Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого
Президента Росии Б.Н. Ельцина»
Институт естественных наук и математики
Кафедра математического анализа

На правах рукописи

УДК 517.5

Паюченко Никита Славич

НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВТОРУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Специальность 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент П. Ю. Глазырина

Екатеринбург

2023

Оглавление

Список обозначений

$\mathbb{T}$ — период, реализованный как отрезок $[0,1]$ с отождествленными концами

G — вещественная ось, отрезок или период $\mathbb{T}$

H — измеримое подмножество $\mathbb{R}$

$y_+(x) = \max\{y(x), 0\}$ — положительная срезка функции y

$y_-(x) = \max\{-y(x), 0\} = (-y)_+(x)$

$y_{\alpha,\beta} = \alpha y_+ + \beta y_-$ — несимметричная срезка

$y_\beta = y_{1,\beta}$

$\|y\|_{r,H} = \left(\int_H |y(x)|^r dx\right)^{1/r}, \ 0 < r < \infty$

$\|y\|_{\infty,H} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in H} |y(x)|$

$\|y\|_r = \|y\|_{r,\mathbb{R}}, \ 0 < r \leqslant \infty$

$L_r(G)$, $0 < r \leqslant \infty$, — пространство всех измеримых функций $y\colon G \to \mathbb{R}$, для которых $\|y\|_{r,G} < \infty$

$L^n_{r,p}(G)$ — множество функций $y \in L_r(G)$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $y^{(n-1)}$ и $y^{(n)} \in L_p(G)$

$L^n_{r,p,+}(G)$ — множество функций $y \in L_r(G)$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $y^{(n-1)}$ и $y^{(n)}_+ \in L_p(G)$

$\mathcal{P}$ — множество кусочно-полиномиальных, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций f со свойством $f'(a) = f'(b) = 0$

$\mathcal{U}$ — множество функций $u(x)$, $x \in [0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную, и таких, что для некоторого $s \in [0,1]$ $u''(x) \geqslant 0$ п. в. на $[0,s]$, $u''(x) \leqslant 0$ п. в. на $[s,1]$, $u'(0) = u'(1) = 0$, функция u обращается в 0 в некоторой точке промежутка $[0,1]$

$\mathcal{U}_+$ — множество функций $u(x)$, $x \in [0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную, и таких, что $u''(x) \geqslant 0$ п. в. на $[0,1]$, $u'(0) = 0$

$\mathcal{U}_+(\gamma)$ — множество функций $u \in \mathcal{U}_+$, $x \in [0,1]$ таких, что $u(\gamma) = 0$

$V_G(y)$ — вариация функции y на множестве G,

$$V_G(y) = \sup \sum_{k=1}^{m} |y(x_{k+1}) - y(x_k)|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным наборам $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1}$ точек из G

$V_G^+(y)$ — положительная вариация y на множестве G,

$$V_G^+(y) = \sup \sum_{k=1}^{m} (y(x_{k+1}) - y(x_k))_+,$$

где верхняя грань берется по всем конечным наборам $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1}$ точек из G

$V_G^-(y) = V_G^+(-y)$

$V_G^\beta(y) = V_G^+(y) + \beta V_G^-(y)$

$L_{r,V}^n(\mathbb{R})$ — множество функций $y \in L_r(\mathbb{R})$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $y^{(n-2)}$ и $V_{\mathbb{R}}(y^{(n-1)})$ конечна

$K_\beta^{k,n}(q,r,p,G)$, где $G = \mathbb{R}$ или $\mathbb{T}$, — точная константа в неравенстве

$$\|y^{(k)}\|_{q,G} \leqslant K_\beta^{k,n}(q,r,p,G) \|y\|_{r,G}^{1-k/n} \, \|y_\beta^{(n)}\|_{p,G}^{k/n}, \quad y \in L_{r,p}^n(G)$$

$K_+^{k,n}(q,r,p,G)$, где $G = \mathbb{R}$ или $\mathbb{T}$, — точная константа в неравенстве

$$\|y^{(k)}\|_{q,G} \leqslant K_+^{k,n}(q,r,p,G) \|y\|_{r,G}^{1-k/n} \, \|y_+^{(n)}\|_{p,G}^{k/n}, \quad y \in L_{r,p,+}^n(G)$$

$K_\beta^{k,n}(q,r,V,\mathbb{R})$ — точная константа в неравенстве

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}} \leqslant K_\beta^{k,n}(q,r,V,\mathbb{R}) \|y\|_{r,\mathbb{R}}^{1-k/n} \, (V_{\mathbb{R}}^\beta(y^{(n-1)}))^{k/n}, \quad y \in L_{r,V}^n(\mathbb{R})$$

$\overline{K}_\beta(q,r,p,[0,1])$ — точная константа в неравенстве

$$\|u'\|_{q,[0,1]} \leqslant \overline{K}_\beta(q,r,p,[0,1]) \|u\|_{r,[0,1]}^{1/2} \, \|u_\beta''\|_{p,[0,1]}^{1/2}, \quad u \in \mathcal{U}$$

$\overline{K}_+(q,r,p,[0,1])$ — точная константа в неравенстве

$$\|u'\|_{q,[0,1]} \leqslant \overline{K}_+(q,r,p,[0,1]) \|u\|_{r,[0,1]}^{1/2} \, \|u''\|_{p,[0,1]}^{1/2}, \quad u \in \mathcal{U}_+$$

$$\Psi_H^\beta(y) = \Psi_H^\beta(y,q,r,p) = \frac{\|y'\|_{q,H}^2}{\|y\|_{r,H}\cdot\|y''_\beta\|_{p,H}}$$

$E_0(y)_{\infty,\mathbb{R}}$ — наилучшее равномерное приближение функции $y \in L_\infty(\mathbb{R})$ константами

Введение

Актуальность темы

1. В диссертации изучаются неравенства Колмогорова для первой и второй производных функции на оси и периоде с несимметричными нормами второй производной.

Для измеримого множества $H \subset \mathbb{R}$ обозначим через $L_r(H)$, $0 < r \leqslant \infty$, пространство всех измеримых функций $y\colon H \to \mathbb{R}$, для которых $\|y\|_{r,H} < \infty$, где

$$\|y\|_{r,H} = \left(\int_H |y(x)|^r dx\right)^{1/r}, \ 0 < r < \infty; \quad \|y\|_{\infty,H} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in H} |y(x)|.$$

Будем также использовать обозначение $\|y\|_r = \|y\|_{r,\mathbb{R}}$ в случае $H = \mathbb{R}$.

Обозначим через $y_+(x) = \max\{y(x), 0\}$ и $y_-(x) = \max\{-y(x), 0\}$ положительные срезки функций y и $-y$ соответственно. Для неотрицательных, не равных одновременно нулю чисел α и β рассмотрим линейную комбинацию

$$y_{\alpha,\beta} = \alpha y_+ + \beta y_-,$$

которую будем называть несимметричной срезкой y.

Мы будем рассматривать срезки производной. Ввиду инвариантности изучаемых в работе величин относительно умножения на константу будет удобно полагать $\alpha = 1$ и использовать обозначение

$$y_\beta^{(n)} = (y^{(n)})_{1,\beta} = y_+^{(n)} + \beta y_-^{(n)},$$

в случае $\beta = 0$ также будем писать $y_+^{(n)} = y_0^{(n)} = (y^{(n)})_{1,0} = (y^{(n)})_+$.

Пусть G — вещественная ось $\mathbb{R}$, отрезок или период $\mathbb{T}$, реализованный как отрезок $[0, 1]$ с отождествленными концами. Обозначим через $L^n_{r,p}(G)$ ($n \in \mathbb{N}$, $0 < r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$) множество вещественнозначных функций $y \in L_r(G)$ таких, что производная y порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна на G и $y^{(n)} \in L_p(G)$. Через $L^n_{r,p,+}(G)$ обозначим множество вещественнозначных функций $y \in L_r(G)$ таких, что производная y порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна на G и $y_+^{(n)} \in L_p(G)$.

В диссертации изучаются неравенства

$$\|y'\|_{q,G} \leqslant K_\beta^{1,2}(q,r,p,G)\|y\|_{r,G}^{1/2}\,\|y''_\beta\|_{p,G}^{1/2}, \quad y \in L_{r,p}^2(G), \quad \beta \in (0,1], \tag{0.1}$$

$$\|y'\|_{q,G} \leqslant K_+^{1,2}(q,r,p,G)\|y\|_{r,G}^{1/2}\,\|y''_+\|_{p,G}^{1/2}, \quad y \in L_{r,p,+}^2(G), \tag{0.2}$$

на оси $G=\mathbb{R}$ и периоде $G=\mathbb{T}$ для показателей q, p и r, которые удовлетворяют ограничениям $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и равенству $1/r+1/p=2/q$.

2. История изучения неравенств, которые оценивают сверху L_q-норму промежуточной производной функции через L_r-норму функции и L_p-норму старшей производной, довольно обширна. Первые точные неравенства на полуоси и оси были получены Э. Ландау [32] в 1913 г. и Ж. Адамаром [28] в 1914 г. (см. также [7, 1.2]):

$$\|y'\|_{\infty,[0,\infty)} \leqslant 2\|y\|_{\infty,[0,\infty)}^{1/2}\,\|y''\|_{[0,\infty)}^{1/2}, \tag{0.3}$$

$$\|y'\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \sqrt{2}\|y\|_{\infty,\mathbb{R}}^{1/2}\,\|y''\|_{\mathbb{R}}^{1/2}. \tag{0.4}$$

Ю.Г. Боссе (Г.Е. Шилов) [10] получил точные неравенства типа (0.4) для производных порядка n в правой части и порядка $0<k<n$ в левой для $n=3,4$ и $n=5$, $k=2$. В 1939 г. А.Н. Колмогоров [16], [17, статья 40] доказал, что для всех натуральных n и $0<k<n$ выполняется точное неравенство

$$\|y^{(k)}\|_\infty \leqslant \frac{\|\varphi_{n-k}\|_\infty}{\|\varphi_n\|_\infty^{1-k/n}}\|y\|_\infty^{1-k/n}\,\|y^{(n)}\|_\infty^{k/n}, \quad y \in L_{\infty,\infty}^n(\mathbb{R}), \tag{0.5}$$

где φ_n — идеальный сплайн Эйлера, т. е. n-ый периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\operatorname{sign}(\sin x)$. Аналоги неравенства (0.5) для других норм (метрик), также называемые неравенствами Колмогорова или Ландау – Колмогорова интенсивно изучаются.

В.Н. Габушин установил критерий существования конечной константы в неравенствах колмогоровского типа на оси и полуоси [13, теорема 1] (см. также [7, теорема 4.1.1]). Чтобы сформулировать критерий для оси, следуя обозначениям работы Габушина, введем числовые функции

$$\boldsymbol{\alpha}(q,r,p,k,n)=\begin{cases}\dfrac{n-k-1/p+1/q}{n-1/p+1/r}, & \text{если } n-1/p+1/r\neq 0;\\ 1-\dfrac{k}{n}, & \text{в остальных случаях;}\end{cases} \tag{0.6}$$

$$\Delta(q,r,p,k,n)=\frac{1}{q}-\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1}{r}-\frac{k}{n}\frac{1}{p}=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{q}-\frac{n-k}{r}-\frac{k}{p}\right).$$

Теорема А (В.Н. Габушин)**.** *Пусть $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ — произвольные действительные числа, k,n $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ — целые числа, $0<p,q,r\leqslant\infty$, $q\neq r$ при $k=0$, $\boldsymbol{\Psi}_p(y^{(n)})$ — один из функционалов: $\|y^{(n)}\|_{p,\mathbb{R}}$, $\|y_+^{(n)}\|_{p,\mathbb{R}}$, $\|y_-^{(n)}\|_{p,\mathbb{R}}$. Тогда для класса функций $y\in L_r(\mathbb{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные $y^{(n-1)}$, неравенство*

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}}\leqslant K\|y\|_{r,\mathbb{R}}^{\boldsymbol{\alpha}}\left(\boldsymbol{\Psi}_p(y^{(n)})\right)^{\boldsymbol{\beta}}$$

с константой K, не зависящей от y, имеет место тогда и только тогда, когда: a) $p\geqslant 1$; б) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(q,r,p,k,n)$, $\boldsymbol{\beta}=1-\boldsymbol{\alpha}$; c) $\Delta(q,r,p,k,n)\leqslant 0$.

Поскольку $\beta|y^{(n)}|\leqslant|y_\beta^{(n)}(x)|$, $\beta\in(0,1]$, то теорема дает и критерий существования конечной константы в неравенстве с несимметричной срезкой старшей производной на оси.

Критерий существования конечной константы в неравенстве на периоде для функций с нулевым средним значением на периоде получен Б.Е. Клоцем [15, теорема 2]. Ниже приведена формулировка теоремы 4.3.1 из [8], в которой ограничение на среднее значание снято.

Теорема В. *Пусть $1\leqslant q,r,p\leqslant\infty$, $\boldsymbol{\alpha}\in(0,1)$, $k,n\in\mathbb{Z}_+$, $k<n$. Для того чтобы для любой функции $y\in L_{r,p}^n(\mathbb{T})$ выполнялось неравенство*

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{T}}\leqslant K\|y\|_{r,\mathbb{T}}^{\boldsymbol{\alpha}}\|y^{(n)}\|_{p,\mathbb{T}}^{1-\boldsymbol{\alpha}},\quad y\in L_{r,p}^n(\mathbb{T}),$$

с константой K, не зависящей от y, необходимо и достаточно, чтобы показатель $\boldsymbol{\alpha}$ удовлетворял условию

$$\boldsymbol{\alpha}\leqslant\boldsymbol{\alpha}_{cr}:=\min\left\{1-\frac{k}{n},\ \frac{n-k-1/p+1/q}{n-1/p+1/r}\right\}.$$

Обозначим через $K^{k,n}(q,r,p,G)$ точную константу в неравенстве

$$\|y^{(k)}\|_{q,G} \leqslant K^{k,n}(q,r,p,G)\|y\|_{r,G}^{\boldsymbol{\alpha}}\|y^{(n)}\|_{p,G}^{1-\boldsymbol{\alpha}}, \quad y \in L^n_{r,p}(G), \tag{0.7}$$

с показателем $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(q,r,p,k,n)$, определенным (0.6), $0 \leqslant k < n$. Подробный обзор результатов в неравенстве (0.7) для оси, полуоси и периода можно найти в монографии [7], комментариях [17, с. 387] и статьях [3], [4]. В работах [22, 35] неравенства Колмогорова рассмотрены с общих позиций теории экстремума.

Значения $K^{k,n}(q,r,p,\mathbb{R})$ в неравенстве (0.7) на оси помимо случая $q = r = p = \infty$ известны в следующих случаях (см. [7, п. 9.2] и приведенную там библиографию):

1) для любых $k, n \in \mathbb{N}$ при $q = r = p = 1$ (Стейн), при $q = r = p = 2$ (Харди, Литтлвуд, Пойа), при $q = \infty$, $r = p = 2$ (Тайков);

2) для $k = 1$, $n = 2$ при $q = 2$, $r \in [1,\infty]$, $p = r/(r-1)$ (Харди, Литтлвуд), при $q = p = \infty$, $r > 0$ (Габушин), при $q = 2r$, $r > 1 - 1/n$, $p = \infty$ (Габушин, Буслаев), при $q \geqslant 2p$, $r = \infty$, $p \in [1,\infty]$ (Арестов), при $q = 2r/(r+1)$, $r \in (1,\infty)$, $p = 1$ (Арестов, Бердышев);

3) для $k = 1, 2$, $n = 3$ при $q = nr/(n-k)$, $r > 1 - 1/n$, $p = \infty$ (Габушин, Буслаев), при $q = r = \infty$, $p \in [1,\infty)$ (Арестов), для $k = 1$, $n = 3$ при $q = \infty$, $r \in [1,\infty]$, $p = 1$ (Магарил-Ильяев);

4) для $n = 1$, $k = 0$ при $q, r \in (0,\infty)$, $q > r$, $p \in [1,\infty]$ (Надь);

5) для $n = 2$, $k = 0$ при $q = p = \infty$, $r > 0$ (Габушин), при $q = \infty$, $r \in [1,\infty]$, $p = 1$ (Магарил-Ильяев);

6) для $k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$ при $q = 2$, $r \in [1,\infty]$, $p = r/(r-1)$ (Соляр);

7) для $n = 4$, $k = 3$ при $q = 4/3$, $r = \infty$, $p = 1$ и для $n = 4$, $k = 3$ или $n = 6$, $k = 4, 5$ при $q = n/(n-k)$, $r = 1$, $p = \infty$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов).

Отметим, что в работе [26] результат В.В. Арестова, В.И. Бердышева [2] для $k = 1$, $n = 2$, $q = 2r/(r+1)$, $r \in (1,\infty)$, $p = 1$ в неравенстве (0.7) на оси распространен на неравенства на периоде для значений $q > 2r/(r+1)$. Идеи [26] позволяют также получить для $q > 2r/(r+1)$ точное неравенство на оси.

Существование экстремальных функций в неравенстве (0.7) исследовали А.П. Буслаев, Г.Г. Магарил-Ильяев и В.М. Тихомиров. В работе [11] доказано, что при $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $1 < p \leqslant \infty$, $\Delta(q,r,p,k,n) < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k < n$ и $G = \mathbb{R}$ или $G = [0,+\infty)$ экстремальная функция в неравенстве (0.7) существует.

В последующей работе [12] А.П. Буслаев при $n = 2$ изучил случаи $q = \infty$ и $\Delta(q,r,p,k,n) = 0$. Обозначим через $\overline{K}_1 = \overline{K}_1(q,r,p,[0,1])$ точную константу в неравенстве

$$\|u'\|_{q,[0,1]} \leqslant \overline{K}_1 \|u\|_{r,[0,1]}^{1/2} \|u''\|_{p,[0,1]}^{1/2}$$

по классу функций u, которые имеют монотонную абсолютно непрерывную производную и удовлетворяют условию $u(0) = u'(1) = 0$. В [12, теорема 2], в частности, показано, что если $G = \mathbb{R}$, $n = 2$, $1 < q,r,p < \infty$, то при $k = 1$, $\Delta(q,r,p,k,n) = 0$ экстремальная функция в неравенстве (0.7) не существует, но

$$K^{1,2}(q,r,p,\mathbb{R}) = K^{1,2}(q,r,p,\mathbb{T}) = \overline{K}_1(q,r,p,[0,1]),$$

причем экстремали в неравенствах на периоде и отрезке существуют и единственны с точностью до преобразований координат; а при $q = \infty$, $k = 0, 1$, $\Delta(q,r,p,k,n) \leqslant 0$ экстремальная функция в неравенстве (0.7) существует.

В.А. Кофанов [30, Theorem 1, Remark 1] показал, что при $n \geqslant 3$, $0 < k < n$ неравенство Колмогорова (0.5) обращается в равенство только на функциях вида $y(x) = a\varphi_n(\lambda x + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, а при $n = 2$ есть и другие экстремальные функции.

В 2003 г. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов [8, теорема 2] доказали, что при всех $1 \leqslant q,r,p \leqslant \infty$ и $0 < k < n$ выполняется неравенство $K^{k,n}(q,r,p,\mathbb{R}) \leqslant K^{k,n}(q,r,p,\mathbb{T})$, если $\Delta(q,r,p,k,n) = 0$, то это неравенство обращается в равенство.

3. Неравенства с несимметричными ограничениями на старшую производную на оси, которым посвящена диссертация, менее изучены. Отметим, что функционал $\|g\|_{(\alpha,\beta)} = \|g_{\alpha,\beta}\|_{p,G}$ при положительных α, β является несимметричной нормой в пространстве $L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, т. е. обладает следующими свойствами:

а) $\|g\|_{(\alpha,\beta)} = 0 \;\Leftrightarrow\; g = 0$ п.в. на G;

б) $\|\lambda g\|_{(\alpha,\beta)} = \lambda\|g\|_{(\alpha,\beta)}$ при $\lambda \geqslant 0$;

в) $\|g+f\|_{(\alpha,\beta)} \leqslant \|g\|_{(\alpha,\beta)} + \|f\|_{(\alpha,\beta)}$.

