На правах рукописи

Паюченко Никита Славич

# НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВТОРУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Специальность 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2023

Работа выполнена на кафедре математического анализа Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | кандидат физико-математических наук,<br>доцент ГЛАЗЫРИНА Полина Юрьевна. |
| Официальные оппоненты: | МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ Георгий Георгиевич,<br>доктор физико-математических наук, профессор,<br>ФГБОУ ВО Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,<br>профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета; |
| | КРОТОВ Вениамин Григорьевич,<br>доктор физико-математических наук, профессор,<br>Белорусский государственный университет,<br>профессор кафедры теории функций. |
| Ведущая организация: | ФГБОУ ВО Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. |

Защита диссертации состоится «___»__________ 2023 года в ____ часов на заседании совета Д 24.1.073.03 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Институте математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН по адресу: 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН» https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.03.

Автореферат разослан «___»__________ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук — Огородников Ю. Ю.

# 1 Общая характеристика работы[1]

## 1.1 Актуальность темы

История изучения неравенств, которые оценивают сверху $L_q$-норму промежуточной производной функции через $L_r$-норму функции и $L_p$-норму старшей производной, довольно обширна. Первые точные неравенства на полуоси и оси были получены Э. Ландау [26] в 1913 г. и Ж. Адамаром [23] в 1914 г. (см. также [7, 1.2]):

$$\|y'\|_{\infty,[0,\infty)} \leqslant 2\|y\|_{\infty,[0,\infty)}^{1/2} \|y''\|_{[0,\infty)}^{1/2}, \tag{1}$$

$$\|y'\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \sqrt{2}\|y\|_{\infty,\mathbb{R}}^{1/2} \|y''\|_{\mathbb{R}}^{1/2}. \tag{2}$$

Ю.Г. Боссе (Г.Е. Шилов) [10] получил точные неравенства типа (2) для производных порядка $n$ в правой части и порядка $0 < k < n$ в левой для $n = 3, 4$ и $n = 5$, $k = 2$. В 1939 г. А.Н. Колмогоров [16] доказал, что для всех натуральных $n$ и $0 < k < n$ выполняется точное неравенство

$$\|y^{(k)}\|_\infty \leqslant \frac{\|\varphi_{n-k}\|_\infty}{\|\varphi_n\|_\infty^{1-k/n}} \|y\|_\infty^{1-k/n} \|y^{(n)}\|_\infty^{k/n}, \quad y \in L_{\infty,\infty}(\mathbb{R}), \tag{3}$$

где $\varphi_n$ — идеальный сплайн Эйлера, т. е. $n$-ый периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\operatorname{sign}(\sin x)$.

Обозначим через $y_+(x) = \max\{y(x), 0\}$ и $y_-(x) = \max\{-y(x), 0\}$ положительные срезки функций $y$ и $-y$ соответственно. Для неотрицательных чисел $\alpha$, $\beta$ рассмотрим несимметричную срезку

$$y_{\alpha,\beta} = \alpha y_+ + \beta y_-.$$

Мы будем рассматривать срезки производной. Ввиду инвариантности изучаемых в работе величин относительно умножения на константу будет удобно полагать $\alpha = 1$ и использовать обозначение $y_\beta^{(n)} := (y^{(n)})_{1,\beta}$, в случае $\beta = 0$ также будем писать $y_+^{(n)} = y_0^{(n)} = (y^{(n)})_{1,0} = (y^{(n)})_+$. Пусть $G$ — вещественная ось $\mathbb{R}$, отрезок или период $\mathbb{T}$, реализованный как отрезок $[0, 1]$ с отождествленными концами. Обозначим через $L_{r,p}^n(G)$ ($n \in \mathbb{N}$, $0 < r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$) множество вещественнозначных функций $y \in L_r(G)$ таких, что производная $y$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна на $G$ и $y^{(n)} \in L_p(G)$,через $L_{r,p,+}^n(G)$ обозначим аналогичное множество с односторонним ограничением на старшую производную: $y_+^{(n)} \in L_p(G)$.

Аналоги неравенства (3) для других норм (метрик):

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}} \leqslant K^{k,n}(q, r, p, \mathbb{R}) \|y\|_{r,\mathbb{R}}^{\boldsymbol{\alpha}} \|y^{(n)}\|_{p,\mathbb{R}}^{1-\boldsymbol{\alpha}}, \quad y \in L_{r,p}^n(\mathbb{R}), \tag{4}$$

[1]Диссертационная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Уральского математического центра(НОЦ ИММ УрО РАН).

