\|_0^2 + \tau^{1+\alpha} \|\mu\|_1^2 \right), \tag{55}$$

где $\|e\|_1^2 = -\left(e,\Lambda e\right) = \left(k,e_{\bar{x}}^2\right] + \left(q,e^2\right)$.

Построена разностная схема второго порядка аппроксимации для обобщенного уравнения (48) с нелинейной правой частью и запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D}_{0t}^{-\alpha,\lambda(t)}\mathcal{L}u + f\left(x,t,u(x,t),u(x,t-s)\right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{56}$$

где $s > 0$ — параметр времени запаздывания. Решение уравнения (56) удовлетворяет тем же граничным условиям, что и в (46) и начальным условиям

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad -s \le t \le 0. \tag{57}$$

Рассмотрим равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j | t_j = j\tau, j = -M_s, -M_s+1, \ldots, 0, 1, \ldots, M\}$ с шагом $\tau = s/M_s$, где M_s — положительное целое число и $M = \lceil T/\tau \rceil$.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, применяя к уравнению (56) дискретизации как по пространству, так и по времени приходим к следующему уравнению

$$\frac{3u_i^{j+1} - 4u_i^j + u_i^{j-1}}{2\tau} = \tilde{\Delta}_{0t_{j+1}}^{-\alpha,\lambda(t)}\Lambda u_i + f(x_i,t_{j+1},u_i^{j+1},u_i^{j+1-M_s}) + R^{j+1}, \tag{58}$$

где $u_i^j = u(x_i,t_j)$, R^{j+1} — погрешность аппроксимации. Воспользуемся кусочной экстраполяцией второго порядка для аппроксимации u^{j+1} в нелинейной функции $f\left(x,t_{j+1},u^{j+1},u^{j+1-M_s}\right)$, заданную следующей формулой

$$u^{j+1} = 2u^j - u^{j-1} + \mathcal{O}(\tau^2). \tag{59}$$

Из (58) и аппроксимации (59) получим

$$\frac{3u_i^{j+1} - 4u_i^j + u_i^{j-1}}{2\tau} = \tilde{\Delta}_{0t_{j+1}}^{-\alpha,\lambda(t)}\Lambda u_i + f(x_i,t_{j+1},2u_i^j - u_i^{j-1},u_i^{j+1-M_s}) + R^{j+1}. \tag{60}$$

Если решение дифференциальной задачи (56), (57), (46) удовлетворяет условиям гладкости $u(x,t) \in \mathcal{C}_{x,t}^{4,2}\left(\bar{Q}_T\right)$, тогда погрешность аппроксимации равна $\mathcal{O}\left(h^2 + \tau^2\right)$. Таким образом, получаем разностную схему второго порядка

$$\frac{3y_i^{j+1} - 4y_i^j + y_i^{j-1}}{2\tau} = \tilde{\Delta}_{0t_{j+1}}^{-\alpha,\lambda(t)}\Lambda y_i + f(x_i,t_{j+1},2y_i^j - y_i^{j-1},y_i^{j+1-M_s}), \tag{61}$$

$$\begin{aligned} y_i^j &= u_0(x_i,t_j), \quad 0 \le i \le N, \quad -M_s \le j \le 0, \\ u_0^j &= 0, \quad u_1^j = 0, \quad 0 \le j \le M. \end{aligned} \tag{62}$$

Теорема 9. Предположим, что правая часть f в уравнении (56) удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x,t,v_1,w_1) - f(x,t,v_2,w_2)| \le L_1 |v_1 - v_2| + L_2 |w_1 - w_2|, \tag{63}$$

где L_1 и L_2 — положительные константы Липшица. Тогда, разностная схема (61)–(62) имеет единственное решение y^j, $j = 1, 2, ..., M$, удовлетворяющее следующей априорной оценке

$$\left\|e^{j+1}\right\|_0 \le K_4\left(h^2 + \tau^2\right),$$

где $e_i^j = y_i^j - u_i^j$.

На основе разработанных разностных схем проведены численные расчеты для тестовых задач.