Если одно из чисел α, β обращается в 0, то функционал является либо несимметричной нормой, либо полунормой. Термин «несимметричная норма» введен М.Г. Крейном в [20, с. 197], там же в качестве примера дана норма $\|\cdot\|_{(1+\theta,1-\theta)}$ ($|\theta| < 1$) в пространстве $L_1(H)$.

В связи с неравенством Колмогорова несимметричные срезки производных в неявном виде рассматривались Л. Хёрмандером [29], результат которого приведен ниже. Систематически изучать задачи теории приближения для таких срезок начал В.Ф. Бабенко [5, 6], в работе [5] указано, что приближения в пространствах с несимметричными нормами устанавливают связь между наилучшими приближениями и наилучшими односторонними приближениями. Большой вклад в изучение неравенств Колмогорова, в том числе неравенств с несимметричными ограничениями на старшие и промежуточные производные и функцию, внесли и другие украинские математики, наиболее близкими к тематике диссертации являются работы [31, 19]. Приближения с ограничениями рассматриваются в монографии [18]. Приложения несимметричных норм можно найти, например, в диссертации А.Р. Алимова [1].

Обозначим через $K^{k,n}_{\beta}(q,r,p,G)$ и $K^{k,n}_{+}(q,r,p,G)$ точные константы в неравенствах

$$\|y^{(k)}\|_{q,G} \leqslant K^{k,n}_{\beta}(q,r,p,G)\|y\|^{\boldsymbol{\alpha}}_{r,G}\|y^{(n)}_{\beta}\|^{1-\boldsymbol{\alpha}}_{p,G}, \quad y \in L^n_{r,p}(G), \tag{0.8}$$

$$\|y^{(k)}\|_{q,G} \leqslant K^{k,n}_{+}(q,r,p,G)\|y\|^{\boldsymbol{\alpha}}_{r,G}\|y^{(n)}_{+}\|^{1-\boldsymbol{\alpha}}_{p,G}, \quad y \in L^n_{r,p,+}(G), \tag{0.9}$$

рассматриваемых при условии $\Delta(q,r,p,k,n) \leqslant 0$ с показателем $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(q,r,p,k,n)$, определенным (0.6), $0 \leqslant k < n$. Отметим, что в тех случаях, когда

$\Delta(q,r,p,k,n)=0$, показатель $\boldsymbol{\alpha}$ принимает значение $1-\dfrac{k}{n}$.

В работе Л. Хёрмандера 1954 г. [29] (см. также [14, 7]) выписана точная константа в неравенстве

$$\|y_\pm^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}}\leqslant K^{k,n}_{\pm,\alpha,\beta}\|y\|^{1-k/n}_{\infty,\mathbb{R}}\|y^{(n)}_{\alpha,\beta}\|^{k/n}_{\infty,\mathbb{R}},\quad y\in L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{R}). \tag{0.10}$$

Доказательство этого результата он не приводит. Приведем формулировку результата Хёрмандера для случая $\alpha,\beta>0$, следуя [7, теорема 2.9.1] (см. также [14, 31]). Пусть $E_0(y)_{\infty,\mathbb{R}}$ — наилучшее равномерное приближение функции y константами. Обозначим через $\varphi_n(x;\alpha,\beta)$ n-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от 2π-периодической функции $\varphi_0(x;\alpha,\beta)$, которая для $x\in[0,2\pi)$ определяется соотношениями

$$\varphi_0(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha, & \text{если } x\in[0,2\pi\beta/(\alpha+\beta)),\\ -\beta, & \text{если } x\in[2\pi\beta/(\alpha+\beta),2\pi).\end{cases}$$

Тогда для любой функции $y\in L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ и любых $\alpha,\beta>0$ выполняется неравенство

$$\|y_\pm^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}}\leqslant\frac{\|\varphi_{n-k}(x,1/\alpha,1/\beta)_\pm\|_{\infty,\mathbb{R}}}{E_0(\phi_n(x,1/\alpha,1/\beta))^{1-k/n}_{\infty,\mathbb{R}}}E_0(y)^{1-k/n}_{\infty,\mathbb{R}}\|y^{(n)}_{\alpha,\beta}\|^{k/n}_\infty.$$

Неравенство точное и обращается в равенство на функциях

$$y(t)=a\varphi_n(\lambda x;1/\alpha,1/\beta)+b,\quad a,b\in\mathbb{R},\quad \lambda>0.$$

Нетрудно показать (см. раздел 2.3), что если разность $n-k$ нечетна, то для всех допустимых r и p справедливо равенство $K^{k,n}_\beta(\infty,\infty,\infty,\mathbb{R})=K^{k,n}_{\pm,1,\beta}$.

Автору не известен источник, содержащий доказательство результата Хёрмандера для случая положительной срезки старшей производной, т. е. при $\alpha=1$, $\beta=0$, для полноты изложения доказательство случая $k=1$, $n=2$ приведено в разделе 2.3.

В 1976 г. В.Н. Габушин [13, лемма 3] доказал, что при $1\leqslant p\leqslant\infty$ и $0<r<q\leqslant\infty$ справедливо равенство

$$K^{0,1}_+(q,r,p,\mathbb{R})=2^{\boldsymbol{\alpha}-1}K^{0,1}_1(q,r,p,\mathbb{R}),\quad \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(q,r,p,0,1).$$

Значение $K_1^{0,1}(q,r,p,\mathbb{R})$ было найдено Б.С. Надем [33] (см. также [7, § 2.10]). Экстремальная последовательность функций $\{z_n\}$ для $K_+^{0,1}(q,r,p,\mathbb{R})$ строится по экстремальной функции $z(t)$ в неравенстве Надя следующим образом:

$$z_n(t) = \begin{cases} z(t), \text{ при } t \leqslant 0, \\ z(0) - nt, \text{ при } 0 < t \leqslant z(0)/n, \\ 0, \text{ при } t > z(0)/n. \end{cases}$$

Е.А. Зёрнышкина в 2008 г. [36] нашла величину $K_+^{1,2}(2,2,2,\mathbb{R})$. А именно, она доказала, что $K_+^{1,2}(2,2,2,\mathbb{R}) = \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}} \approx 1.5289....$, где λ есть единственный на интервале $(1/2, 1)$ корень уравнения

$$\frac{\pi + \arccos(1/(1+\lambda))}{\sqrt{2+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2-\lambda}} \ln \frac{1+\sqrt{2\lambda-\lambda^2}}{1-\lambda}.$$

Для получения этого результата Зёрнышкина доказала равенство

$$K_+^{1,2}(2,2,2,\mathbb{R}) = \overline{K}_+(2,2,2,[0,1]),$$

где $\overline{K}_+(2,2,2,[0,1])$ есть точная константа в неравенстве

$$\|u'\|_{2,[0,1]} \leqslant \overline{K}_+(2,2,2,[0,1]) \|u\|_{2,[0,1]}^{1/2} \|u''\|_{2,[0,1]}^{1/2} \tag{0.11}$$

по классу выпуклых на отрезке $[0,1]$ функций u, имеющих абсолютно непрерывную производную на $[0,1]$ и обладающих свойством $u'(0) = 0$. Экстремальной в неравенстве (0.11) является функция

$$u(x) = e^{x\rho_0 \cos\phi} \sin(x\rho_0 \sin\phi - \phi) - e^{-x\rho_0 \cos\phi} \sin(x\rho_0 \sin\phi + \phi),$$

где

$$\rho_0 = \frac{\pi + \arccos(1/(1+\lambda))}{\sqrt{2+\lambda}}, \quad \phi = \frac{1}{2}\arccos(-\lambda/2).$$

Основные результаты диссертации

Первая глава диссертации посвящена редукции неравенств (0.1) на оси к неравенствам на отрезке на классах функций с определенными граничными условиями и условиями на выпуклость функций.

Обозначим через $\mathcal{U}$ множество функций $u(x)$, $x \in [0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную, и таких, что для некоторого $s \in [0,1]$ функция $u''(x) \geqslant 0$ п. в. на $[0,s]$, $u''(x) \leqslant 0$ п. в. на $[s,1]$, $u'(0) = u'(1) = 0$, функция u обращается в 0 в некоторой точке промежутка $[0,1]$. Через $\mathcal{U}_+$ обозначим множество функций $u(x)$, $x \in [0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную, и таких, что $u''(x) \geqslant 0$ п. в. на $[0,1]$, $u'(0) = 0$, через $\mathcal{U}_+(\gamma)$ — подмножество функций $u \in \mathcal{U}_+$ таких, что $u(\gamma) = 0$, $\gamma \in [0,1]$.

При условии $\Delta(q,r,p,k,n) = 0$ обозначим через $\overline{K}_\beta(q,r,p,[0,1])$ точную константу в неравенстве

$$\|u'\|_{q,[0,1]} \leqslant \overline{K}_\beta(q,r,p,[0,1]) \|u\|^{1/2}_{r,[0,1]} \|u''_\beta\|^{1/2}_{p,[0,1]}, \tag{0.12}$$

которое рассматривается при $\beta \in (0,1)$ на функциях из класса $\mathcal{U}$, при $\beta = 1$ — на функциях из класса $\mathcal{U}_+(1)$, при $\beta = 0$ — на функциях из класса $\mathcal{U}_+$. Для величины $\overline{K}_0(q,r,p,[0,1])$ также будем использовать обозначение $\overline{K}_+(q,r,p,[0,1])$.

Основными результатами первой главы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любых* $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *удовлетворяющих условию* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$, *и* $\beta \in (0,1)$ *справедливы равенства*

$$K^{1,2}_\beta(q,r,p,\mathbb{R}) = K^{1,2}_\beta(q,r,p,\mathbb{T}) = \overline{K}_\beta(q,r,p,[0,1]). \tag{0.13}$$

Теорема 2. *Для любых* $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *удовлетворяющих условию,* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$ *справедливы равенства*

$$K^{1,2}_+(q,r,p,\mathbb{R}) = K^{1,2}_+(q,r,p,\mathbb{T}) = \overline{K}_+(q,r,p,[0,1]). \tag{0.14}$$

Экстремальных функций в неравенстве (0.2) *на оси и периоде нет.*

Во второй главе с использованием теорем 1 и 2 найдены точные константы в двух неравенствах колмогоровского типа.

В первом разделе получен следующий результат.

Теорема 3. *При $q=2$, $r=1$, $p=\infty$, $k=1$, $n=2$ для точной константы в неравенстве* (0.2) *справедливо равенство*

$$K_+^{1,2}(2,1,\infty,\mathbb{R}) = K_+^{1,2}(2,1,\infty,\mathbb{T}) = \overline{K}_+(2,1,\infty,[0,1]) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

В неравенстве (0.12) *на отрезке* $[0,1]$ *для рассматриваемых параметров экстремальными являются функции*

$$\overline{y}(x) = c(x^2 - 1/4), \quad c > 0.$$

Во втором разделе изучаются неравенства (0.1) и (0.2) для $p=1$. Они рассматриваются на более широком в сравнении с $L^2_{r,1}(\mathbb{R})$ множестве функций $y \in L_r(\mathbb{R})$, которые являются локально абсолютно непрерывными, а производная функция y' имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$; множество таких функций обозначено $L^2_{r,V}(\mathbb{R})$. Норма $\|y''_\beta\|_{1,\mathbb{R}}$ заменяется на $V^\beta_{\mathbb{R}}(y') = V^+_{\mathbb{R}}(y') + \beta V^-_{\mathbb{R}}(y')$ — комбинацию положительной и отрицательной вариаций y'.

Пусть $\Delta(q,r,1,1,2)=0$, т. е. $q = 2r/(r+1)$. Для $y \in L^2_{r,V}(\mathbb{R})$ рассмотрим неравенства

$$\|y'\|_{q,\mathbb{R}} \leqslant K_\beta^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R}) \left(\|y\|_{r,\mathbb{R}}\, V^\beta_{\mathbb{R}}(y')\right)^{1/2},$$
$$\|y'_\pm\|_{1,\mathbb{R}} \leqslant K_{\pm,\beta}^{1,2}(1,1,V,\mathbb{R}) \left(\|y\|_{1,\mathbb{R}}\, V^\beta_{\mathbb{R}}(y')\right)^{1/2} \tag{0.15}$$

с точными константами $K_\beta^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R})$ и $K_{\pm,\beta}^{1,2}(1,1,V,\mathbb{R})$.

Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 4. *Для* $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $q = 2r/(r+1)$ *и* $\beta \in [0,1)$ *справедливо равенство*

$$K_\beta^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R}) = K_\beta^{1,2}(q,r,1,\mathbb{R}) = K_\beta^{1,2}(q,r,1,\mathbb{T}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\beta}}(r+1)^{1/(2r)}.$$

Экстремальной на множестве $L^2_{r,V}(\mathbb{R})$ *является, например, функция*

$$\overline{y}(x) = (1-|x|)_+.$$

Напомним, что равенство (0.13) для $\beta=1$ и $1<q,r,p<\infty$ получено А.П. Буслаевым [12], при $1 \leqslant q,r,p \leqslant \infty$ доказано В.Ф. Бабенко, В.А. Кофановым, С.А. Пичуговым в [8], равенство (0.14) для $q=r=p=2$ доказано

Е.А. Зернышкиной в [36], значение $K_1^{1,2}(1,1,1,\mathbb{R})$ найдено Е. Стейном [34], значения $K_1^{1,2}(2r/(r+1),r,1,\mathbb{R})$ найдены В.В. Арестовым и В.И. Бердышевым [2].

В третьем разделе приведены некоторые факты, связанные с неравенством Хёрмандера (0.10).

Результаты работы опубликованы в статьях автора [1, 2] в журналах из списка ВАК и тезисах конференций [3, 4, 5].

Глава 1. Связь между неравенствами колмогоровского типа для первой и второй производных на оси, периоде и отрезке с дополнительными ограничениями

Данная глава посвящена исследованию неравенств

$$\|y'\|_{q,G} \leqslant K_{\beta}^{1,2}(q,r,p,G)\|y\|_{r,G}^{1/2}\,\|y''_{\beta}\|_{p,G}^{1/2}, \quad y \in L^2_{r,p}(G), \quad \beta \in (0,1], \tag{1.16}$$

$$\|y'\|_{q,G} \leqslant K_{+}^{1,2}(q,r,p,G)\|y\|_{r,G}^{1/2}\,\|y''_{+}\|_{p,G}^{1/2}, \quad y \in L^2_{r,p,+}(G), \tag{1.17}$$

на оси $G = \mathbb{R}$ и периоде $G = \mathbb{T}$ для показателей q, p и r, которые удовлетворяют ограничениям $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и равенству $1/r + 1/p = 2/q$.

В разделе 1.1 доказываются вспомогательные утверждения. В разделе 1.2 константа в неравенстве на оси оценивается сверху через константу в неравенстве на отрезке

$$\|u'\|_{q,[0,1]} \leqslant \overline{K}_{\beta}(q,r,p,[0,1])\|u\|_{r,[0,1]}^{1/2}\|u''_{\beta}\|_{p,[0,1]}^{1/2},$$

по классу функций с определенными граничными условиями и условиями на выпуклость функций. В разделе 1.3 строится оценка снизу, которая приводит к следующим теоремам.

Теорема 1. *Для любых* $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *удовлетворяющих условию* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$, *и* $\beta \in (0,1]$ *справедливы равенства*

$$K_{\beta}^{1,2}(q,r,p,\mathbb{R}) = K_{\beta}^{1,2}(q,r,p,\mathbb{T}) = \overline{K}_{\beta}(q,r,p,[0,1]).$$

Теорема 2. *Для любых* $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *удовлетворяющих условию* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$ *справедливы равенства*

$$K_{+}^{1,2}(q,r,p,\mathbb{R}) = K_{+}^{1,2}(q,r,p,\mathbb{T}) = \overline{K}_{+}(q,r,p,[0,1]).$$

Экстремальных функций в неравенстве (1.17) *на оси и периоде не существует.*

В леммах 4, 5, 6 раздела 1.1 существенно используются и развиваются идеи работы Е.А. Зёрнышкиной [36].

В теореме 1 добавлено значение $\beta = 1$ (по сравнению с вариантом во введении) для полноты изложения. В теореме 2 исключен случай $q = r = p = \infty$, поскольку он почти полностью изучен, кроме некоторых моментов, относящихся к ситуации, когда $\beta = 0$. В частности, отметим, что при $q = r = p = \infty$ и $\beta = 0$ в неравенстве (1.17) на оси экстремальная функция существует, а в неравенстве на периоде экстремальной функции нет, это показано в разделе 2.3.

1.1 Вспомогательные утверждения

Для измеримого множества $H \subset G$, $\beta \in [0, 1]$ и $y \in L^2_{r,p}(G)$ ($y \in L^2_{r,p,+}(G)$ при $\beta = 0$) введем функционал

$$\Psi^\beta_H(y) = \Psi^\beta_H(y, q, r, p) = \frac{\|y'\|^2_{q,H}}{\|y\|_{r,H} \cdot \|y''_\beta\|_{p,H}}.$$

Если $\|y\|_{q,H} = 0$, а как следствие, и $\|y'\|_{q,H} = 0$, то полагаем $\Psi^\beta_H(y) = 0$, если $\|y''_\beta\|_{p,G} = 0$, а $\|y'\|_{q,H} \neq 0$, то полагаем $\Psi^\beta_H(y) = \infty$.

Отметим, что если функция y_1 получена из функции y заменой переменного $y_1(t) = y(at + b)$ $(a \neq 0)$ и $H_1 = \{(x - b)/a,\ x \in H\}$, то $\Psi^\beta_{H_1}(y_1) = \Psi^\beta_H(y)$.

Для оценки значений $\Psi^\beta_H(y)$ нам понадобится следующее известное числовое неравенство, доказательство которого приводится для полноты изложения.

Лемма 1. *Пусть показатели* $q \in (0, \infty)$, $r, p \in (0, \infty]$ *таковы, что для некоторого* $\gamma \in (0, 1)$ *выполняется равенство* $1/q = \gamma/r + (1 - \gamma)/p$. *Пусть множество* J *конечно или счетно,* $b = \{b_j\}_{j \in J}$ — *набор неотрицательных чисел,*

$a = \{a_j\}_{j\in J}$, $c = \{c_j\}_{j\in J}$ — наборы положительных чисел, $\|b\|_q$, $\|a\|_r$, $\|c\|_p$ конечны[1]*. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{\|b\|_q}{\|a\|_r^\gamma \|c\|_p^{1-\gamma}} \leqslant \sup_{j\in J} \frac{b_j}{a_j^\gamma c_j^{1-\gamma}}. \tag{1.18}$$

Неравенство (1.18) *для конечной правой части обращается в равенство тогда и только тогда, когда*

$$\frac{a_j^r}{\|a\|_r^r} = \frac{c_j^p}{\|c\|_p^p} = \frac{b_j^q}{\|b\|_q^q}, \quad j \in J, \quad \textit{при } 0 < r, p < \infty, \tag{1.19}$$

$$\frac{a_j^r}{\|a\|_r^r} = \frac{b_j^q}{\|b\|_q^q}, \quad c_j = \|c\|_\infty, \quad j \in J, \quad \textit{при } 0 < r < \infty,\ p = \infty, \tag{1.20}$$

$$\frac{c_j^p}{\|c\|_p^p} = \frac{b_j^q}{\|b\|_q^q}, \quad a_j = \|a\|_\infty, \quad j \in J, \quad \textit{при } r = \infty,\ 0 < p < \infty.$$

Доказательство. Положим $M = \sup\limits_{j\in J} \dfrac{b_j}{a_j^\gamma c_j^{1-\gamma}}$. Если $M = \infty$, то неравенство очевидно. Предположим, что $M < \infty$.

Если $r, p \neq \infty$, $\gamma \in (0,1)$, то применяя неравенство Гёльдера для сумм с показателями $r/(\gamma q)$, $p/((1-\gamma)q)$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|b\|_q^q = \sum_{j\in J} b_j^q = \sum_{j\in J} \left(\frac{b_j}{a_j^\gamma c_j^{(1-\gamma)}}\right)^q a_j^{\gamma q} c_j^{(1-\gamma)q} \leqslant M^q \sum_{j\in J} a_j^{\gamma q} c_j^{(1-\gamma)q} \\ \leqslant M^q \left(\sum a_j^r\right)^{\gamma q/r} \left(\sum c_j^p\right)^{(1-\gamma)q/p} = (M\|a\|_r^\gamma \|c\|_p^{1-\gamma})^q. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Возведя в степень $1/q$ и поделив на $\|a\|_r^\gamma \|c\|_p^{1-\gamma}$, приходим к (1.18).