также называемые неравенствами Колмогорова или неравенствами Ландау–Колмогорова, интенсивно изучаются. Подробный обзор результатов в неравенстве (4) для оси, полуоси и периода можно найти в монографии [7], комментариях [17, с. 387] и статьях [3], [4]. В работах [22, 29] неравенства Колмогорова рассмотрены с общих позиций теории экстремума.

Значения $K^{k,n}(q, r, p, \mathbb{R})$ в неравенстве (4) на оси помимо случая $q = r = p = \infty$ известны в следующих случаях (см. [7, п. 9.2] и приведенную там библиографию):

1) для любых $k, n \in \mathbb{N}$ при $q = r = p = 1$ (Стейн), при $q = r = p = 2$ (Харди, Литтлвуд, Пойа), при $q = \infty$, $r = p = 2$ (Тайков);

2) для $k = 1$, $n = 2$ при $q = 2$, $r \in [1, \infty]$, $p = r/(r-1)$ (Харди, Литтлвуд), при $q = p = \infty$, $r > 0$ (Габушин), при $q = 2r$, $r > 1 - 1/n$, $p = \infty$ (Габушин, Буслаев), при $q \geqslant 2p$, $r = \infty$, $p \in [1, \infty]$ (Арестов), при $q = 2r/(r+1)$, $r \in [1, \infty]$, $p = 1$ (Арестов, Бердышев);

3) для $k = 1, 2$, $n = 3$ при $q = nr/(n-k)$, $r > 1 - 1/n$, $p = \infty$ (Габушин, Буслаев), при $q = r = \infty$, $p \in [1, \infty)$ (Арестов), для $k = 1$, $n = 3$ при $q = \infty$, $r \in [1, \infty]$, $p = 1$ (Магарил-Ильяев);

4) для $n = 1$, $k = 0$ при $q, r \in (0, \infty)$, $q > r$, $p \in [1, \infty]$ (Надь);

5) для $n = 2$, $k = 0$ при $q = p = \infty$, $r > 0$ (Габушин), при $q = \infty$, $r \in [1, \infty]$, $p = 1$ (Магарил-Ильяев);

6) для $k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$ при $q = 2$, $r \in [1, \infty]$, $p = r/(r-1)$ (Соляр);

7) для $n = 4$, $k = 3$ при $q = 4/3$, $r = \infty$, $p = 1$ и для $n = 4$, $k = 3$ или $n = 6$, $k = 4, 5$ при $q = n/(n-k)$, $r = 1$, $p = \infty$ (Бабенко, Кофанов, Пичугов).

В 1976 г. В.Н. Габушин [13] доказал критерий существования конечной константы в неравенствах Колмогорова на оси и полуоси. В котором утвеждается, что при целых $0 \leqslant k \leqslant n-1$, ограничении на нормы $p > 1$, $q > 0$, $r > 0$, $q \neq r$ для $k = 0$ и верном выборе показателя $\boldsymbol{\alpha}$ неравенство (4) справедливо с конечной константой не зависящей от выбора функции тогда и только тогда, когда $\Delta(q, r, p, k, n) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{q} - \dfrac{n-k}{r} - \dfrac{k}{p}\right) \leqslant 0$. Причем критерий выполняется если вместо $L_p$-нормы старшей производной поставить норму её положительной срезки.

Критерий существования неравенства на периоде получен Б.Е. Клоцем [15] (см. также [8]). В 2003 г. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов [8, теорема 2] доказали равенство констант $K^{k,n}(q, r, p, \mathbb{R}) = K^{k,n}(q, r, p, \mathbb{T})$ в неравенстве (5) на оси и периоде для $1 \leqslant q, r, p \leqslant \infty$, $1 \leqslant k < n$ при условии
$\Delta(q, r, p, k, n) = 0$.

Существование экстремальных функций в неравенстве (4) исследовали А.П. Буслаев, Г.Г. Магарил-Ильяев и В.М. Тихомиров. В работе [11] доказано, что при $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $1 < p \leqslant \infty$, $\Delta(q, r, p, k, n) < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k < n$ и $G = \mathbb{R}$ или $G = [0, +\infty)$ экстремальная функция в неравенстве (5) существует. В последующей работе [12] А.П. Буслаев показал, что для $1 < p, q, r \leqslant \infty$ в случае $q = \infty$, $k = 0$, $1$, $\Delta(q, r, p, k, n) \leqslant 0$ экстремальная функция существует, а при $\Delta(q,r,p,k,n)=0$, $k=1$ и $n=2$ нет.