Третья глава посвящена построению и исследованию локально-одномерных разностных схем для начально-краевых задач для параболических уравнений с интегральным источником по дополнительному параметру в многомерной области.

В параграфе 3.1 рассмотрена задача для параболического уравнения с интегральным источником по дополнительному параметру и краевыми условиями первого рода.

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$, основанием которого служит прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1,x_2,...,x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1,2,...,p\}$ с границей Γ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u + f(x,m,t), (x,t) \in Q_T, \tag{64}$$

$$u\mid_\Gamma = \nu, \quad u(x,m,0) = u_0(x,m), \tag{65}$$

где

$$\mathcal{L}u = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathcal{L}_\alpha u, \quad \mathcal{L}_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{p}q(x,m,t)u(x,m,t)$$
$$+ \frac{1}{p}\int\limits_0^{m_1} Q(m,m')P(m')u(x,m',t)dm', \tag{66}$$

Уравнение (64) возникает при описании микрофизических процессов дробления и замерзания в конвектиных облаках с учетом изменения функции распределения по массам капель[18]. Предположим, что задача (64)–(65) имеет единственное достаточно гладкое решение. При оценке порядка аппроксимации будем предполагать, что

$$\begin{gathered} k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T),\ r_\alpha(x,t),q(x,m,t), f(x,m,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T), \\ 0 < c_0 \leq k_\alpha \leq c_1, \quad \mid r_\alpha \mid, \mid q \mid \leq c_2, \quad \mid Q(m,m') \mid, \quad \mid P(m') \mid \leq c_3, \end{gathered} \tag{67}$$

где $C^{n_1,n_2}(\bar{Q}_T)$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка n_1 по x и n_2 по t в замкнутой области $\bar{Q}_T$.

На отрезке $[0,T]$ введена равномерная сетка $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0,1,...,j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый интервал (t_j,t_{j+1}) разбит на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau, \alpha = 1,2,...,p$ и обозначен полуинтервал $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}},\ t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$. Пространственная сетка равномерна по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha, \alpha = 1,2,...,p$: $\bar{\omega}_h = \prod\limits_{\alpha=1}^{p} \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0,1,...,N_\alpha, \alpha = 1,2,...,p\right\}$. На каждом полуинтервале $\Delta_\alpha,\ \alpha = 1,2,...,p$, будем последовательно решать задачи

$$\Re_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - \mathcal{L}_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \tag{68}$$

$$v_{(\alpha)} = \nu_{-\alpha},\ x_\alpha = 0, \qquad v_{(\alpha)} = \nu_{+\alpha},\ x_\alpha = l_\alpha,$$

[18] *Ашабоков, Б. А.* Конвективнвые облака:численные модели и результаты моделировния в естественных условиях и при активном воздействии / Б. А. Ашабоков, А. В. Шаповалов. Нальчик : издательство КБНЦ РАН, 2008.

со следующими начальными условиями

$$\begin{cases} v_{(1)}(x,m,0) = u_0(x,m), \quad v_{(1)}(x,m,t_j) = v_{(p)}(x,m,t_j), \quad j = 1,2,\ldots \\ v_{(\alpha)}\left(x,m,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{(\alpha-1)}\left(x,m,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \alpha = 2,3,...,p. \end{cases} \tag{69}$$

Методом суммарной аппроксимации построена локально-одномерная разностная схема:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1,2,...,p, \tag{70}$$

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \varkappa_\alpha \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{1}{p} d y^{j+\frac{\alpha}{p}}$$
$$+ \frac{1}{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m,m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m_{i_m},t) \hbar_m,$$

где $\quad a_\alpha = k_\alpha\left(x^{(-0.5h_\alpha)},\bar{t}\right), \quad x^{(-0.5h_\alpha)} = (x_1,x_2,...,x_{\alpha-1},x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1},...,x_p),$

$$\bar{t} = t^{j+\frac{1}{2}}, \quad \varkappa = \frac{1}{1+R_\alpha}, \quad R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha |r_\alpha|}{k_\alpha},$$
$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad r_\alpha^+ = 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0, \quad r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0,$$
$$b_\alpha^+ = \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}, \quad b_\alpha^- = \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}, \quad a_i = k_{i-\frac{1}{2}}(\bar{t}), \quad \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = f_\alpha(x,m,t_{j+0.5}), \quad d = q,$$

$$\hbar_m = \begin{cases} h_m, & i_m = 1,2,...,N_m - 1, \\ h_m/2, & i_m = 0,N_m. \end{cases}$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{\gamma_{h,\alpha}} = \nu_\alpha, \quad y(x,m,0) = u_0(x,m), \quad \alpha = 1,2,...,p, \tag{71}$$

где $\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных узлов по направлению x_α.