Рассмотрим теперь вопрос о точности оценки (1.21). Исходя из условий равенства в неравенстве Гёльдера, получаем условие $\dfrac{a_j^r}{\|a\|_r^r} = \dfrac{c_j^p}{\|c\|_p^p}$. Первое неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\dfrac{b_j}{a_j^\gamma c_j^{1-\gamma}} = M$ для любого $j \in J$. Из этих двух условий следует (1.19).

[1] Здесь $\|b\|_q = \left(\sum\limits_{j\in J} b_j^q\right)^{1/q}$, $q \in (0,\infty)$, $\|b\|_\infty = \sup\limits_{j\in J} b_j$.

Если один из показателей r или p равен бесконечности, а другой нет, например, $p = \infty$, $r < \infty$, то, используя равенство $r = \gamma q$, получим оценки

$$\sum_{j\in J} b_j^q \leqslant M^q \sum_{j\in J} a_j^{\gamma q} c_j^{(1-\gamma)q} \leqslant M^q \|c\|_\infty^{(1-\gamma)q} \sum_{j\in J} a_j^r = M^q \|c\|_\infty^{(1-\gamma)q} \|a\|_r^{\gamma q},$$

из которых вновь вытекает (1.18). Для того, чтобы достигалось равенство, необходимо и достаточно, чтобы $c_j = \|c\|_\infty$ и $M = \dfrac{b_j}{a_j^\gamma c_j^{1-\gamma}}$ для любого $j \in J$, что в совокупности равносильно (1.20).

□

Лемма 2. *Пусть измеримое множество $H \subset G$ представлено в виде не более чем счетного объединения множеств H_j, $H = \bigcup\limits_{j\in J} H_j$, таких что мера Лебега $H_\ell \cap H_j$ равна 0, $\ell \neq j$. Тогда для любых $q \in (0, \infty)$, $r, p \in (0, \infty]$, удовлетворяющих условию $1/r + 1/p = 2/q$, и $\beta \in [0, 1]$ для всех $y \in L^2_{r,p}(G)$ ($y \in L^2_{r,p,+}(G)$ при $\beta = 0$) выполняется неравенство*

$$\Psi_H^\beta(y) \leqslant \sup_{j\in J} \Psi_{H_j}^\beta(y). \tag{1.22}$$

Неравенство (1.22) для конечной правой части обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\frac{\|y'\|^q_{q,H_j}}{\|y'\|^q_{q,H'}} = \frac{\|y''_\beta\|^p_{p,H_j}}{\|y''_\beta\|^p_{p,H'}} = \frac{\|y\|^r_{r,H_j}}{\|y\|^r_{r,H'}}, \quad j \in J', \quad \text{при } 0 < r, p < \infty,$$

$$\frac{\|y'\|^q_{q,H_j}}{\|y'\|^q_{q,H'}} = \frac{\|y\|^r_{r,H_j}}{\|y\|^r_{r,H'}}, \quad \|y''_\beta\|_{\infty,H_j} = \|y''_\beta\|_{\infty,H'}, \quad j \in J', \quad \text{при } 0 < r < \infty,\ p = \infty,$$

$$\frac{\|y'\|^q_{q,H_j}}{\|y'\|^q_{q,H'}} = \frac{\|y''_\beta\|^p_{p,H_j}}{\|y''_\beta\|^p_{p,H'}}, \quad \|y\|_{\infty,H_j} = \|y\|_{\infty,H'}, \quad j \in J', \quad \text{при } r = \infty,\ 0 < p < \infty,$$

где J' есть множество тех индексов $j \in J$, для которых $\|y'\|_{q,H_j} > 0$, и $H' = \bigcup_{j\in J'} H_j$.

Доказательство. Положим $M = \sup\limits_{j\in J} \Psi_{H_j}^\beta(y)$. Если $M = \infty$, то неравенство очевидно. Предположим, что $M < \infty$, как следствие и $\Psi_{H_j}^\beta(y) < \infty$, $j \in J$.

Очевидно, что

$$M = \sup_{j \in J'} \Psi^{\beta}_{H_j}(y) \quad \text{и} \quad \|y\|_{r,H_j} > 0,\ \|y''_{\beta}\|_{p,H_j} > 0, \quad \text{для} \quad j \in J'.$$

Положим $b_j = \|y'\|^q_{q,H_j}$ при $q < \infty$ и $b_j = \|y'\|_{\infty,H_j}$ при $q = \infty$. Аналогичным образом по функции y и показателю r определим a_j, по y''_{β} и p определим c_j. Наборы b_j, a_j, c_j $(j \in J')$ и показатели q, r, p, $\gamma = 1/2$ удовлетворяют условиям леммы 1, применяя ее, получаем неравенство (1.22) и условия равенства. □

Лемма 3. *Если $p \in [1, \infty]$, $r \in (0, \infty]$ и хотя бы одно из них конечно, то для любой функции $y \in L^2_{r,p,+}(\mathbb{R})$ справедливы соотношения $y(x) \to 0$ и $y'(x) \to 0$ при $x \to \infty$.*

Доказательство. Для $A > 0$ рассмотрим функцию $f_A(x) = y(x+A)$. Функция $f_A \in L^2_{p,r,+}(\mathbb{R})$, тем более $f_A \in L^2_{p,r,+}[0,\infty)$. При $\widetilde{q} = \infty$ для всех $p, r > 0$ выполняется неравенство $1/r + 1/p \geqslant 2/\widetilde{q}$. Поэтому, согласно критерию В. Н. Габушина конечности константы в неравенстве (0.7) на полуоси [13, теорема 3, следствие 2], для функции f_A справедливы неравенства

$$\|f_A\|_{\infty,[0,\infty)} \leqslant K \|f_A\|^{\boldsymbol{\alpha}_0}_{r,[0,\infty)} \, \|(f''_A)_+\|^{1-\boldsymbol{\alpha}_0}_{p,[0,\infty)}, \quad \boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{2 - 1/p}{2 - 1/p + 1/r}, \tag{1.23}$$

$$\|f'_A\|_{\infty,[0,\infty)} \leqslant K' \|f_A\|^{\boldsymbol{\alpha}}_{r,[0,\infty)} \, \|(f''_A)_+\|^{1-\boldsymbol{\alpha}}_{p,[0,\infty)}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{1 - 1/p}{2 - 1/p + 1/r}. \tag{1.24}$$

Имеем $|y(A)| = |f_A(0)| \leqslant \|f_A\|_{\infty,[0,\infty)}$, $|y'(A)| \leqslant \|f'_A\|_{\infty,[0,\infty)}$. Если $p < \infty$, то по свойствам интеграла Лебега

$$\|(f''_A)_+\|^p_{p,[0,\infty)} = \int_0^{\infty} |(f''_A)_+|^p dx = \int_A^{\infty} |(y'')_+|^p dx \to 0, \quad A \to +\infty.$$

Если $r < \infty$, то

$$\|f_A\|^r_{r,[0,\infty)} = \int_A^{\infty} |y|^r dx \to 0, \quad A \to +\infty.$$

Полученные соотношения и (1.23), (1.24) влекут, что $|y(A)|$ и $|y'(A)|$ стремятся к 0 при $A \to +\infty$. Таким же образом обосновывается стремление $|y(A)|$ и $|y'(A)|$ к 0 при $A \to -\infty$. □

В силу вложения $L^2_{r,p}(\mathbb{R}) \subset L^2_{r,p,+}(\mathbb{R})$ справедливо

Следствие 1. *Если $p \in [1,\infty]$, $r \in (0,\infty]$ и хотя бы одно из них конечно, то для любой функции $y \in L^2_{r,p}(\mathbb{R})$ справедливы соотношения $y(x) \to 0$ и $y'(x) \to 0$ при $x \to \infty$.*

Лемма 4. *Предположим, что не тождественно равная нулю функция y абсолютно непрерывна и $0 \leqslant y'(x) \leqslant M$ п. в. на $[a,b]$. Тогда при любых $q \in [1,\infty)$, $r \in (0,\infty)$ для функции $g(x) = M(x-a) + y(a)$ и точки $\tau = \dfrac{y(b)-y(a)}{M}$ справедливы соотношения*

$$\int\limits_a^{a+\tau} |g'(x)|^q dx \geqslant \int\limits_a^b |y'(x)|^q dx, \tag{1.25}$$

$$\int\limits_a^{a+\tau} |g(x)|^r dx \leqslant \int\limits_a^b |y(x)|^r dx, \tag{1.26}$$

$$\|g\|_{\infty,[a,a+\tau]} = \|y\|_{\infty,[a,b]}.$$

Неравенство (1.25) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда $q = 1$ или $y'(x) = M$ п. в. на $[a,b]$. Неравенство* (1.26) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда $y'(x) = M$ п. в. на $[a,b]$.*

Доказательство. Равенство равномерных норм выполняется по построению. Поскольку $y(b)-y(a) \leqslant M(b-a)$, то $\tau \leqslant b-a$. Ввиду условия $q \geqslant 1$ справедливы оценки

$$\int\limits_a^b y'(x)^q dx \leqslant M^{q-1} \int\limits_a^b y'(x) dx = M^{q-1}(y(b)-y(a)) = M^q \tau = \int\limits_a^{a+\tau} g'(x)^q dx,$$

из которых вытекает (1.25). Очевидно, что равенство достигается, только если $y'(x) = M$ п. в. на $[a,b]$ или $q = 1$.

Доказательство второго неравенства разобьем на три случая.

Первый случай $y(b) \leqslant 0$. Очевидно, что $g(x) \geqslant y(x)$ на $[a, a+\tau]$. Кроме того, $g(a+\tau) = y(b) \leqslant 0$, следовательно,

$$\int\limits_a^{a+\tau} |g(x)|^r dx \leqslant \int\limits_a^{a+\tau} |y(x)|^r dx \leqslant \int\limits_a^{b} |y(x)|^r dx. \tag{1.27}$$

Второй случай $y(a) \geqslant 0$. Для сдвинутой функции $g(x+a-b+\tau)$ на отрезке $[b-\tau, b]$ выполняются неравенства $0 \leqslant y(a) = g(a) \leqslant g(x+a-b+\tau) \leqslant y(x)$. Отсюда получаем

$$\int\limits_a^{a+\tau} |g(x)|^r dx = \int\limits_{b-\tau}^{b} |g(x+a-b+\tau)|^r dx \leqslant \int\limits_a^{b} |y(x)|^r dx. \tag{1.28}$$

Третий случай $y(a) < 0 < y(b)$. В этом случае найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $y(c) = 0$. Функция y на отрезке $[a, c]$ попадает под первый рассмотренный случай, а на отрезке $[c, b]$ — под второй. Аналогами параметра τ и функции g на этих отрезках соответственно будут $\tau_1 = \dfrac{y(c) - y(a)}{M}$, $\tau_2 = \tau - \tau_1 = \dfrac{y(b) - y(c)}{M}$,

$$g_1(x) = g(x) = M(x-a) + y(a),\ x \in [a, a+\tau_1]; \quad g_2(x) = M(x-c),\ x \in [c, c+\tau_2].$$

Построение вспомогательных функций проиллюстрировано на рис. 1 и 2.

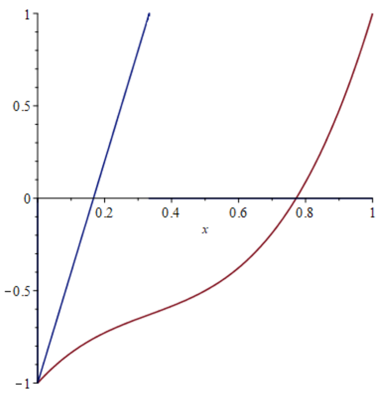

Рис. 1: Функции y и g.

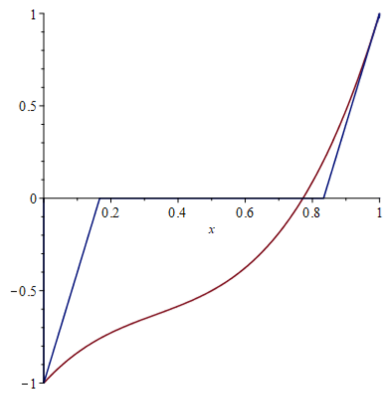

Рис. 2: Функции y, g_1, g_2.

В силу (1.27), (1.28) справедливы неравенства

$$\int_a^{a+\tau_1} |g(x)|^r dx \leqslant \int_a^{c} |y(x)|^r dx, \qquad \int_c^{c+\tau_2} |g(x)|^r dx \leqslant \int_c^{b} |y(x)|^r dx. \tag{1.29}$$

Имеем $g(a+\tau_1)=0$, $g_2(x)=g(x-c+a+\tau_1)$, $\tau=\tau_1+\tau_2$, поэтому

$$\int_c^{c+\tau_2}|g_2(x)|^r dx=\int_{a+\tau_1}^{a+\tau_1+\tau_2}|g(x)|^r dx=\int_{a+\tau_1}^{a+\tau}|g(x)|^r dx. \qquad (1.30)$$

Из (1.29), (1.30) следует первое неравенство в (1.26). Как видно из доказательства, неравенства (1.27), (1.28), (1.29), (1.30) следуют из поточечных неравенств между сдвигом функции g и функцией y, так как y и g абсолютно непрерывны равенство в (1.26) возможно только если $y'(x)=M$ п. в. на $[a,b]$. Лемма доказана. $\square$

1.2 Редукция неравенств на оси к неравенствам на отрезке

В данном разделе будут доказаны несколько утверждений, позволяющих перейти от неравенств (1.16) и (1.17) на оси к неравенствам на отрезке по классу функций с определенными граничными условиями на условиями на выпуклость.

Пусть $\mathcal{P}$ есть множество кусочно-полиномиальных, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций f со свойством $f'(a)=f'(b)=0$.

Лемма 5. *Для любых* $1\leqslant q<\infty$*,* $1\leqslant p\leqslant\infty$*,* $1/2\leqslant r\leqslant\infty$*, удовлетворяющих условию* $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{2}{q}$*, и* $\beta\in[0,1]$ *справедлива оценка*

$$(K_\beta^{1,2}(q,p,r,\mathbb{R}))^2\leqslant\sup\{\Psi_{[0,1]}^\beta(f)\colon f\in\mathcal{P}\}.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что условия леммы влекут, что p и r не могут одновременно принимать значение ∞. Доказательство проведем в четыре этапа.

1. Пусть y не тождественно равная нулю функция из $L^2_{r,p}(\mathbb{R})$ ($y\in L^2_{r,p,+}(\mathbb{R})$ при $\beta=0$). Поскольку $\Psi_{\mathbb{R}}^\beta(y)=\Psi_{\mathbb{R}}^\beta(cy)$ для любого $c>0$, то без потери общности можно считать, что

$$\|y'\|_{q,\mathbb{R}}\geqslant 2,\quad \|y\|_{r,\mathbb{R}}\geqslant 2,\quad \|y''_\beta\|_{p,\mathbb{R}}\geqslant 2.$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1/6)$. Из леммы 3, следствия 1 и того, что $\|y\|_{r,[-\vartheta,\vartheta]} \to \|y\|_{r,\mathbb{R}}$ при $\vartheta \to \infty$, следует, что существует число $\vartheta = \vartheta(\varepsilon) \geqslant 3$ такое, что для отрезка $T := [-\vartheta, \vartheta]$ справедливы неравенства

$$|y(x)| < \varepsilon, \quad |y'(x)| < \varepsilon \quad \text{для } |x| \geqslant \vartheta, \tag{1.31}$$

$$\|y\|_{r,T} \geqslant \|y\|_{r,\mathbb{R}} - \varepsilon > 1, \quad \|y'\|_{q,T} \geqslant \|y'\|_{q,\mathbb{R}} - \varepsilon > 1, \tag{1.32}$$

$$\|y''_\beta\|_{p,T} \geqslant \|y''_\beta\|_{p,\mathbb{R}} - \varepsilon > 1. \tag{1.33}$$

Из последнего неравенства в (1.32) следует оценка

$$\|y'\|_{q,\mathbb{R}} \leqslant \|y'\|_{q,T} + \varepsilon \leqslant \|y'\|_{q,T} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|y'\|_{q,T}}\right) \leqslant \|y'\|_{q,T} \left(1+\varepsilon\right),$$

из которой мы получаем

$$\Psi^\beta_{\mathbb{R}}(y) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^2 \|y'\|^2_{q,T}}{\|y\|_{r,T}\|y''_\beta\|_{p,T}} = (1+\varepsilon)^2\, \Psi^\beta_T(y). \tag{1.34}$$

2. Построим отрезок $[a,b]$ и функцию $f \in \mathcal{P}^0_{[a,b]}$, для которой значение $\Psi^\beta_{[a,b]}(f)$ близко к $\Psi^\beta_T(y)$.

Для $N \geqslant 0$ введем обозначение $y''_N(x) := \max\{y''(x), -N\}$. В силу локальной абсолютной непрерывности функции y' интеграл $\displaystyle\int_T |y''(t)|dt$ конечен и для достаточно больших N

$$\int_T |y''(x) - y''_N(x)|dx < \frac{\varepsilon}{\vartheta^3}. \tag{1.35}$$

2.1. Сначала рассмотрим случай $p = \infty$, $\beta = 0$. Возьмем N большее $\|y''_+\|_{\infty,T}$, для которого выполняется (1.35). По теореме Лузина [23, гл. 4, § 5, теорема 4] существует непрерывная на T функция ϕ_0, для которой

$$\operatorname{mes}\{x \in T \colon \phi_0(x) \neq y''_N(x)\} < \frac{\varepsilon}{2N\vartheta^3}.$$

Очевидно, что функция $\phi(x) = \min\{\max\{\phi_0(x), -N\},\, \|y''_+\|_{\infty,T}\}$ непрерывна,

$$-N \leqslant \phi(x) \leqslant \|y''_+\|_{\infty,T},$$

и $\{x \in T\colon \phi(x) \neq y''_N(x)\} \subset \{x \in T\colon \phi_0(x) \neq y''_N(x)\}$. Эти свойства ϕ влекут оценку

$$\int_T |\phi(x) - y''_N(x)|dx \leqslant 2N \operatorname{mes}\{x \in T\colon \phi(x) \neq y''_N(x)\} \leqslant 2N\frac{\varepsilon}{2N\vartheta^3} = \frac{\varepsilon}{\vartheta^3}.$$

По теореме Вейерштрасса [23, гл. 4, § 5, теорема 2] существует алгебраический многочлен h такой, что

$$|h(x) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2\vartheta^4}, \quad x \in T.$$

Поскольку $|\phi_+(x) - h_+(x)| \leqslant |\phi(x) - h(x)|$, то

$$|h_+(x)| \leqslant |\phi_+(x)| + \varepsilon \leqslant \|y''_+\|_{\infty,T} + \varepsilon, \quad x \in T. \tag{1.36}$$

Кроме того,

$$\int_T |h(x) - y''(x)|dx \leqslant \int_T (|h(x) - \phi(x)| + |\phi(x) - y''_N(x)| + |y''_N(x) - y''(x)|)dx$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\vartheta^4}2\vartheta + \frac{\varepsilon}{\vartheta^3} + \frac{\varepsilon}{\vartheta^3} = \frac{3\varepsilon}{\vartheta^3}. \tag{1.37}$$

2.2. Пусть $p = \infty$, $0 < \beta \leqslant 1$. Возьмем $N = \|y''_-\|_{\infty,T}$ (для него, очевидно, выполняется (1.35)) и определим ϕ и h так же, как в п. 2.1. Тогда $y''_N = y''$, $-\|y''_-\|_{\infty,T} \leqslant \phi(x) \leqslant \|y''_+\|_{\infty,T}$ и $|\phi(x) - h(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2\vartheta^4}$, $x \in T$. Поскольку $|\phi_\beta(x) - h_\beta(x)| \leqslant |\phi(x) - h(x)|$, то

$$|h_\beta(x)| \leqslant |\phi_\beta(x)| + \varepsilon \leqslant \|y''_\beta\|_{\infty,T} + \varepsilon, \quad x \in T. \tag{1.38}$$

Кроме того,

$$\int_T |h(x) - y''(x)|dx = \int_T |h(x) - y''_N(x)|dx \leqslant \frac{3\varepsilon}{\vartheta^3}. \tag{1.39}$$

2.3. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\beta = 0$. Тогда $y''_N \in L_p(T)$ и в силу плотности множества алгебраических многочленов в $L_p(T)$ найдется такой многочлен h, что

$$\|h - y''_N\|_{p,T} < \frac{\varepsilon}{\vartheta^4}. \tag{1.40}$$

$$\int_T |h(x) - y''(x)|dx \leqslant \int_T (|h(x) - y''_N(x)| + |y''_N(x) - y''(x)|)dx$$
$$\leqslant \|h - y''_N\|_{p,T}(2\vartheta)^{(p-1)/p} + \frac{\varepsilon}{\vartheta^3} \leqslant \frac{\varepsilon}{\vartheta^4}2\vartheta + \frac{\varepsilon}{\vartheta^3} = \frac{3\varepsilon}{\vartheta^3}. \tag{1.41}$$

2.4. Если $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \beta \leqslant 1$, то функция $y'' \in L_p(\mathbb{R})$, поэтому найдется такой многочлен h, что

$$\|h - y''\|_{p,T} \leqslant \frac{\varepsilon}{\vartheta^4}. \tag{1.42}$$

Следовательно,

$$\int_T |h(x) - y''(x)|dx \leqslant \|h - y''\|_{p,T}(2\vartheta)^{(p-1)/p} < \frac{3\varepsilon}{\vartheta^3}. \tag{1.43}$$

Для всех рассматриваемых p и β определим функцию f', отрезок $[a, b]$ и функцию f следующим образом:

$$f'(x) := \begin{cases} y'(-\vartheta) + \displaystyle\int_{-\vartheta}^{x} h(t)dt, & x \in [-\vartheta, \vartheta], \\ f'(-\vartheta) + (x + \vartheta)\operatorname{sign} f'(-\vartheta), & x \in [-\vartheta - |f'(-\vartheta)|, -\vartheta), \\ f'(\vartheta) + (\vartheta - x)\operatorname{sign} f'(\vartheta), & x \in (\vartheta, \vartheta + |f'(\vartheta)|]. \end{cases}$$

$$a := -\vartheta - |f'(-\vartheta)|, \quad b := \vartheta + |f'(\vartheta)|,$$
$$f(x) := y(-\vartheta) + \int_{-\vartheta}^{x} f'(t)dt, \quad t \in [a, b].$$

Нетрудно проверить, что $f \in \mathcal{P}$.