Неравенства с несимметричными ограничениями

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}} \leqslant K_{\beta}^{n,k}(q,r,p,\mathbb{R})\|y\|_{r,\mathbb{R}}^{\boldsymbol{\alpha}}\|y_{\beta}^{(n)}\|_{p,\mathbb{R}}^{1-\boldsymbol{\alpha}}, \quad y \in L_{r,p}^{n}(\mathbb{R}), \quad \beta \in (0,1], \tag{5}$$

в частности, неравенство

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mathbb{R}} \leqslant K_{+}^{k,n}(q,r,p,\mathbb{R})\|y\|_{r,\mathbb{R}}^{\boldsymbol{\alpha}}\|y_{+}^{(n)}\|_{p,\mathbb{R}}^{1-\boldsymbol{\alpha}}, \quad y \in L_{r,p,+}^{n}(\mathbb{R}), \tag{6}$$

менее изучены. Отметим, что функционал $\|g\|_{(\alpha,\beta)} = \|g_{\alpha,\beta}\|_{p,G}$ при положительных $\alpha,\beta$ является несимметричной нормой в пространстве $L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, т. е. обладает следующими свойствами:

а) $\|g\|_{(\alpha,\beta)} = 0 \;\Leftrightarrow\; g = 0$ п.в. на $G$;
б) $\|\lambda g\|_{(\alpha,\beta)} = \lambda\|g\|_{(\alpha,\beta)}$ при $\lambda \geqslant 0$;
в) $\|g+f\|_{(\alpha,\beta)} \leqslant \|g\|_{(\alpha,\beta)} + \|f\|_{(\alpha,\beta)}$.

Если одно из чисел $\alpha$, $\beta$ обращается в 0, то функционал является либо несимметричной нормой, либо полунормой. Термин «несимметричная норма» введен М.Г. Крейном в [20, с. 197], там же в качестве примера дана норма $\|\cdot\|_{(1+\theta,1-\theta)}$ ($|\theta|<1$) в пространстве $L_1(H)$.

В связи с неравенством Колмогорова несимметричные срезки производных в неявном виде рассматривались Л. Хёрмандером [24] (см. также [14, 7]) приведено решение аналога задачи (3) с ограничениями на старшую производную

$$\|y_{\pm}^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant K\|y\|_{\infty,\mathbb{R}}^{1-k/n}\|\alpha y_{+}^{(n)} + \beta y_{-}^{(n)}\|_{\infty,\mathbb{R}}^{k/n}.$$

Систематически изучать задачи теории приближения для таких срезок начал В.Ф. Бабенко [5, 6], в работе [5] указано, что приближения в пространствах с несимметричными нормами устанавливают связь между наилучшими приближениями и наилучшими односторонними приближениями. Большой вклад в изучение неравенств Колмогорова, в том числе неравенств с несимметричными ограничениями на старшие и промежуточные производные и функцию, внесли и другие украинские математики, наиболее близкими к тематике диссертации являются работы [25, 19]. Приближения с ограничениями рассматриваются в монографии [18]. Приложения несимметричных норм можно найти, например, в диссертации А.Р. Алимова [1].

В 1976 г. В.Н. Габушин [13, лемма 3] доказал, что при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $0 < r < q \leqslant \infty$ справедливо равенство

$$K_{+}^{0,1}(q,r,p,\mathbb{R}) = 2^{\boldsymbol{\alpha}-1}K^{0,1}(q,r,p,\mathbb{R}).$$

Значение $K_{1}^{0,1}(q,r,p,\mathbb{R})$ было ранее найдено Б.С. Надем [27] (см. также [7, § 2.10]). Е.А. Зернышкина в 2008 г. [30] нашла точную константу $K_{+}^{1,2}(2,2,2,\mathbb{R})$.

Несмотря на большой интерес к тематике неравенств Колмогорова, точные значения констант в неравенствах на оси для несимметричных ограничений известны только в нескольких случаях, что показывает актуальность темы исследований. В диссертации изучаются неравенства (5), (6) и неравенства с несимметричными (аналогичными случаю Хёрмандера) ограничениями на старшую производную для $k = 1$, $n = 2$ и $\Delta = 0$.

## 1.2 Цель работы

Целями работы являются:

1) получение точных констант в неравенстве Колмогорова на оси в случаях $L_q$-нормы первой производной, $L_r$-нормы функции, $L_p$-нормы положительной срезки второй производной для значений $q = 2$, $r = 1$, $p = \infty$ и $L_q$-нормы первой производной, $L_r$-нормы функции, $L_p$-нормы промежуточной(в том числе положительной) срезки второй производной для значений $q, r \geqslant 1$, $p = 1$, $2/q = 1/r + 1$;

2) редукция задачи о точной константе в неравенстве Колмогорова для первой и второй производной или промежуточной (в том числе положительной) срезки второй производной на оси к задаче на отрезке по специальном классам функций на отрезке с дополнительными условиями на значения функции и производных.