Теорема 10. Локально-одномерная схема (70)–(71) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (70)–(71) при любых h_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$ и $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка

$$\left\|\rho y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\rho y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha} y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}$$
$$\leq M_5(T)\Bigg(\sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\rho \varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \frac{\rho}{\rho_\alpha} \Bigg(\left\|\nu_{-\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}$$
$$+ \left\|\nu_{+\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}\Bigg) H/h_\alpha + \left\|\rho y^0\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}\Bigg). \tag{72}$$

где $\rho_\alpha = \sqrt{x_\alpha(l_\alpha - x_\alpha)}, \quad \rho = \prod_{\alpha=1}^{p} \rho_\alpha.$

Теорема 11. Пусть задача (64)–(65) имеет единственное непрерывное в $\bar{Q}_T$ решение $u(x,m,t)$ и существуют непрерывные в Q_T производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \quad \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (70)–(71) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что

$$\left\| y^{j+1} - u^{j+1} \right\|_1 \leq M(|h|^2 + \tau), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2,$$

$$\left\| y^{j+1} \right\|_1^2 = \left\| \rho y^{j+1} \right\|_{L_2(\omega_h,m)}^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| \rho y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right] \Big\|_{L_2(\omega_h,m)}^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| \frac{\rho}{\rho_\alpha} y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h,m)}^2.$$

В параграфе 3.2 рассмотрена задача для системы параболических уравнений с нелинейными интегральными источниками по дополнительному параметру и краевыми условиями первого рода

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{L}w + f(x,m,t), (x,t) \in Q_T, \tag{73}$$

$$w\,|_\Gamma = \mu, \quad w(x,m,0) = w_0(x,m), \tag{74}$$

где

$$\mathcal{L}w = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathcal{L}_\alpha w, \quad \mathcal{L}_\alpha w = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}$$
$$- \frac{1}{p} q(x,m,t) w(x,m,t) - \frac{1}{p} w(x,m,t) \int_0^{m_1} \beta_2(m,m') u(x,m',t) dm'$$
$$+ \frac{1}{p} \int_0^{m_1} \beta_2(m,m-m') w(x,m-m',t) u(x,m',t) dm'. \tag{75}$$

Функция $u(x,m,t)$ является решением задачи (64)–(65) и ее значения используются в уравнении (73). Тем самым, имеем систему параболических уравнений с нелинейным интегральным источником. Уравнение (73) возникает при описании микрофизического процесса аккреции с учетом изменения функции распределения по массам ледяных частиц.

При оценке порядка аппроксимации будем предполагать выполнение условий (67) и условий

$$|u|, |\beta_2| \leq c_3.$$

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, будем последовательно решать задачи (68) с условиями

$$v_{(\alpha)} = \mu_{-\alpha}, \; x_\alpha = 0, \qquad v_{(\alpha)} = \mu_{+\alpha}, \; x_\alpha = l_\alpha,$$

полагая при этом (69). Аппроксимируем каждое уравнение (68) номера α двухслойной схемой на полуинтервале Δ_α, тогда получим цепочку p одномерных разностных схем:

$$\frac{\zeta^{j+\frac{\alpha}{p}} - \zeta^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha \zeta^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \tag{76}$$

$$\Lambda_\alpha \zeta^{j+\frac{\alpha}{p}} = \varkappa_\alpha \left(a_\alpha \zeta_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} \zeta_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha \zeta_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{1}{p} d y^{j+\frac{\alpha}{p}}$$

$$- \frac{1}{p} \zeta^{j+\frac{\alpha}{p}} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_2(m,m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m_{i_m},t) \hbar_m$$

$$+ \frac{1}{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_2(m,m-m_{i_m}) \zeta^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m-m_{i_m},t) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m_{i_m},t) \hbar_m,$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}} \,|_{\gamma_{h,\alpha}} = \nu_\alpha, \quad \zeta^{j+\frac{\alpha}{p}} \,|_{\gamma_{h,\alpha}} = \mu_\alpha,$$
$$y(x,m,0) = u_0(x,m), \quad \zeta(x,m,0) = w_0(x,m), \quad \alpha = 1,2,\ldots,p. \tag{77}$$