В виду (1.37), (1.39), (1.41) и (1.43), можем оценить уклонение f' от y' на множестве T следующим образом

$$|f'(x) - y'(x)| \leqslant \int_T |h(t) - y''(t)|dt \leqslant \frac{3\varepsilon}{\vartheta^3}, \quad x \in T. \tag{1.44}$$

Отсюда с учетом (1.31) вытекает, что $|f'(\vartheta)| \leqslant |y'(\vartheta)| + \varepsilon < 2\varepsilon$, $|f'(-\vartheta)| = |y'(-\vartheta)| < \varepsilon$. Как следствие, длина промежутка $[a, -\vartheta]$ меньше ε, длина промежутка $[\vartheta, b]$ меньше 2ε.

3. Оценим $\|y''_\beta\|_{p,T}$ через $\|f''_\beta\|_{p,[a,b]}$ снизу. Отметим, что $|f''(x)| = 1$ на множестве $(a, -\vartheta) \cup (\vartheta, b)$.

3.1. Пусть $p=\infty$, $\beta=0$. В силу определения f', (1.36) и (1.33) имеем

$$\begin{aligned}\|f''_+\|_{\infty,[a,b]} &\leqslant \max\{\|h_+\|_{\infty,T},1\} \leqslant \max\{\|y_+\|_{\infty,T}+\varepsilon,1\}\\ &= \|y''_+\|_{\infty,T}+\varepsilon \leqslant \|y''_+\|_{\infty,T}(1+\varepsilon).\end{aligned}$$

3.2. Пусть $p=\infty$, $0<\beta\leqslant 1$. Аналогично предыдущему случаю в силу определения f', (1.38) и (1.33) имеем

$$\|f''_\beta\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \max\{\|h_\beta\|_{\infty,T},1\} \leqslant \max\{\|y_\beta\|_{\infty,T}+\varepsilon,1\} \leqslant \|y''_\beta\|_{\infty,T}(1+\varepsilon).$$

3.3. Пусть $1\leqslant p<\infty$, $\beta=0$. Используя неравенство (1.40), получаем оценки

$$\begin{aligned}\|h_+\|_{p,T} &\leqslant \|h_+-y''_+\|_{p,T}+\|y''_+\|_{p,T} \leqslant \|h_N-y''_N\|_{p,T}+\|y''_+\|_{p,T} \leqslant \varepsilon+\|y''_+\|_{p,T}\\ &\leqslant \|y''_+\|_{p,T}(1+\varepsilon),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f''_+\|_{p,[a,b]} &\leqslant \|f''_+\|_{p,T}+\|f''_+\|_{p,[a,-\vartheta]\cup[\vartheta,b]} \leqslant \|h_+\|_{p,T}+(3\varepsilon)^{1/p}\\ &\leqslant \|y''_+\|_{p,T}(1+\varepsilon)(1+(3\varepsilon)^{1/p}).\end{aligned}$$

3.4. Пусть $1\leqslant p<\infty$, $0<\beta\leqslant 1$. Аналогично предыдущему случаю, применяя неравенство (1.42), получаем оценки

$$\begin{aligned}\|h_\beta\|_{p,T} &\leqslant \|h_\beta-y''_\beta\|_{p,T}+\|y''_\beta\|_{p,T} \leqslant \|h-y''\|_{p,T}+\|y''_\beta\|_{p,T} \leqslant \varepsilon+\|y''_\beta\|_{p,T}\\ &\leqslant \|y''_\beta\|_{p,T}(1+\varepsilon),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f''_\beta\|_{p,[a,b]} &\leqslant \|f''_\beta\|_{p,T}+\|f''_\beta\|_{p,[a,-\vartheta]\cup[\vartheta,b]} \leqslant \|h_\beta\|_{p,T}+(3\varepsilon)^{1/p}\\ &\leqslant \|y''_\beta\|_{p,T}(1+\varepsilon)(1+(3\varepsilon)^{1/p}).\end{aligned} \tag{1.45}$$

Таким образом, во всех случаях справедлива оценка (полагаем $1/p=0$, при $p=\infty$) $\|f''_\beta\|_{p,[a,b]} \leqslant \|y''_\beta\|_{p,T}(1+\varepsilon)(1+(3\varepsilon)^{1/p})$ или то же самое

$$\frac{1}{\|y''_\beta\|_{p,T}} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(1+(3\varepsilon)^{1/p})}{\|f''_\beta\|_{p,[a,b]}}. \tag{1.46}$$

4. Далее оценим $\|y'\|_{q,T}$ через $\|f'\|_{q,[a,b]}$ сверху и $\|y\|_{r,T}$ через $\|f\|_{r,[a,b]}$ снизу. Из неравенства (1.44) и условия $\vartheta\geqslant 3$ вытекает, что для всех $q\in[1,\infty)$

$$\|y'-f'\|_{q,T} \leqslant \frac{3\varepsilon}{\vartheta^3}(2\vartheta)^{1/q} \leqslant \varepsilon,$$

$$\|y'\|_{q,T} \leqslant \|y' - f'\|_{q,T} + \|f'\|_{q,T} \leqslant \varepsilon + \|f'\|_{q,T},$$

и следовательно,

$$\|y'\|_{q,T}(1-\varepsilon) \leqslant \|y'\|_{q,T} - \varepsilon \leqslant \|f'\|_{q,T} \leqslant \|f'\|_{q,[a,b]}. \tag{1.47}$$

Неравенство (1.44) также позволяет получить оценку

$$|y(x) - f(x)| \leqslant \int_{-\vartheta}^{x} |y'(t) - f'(t)|dt \leqslant \frac{3\varepsilon}{\vartheta^3} 2\vartheta = \frac{6\varepsilon}{\vartheta^2}, \quad x \in T. \tag{1.48}$$

Для $x \in [\vartheta, b] = [\vartheta, |f'(\vartheta)| + \vartheta]$ имеем

$$\begin{aligned} |f(x)| = \left| f(\vartheta) + \int_{\vartheta}^{x} f'(t)dt \right| &\leqslant |f(\vartheta) - y(\vartheta)| + |y(\vartheta)| + |f'(\vartheta)|^2 \\ &\leqslant \frac{6\varepsilon}{\vartheta^2} + \varepsilon + (2\varepsilon)^2 \leqslant 9\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Такая же оценка справедлива для $x \in [a, -\vartheta]$. Учивая (1.48), (1.49) мы получаем для $1 \leqslant r \leqslant \infty$

$$\begin{aligned} &\|f\|_{r,[a,b]} \leqslant \|f - y\|_{r,T} + \|y\|_{r,T} + \|f\|_{r,[a,b]\setminus T} \\ &\leqslant \frac{6\varepsilon}{\vartheta^2}(2\vartheta)^{(1/r)} + \|y\|_{r,T} + 9\varepsilon(4\varepsilon)^{1/r} \leqslant \|y\|_{r,T} + 15\varepsilon \leqslant \|y\|_{r,T}(1 + 15\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.50}$$

и для $1/2 \leqslant r < 1$

$$\begin{aligned} \|f\|_{r,[a,b]} &\leqslant \left(\int_T |f - y|^r dx + \int_T |y|^r dx + \int_{[a,b]\setminus T} |f|^r dx \right)^{1/r} \\ &\leqslant \left(2\vartheta \frac{(6\varepsilon)^r}{\vartheta^{2r}} + \int_T |y|^r dx + (9\varepsilon)^r 4\varepsilon \right)^{1/r} \\ &\leqslant \left(\int_T |y|^r dx + (2 \cdot 6 + 9)\varepsilon^r \right)^{1/r} \\ &\leqslant \|y\|_{r,T}(1 + 21\varepsilon^r)^{1/r} \leqslant \|y\|_{r,T}(1 + 21\varepsilon^{1/2})^2. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Наконец, (1.34) (1.46), (1.47), (1.50), (1.51) дают

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{R}}^{\beta}(y) \leqslant \frac{\|y'\|_{q,T}^2 (1+\varepsilon)^2}{\|y\|_{r,T} \|y''_{\beta}\|_{p,T}} &\leqslant \frac{\|f'\|_{q,[a,b]}^2}{\|f\|_{r,[a,b]} \|f''_{\beta}\|_{p,[a,b]}} C(\varepsilon) \\ &\leqslant \sup\{\Psi_{[a,b]}^{\beta}(f) \colon f \in \mathcal{P}_{[a,b]}^0\} C(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $C(\varepsilon)=\dfrac{(1+\varepsilon)^3(1+(3\varepsilon)^{1/p})(1+21\varepsilon^{1/2})^2}{(1-\varepsilon)}$. В силу свойств функционала Ψ_H^β

$$\sup\{\Psi_{[a,b]}^\beta(f)\colon f\in\mathcal{P}_{[a,b]}^0\}=\sup\{\Psi_{[0,1]}^\beta(f)\colon f\in\mathcal{P}_{[0,1]}^0\},$$

поэтому

$$(K_\beta^{1,2}(q,r,p,\mathbb{R}))^2=\sup\Psi_{\mathbb{R}}^\beta(y)\leqslant\sup\{\Psi_{[0,1]}^\beta(f)\colon f\in\mathcal{P}_{[0,1]}^0\}C(\varepsilon).$$

В среднем выражении верхняя грань берется по всем $y\in L_{r,p}^2(\mathbb{R})$ ($y\in L_{r,p,+}^2(\mathbb{R})$ при $\beta=0$). Устремляя $\varepsilon\to 0$, получаем утверждение леммы. □

Обозначим через $\mathcal{U}$ множество функций $u(x)$, $x\in[0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную, и таких, что для некоторого $s\in[0,1]$ $u''(x)\geqslant 0$ п. в. на $[0,s]$, $u''(x)\leqslant 0$ п. в. на $[s,1]$, $u'(0)=u'(1)=0$, функция u обращается в 0 в некоторой точке промежутка $[0,1]$.

Обозначим через $\mathcal{U}_+$ множество функций $u(x)$, $x\in[0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную, и таких, что $u''(x)\geqslant 0$ п. в. на $[0,1]$, $u'(0)=0$, через $\mathcal{U}_+(\gamma)$ — подмножество функций $u\in\mathcal{U}_+$ таких, что $u(\gamma)=0$, $\gamma\in[0,1]$.

Лемма 6. *Пусть $1\leqslant q<\infty$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1/2\leqslant r\leqslant\infty$ удовлетворяют условию $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{2}{q}$. Тогда для $\beta\in[0,1]$ справедлива оценка*

$$\sup\{\Psi_{[0,1]}^\beta(y)\colon y\in\mathcal{P}_{[0,1]}^0\}\leqslant\sup\Psi_{[0,1]}^\beta(u),$$

в которой верхняя грань в правой части берется при $\beta\in(0,1)$ по функциям $u\in\mathcal{U}$, при $\beta=1$ по функциям $u\in\mathcal{U}_+(1)$, при $\beta=0$ по функциям $u\in\mathcal{U}_+$.

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию $y\in\mathcal{P}$, не равную тождественно нулю. Разобьем $[0,1]$ на отрезки с концами $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ такие, что $y'(x)$ обращается в 0 на концах этих отрезков и либо строго положительна, либо строго отрицательна, либо тождественно равна 0 внутри. Пусть $H=\bigcup_{j\in J_1}[x_{j-1},x_j]$ есть объединение тех отрезков из этого разбиения, на которых $y'(x)$ не тождественно равна 0. По лемме 2

$$\Psi_{[0,1]}^\beta(y)\leqslant\Psi_H^\beta(y)\leqslant\max_{j\in J_1}\Psi_{[x_{j-1},x_j]}^\beta(y).$$

Пусть $[x_{j^*-1}, x_{j^*}]$ — один из отрезков $[x_{j-1}, x_j]$, на котором достигается последний максимум. С помощью замены переменного перейдем к отрезку $[0,1]$: введем функцию $f(t) = y(x_{j^*-1} + (x_{j^*} - x_{j^*-1})t)$, $t \in [0,1]$, для нее
$\Psi^{\beta}_{[0,1]}(f) = \Psi^{\beta}_{[x_{j^*-1}, x_{j^*}]}(y)$.

Без ограничения общности мы можем считать, что $f'(x) > 0$ внутри этого отрезка. Действительно, если $f'(x) < 0$ для $x \in (0,1)$, то заменим f на функцию $\overline{f}(x) = f(1-x)$, $x \in [0,1]$. Имеем $\overline{f}''(x) = f''(1-x)$, $x \in [0,1]$; как следствие $\Psi^{\beta}_{[0,1]}(\overline{f}) = \Psi^{\beta}_{[0,1]}(f)$, при этом $\overline{f}'(x) = -f'(1-x) > 0$ для $x \in (0,1)$.

2. Так как $f'(0) = f'(1) = 0$ и f' абсолютно непрерывна, то f'' принимает как отрицательные так и положительные значения на множествах положительной меры. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество точек, в которых достигается максимум $f'(t)$ на $(0,1)$, оно, очевидно, не пусто и содержит свои верхнюю и нижнюю точные грани (поскольку f кусочно-полиномиальная). Положим $m := \min \mathcal{M}$ и $M := \max \mathcal{M}$.

Рассмотрим поведение f на отрезках $[0,m]$, $[M,1]$ и $[m,M]$ при $\beta \in (0,1]$.

2.1. Предположим, что на $(0,m)$ есть интервалы, на которых $f''(x) < 0$. Пусть $(a, a+r)$ — один из таких интервалов с наибольшей длиной. В силу непрерывности f' найдется точка $b \in [a+r, m]$, в которой $f'(b) = f'(a)$. Положим

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{f'(a)}, \quad c_1 = a + \tau + m - b$$

и определим функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,a], \\ f'(a)(x-a) + f(a), & x \in [a, a+\tau], \\ f(x - a - \tau + b), & x \in [a+\tau, c_1]. \end{cases}$$

По построению f_1 является кусочно-полиномиальной непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[0, c_1]$ функцией со свойствами $f_1(0) = f(0)$, $f_1(c_1) = f(m)$,

$f_1'(0)=0$, $f_1'(c_1)=f'(m)$ и имеет, по крайней мере, на один промежуток вогнутости меньше, чем f. В силу леммы 4 имеем

$$\int_a^{a+\tau}|f_1'|^q dx \geqslant \int_a^b |f'|^q dx,$$

$$\int_a^{a+\tau}|f_1|^r dx \leqslant \int_a^b |f|^r dx, \text{ при } 1/2\leqslant r<\infty,$$

и $\|f_1\|_{\infty,[a,a+\tau]}=\|f\|_{\infty,[a,b]}$ при $r=\infty$, следовательно,

$$\|f_1'\|_{q,[0,c_1]}\geqslant\|f'\|_{q,[0,m]},\quad \|f_1\|_{r,[0,c_1]}\leqslant\|f\|_{r,[0,m]}.$$

По построению $\|(f_1)''_\beta\|_{p,[0,c_1]}<\|(f)''_\beta\|_{p,[0,m]}$. Интервалов, на которых $f''(x)<0$, конечное число. Значит, за конечное число, скажем за k, шагов, мы получим кусочно-полиномиальную непрерывно дифференцируемую функцию f_k на промежутке $[0,c_k]$ такую, что $f_k(0)=f(0)$, $f_k(c_k)=f(m)$, $f_k'(0)=0$, $f_k'(c_k)=f'(m)$, $f_k''(x)\geqslant 0$ на $[0,c_k]$ и

$$\|f_k'\|_{q,[0,c_k]}\geqslant\|f'\|_{q,[0,m]},\quad \|f_k\|_{r,[0,c_k]}\leqslant\|f\|_{r,[0,m]},\quad \|(f_k)''_\beta\|_{p,[0,c_k]}<\|(f)''_\beta\|_{p,[0,m]}. \tag{1.52}$$

Положим $\phi_1=f_k$, $s_1=c_k$.

Если $f''\geqslant 0$ на $(0,m)$, то положим $\phi_1=f$, $s_1=m$.

2.2. Предположим, что на $(M,1)$ есть интервалы, на которых $f''(x)>0$. Тогда на $(M,1)$ найдется конечное число точек локального максимума производной. Обозначим через b наименьшую из них, тогда в силу непрерывности f' найдется точка $a\in[M,b]$, в которой $f'(b)=f'(a)$. Положим

$$\tau=\frac{f(b)-f(a)}{f'(a)},\quad c_1=a+\tau+1-b$$

и определим функцию

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[M,a],\\ f'(a)(x-a)+f(a), & x\in[a,a+\tau],\\ f(x-a-\tau+b), & x\in[a+\tau,c_1].\end{cases}$$

По построению f_1 является кусочно-полиномиальной непрерывно-дифференцируемой на $[M, c_1]$ функцией со свойствами $f_1(M) = f(M)$, $f_1(c_1) = f(1)$ $f_1'(c_1) = 0$, $f_1'(M) = f'(M)$ и имеет, по крайней мере, на один промежуток выпуклости меньше, чем f. Так же, как в п. 1, применяя лемму 5, получаем соотношения

$$\|f_1'\|_{q,[M,c_1]} \geqslant \|f'\|_{q,[M,1]}, \quad \|f_1\|_{r,[M,c_1]} \leqslant \|f\|_{r,[M,1]}, \quad \|(f_1)''_\beta\|_{p,[M,c_1]} < \|(f)''_\beta\|_{p,[M,1]}.$$

Локальных максимумов конечное число. Значит, за конечное число, скажем i, шагов, мы получим кусочно-полиномиальную непрерывно дифференцируемую функцию f_i на промежутке $[M, c_i]$, такую, что $f_i(M) = f(M)$, $f_i(c_i) = f(1)$, $f_i'(M) = f'(M)$, $f_i'(c_i) = 0$, $f_i''(x) \geqslant 0$ на $[M, c_i]$ и

$$\|f_i'\|_{q,[M,c_i]} \geqslant \|f'\|_{q,[M,1]}, \quad \|f_i\|_{r,[M,c_i]} \leqslant \|f\|_{r,[M,1]}, \quad \|(f_i)''_\beta\|_{p,[M,c_i]} < \|(f)''_\beta\|_{p,[M,1]}. \tag{1.53}$$

Положим $\phi_2 = f_i$, $s_2 = c_i$.