## 1.3 Методы исследования

В работе применяются методы математического анализа и теории приближений. В частности, теоремы сравнения для функций, которые впервые появились в работах А. Н. Колмогорова и с тех пор активно применяются в данной тематике. Развивается и плодотворно используется метод Е. А. Зернышкиной, который позволяет свести задачу на оси к задаче на отрезке с существенными ограничениями на класс функций. Для получения точной константы в неравенстве на отрезке применяется метод основанный на представлении выпуклой функции в виде суммы двух выпуклых функций, одна из которых является линейной на части отрезка, и тонких оценках интегралов от производных этих функций. В случае $p = 1$ развивается метод, использованный В.В. Арестовым и В.И. Бердышевым, заключающийся в расширении рассматриваемого класса функций с локально абсолютно непрерывной второй производной до класса функций с ограниченной вариацией первой производной.

## 1.4 Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

1. Найдена точная константа в неравенстве колмогоровского типа на оси

и периоде для $L_2$-нормы первой производной, $L_1$-нормы функции, $L_\infty$-нормы положительной срезки второй производной.

2. Найдены точные константы в неравенстве колмогоровского типа на оси и периоде для $L_{2r/(r+1)}$-нормы первой производной, $L_r$-нормы функции, $L_1$-нормы несимметричной, в том числе положительной, срезки второй производной (или несимметричной вариации первой производной) для значений $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

3. Доказано, что точная константа в неравенстве колмогоровского типа для несимметричных срезок второй производной на оси и периоде для показателей $q \geqslant 1$, $r \geqslant 1/2$, $p \geqslant 1$, $2/q = 1/r + 1/p$ равна точной константе в неравенстве на отрезке по классу функций с абсолютно непрывной производной, обращающейся в ноль на концах отрезка, и таких, что функция выпукла на одной части отрезка и вогнута на другой. А в случае неравенства для положительной срезки второй производной точная константа равна точной константе в неравенстве на отрезке по классу выпуклых функций с абсолютно непрерывной производной, обращающейся в 0 на левом конце отрезка. При этом в неравенстве с положительной срезкой экстремальной функции не существует.

## 1.5 Положения, выносимые на защиту

На защиту выносится совокупность полученных результатов 1–3. За исключением случая положительной срезки второй производной для значений параметров $q = p = r = 2$ в пункте 3.

## 1.6 Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут применяться в дальнейших исследованиях неравенств для функций и их производных.

## 1.7 Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается строгими математическими доказательствами. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2 работах и 3 материалах трудов конференций. Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях и семинарах:

- Международной (51-ой Всероссийской) школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2020);

- Международной летней школе по теории функций С. Б. Стечкина (Екатеринбург, 2020);
- Международной (52-ой Всероссийской) школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2021);
- Международной Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2021);
- Международной летней школе по теории функций С. Б. Стечкина (республика Алтай, 2021);
- XXI Международной Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2022);
- Научных семинарах «Экстремальные задачи теории функций и операторов» ИЕНиМ, УрФУ под руководством профессора В. В. Арестова.
- Научных семинарах отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН.

## 1.8 Публикации

Результаты работы опубликованы в статьях автора [1, 2] в журналах из списка ВАК и тезисах конференций [3, 4, 5].

## 1.9 Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные результаты отражают вклад автора в опубликованных работах. В работе [2] автору принадлежит доказательство редукции задачи о нахождении точной константы в неравенстве Колмогова на оси к задаче о нахождении точной константы по множеству выпуклых на $[0,1]$ функций $u$, имеющих абсолютно непрерывную производную и удовлетворяющих условию $u(1) = u'(0) = 0$ (леммы 1–3, теорема 1).

## 1.10 Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Объём диссертации 68 страниц. Список литературы содержит 36 наименований.

# 2 Краткое содержание диссертации

**Первая глава** «Связь между неравенствами колмогоровского типа для первой и второй производных на оси, периоде и отрезке с дополнительными условиями» посвящена исследованию неравенств

$$\|y'\|_{q,G} \leqslant K_\beta^{1,2}(q,r,p,G)\|y\|_{r,G}^{1/2}\|y''_\beta\|_{p,G}^{1/2}, \quad y \in L^2_{r,p}(G), \quad \beta \in (0,1], \tag{7}$$

$$\|y'\|_{q,G} \leqslant K_+^{1,2}(q,r,p,G)\|y\|_{r,G}^{1/2}\|y''_+\|_{p,G}^{1/2}, \quad y \in L^2_{r,p,+}(G), \tag{8}$$

на оси $G = \mathbb{R}$ и периоде $G = \mathbb{T}$ для показателей $q$, $p$ и $r$, которые удовлетворяют ограничениям $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и равенству $1/r + 1/p = 2/q$.