Теорема 12. Локально-одномерная схема (76)–(77) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (76)–(77) при любых $h_\alpha,\ \alpha = 1,2,\ldots,p$ и $\tau \le \tau_0$ справедлива оценка

$$\left\|\rho\zeta^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\rho\zeta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha}\zeta^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}$$
$$\le M_5(T)\left(\sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\rho\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \ne i_\alpha} \frac{\rho}{\rho_\alpha}\left(\left\|\mu_{-\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left\|\mu_{+\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}\right) H/h_\alpha + \left\|\rho\zeta^0\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}\right). \tag{78}$$

Теорема 13. Пусть задача (73)–(74) имеет единственное непрерывное в $\bar{Q}_T$ решение $w(x,m,t)$ и существуют непрерывные в $\bar{Q}_T$ производные

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \ \frac{\partial^4 w}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \ \frac{\partial^3 w}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \quad \alpha \ne \beta.$$

Тогда локально-одномерная схема (76)–(77) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что

$$\left\|\zeta^{j+1} - w^{j+1}\right\|_1 \le M(|h|^2 + \tau), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2, \quad \left\|\zeta^{j+1}\right\|_1^2 = \left\|\rho\zeta^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}$$
$$+ \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\rho\zeta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha}\zeta^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}.$$

В параграфе 3.3 рассмотрена третья краевая задача для параболического уравнения с интегральным источником по дополнительному параметру

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u + f(x,m,t), (x,t) \in Q_T, \tag{79}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)\, u(x,m,t) - \nu_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)\, u(x,m,t) - \nu_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{80}$$

$$u(x,m,0) = u_0(x,m), \ x \in \bar{G}, \tag{81}$$

Оператор $\mathcal{L}u = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \mathcal{L}_\alpha u$ определен в (66). При оценке порядка аппроксимации будем предполагать выполнение условий (67). На каждом полуинтервале $\Delta_\alpha, \alpha = 1,2,...,p$ будем последовательно решать уравнения (68) с граничными условиями

$$\begin{cases} k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} v_{(\alpha)} - \nu_{-\alpha}(x,t), \; x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} v_{(\alpha)} - \nu_{+\alpha}(x,t), \; x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{82}$$

и начальными условиями (69). Дифференциальной задаче (79)-(81) ставится в соответствие локально-одномерная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственным переменным

$$\begin{gathered} y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \bar{\Lambda}_\alpha\, y^{(\alpha)} + \bar{\Phi}_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1,2,...,p, \; x \in \bar{\omega}_{h_\alpha} \\ y(x,m,0) = u_0(x,m), \end{gathered} \tag{83}$$

где

$$\bar{\Lambda}_\alpha\, y^{(\alpha)} = \begin{cases} \Lambda_\alpha y^{(\alpha)} = \varkappa_\alpha \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\right)_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \dfrac{1}{p} d y^{j+\frac{\alpha}{p}} + I, \\ \hfill x \in \omega_h, \\ \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} = \dfrac{\bar{a}_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0} - \bar{\beta}_{-\alpha}\, y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + I, \; x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} = -\dfrac{\bar{a}_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \bar{\beta}_{+\alpha}\, y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + I, \; x_\alpha = l_\alpha, \end{cases}$$

где $I = \frac{1}{p} \sum\limits_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m,m'_{i_m}) P(m'_{i_m}) y(x,m'_{i_m},t) \hbar_m$,

$$\bar{\Phi}_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, \; x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \bar{\nu}_{-\alpha}, \; x_\alpha = 0, \\ \bar{\nu}_{+\alpha}, \; x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