Если $f'' \leqslant 0$ на $(M, 1)$, то положим $\phi_2 = f$, $s_2 = 1$.

2.3. Рассмотрим отрезок $[m, M]$. Если он не вырождается в точку, то определим числа

$$\tau = \frac{f(M) - f(m)}{f'(m)}, \quad s_3 = m + \tau$$

и функцию

$$\phi_3(x) = f'(m)(x - m) + f(m), \quad x \in [m, s_3].$$

По построению ϕ_3 является кусочно-полиномиальной непрерывно-дифференцируемой функцией на отрезке $[m, s_3]$ со свойствами $\phi_3(m) = f(m)$, $\phi_3(s_3) = f(M)$, $\phi_3'(m) = f'(m)$, $\phi_3'(s_3) = f'(M)$. Как и выше, на основании леммы 5 мы имеем

$$\|\phi_3\|_{q,[M,s_3]} \geqslant \|f'\|_{q,[m,M]}, \quad \|\phi_3\|_{r,[M,s_3]} \leqslant \|f\|_{r,[m,M]}, \quad \|(\phi_3)''_\beta\|_{p,[M,s_3]} < \|(f)''_\beta\|_{p,[m,M]}.$$

Если $m = M$, то полагаем $\phi_3 = f$, $s_3 = M$.

2.4. Теперь обозначим $c_0 = s_1 + s_2 + s_3 - m - M$ и определим функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & x \in [0, s_1], \\ \phi_3(x - s_1 + m), & x \in [s_1, s_1 + s_3 - m], \\ \phi_2(x - s_1 - s_3 + m + M), & x \in [s_1 + s_3 - m, c_0]. \end{cases} \tag{1.54}$$

Функция f_0 кусочно-полиномиальная и непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, c_0]$, на отрезке $[0, s_1]$ (не строго) выпукла, на отрезке $[s_1, c_0]$ (не строго) вогнута. В виду соотношений (1.52), (1.53), (1.54) имеем

$$\Psi^{\beta}_{[0,c_0]}(f_0) \geqslant \Psi^{\beta}_{[0,1]}(f).$$

Без ограничения общности можно считать, что где-то на $[0, 1]$ функция $f_0(x)$ обращается в ноль, иначе можно добавить к функции f_0 положительную или отрицательную константу и тем самым уменьшить $\|f_0\|_{r,[0,c_0]}$.

3.1. Если $\beta \in (0, 1)$, то положив $u(x) = f_0(x/c_0)$, $x \in [0, 1]$, получим функцию $u \in \mathcal{U}$.

3.2. Докажем, что при $\beta = 1$ можно ограничиться функциями из $\mathcal{U}_+(1)$. Преобразуем построенную в п. 2.4 функцию f_0 следующим образом. Обозначим через d ноль функции f_0 на $(0, c_0)$. В силу леммы 2

$$\Psi^1_{[0,c_0]}(f_0) \leqslant \max\{\Psi^1_{[0,d]}(f_0), \Psi^1_{[d,c_0]}(f_0)\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что последний максимум достигается на левом отрезке $[0, d]$ (иначе можно заменить f_0 на функцию $-f_0(c_0 - x)$).

Если $f_0''(x) \geqslant 0$ почти всюду на $[0, d]$, то положив $u(x) = f_0(x/d)$, $x \in [0, 1]$, получим требуемую функцию $u \in \mathcal{U}$.

Если $f_0'' < 0$ на множестве положительной меры на $[0, d]$, то по построению это означает, $f'' \geqslant 0$ п. в. на $[0, s_3]$ и $f'' \leqslant 0$ п. в. на $[s_3, d]$ для некоторой точки $s_3 \in (0, d)$. Применим на $[s_3, d]$ преобразование как в п. 2.1. Положим

$\tau = \dfrac{f(d) - f(s_3)}{f'(s_3)}$ и переопределим функцию f_0 на отрезке $[s_3, s_3 + \tau]$, взяв

$$\begin{cases} f_1(x) = f_0(x), & x \in [0, s_3], \\ f_0'(s_3)(x - s_3) + f_0(s_3), & x \in (s_3, s_3 + \tau]. \end{cases}$$

Будем иметь $\Psi^1_{[0,d]}(f_0) \leqslant \Psi^1_{[0,s_3+\tau]}(f_1)$, $f_1'' \geqslant 0$ на $[0, s_3 + \tau]$. Положив

$$u(x) = f_1(x/(s_3 + \tau)),\ x \in [0, 1],$$

получим функцию $u \in \mathcal{U}_+(1)$.

3.3. Пусть $\beta = 0$. Рассмотрим функцию $y \in \mathcal{P}$, не равную тождественно нулю. Повторим доказательство с п. 1 по п. 2.1. В силу п. 1. получим функцию f, на отрезке $[0, 1]$ такую, что $f'(0) = f'(1) = 0$, производная $f'(x) \geqslant 0$ и абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$, $\Psi^0_{[0,1]}(y) \leqslant \Psi^0_{[0,1]}(f)$ и m — наименьшая из точек, в которых $f'(x)$ достигает максимума на $[0, 1]$. Обозначим $\tau = \dfrac{f(1) - f(m)}{f'(m)}$ и построим функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, m], \\ f'(m)(x - m) + f(m), & x \in [m, m + \tau]. \end{cases}$$

В силу п. 2.1 получим функцию ϕ_1 на промежутке $[0, s_1]$ такую, что $\phi_1(0) = f(0)$, $\phi_1(s_1) = f(m)$, $\phi_1'(0) = 0$, $\phi_1'(s_1) = f'(m)$, $\phi_1''(x) \geqslant 0$ на $[0, s_1]$ и

$$\|\phi_1'\|_{q,[0,s_1]} \geqslant \|f'\|_{q,[0,m]}, \quad \|\phi_1\|_{r,[0,s_1]} \leqslant \|f\|_{r,[0,m]}, \quad \|(\phi_1)''_+\|_{p,[0,s_1]} \leqslant \|(f)''_+\|_{p,[0,m]}. \tag{1.55}$$

Построим функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & x \in [0, s_1], \\ f'(s_1)(x - s_1) + f(s_1), & x \in [s_1, s_1 + \tau]. \end{cases}$$

Для этой функции по лемме 4 $\Psi^0_{[0,1]}(f) \leqslant \Psi^0_{[0,m+\tau]}(f_1)$. Функция $u(x) = f_1(x/(s_1 + \tau))$, $x \in [0, 1]$, принадлежит классу $\mathcal{U}_+$ и в силу предыдущего

$$\Psi^0_{[0,1]}(u) = \Psi^0_{[0,m+\tau]}(f_1) \geqslant \Psi^0_{[0,1]}(y).$$

Лемма доказана. $\square$

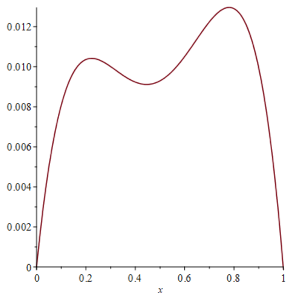

Рис. 3: Функция f'.

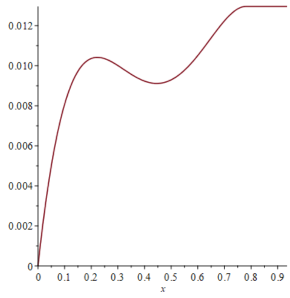

Рис. 4: Функция f_0'.

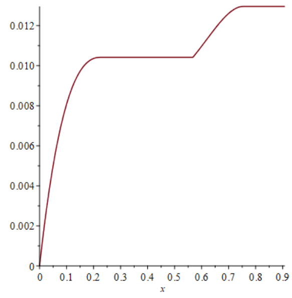

Рис. 5: Функция f_1'.

Проиллюстрируем построения п. 3.3 доказательства леммы 6. На рисунках 3–5 изображен пример производной функции f' и построенные по ней производные функции f_0' и f_1'. Как видно из рис. 5, призводная f_1' не убывает, а значит функция $f_1 \in \mathcal{U}_+$. Следовательно, на ней процесс построения завершается.

1.3 Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Согласно леммам 5 и 6 для $\beta \in (0, 1]$

$$K_\beta^{1,2}(q, p, r, \mathbb{R}) \leqslant \overline{K}_\beta(q, p, r, [0, 1]).$$

1. Любую функцию $u_0 \in \mathcal{U}$ можно продолжить четно на промежуток $[-1, 0)$, а затем 2-периодически на $\mathbb{R}$. Это продолжение также будем обозначать u_0. С помощью преобразования $u = u_0(x/2)$ получаем 1-периодическую функцию.

Аналогично, любую функцию $u_0 \in \mathcal{U}_+(1)$ можно, сохраняя гладкость функции и первой производной, продолжить нечетно относительно точки $x = 1$ на промежуток $(1, 2]$, затем четно на промежуток $[-2, 0)$, и 4-периодически на $\mathbb{R}$. Это продолжение также будем обозначать u_0. С помощью преобразования $u = u_0(x/4)$ получаем 1-периодическую функцию.

Таким образом,

$$\overline{K}_\beta(q, p, r, [0, 1]) \leqslant K_\beta^{1,2}(q, r, p, \mathbb{T}), \qquad \beta \in (0, 1].$$

2. Установим обратное неравенство:

$$K_\beta^{1,2}(q,p,r,\mathbb{T}) \leqslant K_\beta^{1,2}(q,p,r,\mathbb{R}), \quad \beta \in (0,1].$$

Существует такое число $\gamma \in (0,1/2)$, что $u(\gamma) = u(0)/2$. Используя это число, построим последовательность четных на оси функций h_n, заданных следующим образом:

$$h_n(x) = \begin{cases} u(x), & x \in [0, n+\gamma), \\ u(0) - u(n+2\gamma - x), & x \in [n+\gamma, n+2\gamma], \\ 0, & x \in (n+2\gamma, +\infty). \end{cases}$$

Легко проверить, что $h_n \in L^2_{r,p}(\mathbb{R})$ и для этой последовательности выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \Psi^\beta_{\mathbb{R}}(h_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\|h_n'\|_{q,[0,1]}}{\|h_n\|_{r,[0,1]}\|(h_n'')_\beta\|_{p,[0,1]}} = \Psi^\beta_{[0,1]}(u).$$

Следовательно,

$$K_\beta^{1,2}(q,r,p,\mathbb{T}) \leqslant K_\beta^{1,2}(q,p,r,\mathbb{R}), \quad \beta \in (0,1].$$

Теорема доказана. $\square$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится дополнительный факт о расположении нулей экстремальных функций в неравенстве (1.17), который следует из следующей леммы.

Лемма 7. *Если* $0 < r < 1$, *то*

$$\sup\{\Psi^0_{[0,1]}(u)\colon u \in \mathcal{U}_+\} \leqslant \sup\{\Psi^0_{[0,1]}(u)\colon u \in \mathcal{U}_+(\gamma),\ \gamma \in [0,1)\},$$

если $1 \leqslant r \leqslant \infty$, *то*

$$\sup\{\Psi^0_{[0,1]}(u)\colon u \in \mathcal{U}_+\} \leqslant \sup\{\Psi^0_{[0,1]}(u)\colon u \in \mathcal{U}_+(\gamma),\ \gamma \in [1/2,1)\}.$$

Доказательство. В функционале Ψ при изменении функции u на константу изменяется только L_r-норма функции. Поэтому, для доказательства первой части леммы, достаточно показать, что для любой функции $u \in \mathcal{U}_+$ найдется такое число $\gamma \in [0, 1)$, что

$$\|u(\cdot)\|_{r,[0,1]} \geqslant \|u(\cdot) - u(\gamma)\|_{r,[0,1]}. \tag{1.56}$$

Если функция u обращается в ноль в некоторой точке $\gamma \in [0, 1)$, то доказывать нечего.

1. Установим справедливость (1.56) для любой функции $u \in \mathcal{U}_+$, неположительной на отрезке $[0, 1]$.

Для $r = \infty$ утверждение очевидно. Пусть $0 < r < \infty$. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\int_0^1 |u(x)|^r dx \geqslant \int_0^1 |u(x) - u(1-\varepsilon)|^r dx. \tag{1.57}$$

Поскольку функция u не убывает и не положительна, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ справедливо $|u(x)| = -u(x) > -u(x) + u(1-\varepsilon) = |u(x) - u(1-\varepsilon)|$ при $x \in [0, 1-\varepsilon]$, откуда получается

$$\int_0^{1-\varepsilon} |u(x)|^r dx \geqslant \int_0^{1-\varepsilon} |u(x) - u(1-\varepsilon)|^r dx. \tag{1.58}$$

В силу того, что функция $-u'(x) + u'(2-\varepsilon-x)$ не возрастает при $x \in [1-\varepsilon, 1]$, справедливо неравенство

$$\min_{x\in[1-\varepsilon,1]} \{-u(x) - u(2-\varepsilon-x)\} = -u(1-\varepsilon) - u(1) \geqslant -u(1-\varepsilon),$$

из которого следует

$$|u(2-\varepsilon-x)| = -u(2-\varepsilon-x) \geqslant -u(1-\varepsilon) + u(x) = |u(x) - u(1-\varepsilon)|.$$

Тогда

$$\int_{1-\varepsilon}^1 |u(x)|^r dx = \int_{1-\varepsilon}^1 |u(2-\varepsilon-x)|^r dx \geqslant \int_{1-\varepsilon}^1 |u(x) - u(1-\varepsilon)|^r dx. \tag{1.59}$$

Сложив (1.58) и (1.59), получим (1.57).

Для неотрицательных на [0,1] функций и $0 < r < \infty$ доказательство аналогично пункту 2, что завершает доказательство для случая $0 < r < 1$.

2. Установим справедливость (1.56) с $\gamma \in [1/2, 1)$ для любой функции $u \in \mathcal{U}_+$, положительной на отрезке $[1/2, 1]$. Для $r = \infty$ утверждение очевидно в силу выпуклости и неубывания функции u. Пусть $1 \leqslant r < \infty$.

Если $r = 1$, то положим $\gamma = 1/2$, $c = u(1/2)$. Тогда для $x \in [1/2, 1]$ разность

$$|u(x)| - |u(x) - c| = c,$$

а для $x \in [0, 1/2]$ разность

$$|u(x)| - |u(x) - c| \geqslant -u(x) + u(x) - c = -c,$$

поэтому

$$\int_0^1 |u(x)|dx - \int_0^1 |u(x) - c|dx = \int_0^1 (|u(x)| - |u(x) - c|)dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^{1/2} (-c)dx + \int_{1/2}^1 c\,dx = 0.$$

Рассмотрим $r > 1$. Для $c \in (u(0), u(1/2)]$ обозначим через x_c наименьшую точку $x \in [0, 1/2]$, в которой $u(x_c) = c$. Продифференцируем интеграл $J(c) = \int_0^1 |u(x) - c|^r dx$ по параметру c, получим

$$J'(c) = -\int_0^1 r|u(x) - c|^{r-1} \operatorname{sign}(u(x) - c)dx =$$
$$= r\int_0^{x_c} (c - u(x))^{r-1}dx - r\int_{x_c}^1 (u(x) - c)^{r-1}dx.$$

Заметим, что в силу неубывания u', для любого $t \in [0, x_c]$ справедливо

$$c - u(x_c - t) = \int_{x_c - t}^{x_c} u'(x)dx \leqslant \int_{x_c}^{x_c + t} u'(x)dx = u(x_c + t) - c.$$

Учитывая, что $x_c \in [0, 1/2]$, получаем оценку

$$\int_0^{x_c} (c - u(x))^{r-1}dx \leqslant \int_{x_c}^1 (u(x) - c)^{r-1}dx,$$

которая позволяет оценить знак производной $J'(c) \leqslant 0$ для $c \in (0, u(1/2)]$. Следовательно, $J(0) \geqslant J(u(1/2))$, т. е. неравенство (1.56) выполняется, по крайне мере, для $\gamma = 1/2$.

Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. 1. Согласно леммам 5 и 6

$$K_+^{1,2}(q,p,r,\mathbb{R}) \leqslant \overline{K}_+(q,p,r,[0,1]).$$

Докажем, что

$$\overline{K}_+(q,p,r,[0,1]) \leqslant K_+^{1,2}(q,p,r,\mathbb{T}). \tag{1.60}$$

Возьмем функцию $u \in \mathcal{U}_+$. Ввиду леммы (7) можно считать, что $u(x_0) = 0$ для некоторой точки $x_0 \in [0,1)$ и u не тождественный ноль. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек интервала $(x_0, 1)$ со свойством

$$\int_{[0,z_n]} |u'|^q dx \geqslant (1 - 1/n) \int_{[0,1]} |u'|^q dx. \tag{1.61}$$

На отрезке $[0,1]$ определим функции h_n равенствами

$$h_n(x) = \begin{cases} u(x), & x \in [0, z_n], \\ \dfrac{u'(z_n)}{2(z_n - 1)}(x - z_n)(x + z_n - 2) + u(z_n), & x \in (z_n, 1]. \end{cases}$$

Построенная функция h_n непрерывно дифференцируема и $h_n'(0) = h_n'(1) = 0$. Продолжим функцию h_n четно относительно $x = 1$ на отрезок $[1,2]$, а затем 2-периодически на $\mathbb{R}$.

По построению $(h_n'')_+ \leqslant v_+''$ и $|h_n| \leqslant |u|$ на отрезке $[0,1]$. Поэтому

$$\|h_n\|_{r,[0,1]} \leqslant \|u\|_{r,[0,1]} \text{ и } \|(h_n)_+''\|_{p,[0,1]} \leqslant \|u_+''\|_{p,[0,1]}.$$

В силу выбора (1.61) точки z_n мы имеем

$$\int_{[0,1]} |h_n'|^q dx \geqslant \int_{[0,z_n]} |h_n'|^q dx = \int_{[0,z_n]} |u'|^q dx \geqslant (1 - 1/n) \int_{[0,1]} |u'|^q dx.$$

Эти соотношения позволяют написать неравенства

$$\Psi^0_{[0,1]}(u) = \frac{\|u'\|^2_{q,[0,1]}}{\|u\|_{r,[0,1]}\|u''\|_{p,[0,1]}} \leqslant \frac{\|h_n'\|^2_{q,[0,1]}}{(1-1/n)^{2/q}\|h_n\|_{r,[0,1]}\|(h_n'')_+\|_{p,[0,1]}}$$
$$= \frac{1}{(1-1/n)^2}\Psi^0_{[0,2]}(h_n).$$

Отсюда следует (1.60).

Обратное неравенство

$$K^{1,2}_+(q,p,r,\mathbb{T}) \leqslant K^{1,2}_+(q,p,r,\mathbb{R})$$

устанавливается также, как в п. 2 доказательства теоремы 1.

2. Докажем, что экстремальных функций в неравенстве (1.17) на оси и периоде не существует. Рассмотрим случай $G=\mathbb{R}$. От противного, предположим, что для некоторой функции $y \in L^n_{r,p,+}(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\|y'\|_{q,\mathbb{R}} = K^{1,2}_+(q,r,p,\mathbb{R})\|y\|^{1/2}_{r,\mathbb{R}}\|y''_+\|^{1/2}_{p,\mathbb{R}}.$$

В силу непрерывности функции y' множество точек, в которых $y'(x)\neq 0$, представимо в виде не более чем счетного объединения интервалов H_j, $j\in J$, таких, что $y'(x)$ обращается в 0 на концах этих интервалов (кроме концов, равных $\pm\infty$) и либо строго положительна, либо строго отрицательна внутри. Пусть $H=\bigcup_{j\in J} H_j$, $H_0=\mathbb{R}\setminus H$. Согласно лемме 2

$$\Psi^0_{\mathbb{R}}(y) \leqslant \max\{\Psi^0_{H_0}(y), \Psi^0_H(y)\} = \Psi^0_H(y) \leqslant \sup_{j\in J}\Psi^0_{H_j}(y). \tag{1.62}$$

Если хотя бы одно из неравенств в (1.62) строгое, то функция y не является экстремальной. Предположим, что оба неравенства обращаются в равенства. Тогда согласно лемме 2 $\Psi^0_{\mathbb{R}}(y)=\Psi^0_{H_j}(y)$ для всех $j\in J$.