Обозначим через $\mathcal{U}$ множество функций $u(x)$, $x \in [0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную, и таких, что для некоторого $s \in [0,1]$ $u''(x) \geqslant 0$ п. в. на $[0,s]$, $u''(x) \leqslant 0$ п. в. на $[s,1]$, $u'(0) = u'(1) = 0$, функция $u$ обращается в 0 в некоторой точке промежутка $[0,1]$. Через $\mathcal{U}_+$ обозначим множество функций $u(x)$, $x \in [0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную и таких, что $u''(x) \geqslant 0$ п. в. на $[0,1]$, $u'(0) = 0$, через $\mathcal{U}_+(\gamma)$ — подмножество функций $u \in \mathcal{U}_+$ таких, что $u(\gamma) = 0$, $\gamma \in [0,1]$.

Пусть $\overline{K}_\beta(q,r,p,[0,1])$ есть точная константа в неравенстве

$$\|u'\|_{q,[0,1]} \leqslant \overline{K}_\beta(q,r,p,[0,1])\|u\|_{r,[0,1]}^{1/2}\|u''_\beta\|_{p,[0,1]}^{1/2}$$

при $\beta \in (0,1)$ на функциях из класса $\mathcal{U}$, при $\beta = 1$ на функциях из класса $u \in \mathcal{U}_+(1)$, при $\beta = 0$ на функциях из класса $u \in \mathcal{U}_+$. Для величины $\overline{K}_0(q,r,p,[0,1])$ также будем использовать обозначение $\overline{K}_+(q,r,p,[0,1])$.

Для измеримого множества $H \subset G$, $\beta \in [0,1]$ и $y \in L^2_{r,p}(G)$ ($y \in L^2_{r,p,+}(G)$ при $\beta = 0$) введем функционал

$$\Psi_H^\beta(y) = \Psi_H^\beta(y,q,r,p) = \frac{\|y'\|_{q,H}^2}{\|y\|_{r,H} \cdot \|y''_\beta\|_{p,H}}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество кусочно-полиномиальных, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций $f$ со свойством $f'(a) = f'(b) = 0$.

**В первом разделе** доказываются вспомогательные утверждения.

**Во втором разделе** константа в неравенстве на оси оценивается сверху через константу в неравенстве на отрезке с дополнительными ограничениями на функцию. Сведение к отрезку достигается путем приближения элементов $L^2_{r,p}(G)(L^2_{r,p,+}(G))$ кусочно полиномиальными функциями из класса $\mathcal{P}$. Далее показывается, что на функции из класса $\mathcal{P}$ можно наложить дополнительные ограничения. Основные утверждения раздела сформулированы в приведенных ниже двух леммах.

**Лемма 5** *Для любых* $1 \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, *удовлетворяющих условию* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$, *и* $\beta \in [0,1]$ *справедлива оценка*

$$(K_{\beta}^{1,2}(q,p,r,\mathbb{R}))^2 \leqslant \sup\{\Psi_{[0,1]}^{\beta}(f)\colon f \in \mathcal{P}_{[0,1]}^{0}\}.$$

**Лемма 6** *Пусть* $1 \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$ *удовлетворяют условию* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$. *Тогда для* $\beta \in [0,1]$ *справедлива оценка*

$$\sup\{\Psi_{[0,1]}^{\beta}(f)\colon f \in \mathcal{P}_{[0,1]}^{0}\} \leqslant \sup \Psi_{[0,1]}^{\beta}(u),$$

*в которой верхняя грань в правой части берется при* $\beta \in (0,1)$ *по функциям* $u \in \mathcal{U}$, *при* $\beta = 1$ *по функциям* $u \in \mathcal{U}_{+}(1)$, *при* $\beta = 0$ *по функциям* $u \in \mathcal{U}_{+}$.

**В третьем разделе** доказаны следующие две теоремы, являющиеся основными результатами главы.

**Теорема 1** *Для любых* $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *удовлетворяющих условию* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$, *и* $\beta \in (0,1]$ *справедливы равенства*

$$K_{\beta}^{1,2}(q,r,p,\mathbb{R}) = K_{\beta}^{1,2}(q,r,p,\mathbb{T}) = \overline{K}_{\beta}(q,r,p,[0,1]).$$

**Теорема 2** *Для любых* $1 \leqslant q < \infty$, $1/2 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *удовлетворяющих условию* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$ *справедливы равенства*

$$K_{+}^{1,2}(q,r,p,\mathbb{R}) = K_{+}^{1,2}(q,r,p,\mathbb{T}) = \overline{K}_{+}(q,r,p,[0,1]).$$

*Экстремальных функциий в неравенстве* (8) *на оси и периоде не существует.*

Доказательство теорем сводится к применению результатов второго раздела и построению функций из $L_{r,p}^{2}(G)$ (или $L_{r,p,+}^{2}(G)$), обеспечивающих равенство констант.

**Вторая глава** «Точные константы в некоторых неравенствах колмогоровского типа» диссертации посвящена поиску точных констант в неравенстве (6) для значений $\beta = 0$, $q = 2$, $r = 1$,$p = \infty$ и $\beta \in [0,1)$ $p = 1$, $q = 2r/(1+r)$.

**В первом разделе** найдена точная константа в неравенстве (8) для положительной срезки второй производной и значений $q = 2$, $r = 1$ и $p = \infty$.

**Теорема 3** *При* $q = 2$, $r = 1$, $p = \infty$, $k = 1$, $n = 2$ *для точной константы в неравенстве* (8) *справедливо равенство*

$$K_{+}^{1,2}(2,1,\infty,\mathbb{R}) = K_{+}^{1,2}(2,1,\infty,\mathbb{T}) = \overline{K}_{+}(2,1,\infty,[0,1]) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

*В задаче на отрезке* $[0,1]$ *экстремальными являются функции*

$$\overline{y}(x) = c(x^2 - 1/4), \quad c > 0.$$

При доказательстве экстремальности функции $\overline{y}$ используется представление функций $u \in \mathcal{U}^+$ в виде суммы двух функций из $\mathcal{U}^+$ каждая из которых линейна на части отрезка $[0,1]$. Важную роль в оценках играет

**Лемма 8** *Для функций $u \in \mathcal{U}^+$ с дополнительным условием $u(0) = 0$ выполняются следующие точные неравенства:*

$$u'(x)^2 \leqslant 2u(x)\|u''\|_{\infty,[0,1]}, \tag{9}$$

$$\int_{0.5}^{1}(u'(x))^2dx - 2\int_{0.5}^{1}|u(x)|dx\,\|u''\|_{\infty,[0,1]} \leqslant 0. \tag{10}$$

*Равенства в* (9) *и* (10) *достигаются, например, на функциях $u(x) = x^2$.*

**Во втором разделе** найдены точные константы в случае $p = 1$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $q = 2r/(1+r)$. Напомним, что функция $y$ на множестве $G \subset \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию [9, 5.2], если

$$V_G(y) := \sup\sum_{k=1}^{m}|y(x_{k+1}) - y(x_k)| < \infty,$$

где sup берется по всем наборам $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1}$ точек из $G$. Величина $V_G(y)$ называется полной вариацией функции $y$ на множестве $G$. Положительной и отрицательной вариацией [21, 4.1] функции $y$ соответственно называются величины

$$V_G^+(y) := \sup\sum_{k=1}^{m}(y(x_{k+1}) - y(x_k))_+,$$

$$V_G^-(y) := \sup\sum_{k=1}^{m}(y(x_{k+1}) - y(x_k))_- = V_G^+(-y).$$

Наконец, для $\beta \in [0,1]$ определим несимметричную вариацию

$$V_G^\beta(y) = V_G^+(y) + \beta \cdot V_G^-(y)$$

$$= \sup\sum_{k=1}^{m}\max\left\{y(x_{k+1}) - y(x_k), -\beta(y(x_{k+1}) - y(x_k))\right\}.$$

Если $y$ локально абсолютно непрерывна и $y'_+ \in L_1(\mathbb{R})$, то $V_{\mathbb{R}}^+(y) = \|y'_+\|_{1,\mathbb{R}}$, если же $y' \in L_1(\mathbb{R})$, то $V_{\mathbb{R}}^\beta(y) = \|y'_\beta\|_{1,\mathbb{R}}$, $\beta \in (0,1]$. Поэтому при $p = 1$ неравенства (5) и (6) естественно рассматривать на более широком в сравнении с $L_{r,1}^n(\mathbb{R})$ множестве функций $y \in L_r(\mathbb{R})$ таких, что $y^{(n-2)}$ локально абсолютно непрерывна и $y^{(n-1)}$ или положительная срезка $y_+^{(n-1)}$ почти всюду на $\mathbb{R}$ совпадают с некоторой функцией ограниченной вариации; обозначим классы таких функций $L_{r,V}^n(\mathbb{R})$ и $L_{r,V^+}^n(\mathbb{R})$ соответственно.

Основным результатом раздела является

**Теорема 4** *Для* $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $q = 2r/(r+1)$ *и* $\beta \in [0,1]$ *справедливо равенство*

$$K_\beta^{1,2}(q,r,V,\mathbb{R}) = K_\beta^{1,2}(q,r,1,\mathbb{R}) = K_\beta^{1,2}(q,r,1,\mathbb{T}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\beta}}(r+1)^{1/(2r)}.$$

*Экстремальные функции, принадлежащие множеству* $L^2_{r,V}(\mathbb{R})$, *существуют, например* $f(x) = (1-|x|)_+$.

При $\beta = 1$ величина $K_1^{1,2}(1,1,1,\mathbb{R})$ найдена Е. Стейном [28], значения $K_1^{1,2}(2r/(r+1),r,1,\mathbb{R})$ вычислены В.В. Арестовым и В.И. Бердышевым [2]. Доказательство теоремы 4 основывается на следующей лемме

**Лемма 9** *Пусть* $r \in (0,\infty]$, $n \geqslant 2$, $y \in L^n_{r,V^+}(\mathbb{R})$. *Пусть* $g(x) = y^{(n-1)}(x)$ *п. в. на* $\mathbb{R}$ *и* $V^+_{\mathbb{R}}(g) < \infty$. *Тогда* $g(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$ *и* $V^-_{\mathbb{R}}(g) = V^+_{\mathbb{R}}(g)$.

А так же, на приближении функций из класса $L^n_{r,V}(\mathbb{R})$ функциями Стеклова и следствии из леммы 9.

**Следствие 2** *При* $r \in (0,\infty]$, $n \geqslant 2$ *классы* $L^n_{r,V}(\mathbb{R})$ *и* $L^n_{r,V^+}(\mathbb{R})$ *совпадают и* $V^\beta_{\mathbb{R}}(y^{(n-1)}) = \dfrac{1+\beta}{2} V^1_{\mathbb{R}}(y^{(n-1)})$.

# 3 Список литературы


[1] Алимов, А. Р. Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01/ Алимов Алексей Ростиславович. — М., 2014. — 212 с.

[2] Арестов, В. В. Неравенства для дифференцируемых функций / В. В. Арестов, В. И. Бердышев // Методы решения условно-корректных задач: сб. науч. тр. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. — 1975. — № 17. — С. 108–138.

[3] Арестов, В. В. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В.В. Арестов, В.Н. Габушин // Изв. вузов. — 1995. — № 11. — С. 42–68. (сер. Математика).

[4] Арестов, В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Успехи мат. наук. — 1996. — Том 51, № 6. — С. 89–124.

[5] Бабенко, В. Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций / В. Ф. Бабенко // Укр. мат. журнал. — 1982. — Том 34, № 4. — С. 409–416.

[6] Бабенко, В. Ф. Несимметричные экстремальные задачи теории приближения / В. Ф. Бабенко // Докл. АН СССР. — 1983. — Том 269, № 3. — С. 521–524.

[7] Бабенко, В. Ф. Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. — Киев: Наукова думка, 2003. — 590 с.

[8] Бабенко, В. Ф. Сравнение точных констант в неравенствах для производных на вещественной прямой и окружности / В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов // Укр. мат. журн. — 2003. — Том 55, № 5. — С. 579–589.

[9] Богачев, В. И. Основы теории меры / В. И. Богачев. — М., Ижевск, 2003. — Том 1. — 545 с.

[10] Боссе, Ю. Г. (Шилов, Г. Е.) О неравенствах между производными / Ю. Г. Боссе (Г. Е. Шилов) // Сб. работ студ. науч. кружк. МГУ. — 1937. — Том 1. — С. 68 – 72.

[11] Буслаев, А. П. О существовании экстремальных функций в неравенствах для производных / А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров // Мат. заметки. — 1982. — Том 32, № 6. — С. 823–834.

[12] Буслаев, А. П. О точных константах и экстремальных функциях в неравенствах для производных / А. П. Буслаев // Мат. заметки. — 1987. — Том 41, № 2. — С. 159–174.

[13] Габушин, В. Н. Неравенства между производными в метриках $L_p$ при $0 < p \leqslant \infty$ / В. Н. Габушин // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1976. — Том 40. — С. 869–892.

[14] Габушин, В. Н. О теоремах сравнения / В. Н. Габушин, Н. П. Дмитриев // Методы сплайн функций (Выч. системы) — 1979. — Вып. 81. — С. 55–62.

[15] Клоц, Б. Е. Приближения дифференцируемых функций функциями большей гладкости / Б. Е. Клоц // Мат. заметки. — 1977. — Том 21, № 1. — С. 21-32.

[16] Колмогоров, А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Уч. зап. МГУ. — 1939. — Том 30. — С. 3–16.

[17] Колмогоров, А. Н. Избранные труды. Математика и механика / А. Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1985. — 470 с.

[18] Корнейчук, Н. П. Аппроксимация с ограничениями / Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин. — Киев: Наукова думка, 1982. — 247 с.

[19] Кофанов, В. А. Неравенства для производных функций на оси с несимметрично ограниченными старшими производными / В. А. Кофанов // Укр. мат. журнал. — 2012. — Том 64, № 5.— С. 636–648.

[20] Крейн, М. Г. $L$-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве / М. Г. Крейн, Н. И. Ахиезер. // О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков: ГОНТИ, 1938. 257 с.

[21] Лебег, А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / А. Лебег. — М., Л. Гос. тех-теор. изд-во, 1934. — 324 с.

[22] Магарил-Ильяев, Г. Г. О неравенствах для производных колмогоровского типа / Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров // Мат. сборник. — 1997. — Том 188, № 12. — С. 73–106.

[23] Hadamard, J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées / J. Hadamard // So. Math. France, Comptes rendus des Séanes. — 1914. — Vol. 41. — P. 68 – 72.

[24] Hörmander, L. A new proof and a generalization of an inequality of Bohr / L. Hörmander // Math. Scand. — 1954. — Vol. 2. — P. 33–45.

[25] Kofanov V. A. Strengthening the Comparison Theorem and Kolmogorov Inequality in the Asymmetric Case / V. A. Kofanov, K. D. Sydorovych // Res. Math. — 2022. — Vol 30, № 1. — P. 30–38.

[26] Landau, E. Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen / E. Landau // Proc. London Math. Soc. — 1913. — Vol. 13, № 2. — P. 43 – 49.

[27] Sz.-Nagy, B. Über Integralungeleichungen zwieschen einer Function und ihrer Ableitung / B. Sz.-Nagy // Acta. Sci. Math. — 1941. — Vol. 10. — P. 64–74.

[28] Stein, E. M. Functions of exponential type / E. M. Stein // Ann. Math. — 1957. — Vol. 65, № 3. — P. 582–592.

[29] Tikhomirov, V. Kolmogorov-type inequalities on the whole line or half line and the Lagrange principle in the theory of extremum problems / V. Tikhomirov, A. Kochurov // Eurasian Mathem. J. — 2011., — Vol. 2, № 3. — P. 125-–142.

[30] Zernyshkina, E. A. Kolmogorov type inequality in $L_2$ on the real line with one-sided norm / E. A. Zernyshkina // East J. Approx. — 2006. — Vol. 12, № 2. — P. 127–150.

# Список работ автора

[1] Паюченко, Н. С. Редукция неравенства Колмогорова для положительной срезки второй производной на оси к неравенству для выпуклых функций на отрезке / Н. С. Паюченко // Сиб. электрон. матем. изв. — 2021. — Том 18, № 2. — С. 1625–1638.

[2] Глазырина, П. Ю. О неравенстве Колмогорова для первой и второй производных на оси и периоде / П. Ю. Глазырина, Н. С. Паюченко // Тр. ИММ УрО РАН. — 2022. — Том 28, № 2. — С. 84–95.

[3] Паюченко, Н. С. Неравенство Колмогоровского типа с односторонним ограничением на старшую производную / Н. С. Паюченко // Совр. проб. мат. и ее прилож. тезисы междунар. (51-й всерос.) молод. шк.-конф.: тезисы. Екатеринбург. — 2020. — С. 95.

[4] Паюченко, Н. С. Неравенство Ландау–Колмогорова на оси с односторонним ограничением на старшую производную / Н. С. Паюченко // Совр. мет. теор. функц. и смеж. проб. материалы междунар. конф. Воронежская зимняя мат. школа Воронеж.: тезисы. — 2021. — С. 235.

[5] Паюченко, Н. С. Неравенство Колмогорова для положительной срезки второй производной функции на оси и неравенство для выпуклых функций на отрезке / Н. С. Паюченко // Совр. проб. теор. функц. и их прил. Саратов.: тезисы. — 2022. — С. 228.