Задача для погрешности $z^{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ имеет вид:

$$\begin{gathered} z_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \bar{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \\ z(x,0) = 0, \end{gathered}$$

$$\bar{\Lambda}_\alpha = \begin{cases} \Lambda_\alpha, \; x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_{-\alpha}, \; x_\alpha = 0, \\ \Lambda_{+\alpha}, \; x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \qquad \Psi_\alpha = \begin{cases} \Psi_\alpha, \; x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Psi_{-\alpha}, \; x_\alpha = 0, \\ \Psi_{+\alpha}, \; x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{gathered} \Psi_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*, \quad \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1), \quad \Psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau), \\ \Psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \frac{\Psi_{-\alpha}^*}{0.5h_\alpha}, \quad \Psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} + \frac{\Psi_\alpha^*}{0.5h_\alpha}, \\ \Psi_{\pm\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \overset{\circ}{\Psi}_{\pm\alpha} = O(1), \quad \sum_{\alpha=0}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_{\pm\alpha} = 0. \end{gathered}$$

Теорема 14. Локально-одномерная схема (83) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (83) при любых h и $\tau \le \tau_0$ справедлива оценка

$$\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|\left[y^{j+1}\right]\right|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\right|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m \le M(t) \Bigg\{ \sum_{j'=0}^{j}$$
$$\times \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\nu_{-\alpha}^2 + \nu_{+\alpha}^2) H/\hbar_\alpha$$
$$+ \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|\left[y^0\right]\right|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m \Bigg\}. \tag{84}$$

Теорема 15. Пусть задача (79)–(81) имеет единственное непрерывное в $\bar{Q}_T$ решение $u(x,m,t)$ и существуют непрерывные в Q_T производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad 1 \le \alpha,\beta \le p,$$

тогда локально-одномерная схема (83) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что

$$\left\|y^{j+1} - u^{j+1}\right\|_1 \le M(|h|^2 + \tau), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2.$$

$$\left\|y^{j+1}\right\|_1^2 = \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|\left[y^{j+1}\right]\right|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\right|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m.$$

На базе предложенных локально-одномерных разностных схем проведены численные расчеты для тестовых задач.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Построены и исследованы разностные схемы второго и четвертого порядков аппроксимации по пространству и второго порядка по времени для уравнения диффузии и уравнения Аллера дробных по времени порядков с обобщенными функциями памяти. Построена разностная схема с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau^{2-\alpha_0})$, где $0 < \alpha_m < \alpha_{m-1} < \ldots < \alpha_0 < 1$ для уравнения дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти.
2. Исследованы диффузионно-волновые уравнения дробного порядка по времени с производной Капуто порядка в диапазоне от единицы до двух. Рассмотрена задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с обобщенной функцией памяти, а также задача для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка по времени. Для дифференциальной задачи в частных производных построена разностная схема второго порядка аппроксимации по h и τ. Построена разностная схема второго порядка аппроксимации для решения первой краевой задачи для обобщенного нелинейного диффузионно-волнового уравнения с запаздыванием по времени.
3. Построены и исследованы локально-одномерные разностные схемы для параболических уравнений в p-мерном параллелепипеде с интегральными источниками с краевыми условиями первого и третьего рода. В уравнения включаются нелокальные (нелинейные) интегральные источники по дополнительному параметру. Доказана устойчивость и сходимость построенных разностных схем.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ, проиндексированных в международных базах Scopus и Web of Science