Рассмотрим конечный интервал H_j. Без ограничения общности можно считать, что $H_j=(0,1)$ и $y'(x)>0$. Аналогично доказательству леммы 6 пусть m — наименьшая из точек, в которых $y'(x)$ достигает максимума на $(0,1)$. Обозначим $\tau = \dfrac{y(1) - y(m)}{y'(m)}$ и построим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y(x), & x \in [0, m], \\ y'(m)(x - m) + y(m), & x \in [m, m + \tau]. \end{cases}$$

По лемме 4 получаем $\|y_0'\|_{q,[m,m+\tau]} \geqslant \|y'\|_{q,[m,1]}$, $\|y_0\|_{r,[m,m+\tau]} \geqslant \|y\|_{r,[m,1]}$, при этом ввиду того, что y_0' не тождественно равна M и либо $q \neq 1$, либо $r < \infty$, хотя бы одно из неравенств строгое. Отсюда вытекает, что $\Psi^0_{[0,1]}(y) < \Psi^0_{[0,m+\tau]}(y_0)$. Положим $u(x) = y_0(x/(m+\tau))$, $x \in [0, 1]$ и повторим для функции u рассуждения п. 1 доказательства теоремы 2. Получим

$$\Psi^0_{\mathbb{R}}(y) < \Psi^0_{[0,m+\tau]}(y_0) = \Psi^0_{[0,1]}(u) \leqslant (K_+^{1,2}(q, r, p, \mathbb{T}))^2 = (K_+^{1,2}(q, r, p, \mathbb{R}))^2.$$

Следовательно, функция y не экстремальная.

Теперь рассмотрим случай, когда H_j бесконечный интервал. Без ограничения общности предположим, что $y'(x) > 0$ на интервале $H_j = (-\infty, 0)$. Пусть M — наибольшая из точек глобального максимума $y'(x)$ на $(-\infty, 0)$, хотя бы одна такая точка существует, т. к. $y'(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ и $y'(0) = 0$. Обозначим $\tau = \dfrac{y(0) - y(M)}{y'(M)}$ и рассмотрим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y(x), & x \in [-\infty, M], \\ y'(M)(x - M) + y(M), & x \in [M, M + \tau]. \end{cases}$$

В силу леммы 4 $\Psi^0_{H_j}(y) < \Psi^0_{(-\infty,M+\tau]}(y_0)$. Рассмотрим сдвиг функции

$$y_1(x) = y_0(x - M - \tau),$$

для него $\Psi^0_{(-\infty,M+\tau]}(y_0) = \Psi^0_{(-\infty,0]}(y_1)$. Функция $y_1(x) > 0$. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям $2M + \tau < z_n < 0$,

$$\int_{(-\infty,z_n]} |y_1'|^q dx \geqslant (1 - 1/n) \int_{(\infty,0]} |y_1'|^q dx.$$

На луче $(-\infty, 0]$ определим функции y_n равенствами

$$y_n(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (-\infty, z_n], \\ \dfrac{y_1'(z_n)}{2z_n}x^2 + y_1(z_n) - 2y_1'(z_n)z_n, & x \in (z_n, 0], \\ y_n(-x), & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Функции $y_n \in L^n_{r,p,+}(\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^0_{\mathbb{R}}(y_n) = \Psi^0_{(-\infty,0]}(y_1)$. Наконец,

$$\Psi^0_{H_j}(y) < \Psi^0_{(-\infty,M+\tau]}(y_0) = \Psi^0_{(-\infty,0]}(y_1) \leqslant$$

$$\leqslant \sup\{\Psi^0_{\mathbb{R}}(h)\colon h \in L^2_{r,p,+}(\mathbb{R})\} = (K^{1,2}_{+}(q, r, p, \mathbb{R}))^2.$$

Таким образом, мы получили неравенство для бесконечного промежутка.

Для завершения доказательства отметим, что при $G = \mathbb{T}$ достаточно повторить рассуждения части 1. $\square$

Глава 2. Точные константы в некоторых неравенствах колмогоровского типа

2.1 Точное неравенство для норм $\|y'\|_2$, $\|y\|_1$, $\|y''_+\|_\infty$

Целью раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *При $q = 2$, $r = 1$, $p = \infty$, $k = 1$, $n = 2$ для точной константы в неравенстве* (1.17) *справедливо равенство*

$$K_+^{1,2}(2,1,\infty,\mathbb{R}) = K_+^{1,2}(2,1,\infty,\mathbb{T}) = \overline{K}_+(2,1,\infty,[0,1]) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

В задаче на отрезке $[0,1]$ экстремальными являются функции

$$\overline{y}(x) = c(x^2 - 1/4), \quad c > 0.$$

Лемма 8. *Для функций $u \in \mathcal{U}_+(0)$ выполняются следующие точные неравенства:*

$$u'(x)^2 \leqslant 2u(x)\|u''\|_{\infty,[0,1]}, \tag{2.63}$$

$$\int_{0.5}^{1}(u'(x))^2dx - 2\int_{0.5}^{1}|u(x)|dx\,\|u''\|_{\infty,[0,1]} \leqslant 0. \tag{2.64}$$

Равенства в (2.63) *и* (2.64) *достигаются, например, на функциях $u(x) = x^2$.*

Доказательство. Положим $c = u'(x)$ и $d = \|u''\|_{\infty,[0,1]}$, очевидно, $c \leqslant d \cdot x$. Для $0 \leqslant t \leqslant x$ имеем

$$u'(t) = u'(x) - \int_t^x u''(\eta)d\eta \geqslant c - d(x-t),\ x \in [0,1].$$

Отсюда следует (2.63)

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt \geqslant \int_{x-c/d}^{x}(c - d(x-t))dt = \frac{c^2}{2d} = \frac{u'(x)^2}{2d}.$$

Интегрируя неравенство (2.63) по отрезку $[0.5, 1]$, получаем (2.64). Подстановка функции $u(x) = x^2$ в (2.64) показывает точность константы. □

Доказательство теоремы 3. Функции $u \in \mathcal{U}_+$ монотонны на отрезке $[0,1]$. Лучшая аппроксимация функции u константами в $L_1[0,1]$ обеспечивается значением $u(0.5)$ [27, Theorem 10.4]. Таким образом, достаточно рассматривать задачу на функциях $u \in \mathcal{U}_+(0.5)$. Более того, для упрощения вычислений, без ограничения общности преположим, что $\|u''\|_{\infty,[0,1]} = 1$.

Введем функционал

$$\mathcal{A}(u) = \int_0^1 \left((u')^2 - \frac{8}{3}|u| \right) dx.$$

Нам необходимо показать, что $\mathcal{A}(u) \leqslant 0$. Любая функция $u \in \mathcal{U}_+(0.5)$ может быть представлена в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x), & x \in [0, 0.5], \\ u'(0.5)(x - 0.5), & x \in [0.5, 1], \end{cases} \qquad u_2(x) = u(x) - u_1(x).$$

Легко увидеть, что $u_2(x) = 0$, $x \in [0, 1/2]$, и u_1, $u_2 \in \mathcal{U}_+(0.5)$.

В силу того, что $u_1'(x) = u'(0.5)$ и $u_1(x) \geqslant 0$, $u_2(x) \geqslant 0$ для $x \in [0.5, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u) &= \int_0^{0.5} \left((u')^2 - \frac{8}{3}|u| \right) dx + \int_{0.5}^1 (u_1' + u_2')^2 dx - \frac{8}{3} \int_{0.5}^1 (u_1 + u_2) dx \\ &= \int_0^{0.5} \left((u')^2 - \frac{8}{3}|u| \right) dx + 2u'(0.5) \int_{0.5}^1 u_2' dx \\ &+ \int_{0.5}^1 \left((u_2')^2 - \frac{8}{3} u_2 \right) dx + \frac{u'(0.5)^2}{2} - \frac{u'(0.5)}{3}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Для того, чтобы оценить (2.65) потребуются дополнительные неравенства. Интегрируя по частям и применяя свойство $u(0.5) = u'(0) = 0$, получаем

$$\int_0^{0.5} (u')^2 dx = u'(0.5)u(0.5) - u'(0)u(0) - \int_0^{0.5} u u'' dx = \int_0^{0.5} |u| u'' dx,$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\int_0^{0.5} \left((u')^2 - \frac{8}{3}|u| \right) dx \leqslant \int_0^{0.5} \left((u')^2 - |u| \right) dx \leqslant \int_0^{0.5} \left((u')^2 - |u|u'' \right) dx = 0. \tag{2.66}$$

Посредством (2.64) получаем

$$\int_{0.5}^{1} \left((u_2')^2 - \frac{8}{3} u_2 \right) dx \leqslant \int_{0.5}^{1} \left((u_2')^2 - 2u_2 \right) dx \leqslant 0. \tag{2.67}$$

Заметим, что хотя бы одно из неравенств (2.66) и (2.67) обязано быть строгим. Действительно равенство в (2.66) возможно только если $u(x) = 0$, $x \in [0, 0.5]$, и равенство в (2.67) возможно только если $u_2(x) = 0$, $x \in [0.5, 1]$. Оба этих условия выполняются только для функции $u(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Оценки (2.66) и (2.67) влекут

$$\mathcal{A}(u) < u'(0.5) \left(2 \int_{0.5}^{1} u_2' dx + \frac{u'(0.5)}{2} - \frac{1}{3} \right). \tag{2.68}$$

Дальнейшее доказательство разделим на три части.

1. Из условий $0 \leqslant u_2'(x) \leqslant \|u''\|(x - 0.5) = x - 0.5$, $x \in [0.5, 1]$, следует, что

$$2 \int_{0.5}^{1} u_2'(x) dx \leqslant 2 \int_{0.5}^{1} (x - 0.5) dx = \frac{1}{4}. \tag{2.69}$$

Неравенство (2.69) влечет

$$\mathcal{A}(u) < u'(0.5) \left(\frac{1}{4} + \frac{u'(0.5)}{2} - \frac{1}{3} \right) = u'(0.5) \left(\frac{u'(0.5)}{2} - \frac{1}{12} \right). \tag{2.70}$$

Таким образом, если

$$u'(0.5) \leqslant \frac{1}{6}, \tag{2.71}$$

то $\mathcal{A}(u) < 0$ отрицателен, следовательно, для функций удовлетворяющих этому условию теорема 3 доказана.

2. Рассмотрим случай

$$u'(0.5) > \frac{1}{6}. \tag{2.72}$$

Легко проверить, что $\displaystyle\int_{0.5}^{1} u_2' dx = u(1) - \frac{u'(0.5)}{2}$. Воспользовавшись этим вкупе с (2.72) получим следующую оценку в (2.68)

$$\mathcal{A}(u) \leqslant u'(0.5) \left(2u(1) - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \right) = 2u'(0.5) \left(u(1) - \frac{5}{24} \right).$$

Функция $\widetilde{u}(x) = u(x) - u(0) \in \mathcal{U}_+(0)$, следовательно к ней применима лемма 8 В точке $x = 0.5$ имеем $\widetilde{u}(0.5) = -u(0)$, $\widetilde{u}'(0.5) = u'(0,5)$. Следовательно (2.63) превращается в

$$(u'(0.5))^2 \leqslant 2|u(0)|. \tag{2.73}$$

Неравенства (2.72) и (2.73) дают оценку

$$|u(0)| > \frac{1}{72}, \quad u(0) \leqslant -\frac{1}{72}. \tag{2.74}$$

Теперь применим (2.74) и отношение $u(1) = \int_0^1 u' dx + u(0) \leqslant \int_0^1 u' dx - \frac{1}{72}$

$$\mathcal{A}(u) < 2u'(0.5)\left(\int_0^1 u' dx - \frac{1}{72} - \frac{5}{24}\right) = 2u'(0.5)\left(\int_0^1 u' dx - \frac{2}{9}\right). \tag{2.75}$$

Таким образом, теорема 3 доказана для функций $u \in \mathcal{U}_+(0.5)$ удовлетворяющих условиям (2.72) и

$$\int_0^1 u' dx \leqslant \frac{2}{9}. \tag{2.76}$$

Объединив условия (2.71),(2.72) и (2.76) считаем теорему 3 доказанной для всех $u \in \mathcal{U}_+(0.5)$ со свойством (2.76) и $\|u''_+\|_{\infty,[0,1]} = 1$. Более того, такой класс не содержит экстремальных в теореме 3 функций так как, из неравенств (2.70) и (2.75) следует $\mathcal{A}(u) < 0$.

3. Теперь предположим, что

$$\int_0^1 u' dx > \frac{2}{9}. \tag{2.77}$$

Рассмотрим многочлен

$$y(x) = x^2/2 - 1/8.$$

Легко убедиться, что $\mathcal{A}(y) = 0$, $y \in \mathcal{U}_+(0.5)$, и $\|y''\|_{\infty,[0,1]} = 1$. Предположим, что $y \neq u$ и рассмотрим функцию $\overline{u} = y - u$ $\overline{u} \in \mathcal{U}_+(0.5)$. Получаем

$$0 = \mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(u + \overline{u}) = \int_0^1 \left((u')^2 + 2u'\overline{u}' + (\overline{u}')^2 - \frac{8}{3}|u| - \frac{8}{3}|\overline{u}|\right) dx$$
$$= \mathcal{A}(u) + \mathcal{R}(u),$$

где
$$\mathcal{R}(u) := \int_0^1 (\overline{u}')^2 dx + 2\int_0^1 u'\overline{u}' dx - \frac{8}{3}\int_0^1 |\overline{u}| dx. \tag{2.78}$$
Таким образом, $\mathcal{A}(u) < 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(u) > 0$.

Следующая цель – оценить (2.78) снизу. Подстановка $\overline{u}' = y' - u'$ влечет
$$\mathcal{R}(u) = \int_0^1 y'\overline{u}' dx + \int_0^1 u'\overline{u}' dx - \frac{8}{3}\int_0^1 |\overline{u}| dx. \tag{2.79}$$
Проитегрировав по частям, получаем
$$\int_0^1 y'\overline{u}' dx = x\overline{u}\Big|_0^1 - \int_0^1 \overline{u} dx = \overline{u}(1) - \int_0^1 \overline{u} dx. \tag{2.80}$$
Используя непрерывный вариант неравенства Чебышева для сумм [25, № 236] и учитывая предположение (2.77) имеем
$$\int_0^1 u'\overline{u}' dx \geqslant \int_0^1 u' dx \int_0^1 \overline{u}' dx > \frac{2}{9}(\overline{u}(1) - \overline{u}(0)). \tag{2.81}$$
Неравенство (2.81) строгое, так как $\overline{u} \not\equiv 0$. Подставим в (2.79) оценки (2.80) и (2.81)
$$\begin{aligned}\mathcal{R}(u) &> \overline{u}(1) - \int_0^1 \overline{u} dx + \frac{2}{9}(\overline{u}(1) - \overline{u}(0)) - \frac{8}{3}\int_0^1 |\overline{u}| dx \\ &= \frac{11}{9}\overline{u}(1) + \frac{2}{9}|\overline{u}(0)| - \frac{5}{3}\int_0^{0.5} |\overline{u}| dx - \frac{11}{3}\int_{0.5}^1 \overline{u} dx.\end{aligned}$$
Докажем два вспомогательных неравенства. Функция $\overline{u}$ выпукла на $[0.5, 1]$, следовательно, ее график лежит под прямой проходящей через точки $(0.5, \overline{u}(0.5))$ и $(1, \overline{u}(1))$ и выполняется неравенство $\overline{u}(x) \leqslant 2\overline{u}(1)(x - 0.5)$. Следовательно,
$$\int_{0.5}^1 \overline{u} dx \leqslant \frac{1}{4}\overline{u}(1), \quad \text{т.е.} \quad \overline{u}(1) \geqslant 4\int_{0.5}^1 \overline{u} dx. \tag{2.82}$$
Из неравенства $|\overline{u}(0)| > |\overline{u}(x)|$, $x \in [0, 0.5]$ следует, что
$$\int_0^{0.5} |\overline{u}| dx \leqslant \frac{1}{2}|\overline{u}(0)|, \quad \text{т. е.} \quad |\overline{u}(0)| \geqslant 2\int_0^{0.5} |\overline{u}| dx. \tag{2.83}$$
Применяя (2.83) и (2.82) получаем
$$\begin{aligned}\mathcal{R}(u) &> \frac{44}{9}\int_{0.5}^1 \overline{u} dx + \frac{4}{9}\int_0^{0.5} |\overline{u}| dx - \frac{5}{3}\int_0^{0.5} |\overline{u}| dx - \frac{11}{3}\int_{0.5}^1 \overline{u} dx \\ &= \frac{11}{9}\int_{0.5}^1 \overline{u} dx - \frac{11}{9}\int_0^{0.5} |\overline{u}| dx.\end{aligned} \tag{2.84}$$

И наконец, так как функция $\overline{u}'$ не убывает, получаем $\overline{u}'(0.5+\tau) \geqslant \overline{u}'(0.5-\tau)$ для всех $0 \leqslant \tau \leqslant 0.5$. Следовательно, выполняется

$$\overline{u}(0.5+\tau) = \int_{0.5}^{0.5+\tau} \overline{u}' dx \geqslant \left| \int_{0.5}^{0.5-\tau} \overline{u}' dx \right| = |\overline{u}(0.5-\tau)|$$

и $\displaystyle\int_0^{0.5} |\overline{u}| dx \leqslant \int_{0.5}^{1} \overline{u} dx$. Из этого неравенства и (2.84) получаем, что $\mathcal{R}(u) > 0$ и следовательно, $\mathcal{A} < 0$. Таким образом, доказательство завершено для функций из $\mathcal{U}_+(0.5)$, удовлетворяющих (2.77) и $\|u_+''\|_{\infty,[0,1]} = 1$, такие функции могут быть экстремальными в теореме 3 только если $u(x) = y(x) = x^2/2 - 1/8$.

Объединяя заключения частей 2 и 3, считаем теорему доказанной для функций из $\mathcal{U}_+(0.5)$, а значит для класса $\mathcal{U}_+$, что и было нашей целью. Единственными экстремальными функциями являются многочлены $cy(x) = c(x^2/2 - 1/8)$, $c > 0$. $\square$

2.2 Точное неравенство для норм $\|y'\|_{2r/(r+1)}$, $\|y\|_r$, $\|y_\beta''\|_1$

В данном разделе будут получены точные константы в неравенствах

$$\|y'\|_{q,\mathbb{R}} \leqslant K_\beta^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R}) \left(\|y\|_{r,\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}^\beta(y') \right)^{1/2}, \tag{2.85}$$

$$\|y_\pm'\|_{1,\mathbb{R}} \leqslant K_{\pm,\beta}^{1,2}(1,1,V,\mathbb{R}) \left(\|y\|_{1,\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}^\beta(y') \right)^{1/2}.$$

для $y \in L_{1,V}^2(\mathbb{R})$. Мы начнем с определения класса функций $L_{1,V}^2(\mathbb{R})$.

Напомним, что функция y на множестве $G \subset \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию [9, 5.2], если

$$V_G(y) := \sup \sum_{k=1}^{m} |y(x_{k+1}) - y(x_k)| < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем наборам $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1}$ точек из G. Величина $V_G(y)$ называется полной вариацией функции y на множестве G. Положительной и отрицательной вариацией [21, 4.1] функции y соответственно называются величины

$$V_G^+(y) := \sup \sum_{k=1}^{m} (y(x_{k+1}) - y(x_k))_+,$$

$$V_G^-(y) := \sup \sum_{k=1}^{m} (y(x_{k+1}) - y(x_k))_- = V_G^+(-y).$$

Наконец, для $\beta \in [0,1]$ определим несимметричную вариацию

$$V_G^\beta(y) = V_G^+(y) + \beta \cdot V_G^-(y)$$

$$= \sup \sum_{k=1}^{m} \max \left\{ y(x_{k+1}) - y(x_k), -\beta(y(x_{k+1}) - y(x_k)) \right\}.$$

Аналогично случаю полной вариации во всех определениях верхняя грань берется по всевозможным наборам $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1}$ из G. Очевидно, что

$$V_G^1(y) = V_G(y) \;\; \text{и} \;\; V_G^0(y) = V_G^+(y).$$

Если y локально абсолютно непрерывна и $y'_+ \in L_1(\mathbb{R})$, то $\|y'_+\|_{1,\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}}^+(y)$, если же $y' \in L_1(\mathbb{R})$, то $\|y'_\beta\|_{1,\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}}^\beta(y)$, $\beta \in (0,1]$ (эти равенства можно получить небольшой модификацией доказательств из [9, следствие 5.3.7] или [23, гл. IX, § 4, теорема 8]). Поэтому при $p = 1$ неравенства (1.16) и (1.17) естественно рассматривать на более широком в сравнении с $L^n_{r,1}(\mathbb{R})$ множестве функций $y \in L_r(\mathbb{R})$ таких, что $y^{(n-2)}$ локально абсолютно непрерывна и $y^{(n-1)}$ или положительная срезка $y_+^{(n-1)}$ почти всюду на $\mathbb{R}$ совпадают с некоторой функцией ограниченной вариации; обозначим классы таких функций $L^n_{r,V}(\mathbb{R})$ и $L^n_{r,V^+}(\mathbb{R})$ соответственно. Далее мы покажем, что эти классы совпадают и уточним определение класса $L^n_{r,V}(\mathbb{R})$. Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть $r \in (0,\infty]$, $n \geqslant 2$, $y \in L^n_{r,V^+}(\mathbb{R})$. Пусть $g(x) = y^{(n-1)}(x)$ п. в. на $\mathbb{R}$ и $V_{\mathbb{R}}^+(g) < \infty$. Тогда $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и $V_{\mathbb{R}}^-(g) = V_{\mathbb{R}}^+(g)$.*

Доказательство. Из свойства аддитивности положительной вариации следует, что для любой возрастающей неограниченной последовательности точек $\{t_\ell\}_{\ell=1}^\infty$

имеет место равенство

$$V^+_{[t_1,+\infty)}(g) = \sum_{\ell=1}^{\infty} V^+_{[t_\ell,t_{\ell+1}]}(g).$$

Это равенство в свою очередь влечет, что

$$V^+_{[x,+\infty)}(g) \to 0 \text{ при } x \to +\infty. \tag{2.86}$$

Теперь докажем, справедливость равенства

$$g(b) - g(a) = V^+_{[a,b]}(g) - V^-_{[a,b]}(g), \quad a \leqslant b. \tag{2.87}$$

Действительно, для любого набора $a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} = b$ имеем соотношения

$$\sum_{k=1}^{m}(g(x_{k+1}) - g(x_k))_+ - V^-_{[a,b]}(g)$$
$$\leqslant g(b) - g(a)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}(g(x_{k+1}) - g(x_k)) = \sum_{k=1}^{m}(g(x_{k+1}) - g(x_k))_+ - \sum_{k=1}^{m}(g(x_{k+1}) - g(x_k))_-$$
$$\leqslant V^+_{[a,b]}(g) - \sum_{k=1}^{m}(g(x_{k+1}) - g(x_k))_-.$$

Переходя в левой части к верхней грани, а затем в правой части к нижней грани по всем возможным конечным наборам точек, получаем (2.87).

Докажем, что $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. В силу (2.86) для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $V^+_{[x,+\infty)}(g) < \varepsilon$ для всех $x > \delta$. Если предположить, что $g(x) > \varepsilon$ для всех $x > \delta$, то отсюда будет следовать, что $y^{(n-2)}(x)$ возрастает и стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$. Тогда таким же свойством будут обладать и все промежуточные производные, и функция y, что противоречит условию $y \in L_r(\mathbb{R})$. Следовательно, $g(x_0) \leqslant \varepsilon$ для некоторого $x_0 > \delta$. Тогда для всех $x > x_0$ получаем оценку

$$g(x) = g(x) - g(x_0) + g(x_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

По соображениям, аналогичным приведенным выше, существует возрастающая неограниченная последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $g(x_k) > -\varepsilon$. Тогда для любого $x > \delta$ найдется $x_k > x$ и, как следствие,

$$g(x) = g(x) - g(x_k) + g(x_k) = -(g(x_k) - g(x)) + g(x_k) > -\varepsilon - \varepsilon = -2\varepsilon.$$

Таким образом, мы показали, что $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Очевидно, что $g(x) \to 0$ и при $x \to -\infty$. Первое утверждение леммы доказано.

Для получения второго утверждения достаточно перейти к пределу при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ в равенстве (2.87). $\square$

Пусть мы находимся в условиях леммы 9. Как следствие $V_{\mathbb{R}}(g) < \infty$ и $y \in L^n_{r,V}(\mathbb{R})$. Хорошо известно, что функция ограниченной вариации имеет не более чем счетное множество точек разрыва, в которых существуют односторонние пределы. Поэтому функция

$$y^{(n-2)}(x) = y^{(n-2)}(0) + \int_0^x y^{(n-1)}(t)dt = y^{(n-2)}(0) + \int_0^x g(t)dt$$

дифференцируема в точках непрерывности g и

$$\frac{d}{dx} y^{(n-2)}(x) = g(x),$$

а в точках разрыва g функция $y^{(n-2)}$ имеет односторонние производные, равные соответствующим односторонним пределам g, если эти односторонние пределы равны, то $y^{(n-2)}$ также оказывается дифференцируемой.

Таким образом, класс $L^n_{r,V}(\mathbb{R})$ состоит из функций $y \in L_r(\mathbb{R})$ таких, что $y^{(n-2)}$ локально абсолютно непрерывна, производная функция $y^{(n-1)}$ существует на множестве $\mathbb{R} \setminus E_0$, где E_0 не более чем счетно, и имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R} \setminus E_0$.

Далее будет удобно считать, что функция $y^{(n-1)}$ доопределена в точках $x_0 \in E_0$ произвольным числом, лежащим между односторонними пределами в этой точке, т. е. числом из отрезка с концами $y^{(n-1)}(x_0 - 0)$ и $y^{(n-1)}(x_0 + 0)$.

Очевидно, что при таком доопределении

$$V_{\mathbb{R}}(y^{(n-1)}) = V_{\mathbb{R}\setminus E_0}(y^{(n-1)}) \quad \text{и} \quad V^{\pm}_{\mathbb{R}}(y^{(n-1)}) = V^{\pm}_{\mathbb{R}\setminus E_0}(y^{(n-1)}).$$

Сформулируем теперь следствие из леммы 9:

Следствие 2. *При $r \in (0, \infty]$, $n \geqslant 2$ классы $L^n_{r,V}(\mathbb{R})$ и $L^n_{r,V^+}(\mathbb{R})$ совпадают и* $V^{\beta}_{\mathbb{R}}(y^{(n-1)}) = \dfrac{1+\beta}{2} V^1_{\mathbb{R}}(y^{(n-1)})$.

Для для $\beta \in [0,1]$ обозначим через $K^{k,n}_{\beta}(q,r,V,\mathbb{R})$ точную константу в неравенстве

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}} \leqslant K^{k,n}_{\beta}(q,r,V,\mathbb{R}) \|y\|^{1-k/n}_{r,\mathbb{R}} \, V^{\beta}_{\mathbb{R}}(y^{(n-1)})^{k/n}, \quad y \in L^n_{r,V}(\mathbb{R}).$$

Ввиду следствия (2) выполняется равенство

$$K^{k,n}_{\beta}(q,r,V,\mathbb{R}) = \left(\frac{2}{1+\beta}\right)^{k/n} K^{k,n}_{1}(q,r,V,\mathbb{R}). \tag{2.88}$$

Лемма 10. *Для $\beta \in [0,1]$, $\dfrac{n}{q} \leqslant \dfrac{n-k}{r} + k$, $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$, и $q \neq r$ при $k = 0$ справедливо равенство*

$$K^{k,n}_{\beta}(q,r,1,\mathbb{R}) = K^{k,n}_{\beta}(q,r,V,\mathbb{R}).$$

Доказательство. Оценка $K^{k,n}_{\beta}(q,r,1,\mathbb{R}) \leqslant K^{k,n}_{\beta}(q,r,V,\mathbb{R})$ очевидна. Докажем обратное неравенство. Для произвольной функции $g \in L_s$ при $1 \leqslant s \leqslant \infty$ рассмотрим функцию Стеклова

$$g_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} g(x+t)dt = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} g(t)dt. \tag{2.89}$$

Известно, что при $1 \leqslant s < \infty$ имеют место соотношения [24, 13.66–13.68]

$$\|g_h\|_{s,\mathbb{R}} \leqslant \|g\|_{s,\mathbb{R}}, \qquad \lim_{h \to +0} \|g_h\|_{s,\mathbb{R}} = \|g\|_{s,\mathbb{R}}. \tag{2.90}$$

Первое соотношение, очевидно, справедливо и при $s = \infty$. Нетрудно проверить справедливость второго соотношения. Действительно, пусть $M = \|g\|_{\infty,\mathbb{R}}$, а E_{ε}

— множество, на котором $g(x) \geqslant M - \varepsilon$, оно имеет положительную меру. Найдется такой интервал $(x-h, x+h)$, что мера $E_\varepsilon \bigcap (x-h, x+h)$ больше $(1-\varepsilon)2h$. Поэтому

$$\|g_h\|_{\infty,\mathbb{R}} = \max_{t\in\mathbb{R}} |g_h(t)| \geqslant |g_h(x)| = \left|\frac{1}{2h}\int_{(x-h,x+h)} g(t)dt\right| \geqslant M_\varepsilon(1-\varepsilon).$$

Далее, возьмем произвольное множество точек $-\infty < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} < \infty$. Поскольку $g(x_{k+1}+t) - g(x_k+t) \leqslant (g(x_{k+1}+t) - g(x_k+t))_+$, то

$$\sum_{k=1}^{m}(g_h(x_{k+1}) - g_h(x_k))_+ = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}(g(x_{k+1}+t) - g(x_k+t))dt\right)_+$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}(g(x_{k+1}+t) - g(x_k+t))_+dt$$

$$= \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\sum_{k=1}^{m}(g(x_{k+1}+t) - g(x_k+t))_+dt \leqslant \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} V_{\mathbb{R}}^{+}(g)dt = V_{\mathbb{R}}^{+}(g).$$

Отсюда получаются соотношения

$$\begin{gathered} V_{\mathbb{R}}^{+}(g_h) \leqslant V_{\mathbb{R}}^{+}(g), \quad V_{\mathbb{R}}^{-}(g_h) = V_{\mathbb{R}}^{+}((-g)_h) \leqslant V_{\mathbb{R}}^{+}((-g)) = V_{\mathbb{R}}^{-}(g), \\ V_{\mathbb{R}}^{\beta}(g_h) \leqslant V_{\mathbb{R}}^{\beta}(g), \quad \beta\in(0,1]. \end{gathered} \tag{2.91}$$

Возьмем произвольную, не тождественно равную нулю функцию $y \in L_{r,V}^{n}(\mathbb{R})$. Дифференцирование (2.89) приводит к равенству

$$(y_h)'(x) = \frac{1}{2h}(y'(x+h) - y'(x-h)) = (y')_h(x),$$

отсюда по индукции получается

$$(y_h)^{(\ell)} = ((y_h)^{(\ell-1)})' = ((y^{(\ell-1)})_h)' = (y^{(\ell)})_h, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant n-1.$$

На основании этих равенств, скобки в записях $(y_h)^{(\ell)}$ и $(y^{(\ell)})_h$, можно опускать. Функция $y_h^{(n-1)}$, будучи функцией Стеклова, является абсолютно непрерывной, поэтому $y_h \in L_{r,1}^{n}(\mathbb{R})$. В силу (2.90) и (2.91) имеем

$$\|y_h\|_{r,\mathbb{R}} \leqslant \|y\|_{r,\mathbb{R}}, \qquad \lim_{h\to+0}\|y_h^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}} = \lim_{h\to+0}\|(y^{(k)})_h\|_{q,\mathbb{R}} = \|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}},$$

$$\|(y_h^{(n)})_+\|_{1,\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}}^1(y_h^{(n-1)}) = V_{\mathbb{R}}^1((y^{(n-1)})_h) \leqslant V_{\mathbb{R}}^1(y^{(n-1)}),$$
$$\|y_h^{(n)}\|_{1,\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}}^1(y_h^{(n-1)}) = V_{\mathbb{R}}^1((y^{(n-1)})_h) \leqslant V_{\mathbb{R}}^1(y^{(n-1)}).$$

Из этих соотношений вытекают неравенства

$$K_1^{k,n}(q,r,1,\mathbb{R}) \geqslant \frac{\|y_h^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}}}{\|y_h\|_{r,\mathbb{R}}^{\boldsymbol{\alpha}} \|y_h^{(n)}\|_{1,\mathbb{R}}^{1-\boldsymbol{\alpha}}} \geqslant \frac{\|y_h^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}}}{\|y\|_{r,\mathbb{R}}^{\boldsymbol{\alpha}} (V_{\mathbb{R}}^1(y^{(n-1)}))^{1-\boldsymbol{\alpha}}},$$

$$K_1^{k,n}(q,r,1,\mathbb{R}) \geqslant \lim_{h\to 0} \|y_h^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}} \frac{1}{\|y\|_{r,\mathbb{R}}^{\boldsymbol{\alpha}} (V_{\mathbb{R}}^1(y^{(n-1)}))^{1-\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}}}{\|y\|_{r,\mathbb{R}}^{\boldsymbol{\alpha}} (V_{\mathbb{R}}^1(y^{(n-1)}))^{1-\boldsymbol{\alpha}}},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = k/n$. Переходя в последнем неравенстве к верхней грани по $y \in L_{r,V}^n(\mathbb{R})$, получаем утверждение леммы. □

Теорема 4. *Для* $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $q = 2r/(r+1)$ *и* $\beta \in [0,1]$ *справедливо равенство*

$$K_\beta^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R}) = K_\beta^{1,2}(q,r,1,\mathbb{R}) = K_\beta^{1,2}(q,r,1,\mathbb{T}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\beta}}(r+1)^{1/(2r)}. \quad (2.92)$$

Экстремальные функции в неравенстве (2.85)*, принадлежащие множеству* $L_{r,V}^2(\mathbb{R})$*, существуют, например,* $f(x) = (1-|x|)_+$*.*

При $r = \infty$ равенство (2.92) понимается в предельном смысле, т. е. $\lim\limits_{r\to\infty}(r+1)^{1/(2r)} = 1$.

При $\beta = 1$ величина $K_1^{1,2}(1,1,1,\mathbb{R})$ найдена Е. Стейном [34], значения $K_1^{1,2}(2r/(r+1),r,1,\mathbb{R})$ вычислены В.В. Арестовым и В.И. Бердышевым [2]. Приведенное ниже доказательство использует другие подходы.

Доказательство. В силу леммы 10, теорем 1 и 2 и равенства (2.88)

$$K_\beta^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R}) = K_\beta^{1,2}(q,r,1,\mathbb{R}) = K_\beta^{1,2}(q,r,1,\mathbb{T}) = \frac{1+\beta}{2} K_1^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R}),$$

поэтому достаточно вычислить $K_1^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R})$. На основании теоремы 1

$$K_1^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R}) = K_1^{1,2}(q,r,1,\mathbb{R}) = \overline{K}_1(q,r,1,[0,1]) \quad (2.93)$$
$$= (\sup\{\Psi_{[0,1]}^1(u)\colon u \in \mathcal{U}_+(1)\})^{1/2}. \quad (2.94)$$

Рассмотрим не равную тождественно нулю функцию $u \in \mathcal{U}_+(1)$. Оценим сверху величину $\Psi^1_{[0,1]}(u)$. Пусть сначала $1 \leqslant r < \infty$. По лемме 5 для числа $\tau = (u(1) - u(0))/u'(1) = |u(0)|/u'(1)$ и функции $g(x) = u(0) + u'(1)x$ выполняются неравенства

$$\|g'\|_{q,[0,\tau]} \geqslant \|u'\|_{q,[0,1]}, \quad \|g\|_{r,[0,\tau]} \leqslant \|u\|_{r,[0,1]}. \tag{2.95}$$

Вычислим нормы

$$\|u''\|_{1,[0,1]} = \int_0^1 u''(x)dx = u'(1),$$

$$\|g\|_{r,[0,\tau]} = \left(\int_0^\tau (-u(0) - u'(1)x)^r dx\right)^{1/r} = \frac{|u(0)|^{1+1/r}}{u'(1)^{1/r}(r+1)^{1/r}},$$

$$\|g'\|_{q,[0,\tau]} = \left(\int_0^\tau u'(1)^q dx\right)^{1/q} = u'(1)\frac{|u(0)|^{1/q}}{u'(1)^{1/q}} = u'(1)^{1-1/q}|u(0)|^{1/q}.$$

С учетом (2.95) получаем оценку

$$\Psi^1_{[0,1]}(u) \leqslant \frac{\|g'\|^2_{q,[0,\tau]}}{\|g\|_{r,[0,\tau]}} \frac{1}{\|u''\|_{1,[0,1]}}$$

$$= u'(1)^{2-2/q}|u(0)|^{2/q} \frac{u'(1)^{1/r}(r+1)^{1/r}}{|u(0)|^{1+1/r}} \frac{1}{u'(1)} = (r+1)^{1/r},$$

из которой следует неравенство $K^{1,2}_1(q, r, 1, \mathbb{R}) \leqslant (r+1)^{1/(2r)}$.

Для $r = \infty$ нужно в вышеприведенных выкладках положить $q = 2$ и заменить $\|g\|_{r,[0,1]}$ на $\|g\|_{\infty,[0,1]} = |u(0)|$, что приведет к неравенству $\Psi^1_{[0,1]}(u) \leqslant 1$.

Для получения обратного неравенства рассмотрим функцию

$$f(x) = (1 - |x|)_+.$$

В точках $x = -1, 0, 1$ полагаем $f'(x) = 0$. Тогда $f \in L^2_{r,V}(\mathbb{R})$ и

$$\|f'\|_{q,\mathbb{R}} = 2^{1/q}, \quad \|f\|_{r,\mathbb{R}} = \left(\frac{2}{r+1}\right)^{1/r}, \quad V^1_{\mathbb{R}}(f') = 4.$$

Из условия $q = 2r/(1+r)$ следует, что $1/q - (1 + 1/r)/2 = 0$, тогда

$$\frac{\|f'\|_{q,\mathbb{R}}}{(\|f\|_{r,\mathbb{R}} V^1_{\mathbb{R}}(f'))^{1/2}} = \frac{2^{1/q}(r+1)^{1/(2r)}}{(2^{1/r+2})^{1/2}} = \frac{(r+1)^{1/(2r)}}{\sqrt{2}} \leqslant K^{1,2}_1(q, r, V, \mathbb{R}).$$

Поскольку $V_{\mathbb{R}}^{\beta}(f') = 2(1+\beta)$, то функция f является экстремальной в неравенстве (2.88) для всех $\beta \in [0,1]$. Очевидно, что экстремальная функция не единственна. $\square$

Идея доказательства леммы (9) позволяет получить неравенство типа неравенства Хёрмандера в пространстве $L_1(\mathbb{R})$.

Следствие 3. *Для* $\beta \in [0,1]$ *справедливо неравенство*

$$\|y'_{\pm}\|_{1,\mathbb{R}} \leqslant K_{\pm,\beta}^{1,2}(1,1,V,\mathbb{R}) \left(\|y\|_{1,\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}^{\beta}(y')\right)^{1/2}, \quad y \in L_{1,V}^{2}(\mathbb{R}),$$

с точной константой

$$K_{\pm,\beta}^{1,2}(1,1,V,\mathbb{R}) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}.$$

Неравенство обращается в равенство, например, на функции $f(x) = (1-|x|)_{+}$.

Доказательство. Из суммируемости функции $y \in L_{1,V}^{2}(\mathbb{R})$ и ее призводной на оси следует, что стремление к нулю на бесконечности производной $y'(x)$ влечет стремление к нулю и самой функции $y(x)$ при $x \to \infty$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое число $x^*(\varepsilon)$, что $\int\limits_{x^*}^{+\infty} |y'|dx < \varepsilon$ и $|y(x^*)| < \varepsilon$. Тогда для всех $x > x^*$ выполняется оценка

$$|y(x)| \leqslant |y(x^*)| + \int\limits_{x^*}^{x} |y'|dx \leqslant |y(x^*)| + \int\limits_{x^*}^{+\infty} |y'|dx < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $0 = \int_{\mathbb{R}} y'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} y'_{+}(x)dx - \int_{\mathbb{R}} y'_{-}(x)dx$ и $\|y'\|_{1,\mathbb{R}} = 2\|y'_{\pm}\|_{1,\mathbb{R}}$.

Значит, $K_{\pm,\beta}^{1,2}(1,1,V,\mathbb{R}) = \dfrac{K_{\beta}^{1,2}(1,1,V,\mathbb{R})}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\beta}}$. $\square$

2.3 О неравенстве Хёрмандера для положительной срезки второй производной

В завершении работы обратим внимание на некоторые факты, связанные с неравенством Хёрмандера (0.10).

1. Покажем, что если $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k < n$ и разность $n-k$ нечетна, то для точных констант $K^{k,n}_{\pm,\beta}(\infty, r, p, G)$ в неравенствах ($0 < r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$)

$$\|y^{(k)}_{\pm}\|_{\infty,G} \leqslant K^{k,n}_{\pm,\beta}(\infty, r, p, G)\|y\|^{\boldsymbol{\alpha}}_{r,G}\|y^{(n)}_{\beta}\|^{1-\boldsymbol{\alpha}}_{p,G}, \quad y \in L^n_{r,p}(G),$$

на оси $G = \mathbb{R}$ и периоде $G = \mathbb{T}$ справедливо равенство

$$K^{k,n}_{+,\beta}(\infty, r, p, G) = K^{k,n}_{-,\beta}(\infty, r, p, G) = K^{k,n}_{\beta}(\infty, r, p, G). \tag{2.96}$$

Действительно, пусть $y \in L^n_{r,p}(G)$ ($y \in L^n_{r,p,+}(G)$ при $\beta = 0$). Если n четное, а k нечетное, то положим $g(x) = y(-x)$, если n нечетное, а k четное, то положим $g(x) = -y(-x)$. В обоих случаях будем иметь $g^{(k)}(x) = -y^{(k)}(-x)$, $g^{(n)}(x) = y^{(n)}(-x)$, и следовательно, $\|g\|_{r,G} = \|y\|_{r,G}$, $\|g^{(n)}_{\beta}\|_{p,G} = \|y^{(n)}_{\beta}\|_{p,G}$,

$$\|g^{(k)}_{+}\|_{\infty,G} = \|y^{(k)}_{-}\|_{\infty,G}, \quad \|g^{(k)}_{-}\|_{\infty,G} = \|y^{(k)}_{+}\|_{\infty,G}.$$

Значит либо $\|y^{(k)}\|_{\infty,G} = \|y^{(k)}_{+}\|_{\infty,G}$, либо $\|y^{(k)}\|_{\infty,G} = \|y^{(k)}_{-}\|_{\infty,G} = \|g^{(k)}_{+}\|_{\infty,G} = \|g^{(k)}\|_{\infty,G}$. Отсюда вытекает равенство (2.96).

2. Рассмотрим не тождественно равную нулю функцию $y \in L^2_{\infty,\infty}(G)$. Аналогично п. 2 доказательства теоремы 2 обозначим через H_j, $j \in J$, такие интервалы, что $y'(x)$ обращается в 0 на концах этих интервалов (кроме концов, равных $\pm\infty$) и либо строго положительна, либо строго отрицательна внутри интервалов.

Несложные оценки

$$\|y'\|^2_{\infty,G} = \sup_{j\in J}\|y'\|^2_{\infty,H_j} = \sup_{j\in J}\frac{\|y'\|^2_{\infty,H_j}}{\|y\|_{\infty,H_j}\|y''_{+}\|_{\infty,H_j}}\|y\|_{\infty,H_j}\|y''_{+}\|_{\infty,H_j}$$

$$\leqslant \sup_{j\in J}\frac{\|y'\|^2_{\infty,H_j}}{\|y\|_{\infty,H_j}\|y''_{+}\|_{\infty,H_j}}\sup_{j\in J}\|y\|_{\infty,H_j}\|y''_{+}\|_{\infty,H_j} \leqslant \sup_{j\in J}\Psi^0_{H_j}(y)\|y\|_{\infty,G}\|y''_{+}\|_{\infty,G}$$

приводят к неравенству

$$\Psi^0_G(y) = \frac{\|y'\|^2_{\infty,G}}{\|y\|_{\infty,G}\|y''_{+}\|_{\infty,G}} \leqslant \sup_{j\in J}\Psi^0_{H_j}(y). \tag{2.97}$$

Неравенство (2.97) обращается в равенство тогда и только тогда, когда либо для некоторого $j^* \in J$ выполняется

$$\|y'\|_{\infty,H_{j^*}} = \|y'\|_{\infty,G}, \quad \|y\|_{\infty,H_{j^*}} = \|y\|_{\infty,G}, \quad \|y''_{+}\|_{\infty,H_{j^*}} = \|y''_{+}\|_{\infty,G}, \tag{2.98}$$

либо для некоторой последовательности $\{j_\ell\}$ при $\ell \to +\infty$

$$\|y'\|_{\infty,H_{j_\ell}} \to \|y'\|_{\infty,G}, \quad \|y\|_{\infty,H_{j_\ell}} \to \|y\|_{\infty,G}, \quad \|y''_+\|_{\infty,H_\ell} \to \|y''_+\|_{\infty,G}. \tag{2.99}$$

3. Докажем, что на множестве $y \in L^2_{\infty,\infty,+}(\mathbb{R})$ справедливы точные неравенства

$$\|y'\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant 2\left(\|y\|_{\infty,\mathbb{R}}\,\|y''_+\|_{\infty,\mathbb{R}}\right)^{1/2}, \tag{2.100}$$

$$\|y'_\pm\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant 2\left(\|y\|_{\infty,\mathbb{R}}\,\|y''_+\|_{\infty,\mathbb{R}}\right)^{1/2}. \tag{2.101}$$

В силу первого пункта достаточно доказать только первое неравенство (2.100).

Докажем, что для любого j выполняется $\Psi^0_{H_j}(y) \leqslant 2^2$.

Рассмотрим сначала конечные интервалы. Без ограничения общности можно считать, что $H_j = (0,1)$, $y(0) = -y(1)$ и $y'(x) > 0$ для $x \in H_j$. Введем функцию

$$g(x) = \frac{\|y''_+\|_{\infty,[0,1]}}{2}x^2 + y(0), \quad x \in [0,\tau], \quad \tau = \sqrt{\frac{2(y(1)-y(0))}{\|y''_+\|_{\infty,[0,1]}}}.$$

Легко проверить, что

$$\int_0^1 y'(x)dx = y(1) - y(0) = g(\tau) - g(0) = \int_0^\tau g'(x)dx, \tag{2.102}$$

$$\|y\|_{\infty,[0,1]} = \|g\|_{\infty,[0,\tau]}, \quad \|y''_+\|_{\infty,[0,1]} = \|g''_+\|_{\infty,[0,\tau]}, \quad \Psi^0_{[0,\tau]}(g) = 4.$$

Для $t \in [0,\tau]$ имеем $0 \leqslant y'(t) = \displaystyle\int_0^t y''(x)dx \leqslant t\|y''_+\|_{\infty,[0,1]} = g'(t)$. Предположим, что $y'(t^*) = \|g'\|_{\infty,[0,\tau]} = g'(\tau)$ для некоторого $t^* \in (\tau, 1)$. Тогда для $t \in [t^*-\tau, t^*]$ получим

$$y'(t) = y'(t^*) + \int_{t^*}^t y''(x)dx \geqslant g'(\tau) + \|y''_+\|_{\infty,[0,1]}(t-t^*) = g'(\tau+t-t^*),$$

откуда

$$\int_0^1 y'(x)dx > \int_{t^*-\tau}^{t^*} y'(t)dt \geqslant \int_{t^*-\tau}^{t^*} g'(\tau+t-t^*)dt = \int_0^\tau g(x)dx,$$

что противоречит (2.102). Следовательно, $\|y'\|_{\infty,[0,1]} < \|g'\|_{\infty,[0,\tau]}$. Таким образом, мы показали, что $\Psi^0_{\mathbb{R}}(y) \leqslant \Psi^0_{[0,1]}(y) < \Psi^0_{[0,\tau]}(g) \leqslant 4$.

В случае, когда один из концов интервала H_j равен $\pm\infty$, доказательство аналогично, за исключением того, что в качестве значения в бесконечности рассматривается предел функции в ней. Этот предел, очевидно, существует, как предел монотонной ограниченной функции.

Оценку снизу обеспечивает, например, функция

$$\overline{y}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & x < 0, \\ (x-(2i-2))^2 - \dfrac{1}{2}, & x \in \left[2i-2,\, 2i-1-\dfrac{1}{i+1}\right],\ i \in \mathbb{N}, \\ -i(x-(2i-1))^2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{i+1}, & x \in \left(2i-1-\dfrac{1}{i+1},\, 2i-1\right],\ i \in \mathbb{N}, \\ y(2i-x), & x \in (2i-1, 2i),\ i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Функция $\overline{y} \in L^2_{\infty,\infty,+}(\mathbb{R})$ и $\Psi^0_{\mathbb{R}}(\overline{y}) = 4$. Таким образом, эта функция является экстремальной в неравенстве (2.100), её подстановка в (2.101) так же дает равенство, что завершает доказательство.

4. Предыдущее доказательство применимо и к периоду, в этом случае все интервалы H_j будут конечными. Так что для $y \in L^2_{\infty,\infty,+}(\mathbb{T})$ имеют место неравенства

$$\|y'\|_{\infty,\mathbb{T}} \leqslant 2\left(\|y\|_{\infty,\mathbb{T}}\, \|y''_+\|_{\infty,\mathbb{T}}\right)^{1/2}, \tag{2.103}$$

$$\|y'_\pm\|_{\infty,\mathbb{T}} \leqslant 2\left(\|y\|_{\infty,\mathbb{T}}\, \|y''_+\|_{\infty,\mathbb{T}}\right)^{1/2}. \tag{2.104}$$

Чтобы показать, что константа 2 неулучшаема достаточно рассмотреть последовательность 1-периодических функций, заданных на $[0,1]$ как $\overline{y}_m = \overline{y}(x/2m)$, $m \in \mathbb{N}$.

Покажем, что экстремальной функции на периоде не существует. Чтобы она существовала необходимо, чтобы неравенство (2.97) при $G = \mathbb{T}$ обращалось в равенство, т. е. выполнялись (2.98) или (2.99). В п. 3 показано, что случай (2.98) невозможен.

Предположим, что выполняется (2.99). Пусть $H_{j_\ell} = (a_\ell, b_\ell)$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность концов $\{a_\ell\}$ сходится (иначе выделим сходящуюся подпоследовательность) к некоторому $a \in [0,1]$. Тогда последовательность $\{b_\ell\}$ также сходится к a. Если $y'(x) \geqslant 0$ на H_j, то

$$y'(x) = \int_{a_\ell}^{x} y''(t)dt \leqslant \|y''_+\|_{\infty, H_{j_\ell}}(b_\ell - a_\ell) \to 0.$$

Если $y'(x) \leqslant 0$, то

$$y'(x) = \int_{b_\ell}^{x} y''(t)dt \geqslant -\|y''_+\|_{\infty, H_{j_\ell}}(b_\ell - a_\ell) \to 0.$$

Следовательно, $\|y'\|_{\infty, H_{j_\ell}}$ не стремится к $\|y'\|_{\infty, \mathbb{T}}$ и экстремальной функции в неравенстве на периоде (2.103) не существует, а тогда не существует и экстремальной функции в (2.104) в силу очевидного неравенства $\|y'_\pm\|_{\infty, \mathbb{T}} \leqslant \|y'\|_{\infty, \mathbb{T}}$.

Заключение

В диссертационной работе изучались неравенства колмогорвского типа для первой и второй производных функции на оси и периоде для несимметричных норм второй производной. Получены следующие основные результаты.

1. Найдена точная константа в неравенстве колмогоровского типа на оси и периоде для L_2-нормы первой производной, L_1-нормы функции, L_∞-нормы положительной срезки второй производной.

2. Найдены точные константы в неравенстве колмогоровского типа на оси и периоде для $L_{2r/(r+1)}$-нормы первой производной, L_r-нормы функции, L_1-нормы несимметричной, в том числе положительной, срезки второй производной (или несимметричной вариации первой производной) для значений $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

3. Доказано, что точная константа в неравенстве колмогоровского типа для несимметричных срезок второй производной на оси и периоде для показателей $q \geqslant 1$, $r \geqslant 1/2$, $p \geqslant 1$, $2/q = 1/r + 1/p$ равна точной константе в неравенстве на отрезке по классу функций с абсолютно непрерывной производной, обращающейся в ноль на концах отрезка, и таких, что функция выпукла на одной части отрезка и вогнута на другой. А в случае неравенства для положительной срезки второй производной точная константа равна точной константе в неравенстве на отрезке по классу выпуклых функций с абсолютно непрерывной производной, обращающейся в 0 на левом конце отрезка. При этом в неравенстве с положительной срезкой экстремальной функции не существует.

Список литературы

[1] Алимов, А. Р. Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01 / Алимов Алексей Ростиславович. — М., 2014. — 212 с.

[2] Арестов, В. В. Неравенства для дифференцируемых функций / В. В. Арестов, В. И. Бердышев // Методы решения условно-корректных задач: сб. науч. тр. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. — 1975. — № 17. — С. 108–138.

[3] Арестов, В. В. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В. В. Арестов, В. Н. Габушин // Изв. вузов. — 1995. — № 11. — С. 42–68. (сер. Математика).

[4] Арестов, В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Успехи мат. наук. — 1996. — Том 51, № 6. — С. 89–124.

[5] Бабенко, В. Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций / В. Ф. Бабенко // Укр. мат. журнал. — 1982. — Том 34, № 4. — С. 409–416.

[6] Бабенко, В. Ф. Несимметричные экстремальные задачи теории приближения / В. Ф. Бабенко // Докл. АН СССР. — 1983. — Том 269, № 3. — С. 521–524.

[7] Бабенко, В. Ф. Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Ба-

бенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. — Киев: Наукова думка, 2003. — 590 с.

[8] Бабенко, В. Ф. Сравнение точных констант в неравенствах для производных на вещественной прямой и окружности / В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов // Укр. мат. журн. — 2003. — Том 55, № 5. — С. 579–589.

[9] Богачев, В. И. Основы теории меры / В. И. Богачев. — М., Ижевск, 2003. — Том 1. — 545 с.

[10] Боссе, Ю. Г. (Шилов, Г. Е.) О неравенствах между производными / Ю. Г. Боссе (Г. Е. Шилов) // Сб. работ студ. науч. кружк. МГУ. — 1937. — Том 1. — С. 68 – 72.

[11] Буслаев, А. П. О существовании экстремальных функций в неравенствах для производных / А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров // Мат. заметки. — 1982. — Том 32, № 6. — С. 823–834.

[12] Буслаев, А. П. О точных константах и экстремальных функциях в неравенствах для производных / А. П. Буслаев // Мат. заметки. — 1987. — Том 41, № 2. — С. 159–174.

[13] Габушин, В. Н. Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leqslant \infty$ / В. Н. Габушин // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1976. — Том 40. — С. 869–892.

[14] Габушин, В. Н. О теоремах сравнения / В. Н. Габушин, Н. П. Дмитриев // Методы сплайн функций (Выч. системы) — 1979. — Вып. 81. — С. 55–62.

[15] Клоц, Б. Е. Приближения дифференцируемых функций функциями большей гладкости / Б. Е. Клоц // Мат. заметки. — 1977. — Том 21, № 1. — С. 21–32.

[16] Колмогоров, А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Уч. зап. МГУ. — 1939. — Том 30. — С. 3–16.

[17] Колмогоров, А. Н. Избранные труды. Математика и механика / А. Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1985. — 470 с.

[18] Корнейчук, Н. П. Аппроксимация с ограничениями / Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин. — Киев: Наукова Думка, 1982. — 247 с.

[19] Кофанов, В. А. Неравенства для производных функций на оси с несимметрично ограниченными старшими производными / В. А. Кофанов // Укр. мат. журнал. — 2012. — Том 64, № 5.— С. 636–648.

[20] Крейн, М. Г. L-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве / М. Г. Крейн, Н. И. Ахиезер. // О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков: ГОНТИ, 1938. 257 с.

[21] Лебег, А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / А. Лебег. — М., Л. Гос. тех-теор. изд-во, 1934. — 324 с.

[22] Магарил-Ильяев, Г. Г. О неравенствах для производных колмогоровского типа / Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров // Мат. сборник. — 1997. — Том 188, № 12. — С. 73–106.

[23] Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной/ И. П. Натансон. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

[24] Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко, К. С. Казарян, П. Сифуэнтес. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.— 416 с.

[25] Харди, Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Пойа. — М.: Гос. изд-во. иностр. лит., 1948. — 456 с.

[26] Babenko, V. F. Kolmogorov-type inequalities for periodic functions whose first derivatives have bounded variation / V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. Pichugov // Ukr. Math. J. — 2002. — Vol. 54, № 5. — C. 741–749.

[27] DeVore, R. A. Constructive Approximation / R. A. DeVore, G. G. Lorentz. — Berlin: Springer, 1993. — 452 p.

[28] Hadamard, J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées / J. Hadamard // So. Math. France, Comptes rendus des Séanes. — 1914. — Vol. 41. — P. 68 – 72.

[29] Hörmander, L. A new proof and a generalization of an inequality of Bohr / L. Hörmander // Math. Scand. — 1954. — Vol. 2. — P. 33–45.

[30] Kofanov, V. A. On the set of extremal functions in certain Kolmogorov-type inequalities // Ukr. Math. J. — 2004. — Vol. 56, № 8. — P. 1258–1275.

[31] Kofanov V. A. Strengthening the comparison theorem and Kolmogorov inequality in the asymmetric case / V. A. Kofanov, K. D. Sydorovych // Res. Math. — 2022. — Vol 30, № 1. — P. 30–38.

[32] Landau, E. Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen / E. Landau // Proc. London Math. Soc. — 1913. — Vol. 13, № 2. — P. 43 – 49.

[33] Sz.-Nagy, B. Über Integralungeleichungen zwieschen einer Function und ihrer Ableitung / B. Sz.-Nagy // Acta. Sci. Math. — 1941. — Vol. 10. — P. 64–74.

[34] Stein, E. M. Functions of exponential type / E. M. Stein // Ann. Math. — 1957. — Vol. 65, № 3. — P. 582–592.

[35] Tikhomirov, V. Kolmogorov-type inequalities on the whole line or half line and the Lagrange principle in the theory of extremum problems / V. Tikhomirov, A. Kochurov // Eurasian Mathem. J. — 2011., — Vol. 2, № 3. — P. 125-–142.

[36] Zernyshkina, E. A. Kolmogorov type inequality in L_2 on the real line with one-sided norm / E. A. Zernyshkina // East J. Approx. — 2006. — Vol. 12, № 2. — P. 127–150.

Список работ автора

[1] Паюченко, Н. С. Редукция неравенства Колмогорова для положительной срезки второй производной на оси к неравенству для выпуклых функций на отрезке / Н. С. Паюченко // Сиб. электрон. матем. изв. — 2021. — Том 18, № 2. — С. 1625–1638.

[2] Глазырина, П. Ю. О неравенстве Колмогорова для первой и второй производных на оси и периоде / П. Ю. Глазырина, Н. С. Паюченко// Тр. ИММ УрО РАН. — 2022. — Том 28, № 2. — С. 84–95.

[3] Паюченко, Н. С. Неравенство Колмогоровского типа с односторонним ограничением на старшую производную / Н. С. Паюченко // Совр. проб. мат. и ее прилож. тезисы междунар.(51-й всерос.) молод. шк.-конф.: тезисы. Екатеринбург. — 2020. — С. 95.

[4] Паюченко, Н. С. Неравенство Ландау–Колмогорова на оси с односторонним ограничением на старшую производную / Н. С. Паюченко // Совр. мет. теор. функц. и смеж. проб. материалы междунар. конф. Воронежская зимняя мат. школа Воронеж.: тезисы. — 2021. — С. 235.

[5] Паюченко, Н. С. Неравенство Колмогорова для положительной срезки второй производной функции на оси и неравенство для выпуклых функций на отрезке / Н. С. Паюченко // Совр. проб. теор. функц. и их прил. Саратов.: тезисы. — 2022. — С. 228.