1. *Хибиев*, *А. Х.* Устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти / А. Х. Хибиев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. — 2019. — Т. 23, № 3. — С. 582—597. — (Scopus, Web of Science).
2. *Ашабоков*, *Б. А.* Метод суммарной аппроксимации для уравнения, описывающего процессы дробления и замерзания капель в конвективных облаках / Б. А. Ашабоков, А. Х. Хибиев, М. Х. Шхануков-Лафишев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 9. — С. 1566—1575. — (Scopus, Web of Science).
3. *Алиханов*, *А. А.* Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для обобщенного уравнения Аллера дробного порядка / А. А. Алиханов, А. М. Апеков, А. Х. Хибиев // Владикавказский математический журнал. — 2021. — Т. 23, № 3. — С. 5—15. — (Scopus).
4. *Ашабоков*, *Б. А.* Локально-одномерная схема для уравнения функций распределения по массам ледяных частиц с учетом взаимодействия капель и кристаллов / Б. А. Ашабоков, А. Х. Хибиев, М. Х. Шхануков-Лафишев // Владикавказский математический журнал. — 2023. — Т. 25, № 2. — С. 14—24. — (Scopus).
5. *Khibiev*, *A. K.* A second-order difference scheme for generalized time-fractional diffusion equation with smooth solutions / A. K. Khibiev, A. A. Alikhanov, C. Huang // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2023. — (Scopus, Web of Science).
6. A second-order difference scheme for the nonlinear time-fractional diffusion-wave equation with generalized memory kernel in the presence of time delay / A. A. Alikhanov [et al.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2024. — Vol. 438. — P. 115515. — (Scopus, Web of Science).

В прочих изданиях

7. *Ашабоков*, *Б. А.* Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида, описывающего микрофизические процессы в конвективных облаках / Б. А. Ашабоков, А. Х. Хибиев, М. Х. Шхануков-Лафишев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2021. — Т. 21, № 4. — С. 45—55.
8. Разностная схема второго порядка для решения класса дифференциальных уравнений дробного порядка / А. Х. Хибиев [и др.] // Computational Mathematics and Information Technologies. — 2023. — Т. 7, № 2. — С. 14—24.

В сборниках трудов конференций

9. *Хибиев*, *А. Х.* Разностные методы решения третьей краевой задачи для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка / А. Х. Хибиев // Материалы III международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». — 2019.
10. Метод суммарной аппроксимации для параболического уравнения общего вида с учетом коагуляционных процессов в облаке / Б. Ашабоков [и др.] // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Том 1. — 2020.

11. *Хибиев, А. Х.* Разностная схема второго порядка аппроксимации для обобщенного волнового уравнения второго порядка / А. Х. Хибиев // V международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования". — 2022.
12. *Хибиев, А. Х.* Устойчивость и сходимость разностных схем второго порядка аппроксимации для обобщенного нелинейного диффузионно-волнового уравнения с запаздыванием / А. Х. Хибиев // VII Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». — 2023.
13. *Khibiev, A. K.* A difference analog of a higher approximation order for the Caputo fractional derivative with generalized memory kernel and its application / A. K. Khibiev // Numerical solution of fractional differential equations and applications. — 2020.
14. *Khibiev, A. K.* A high order difference analog of the Caputo fractional derivative with generalized memory kernel and its application / A. K. Khibiev // Intelligent information technology and mathematical modeling. — 2021.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

15. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ*. Программа для реализации алгоритма решения задачи Дирихле для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти / А. Х. Хибиев ; К. РАН. — № 2020614413 ; заявл. 23.03.2020 ; опубл. 08.04.2020, 2020613243 (Россия).
16. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ*. Программа для реализации алгоритма повышенного порядка точности для решения обобщенного уравнения диффузии дробного порядка с произвольной функцией памяти / А. Х. Хибиев ; К. РАН. — № 2021665510 ; заявл. 27.09.2021 ; опубл. 27.09.2021, 2021664883 (Россия).
17. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ*. Программа для реализации алгоритма повышенного порядка точности для решения обобщенного волнового уравнения дробного порядка / А. Хибиев ; СКФУ. — № 2022662353 ; заявл. 16.06.2022 ; опубл. 01.07.2022, 2022661287 (Россия).
18. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ*. Программа для реализации алгоритма повышенного порядка точности на неравномерной сетке для решения уравнения диффузии дробного порядка с обобщенной функцией памяти и переменными коэффициентами / А. Хибиев ; СКФУ. — № 2023661924 ; заявл. 29.05.2023 ; опубл. 05.06.2023, 2023660837 (Россия).

ХИБИЕВ АСЛАНБЕК ХИЗИРОВИЧ

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛОКАЛЬНЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № _____________

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография ____