На правах рукописи

Фарахутдинов Ренат Абуханович

Алгебраическая теория графовых квазибесконтурных автоматов

Специальность 1.1.5 —
«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2025

Работа выполнена на кафедре теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Молчанов Владимир Александрович**
Официальные оппоненты:	**Кожухов Игорь Борисович,** доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», профессор кафедры высшей математики №1
	Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», профессор кафедры алгебры и математической логики
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита состоится «____» _________ 2025 года в _____ на заседании диссертационного совета Д 24.1.073.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте `https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.02`.

Автореферат разослан «____» _________ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.073.02,
канд. физ.-мат. наук — Белоусов Иван Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена алгебраической теории графовых автоматов. Предметом изучения теории автоматов являются различные устройства преобразования дискретной информации. В общем случае такое устройство может находиться в различных состояниях, переходя из одного состояния в другое под действием определённых внешних воздействий и, при этом, также воздействуя на внешнюю среду. Математической моделью устройства преобразования информации является трёхосновная алгебра $\mathcal{A} = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$, которая называется *автоматом* и состоит из трёх базисных множеств X_1, S, X_2 и двух бинарных операций $\star : X_1 \times S \to X_1$ и $\diamond : X_1 \times S \to X_2$. Множество X_1 называется *множеством состояний* автомата, множество S — *множеством входных сигналов* автомата, множество X_2 — *множеством выходных сигналов* автомата. Бинарная операция $\star$ называется *функцией переходов* автомата, которая определяется для пары переменных $x \in X_1$, $s \in S$ значениями $x \star s$ в множестве состояний X_1 и показывает переход автомата из состояния x в состояние $x_1 = x \star s$ под воздействием входного сигнала s. В свою очередь, операция $\diamond$ называется *функцией выходов* автомата, которая определяется для пары переменных $x \in X_1$, $s \in S$ значениями $x \diamond s$ в множестве выходных сигналов X_2 и показывает выходной сигнал $y = x \diamond s$ автомата в состоянии x под воздействием входного сигнала s.

Особое внимание в алгебраической теории автоматов [1] уделяется так называемым *полугрупповым автоматам* $\mathcal{A} = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$, у которых на множестве входных сигналов S задана ассоциативная бинарная операция $\cdot$, согласованная с функцией переходов и функцией выходов автомата по формулам

$$x \star (s_1 \cdot s_2) = (x \star s_1) \star s_2, \qquad x \diamond (s_1 \cdot s_2) = (x \star s_1) \diamond s_2$$

для всех $x \in X_1$, $s_1, s_2 \in S$. При этом, в зависимости от исследуемых задач рассматриваются структуризованные автоматы в категориях [2], то есть автоматы, множества состояний и выходных сигналов которых наделены дополнительными математическими структурами, а функции переходов и выходов являются морфизмами этих категорий. Такие автоматы изучались в работах Б.И. Плоткина [2]. Исследование конкретных задач привело к появлению топологических, вероятностных, упорядоченных, графовых и гиперграфических автоматов. Им посвящены работы Л.А. Скорнякова, Б.И. Плоткина, В.А. Молчанова, С.А. Акимовой, Е.В. Хворостухиной и других. Обзор основных идей алгебраической теории автоматов и её связи с алгебраической теорией полугрупп приведён в монографии М.А. Арбиба [1] и в работе И.Б. Кожухова и А.В. Михалёва [3].

Настоящая работа продолжает исследование полугрупповых автоматов в категории графов — графовых автоматов, то есть автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами графов, сохраняющимися функциями переходов и выходов автомата. Особое внимание уделяется универсальным графовым автоматам. Универсальный графовый автомат — это универсально притягивающий объект в категории графовых автоматов, который представляет собой алгебраическую систему $\mathrm{Atm}(G_1, G_2) = (G_1, S(G_1, G_2), G_2, \star, \diamond)$ с графом состояний $G_1 = (X_1, \rho_1)$, графом выходных сигналов $G_2 = (X_2, \rho_2)$, полугруппой входных сигналов $S(G_1, G_2) = \mathrm{End}\ G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, функцией переходов $\star$ и функцией выходов $\diamond$, которые для элементов $x \in X_1$, $s = (\varphi, \psi) \in S(G_1, G_2)$ определяются по формулам $x \star s = \varphi(x)$ и $x \diamond s = \psi(x)$. Помимо описанных выше автоматов в работах по комбинаторной теории полугрупп М.А. Арбиба [1], Ж. Лаллемана [4], Р. Лидла [5] и других авторов рассматриваются автоматы без выходов, которые называются *полуавтоматами.* Среди графовых полуавтоматов особо выделяются универсальные графовые полуавтоматы, представляющие собой алгебраическую систему $\mathrm{Atm}(G) = (G, \mathrm{End}\ G, \star)$ с графом состояний $G = (X, \rho)$, полугруппой входных сигналов $\mathrm{End}\ G$ и функцией переходов $\star$, которая для состояния $x \in X$ и входного сигнала $\varphi \in \mathrm{End}\ G$ определяется по формуле $x \star \varphi = \varphi(x)$.

Полугруппы входных сигналов универсальных графовых автоматов могут рассматриваться как их производные алгебраические системы, которые взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры автоматов. Таким образом, изучение универсальных графовых автоматов имеет непосредственное отношение к задаче исследования математических объектов с помощью некоторых производных алгебр отображений, которые специальным образом связаны с исходными математическими объектами. Такого рода задачи соотносятся с известной проблемой, обозначенной С. Уламом [6], которая заключается в исследовании определяемости математических объектов с помощью алгебр их эндоморфизмов и автоморфизмов.

В настоящей работе рассматривается типичный спектр вопросов, возникающих при исследовании математических объектов с помощью их производных алгебраических систем:

- насколько хорошо производная алгебра отображений определяет исходный математический объект?
- какими абстрактными свойствами характеризуется производная алгебра отображений?
- как взаимосвязаны логико-алгебраические свойства исходного объекта и его производной алгебры отображений?

Такие вопросы для групп автоморфизмов алгебраических систем, полугрупп эндоморфизмов графов, колец эндоморфизмов линейных пространств, модулей и других производных алгебраических систем исследовались в работах Б.И. Плоткина [7], А.Г. Пинуса [8], Ю.М. Важенина [9], Л.М. Глускина [10], А.В. Михалёва [11], И.Б. Кожухова [12] и других. В этом направлении особое внимание уделялось исследованию групп автоморфизмов и полугрупп эндоморфизмов графов. В.Г. Визингом [13] сформулирована следующая задача: найти все графы, группа автоморфизмов которых совпадает с данной группой подстановок. Эта проблема является частным случаем проблемы конкретной характеризации производных алгебр отображений [14], заключающейся в поиске условий, при которых алгебра отображений будет равна производной алгебре отображений некоторого изучаемого математического объекта. Важные результаты в этом направлении получены Б. Йонсоном [14], Д.А. Бредихиным [15], В.А. Молчановым [16].

В данной работе соответствующие исследования проводятся для универсальных графовых автоматов над широким классом квазибесконтурных рефлексивных графов. Отметим, что граф называется *квазибесконтурным*, если никакая его собственная дуга (то есть дуга, не имеющая встречной) не содержится ни в каком контуре графа. В этом направлении первоначально решается задача определяемости универсальных графовых автоматов своими полугруппами входных сигналов, которая формулируется следующим образом: *при каких условиях полугруппы входных сигналов* $S(G_1, G_2)$ *и* $S(G_1', G_2')$ *двух универсальных графовых автоматов* $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ *и* $\mathrm{Atm}(G_1', G_2')$ *будут изоморфны?* На следующем этапе рассматривается задача конкретной характеризации универсальных графовых автоматов: *при каких условиях автомат* $\mathcal{A}$ *с множеством состояний* X_1*, полугруппой входных сигналов* S *и множеством выходных сигналов* X_2 *является универсальным графовым автоматом, то есть на множестве состояний* X_1 *и множестве выходных сигналов* X_2 *можно задать такие бинарные отношения* ρ_1 *и* ρ_2*, что для графов* $G_1 = (X_1, \rho_1)$*,* $G_2 = (X_2, \rho_2)$ *выполняется равенство* $\mathcal{A} = \mathrm{Atm}(G_1, G_2)$*?* Для решения данной задачи используется разработанная В.А. Молчановым техника канонических отношений полугрупп преобразований [16], которые определяются в исходных полугруппах формулами языка узкого исчисления предикатов. Такой подход позволяет последовательно и эффективно изучать логико-алгебраические свойства универсальных графовых автоматов и их взаимосвязь со своими полугруппами входных сигналов. В частности, проведено исследование строения изоморфизмов и групп автоморфизмов таких автоматов. Аналогично для универсальных графовых полуавтоматов решается задача конкретной характеризации. На её основе получено решение проблемы абстрактной характеризации универсальных графовых полуавтоматов и доказана относительно элементарная определимость [17] класса универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами в классе полугрупп.

В свете вышеизложенных теоретических вопросов рассматривается проблема линейного упорядочивания автоматов, заключающаяся в построении на множествах состояний и выходных сигналов линейных порядков, стабильных относительно действия входных и выходных сигналов автомата. Актуальность этой задачи обосновывается тем, что, с одной стороны, линейно упорядоченные автоматы (называемые также монотонными автоматами) играют важную роль в компьютерной науке и комбинаторной теории полугрупп [18; 19] и, с другой стороны, как следует из работы М. Шикулы [20], задача распознавания таких автоматов является NP-полной и, значит, не имеет эффективных алгоритмов решения. В настоящей работе для решения задачи линейного упорядочивания автоматов рассматривается алгоритм перебора с возвратами и отсечениями, а также эвристические алгоритмы: метод имитации отжига и алгоритм пчелиной колонии.

Цели и задачи исследования. Целью данной диссертации является разработка алгебраических методов исследования универсальных графовых автоматов. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать определяемость универсальных графовых автоматов и полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами своими полугруппами входных сигналов.
2. Решить задачу конкретной характеризации универсальных графовых автоматов и полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами.
3. Решить задачу абстрактной характеризации универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами.
4. Доказать относительно элементарную определимость класса универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами в классе полугрупп.
5. Исследовать вопрос о возможности элементарной аксиоматизации классов универсальных графовых автоматов и полуавтоматов над некоторыми важными классами рефлексивных графов.
6. Исследовать вопрос линейного упорядочивания автоматов и разработать практические методы линейного упорядочивания автоматов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит в основном теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в алгебраической теории автоматов, теории графов, теории полугрупп и универсальной алгебре. Разработанные алгоритмы и программы для ЭВМ могут найти применение при решении задач комбинаторной теории полугрупп и задач анализа больших данных.

Методология и методы исследования. В работе использовались классические методы алгебраической теории автоматов, универсальной алгебры, теории моделей, математической логики, теории полугрупп и теории графов.

Основные положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Исследована определяемость универсальных графовых автоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами их полугруппами входных сигналов.
2. Решена задача конкретной характеризации универсальных графовых автоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами.
3. Описано строение изоморфизмов и групп автоморфизмов универсальных графовых автоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами.
4. Решена задача конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами.
5. Решена задача абстрактной характеризации универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами.
6. Доказана относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами в классе полугрупп.
7. Изучена взаимосвязь логико-алгебраических свойств универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами и полугрупп их входных сигналов.
8. Доказана невозможность элементарной аксиоматизации универсальных графовых автоматов и полуавтоматов над некоторыми важными классами рефлексивных графов.
9. Разработаны и программно реализованы алгоритмы линейного упорядочивания автоматов: алгоритм перебора с возвратами и отсечениями, алгоритм имитации отжига и алгоритм пчелиной колонии.

Научная новизна. Все перечисленные выше результаты являются новыми.

Достоверность основных результатов проведённых исследований подтверждается строгостью математических утверждений и их доказательств, а также их публикацией в открытой печати в рецензируемых изданиях и апробацией результатов диссертации на научных конференциях и семинарах.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих международных и всероссийских научных конференциях:

1. Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2020, 2022, 2023);

2. Международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (Новосибирск, 2023, 2024);
3. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2021);
4. Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2024);
5. Международная молодёжная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений» (Екатеринбург, 2024);
6. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения А.И. Старостина (Екатеринбург, 2021);
7. Международный научный семинар «Дискретная математика и её приложения» имени академика О.Б. Лупанова (Москва, 2022);
8. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2020, 2021, 2024);
9. Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» (Саратов, 2018, 2021);
10. Научная конференция механико-математического факультета СГУ им. Н.Г. Чернышевского «Актуальные проблемы математики и механики» (Саратов, 2018-2019, 2021-2024);
11. Международная научно-практическая конференция «Presenting Academic Achievements to the World» (Саратов, 2021);
12. Всероссийский съезд учителей и преподавателей математики в МГУ им. Ломоносова (Москва, 2023);
13. Семинар «Workshop on Computer Modelling and Data Analysis in Decision Making» в рамках Международной научно-практической конференции «Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками» (Саратов, 2023);
14. Всероссийская (с международным участием) научно-практическая конференция «Информационные технологии в образовании» (Саратов, 2023).

Личный вклад. Постановка задач и выбор методов исследования принадлежат научному руководителю. Основные результаты работы получены автором самостоятельно и опубликованы в работах [А1—А5]. В работах [А1; А4], выполненных в нераздельном соавторстве с В.А. Молчановым, идея доказательств предложена научным руководителем, а реализация выполнена соискателем. В работе [А6], выполненной в соавторстве с научным руководителем, идея алгоритма предложена научным руководителем, диссертанту принадлежит программная реализация. В тезисах докладов [А8] анонсированы результаты статьи [А1], в [А10; А11; А15] — результаты статьи [А2], в [А12; А23] — результат статьи [А3], в [А14] — результаты статьи [А4], в [А18] — результаты статьи [А5].

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 25 печатных изданиях, 5 из которых опубликованы в изданиях из списка, рекомендованного ВАК, 13 — в тезисах докладов. Зарегистрированы 2 программы для ЭВМ.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и приложения. Полный объём диссертации составляет **130** страниц текста с **8** рисунками, **1** таблицей, **5** алгоритмами и **1** приложением. Список литературы содержит **72** наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в данной диссертационной работе, проводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, обосновывается научная новизна и практическая значимость работы.

В **первой главе** излагаются основные понятия теории алгебраических систем, теории полугрупп, теории графов и теории автоматов, необходимые для дальнейшего изучения алгебраической теории графовых автоматов. Здесь приводятся общепринятые определения и обозначения, используемые в работе.

Под графом всюду понимается ориентированный граф. Дуга $(x, y) \in \rho$ графа $G = (X, \rho)$ называется *собственной*, если у неё нет встречной дуги, то есть $(y, x) \notin \rho$. Граф называется *квазибесконтурным*, если никакая его собственная дуга не входит ни в один контур графа. Квазибесконтурный граф будем называть *тривиальным*, если у него нет собственных дуг, и *нетривиальным* в противном случае. Граф $\widetilde{G} = (X, \rho^{-1})$ называется *двойственным* графом для графа $G = (X, \rho)$.

Множество всех гомоморфизмов графа $G_1 = (X_1, \rho_1)$ в граф $G_2 = (X_2, \rho_2)$ обозначается $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$. Множество всех эндоморфизмов графа $G = (X, \rho)$ с композицией образует полугруппу $\mathrm{End}\, G$, которая называется *полугруппой эндоморфизмов графа* G.

Для графов G_1, G_2 через $S(G_1, G_2)$ обозначим полугруппу $\mathrm{End}\, G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, наделённую бинарной операцией $\cdot$ по формуле $(\varphi_1, \psi_1) \cdot (\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1\varphi_2, \varphi_1\psi_2)$, где $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in S(G_1, G_2)$.

Полугрупповой автомат $\mathcal{A} = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ называется *графовым*, если множество его состояний X_1 наделено структурой графа $G_1 = (X_1, \rho_1)$, множество его выходных сигналов X_2 наделено структурой графа $G_2 = (X_2, \rho_2)$, так что для любого входного сигнала $s \in S$ функция переходов $\delta_s(x) = x \star s$ $(x \in X)$ является эндоморфизмом графа G_1, и функция выходов $\lambda_s(x) = x \diamond s$ $(x \in X)$ является гомоморфизмом графа G_1 в граф G_2. Такой автомат символически обозначается через $\mathcal{A} = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$. Автомат без выходных сигналов называется *полуавтоматом.*

Вторая глава диссертации посвящена исследованию универсальных графовых автоматов, которые представляют собой автоматы вида $\mathcal{A} = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$, где $G_1 = (X_1, \rho_1)$ — граф состояний, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ — граф выходных сигналов, $S = \mathrm{End}\ G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ — полугруппа входных сигналов, $\star$ — функция переходов и $\diamond$ — функция выходов, которые для элементов $x \in X_1$, $s = (\varphi, \psi) \in S$ определяются по формулам $x \star s = \varphi(x)$, $x \diamond s = \psi(x)$.

В **разделе 2.1** исследуется проблема абстрактной определяемости универсальных графовых автоматов своими полугруппами входных сигналов: *при каких условиях полугруппы входных сигналов двух универсальных графовых автоматов будут изоморфны?* Основным результатом этого раздела является теорема 2.1, согласно которой универсальные графовые автоматы над квазибесконтурными рефлексивными графами определяются своими полугруппами входных сигналов с точностью до изоморфизма и двойственности графов состояний и выходных сигналов.

Теорема 2.1. *Пусть G_1, G_2, G_1', G_2' — рефлексивные графы, причём граф G_1 нетривиальный квазибесконтурный. Тогда для универсальных графовых автоматов $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$, $\mathrm{Atm}(G_1', G_2')$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *графы G_1, G_2 изоморфны соответственно графам G_1', G_2' или двойственным графам $\widetilde{G_1'}$, $\widetilde{G_2'}$;*
2) *полугруппы входных сигналов $S(G_1, G_2)$, $S(G_1', G_2')$ автоматов $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ и $\mathrm{Atm}(G_1', G_2')$ изоморфны;*
3) *автомат $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ изоморфен автомату $\mathrm{Atm}(G_1', G_2')$ или автомату $\mathrm{Atm}(\widetilde{G_1'}, \widetilde{G_2'})$ над двойственными графами $\widetilde{G_1'}$, $\widetilde{G_2'}$.*

Раздел 2.2 посвящён исследованию проблемы конкретной характеризации универсальных графовых автоматов: *при каких условиях автомат $\mathcal{A} = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ является универсальным графовым автоматом, то есть на множестве состояний X_1 и множестве выходных сигналов X_2 автомата $\mathcal{A}$ можно так задать бинарные отношения ρ_1 и ρ_2, что для графов $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и $G_2 = (X_2, \rho_2)$ выполняется равенство $\mathcal{A} = \mathrm{Atm}(G_1, G_2)$?* Данная проблема решается для универсальных графовых автоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами.

Введём следующие формулы для автомата $\mathcal{A} = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$:

$$\begin{aligned}\Pi_i(x, y, u, v) = (\exists s \in S)(x \circ s = u \ \wedge \ y \circ s = v \wedge \\ \wedge \ (\forall z \in X_1)(z \circ s = u \vee z \circ s = v)), \text{ где } i = \overline{1,2};\ x, y \in X_1; \\ \circ = \star, \text{ если } u, v \in X_1, \text{ или } \circ = \diamond, \text{ если } u, v \in X_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_1(x, y) &= \Pi_1(x, y, x, y) \wedge \neg\Pi_1(x, y, y, x), \text{ где } x, y \in X_1, \\ Q_2(x, y) &= (\exists u, v \in X_1)(Q_1(u, v) \ \wedge \ \Pi_2(u, v, x, y) \ \wedge \\ &\quad \wedge \ \neg\Pi_2(u, v, y, x)), \text{ где } x, y \in X_2, \\ R_i(x, y) &= (\forall u, v \in X_1, u \neq v)\ \Pi_i(u, v, x, y), \text{ где } x, y \in X_i,\ i = 1, 2, \\ Z(x, y) &= Q_1(x, y) \vee R_1(x, y).\end{aligned}$$

Полугруппу входных сигналов S автомата $\mathcal{A} = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ будем называть *Z-замкнутой*, если для любой пары отображений $f_1 : X_1 \to X_1$, $f_2 : X_1 \to X_2$ из условия, что для любых $x, y \in X_1$, удовлетворяющих условию $Z(x, y)$, существуют такие входные сигналы $s_i \in S$, $i = \overline{1,2}$, что $x \star s_1 = f_1(x)$, $y \star s_1 = f_1(y)$, $x \diamond s_2 = f_2(x)$, $y \diamond s_2 = f_2(y)$, следует, что для некоторого $t \in S$ выполняется $z \star t = f_1(z)$, $z \diamond t = f_2(z)$ для всех $z \in X_1$.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{A} = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ — автомат без равнодействующих входных сигналов, удовлетворяющий условию $|X_i| > 1$ для $i = \overline{1,2}$. Тогда $\mathcal{A}$ в том и только том случае будет универсальным графовым автоматом $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ для некоторого рефлексивного квазибесконтурного графа $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и рефлексивного графа $G_2 = (X_2, \rho_2)$, если полугруппа входных сигналов S является Z-замкнутой полугруппой и канонические предикаты автомата Q_i и R_i $(i = \overline{1,2})$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $(\forall x \in X_i)\, R_i(x, x)$;
2) $Q_1(x, y) \wedge Q_i(u, v) \Longrightarrow (\Pi_i(x, y, u, v) \Longleftrightarrow \neg\Pi_i(x, y, v, u))$;
3) $Q_1(x, y) \wedge \Pi_i(x, y, u, v) \Longrightarrow (\Pi_i(x, y, v, u) \wedge R_i(u, v) \ \vee \ \neg\Pi_i(x, y, v, u) \wedge Q_i(u, v))$.

В **разделе 2.3** рассматривается задача об абстрактной характеризации универсальных графовых автоматов: *при каких условиях абстрактный автомат будет изоморфен некоторому универсальному графовому автомату?* Основным результатом этого раздела является доказательство невозможности решения этой проблемы для некоторых важных классов рефлексивных графов средствами языка узкого исчисления предикатов.

Для классов графов $\mathbf{K_1}$ и $\mathbf{K_2}$ через $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ обозначим класс всех автоматов, изоморфных универсальным графовым автоматам $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ для графов $G_1 \in \mathbf{K_1}$ и $G_2 \in \mathbf{K_2}$. Класс графовых автоматов $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ называется *элементарно аксиоматизируемым,* если существует такое множество предложений Σ языка элементарной теории графовых автоматов $\mathbf{L_A}$, что класс $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ состоит из тех и только тех графовых автоматов $\mathcal{A}$, на которых истинны все формулы из множества Σ.

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathbf{Gr}$ *— класс всех графов. Для следующих классов графов* $\mathbf{K}$ *классы универсальных графовых автоматов* $\mathrm{Atm}(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ *не могут быть элементарно аксиоматизируемы:*

1) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{tr}}$ *всех тривиальных рефлексивных графов;*
2) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{r}}$ *всех рефлексивных графов;*
3) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{rs}}$ *всех рефлексивных симметричных графов;*
4) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{qo}}$ *всех графов квазипорядка;*
5) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{ra}}$ *всех рефлексивных бесконтурных графов;*
6) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{re}}$ *всех рефлексивных графов, имеющих дугу, не лежащую ни в каком контуре;*
7) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{rqa}}$ *всех рефлексивных квазибесконтурных графов;*
8) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K_{lo}}$ *всех графов линейного порядка.*

Разделы 2.4 и **2.5** посвящены исследованию строения изоморфизмов и групп автоморфизмов универсальных графовых автоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами. Следующий результат даёт описание строения изоморфизмов полугрупп входных сигналов таких автоматов.

Теорема 2.5. *Пусть* $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$, $G'_1 = (X'_1, \rho'_1)$, $G'_2 = (X'_2, \rho'_2)$ *— рефлексивные графы, причём* G_2 *— антисимметричный граф и* G_1 *— нетривиальный квазибесконтурный граф с компонентами связности* $\{X_{1_i}\}$, $i \in I$, *и пусть* $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$, $\mathrm{Atm}(G'_1, G'_2)$ *— универсальные графовые автоматы с полугруппами входных сигналов* $S_1 = \mathrm{End}\ G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ *и* $S_2 = \mathrm{End}\ G'_1 \times \mathrm{Hom}(G'_1, G'_2)$ *соответственно. Тогда отображение* $\pi : S_1 \to S_2$ *в том и только том случае является изоморфизмом полугруппы* S_1 *на полугруппу* S_2, *когда для некоторого изоморфизма (антиизоморфизма)* $f : G_1 \to G'_1$ *и некоторого семейства изоморфизмов (антиизоморфизмов)* $g_i : G_2 \to G'_2$, $i \in I$, *отображение* π *для всех* $(\varphi, \psi) \in S_1$ *определяется по формуле*

$$\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi),$$

где $\psi^\varphi(f(a)) = g_i(\psi(a))$ *для любого* $a \in X_1$, *такого что* $\varphi(a) \in X_{1_i}$ *при некотором* $i \in I$.

Обозначим через $\mathrm{Ant}\ G$ множество всех антиавтоморфизмов графа G, через $(\mathrm{Aut}\ G)^I$ — множество семейств $\{g_i\}_{i \in I}$ автоморфизмов графа G. Следующая теорема даёт описание взаимосвязи между группами автоморфизмов универсального графового автомата и группами автоморфизмов его компонент.

Теорема 2.6. *Пусть* $G_1 = (X_1, \rho_1)$ *— нетривиальный квазибесконтурный рефлексивный граф с компонентами связности* $\{X_{1_i}\}$, $i \in I$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ *— антисимметричный рефлексивный граф, и пусть* $\mathcal{A} = \mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ *— универсальный графовый автомат с полугруппой входных сигналов* $S = \mathrm{End}\ G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$. *Тогда для группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\ \mathcal{A}$ *автомата* $\mathcal{A}$, *групп автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\ G_1$, $\mathrm{Aut}\ G_2$ *графов* G_1, G_2 *и группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\ S$ *полугруппы входных сигналов* S *выполняются следующие условия:*

1) $\mathrm{Aut}\ \mathcal{A} \cong (\mathrm{Aut}\ G_1 \times \mathrm{Aut}\ G_2) \cup (\mathrm{Ant}\ G_1 \times \mathrm{Ant}\ G_2)$;

2) группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\ S$ *изоморфна алгебре с носителем*

$$P = (\mathrm{Aut}\ G_1 \times (\mathrm{Aut}\ G_2)^I) \cup (\mathrm{Ant}\ G_1 \times (\mathrm{Ant}\ G_2)^I)$$

и бинарной операцией $\cdot$, *которая определяется по формуле*

$$(f, \{g_i\}_{i\in I}) \cdot (f', \{g'_i\}_{i\in I}) = \left(f \cdot f', \{g_i \cdot g'_{\tilde{f}(i)}\}_{i\in I}\right),$$

где f, f' *— автоморфизмы (антиавтоморфизмы) графа* G_1, $\{g_i\}_{i\in I}$, $\{g'_i\}_{i\in I}$ *— семейства автоморфизмов (антиавтоморфизмов) графа* G_2 *и* $\tilde{f}$ *— перестановка множества индексов* I, *индуцируемая автоморфизмом (антиавтоморфизмом)* f.

Третья глава посвящена исследованию графовых полуавтоматов вида $\mathcal{A} = (G, \mathrm{End}\ G, \star)$ над графом $G = (X, \rho)$ с полугруппой входных сигналов $\mathrm{End}\ G$ и функцией переходов $\star$, которая для элементов $x \in X$, $\varphi \in \mathrm{End}\ G$ определяется по формуле $x \star \varphi = \varphi(x)$. Такой полуавтомат является универсально притягивающим объектом в категории графовых полуавтоматов над графом G и называется *универсальным графовым полуавтоматом.*

В **разделе 3.1** рассматривается вопрос конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами: *при каких условиях полуавтомат* $\mathcal{A}$ *с множеством состояний* X *и полугруппой входных сигналов* S *является универсальным графовым полуавтоматом, то есть на множестве состояний* X *полуавтомата* $\mathcal{A}$ *можно так задать бинарное отношение* ρ, *что для графа* $G = (X, \rho)$ *выполняется равенство* $\mathcal{A} = \mathrm{Atm}(G)$? Для решения проблемы конкретной характеризации на множестве состояний X полуавтомата $\mathcal{A} = (X, S, \star)$ определим канонические предикаты $\Pi(x, y, u, v)$, $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ следующим образом:

$$\Pi(x, y, u, v) = (\exists s \in S)(x \star s = u \wedge y \star s = v \wedge (\forall z \in X)(z \star s = u \vee z \star s = v)),$$
$$Q(x, y) = \Pi(x, y, x, y) \wedge \neg\Pi(x, y, y, x),$$
$$R(x, y) = (\forall u, v \in X, u \neq v)\ \Pi(u, v, x, y).$$

Обозначим $Z(x,y) = Q(x,y) \vee R(x,y)$. Полугруппу S входных сигналов полуавтомата $\mathcal{A}$ будем называть *Z-замкнутой*, если для любого преобразования f множества X из условия, что для любых $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $Z(x,y)$, существует такой входной сигнал $s \in S$, что $x \star s = f(x)$ и $y \star s = f(y)$, следует, что для некоторого $t \in S$ выполняется $x \star t = f(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{A} = (X, S, \star)$ — полуавтомат без равнодействующих входных сигналов, удовлетворяющий условию $|X| > 1$. Тогда $\mathcal{A}$ в том и только том случае будет универсальным графовым полуавтоматом $\mathrm{Atm}(G)$ для некоторого квазибесконтурного рефлексивного графа $G = (X, \rho)$, если полугруппа входных сигналов S является Z-замкнутой полугруппой и канонические предикаты $Q(x,y)$ и $R(x,y)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $(\forall x \in X)\ R(x,x)$;

2) $Q(x,y) \wedge Q(u,v) \Longrightarrow (\Pi(x,y,u,v) \Longleftrightarrow \neg\Pi(x,y,v,u))$;

3) $Q(x,y) \wedge \Pi(x,y,u,v) \Longrightarrow (\Pi(x,y,v,u) \wedge R(u,v) \vee \neg\Pi(x,y,v,u) \wedge Q(u,v))$.

<u>Разделе 3.2</u> посвящён исследованию проблемы абстрактной характеризации универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами. Для решения этой проблемы определяются следующие предикаты элементарной теории полугрупп:

$$M(x) = (\forall y)(y \cdot x = x),$$

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigwedge_{i=1}^{4} M(x_i) \wedge (\exists s)(x_1 \cdot s = x_3 \wedge x_2 \cdot s = x_4 \wedge \\ \wedge (\forall z)(M(z) \Longrightarrow z \cdot s = x_3 \vee z \cdot s = x_4)),$$

$$q(x,y) = M(x) \wedge M(y) \wedge \pi(x,y,x,y) \wedge \neg\pi(x,y,y,x),$$
$$r(x,y) = M(x) \wedge M(y) \wedge (\forall u,v)(M(u) \wedge M(v) \wedge u \neq v \Rightarrow \pi(u,v,x,y)),$$
$$z(x,y) = q(x,y) \vee r(x,y).$$

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{A} = (X, S, \star)$ — некоторый полуавтомат, удовлетворяющий условию $|X| > 1$. Тогда $\mathcal{A}$ в том и только том случае будет изоморфен универсальному графовому полуавтомату над некоторым квазибесконтурным рефлексивным графом, если он удовлетворяет следующим условиям:*

1) $(\forall x \in X)(\exists! s \in S)(\forall y \in X)(y \star s = x)$;

2) $(\forall x \in X)\ r(x,x)$;

3) $q(x,y) \wedge q(u,v) \Rightarrow (\pi(x,y,u,v) \Leftrightarrow \neg\pi(x,y,v,u))$;

4) $q(x,y) \wedge \pi(x,y,u,v) \Rightarrow (\pi(x,y,v,u) \wedge r(u,v) \ \vee \ \neg\pi(x,y,v,u) \wedge q(u,v))$;

5) для любого преобразования η *множества* X *выполняется условие*

$$(\forall x,y \in X)(z(x,y) \Rightarrow (\exists s \in S)(x \star s = \eta(x) \wedge y \star s = \eta(y))) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\exists! t \in S)(\forall z \in X)(z \star t = \eta(z)).$$

В представленной теореме условия 1)–4) формулируются на языке узкого исчисления предикатов теории полугрупп, в то время как условие 5) формулируется на языке исчисления предикатов более высокого порядка. Поскольку любой универсальный графовый полуавтомат можно рассматривать как редуцированный универсальный графовый автомат, у которого граф выходных сигналов совпадает с графом состояний и функция выходов совпадает с функцией переходов, то для классов универсальных графовых полуавтоматов можно получить результат, аналогичный теореме 2.4 (для тех же важных классов рефлексивных графов). Согласно этому результату класс универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами не может быть элементарно аксиоматизируем.

В **разделе 3.3** доказана относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов над нетривиальными квазибесконтурными рефлексивными графами в классе всех полугрупп.

Введём следующие формулы языка элементарной теории полугрупп:

$$M(x) = (\forall y)(y \cdot x = x),$$
$$A(x,y,z) = (M(x) \wedge \ M(z) \ \wedge \ x \cdot y = z),$$
$$B(x,y,u,v) = (M(x) \wedge \ M(y) \wedge M(u) \wedge M(v) \ \wedge \ (\exists s)(x \cdot s = u \ \wedge \ y \cdot s = v)).$$

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathcal{A} = \mathrm{Atm}(G)$ — *произвольный универсальный графовый полуавтомат над нетривиальным квазибесконтурным рефлексивным графом* $G = (X, \rho)$ *с полугруппой входных сигналов* $S = \mathrm{End}\ G$. *Справедливы следующие условия:*

1) предикат $M(x)$ *определяет в полугруппе* S *непустое множество* $\overline{X} = \{x \in S : M(x)\}$;

2) предикат $A(x,y,z)$ *определяет отношение* $\overline{\star} \subset \overline{X} \times S \times \overline{X}$, *которое удовлетворяет следующему условию:*

$$(x,y,z_1),(x,y,z_2) \in \overline{\star} \implies z_1 = z_2;$$

3) существуют такие $x_0, y_0 \in S$, *что формула* $B(x_0,y_0,x,y)$ *определяет отношение смежности* $\overline{\rho}$ *на множестве* $\overline{X}$, *такое что универсальный графовый полуавтомат* $\mathcal{A} = \mathrm{Atm}(G)$ *изоморфен полуавтомату* $\overline{\mathcal{A}} = (\overline{G}, S, \overline{\star})$ *над графом* $\overline{G} = (\overline{X}, \overline{\rho})$.

Следующая теорема определяет возможность эффективной синтаксической трансформации формул языка элементарной теории графовых полуавтоматов в формулы языка элементарной теории полугрупп.

Теорема 3.4. *Любую формулу Ψ языка элементарной теории графовых полуавтоматов $\mathbf{L_A}$ можно эффективно трансформировать в такую формулу $\overline{\Psi}$ языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$, что для любого универсального графового полуавтомата $\mathcal{A} = \mathrm{Atm}(G)$ над нетривиальным квазибесконтурным рефлексивным графом G с полугруппой входных сигналов $\mathrm{Inp}(\mathcal{A})$ выполняется следующее условие:*

$$(\mathcal{A} \models \Psi \vee \mathcal{A} \models \widetilde{\Psi}) \Longleftrightarrow \mathrm{Inp}(\mathcal{A}) \models \overline{\Psi}.$$

В **разделе 3.4** исследуются приложения относительно элементарной определимости класса универсальных графовых полуавтоматов над нетривиальными квазибесконтурными рефлексивными графами в классе всех полугрупп для решения задач определяемости универсальных графовых полуавтоматов своими полугруппами входных сигналов, относительной аксиоматизируемости подклассов универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами формулами языка элементарной теории полугрупп, взаимосвязи проблем разрешимости элементарных теорий классов графовых полуавтоматов и классов полугрупп.

В **четвёртой главе** исследуется задача линейного упорядочивания автоматов, которая состоит в построении линейных порядков на множестве состояний и множестве выходных сигналов конечного автомата, устойчивых относительно действия входных сигналов автомата. Эта проблема представляет особый интерес, так как, с одной стороны, линейно упорядоченные автоматы широко используется при исследовании различных задач в комбинаторной теории полугрупп, формальных языков и автоматов и, с другой стороны, задача распознавания линейно упорядочиваемых автоматов является NP-полной, и, следовательно, не имеет эффективных алгоритмов её решения. Этот факт обуславливает интерес к разработке разнообразных алгоритмов решения задачи линейного упорядочивания автоматов.

Так, в **разделе 4.1** рассматривается алгоритм линейного упорядочивания конечных полуавтоматов и автоматов методом поиска с возвратами и отсечениями.

В **разделах 4.2** и **4.3** для решения задачи линейного упорядочивания полуавтоматов рассматриваются эвристические алгоритмы глобальной оптимизации — метод имитации отжига и алгоритм искусственной пчелиной колонии.

Для всех рассмотренных алгоритмов реализованы компьютерные программы и проведено их тестирование на полуавтоматах, у которых функции переходов являются преобразованиями, порождающими всю полугруппу эндоморфизмов линейно упорядоченного множества. Результаты тестирования программ представлены в таблице 1.

Таблица 1 — Результаты тестирования алгоритмов линейного упорядочивания полуавтоматов

Число состояний полуавтомата	BTRA, сек.	Среднее SAA, сек.	Миним. SAA, сек.	ABCA, сек.
50	6016.6	25.606	1.693	8.146
100	90176.4	3857.963	53.977	1297.260
150	—	11452.712	410.033	7859.972
200	—	14859.536	1837.811	11635.203
300	—	18769.451	13817.571	21851.645

Обозначения: BTRA — время выполнения алгоритма поиска с возвратами и отсечениями (англ. backtracking algorithm); SAA — время выполнения алгоритма имитации отжига (англ. simulated annealing algorithm); ABCA — время выполнения алгоритма искусственной пчелиной колонии (англ. artificial bee colony algorithm)

В **заключении** приведены основные результаты работы. Для универсальных графовых автоматов получены следующие результаты:

1) исследована определяемость универсальных графовых автоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами их полугруппами входных сигналов;
2) решена задача конкретной характеризации универсальных графовых автоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами;
3) описано строение изоморфизмов и групп автоморфизмов универсальных графовых автоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами;
4) доказана невозможность элементарной аксиоматизации универсальных графовых автоматов над некоторыми важными классами рефлексивных графов.

Для универсальных графовых полуавтоматов получены следующие результаты:

1) решена задача конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами;
2) решена задача абстрактной характеризации универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами;
3) доказана относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными

рефлексивными графами в классе полугрупп;

4) изучена взаимосвязь логико-алгебраических свойств универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами и полугрупп их входных сигналов.

Проведено исследование проблемы линейного упорядочивания конечных автоматов. Для решения этой задачи рассматривались следующие алгоритмы: алгоритм поиска с возвратами и отсечениями, алгоритм имитации отжига и алгоритм пчелиной колонии. Тестирование разработанных программ показало значительное превосходство результативности эвристических алгоритмов над алгоритмом перебора с возвратами и отсечениями.

Благодарности. Автор диссертации выражает искреннюю благодарность и большую признательность своему научному руководителю Владимиру Александровичу Молчанову за всестороннюю поддержку, постановку задач, обсуждение результатов и научное руководство.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

A1. *Farakhutdinov, R. A.* On Definability of Universal Graphic Automata by Their Input Symbol Semigroups / R. A. Farakhutdinov, V. A. Molchanov // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2020. — Т. 20, № 1. — С. 42—50. — DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-1-42-50.

A2. *Фарахутдинов, Р. А.* О конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов / Р. А. Фарахутдинов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2022. — Т. 22, № 4. — С. 458—467. — DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-458-467.

A3. *Фарахутдинов, Р. А.* Относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов в классе полугрупп / Р. А. Фарахутдинов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2022. — № 1. — С. 74—84. — DOI: 10.26907/0021-3446-2022-1-74-84. —
Переводная версия: *Farakhutdinov, R. A.* Relatively Elementary Definability of the Class of Universal Graphic Semiautomata in the Class of Semigroups / R. A. Farakhutdinov // Russian Mathematics. — 2022. — Vol. 66, no. 1. — P. 62–70. — DOI: 10.3103/S1066369X22010029.

A4. *Farakhutdinov, R. A.* On Concrete Characterization of Universal Graphic Automata / R. A. Farakhutdinov, V. A. Molchanov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 3. — P. 664—671. — DOI: 10.1134/S1995080222060233.

A5. *Фарахутдинов, Р. А.* О проблеме абстрактной характеризации универсальных графовых автоматов / Р. А. Фарахутдинов // Чебышевский сборник. — 2024. — Т. 25, 1 (92). — С. 116—126. — DOI: 10.22405/2226-8383-2024-25-1-116-126.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

A6. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа линейного упорядочивания множества состояний конечного автомата / В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов ; Ф. государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (RU). — № 2018664580 ; заявл. 20.12.2018 ; опубл. 09.01.2019, 2019610057 (Рос. Федерация).

A7. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа линейного упорядочивания конечных автоматов эвристическими методами / Р. А. Фарахутдинов ; Ф. государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (RU). — № 2024619132 ; заявл. 26.04.2024 ; опубл. 26.04.2024, 2024619828 (Рос. Федерация).

В сборниках трудов конференций

A8. *Фарахутдинов, Р. А.* Об универсальных графических автоматах / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Международной научной конференции. — 2018. — С. 276—278.

A9. *Фарахутдинов, Р. А.* Линейное упорядочивание конечных автоматов / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019): Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. — 2019. — С. 31—36.

A10. *Farakhutdinov, R. A.* On Concrete Characterization Problem of Universal Graphic Automata / R. A. Farakhutdinov // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». — 2020.

A11. *Farakhutdinov, R. A.* On Concrete Characterization Problem of Universal Graphic Automata / R. A. Farakhutdinov // Мальцевские чтения: Тезисы докладов Международной конференции. — 2020. — С. 245.

A12. *Farakhutdinov, R. A.* Relatively Elementary Definability of the Class of Universal Graphic Automata in the class of Semigroups / R. A. Farakhutdinov // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021». — 2021.

A13. *Фарахутдинов, Р. А.* Абстрактная характеризация универсальных графовых полуавтоматов / Р. А. Фарахутдинов // Материалы Международной алгебраической конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения А.И. Старостина: Тезисы докладов. — 2021. — С. 89—91.

A14. *Фарахутдинов, Р. А.* Конкретная характеризация универсальных графовых автоматов / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии 2021. — 2021. — С. 101—102.

A15. *Фарахутдинов, Р. А.* Конкретная характеризация универсальных графовых полуавтоматов / Р. А. Фарахутдинов // Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Международной научной конференции. — 2021. — С. 186—188.

A16. *Фарахутдинов, Р. А.* Строение изоморфизмов и групп автоморфизмов универсальных графовых автоматов / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Материалы XIV Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» имени академика О.Б. Лупанова. — 2022. — С. 203—206.

A17. *Farakhutdinov, R. A.* On Structure of Isomorphisms of Input Signal Semigroups of Universal Graphic Automata / R. A. Farakhutdinov, V. A. Molchanov // Тезисы докладов Международной конференции «Мальцевские чтения». — 2022. — С. 171.

A18. *Farakhutdinov, R. A.* On Abstract Characterization of Universal Graphic Automata / R. A. Farakhutdinov, V. A. Molchanov // Тезисы докладов Международной конференции «Мальцевские чтения». — 2023. — С. 113.

A19. *Фарахутдинов, Р. А.* Применение эвристических алгоритмов глобальной оптимизации для задач, не имеющих эффективных методов решения / Р. А. Фарахутдинов // Информационные технологии в образовании: сборник научных статей. Материалы XV Всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции «Информационные технологии в образовании» (ИТО-Саратов-2023). — 2023. — С. 332—337.

A20. *Фарахутдинов, Р. А.* Относительно элементарная определимость класса частичных графовых полуавтоматов в классе полугрупп / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвященной 130-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского университета члена-корреспондента АН СССР Николая Григорьевича Чеботарева и 80-летию со дня рождения заведующего кафедрой академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова. — 2024. — С. 172.

В прочих изданиях

A21. *Фарахутдинов, Р. А.* Линейное упорядочивание полуавтоматов / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Математика. Механика. — 2019. — № 21. — С. 45—48.

A22. *Фарахутдинов, Р. А.* Об аксиоматизации графовых полуавтоматов / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Математика. Механика. — 2021. — № 23. — С. 41—43.

A23. *Farakhutdinov, R. A.* Relatively Elementary Definability of the Class of Universal Graphic Semiautomata in the Class of Semigroups / R. A. Farakhutdinov // Представляем научные достижения миру. Естественные науки: материалы XII научной конференции молодых ученых «Presenting Academic Achievements to the World». — 2022. — № 11. — С. 33—39.

A24. *Фарахутдинов, Р. А.* О строении изоморфизмов универсальных графовых автоматов / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Математика. Механика. — 2022. — № 24. — С. 37—40.

A25. *Farakhutdinov, R. A.* On the Problem of Axiomatization of Some Classes of Universal Graphic Semiautomata / R. A. Farakhutdinov, V. A. Molchanov // Algebra and model theory. — 2023. — No. 14. — P. 75—82.

A26. *Фарахутдинов, Р. А.* Линейное упорядочивание полуавтоматов методом имитации отжига / Р. А. Фарахутдинов, В. А. Молчанов // Математика. Механика. — 2023. — № 25. — С. 69—73.

Список литературы

1. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / под ред. М. А. Арбиба. — М. : Статистика, 1975. — 335 с.

2. *Плоткин, Б. И.* Элементы алгебраической теории автоматов / Б. И. Плоткин, Л. Я. Гринглаз, А. А. Гварамия. — М. : Высш. шк., 1994. — 191 с.

3. *Кожухов, И. Б.* Об алгебраической теории автоматов / И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2021. — Т. 25, № 4. — С. 45—51.
4. *Паллеман, Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения / Ж. Лаллеман. — М. : Мир, 1985. — 440 с.
5. *Лидл, Р.* Прикладная абстрактная алгебра: учеб. пособие / Р. Лидл, Г. Пильц. — Екатеринбург : Изд-во Урал. Ун-та, 1996. — 744 с. — DOI: 10.1007/978-1-4757-2941-2.
6. *Улам, С.* Нерешенные математические задачи / С. Улам. — М. : Наука, 1964. — 168 с. — DOI: 10.1126/science.132.3428.665.
7. *Плоткин, Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем / Б. И. Плоткин. — М. : Наука, 1966. — 604 с.
8. *Пинус, А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унаров и групп / А. Г. Пинус // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43, № 6. — С. 730—748.
9. *Важенин, Ю. М.* Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств / Ю. М. Важенин // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 3. — С. 281—301.
10. *Глускин, Л. М.* Полугруппы изотонных преобразований / Л. М. Глускин // УМН. — 1961. — Т. 16, № 5. — С. 157—162.
11. *Михалёв, А. В.* Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей / А. В. Михалёв // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1974. — Т. 12. — С. 51—76.
12. *Кожухов, И. Б.* Полигоны над полугруппами / И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв // Фундаментальная и прикладная математика. — 2020. — Т. 23, № 3. — С. 141—199.
13. *Визинг, В. Г.* Некоторые нерешённые задачи в теории графов / В. Г. Визинг // УМН. — 1968. — Т. 23, № 6. — С. 117—134.
14. *Jónsson, B.* Topics in Universal Algebra / B. Jónsson. — Berlin : Springer Berlin, Heidelberg, 1972. — 224 p. — DOI: 10.1007/BFb0058648.
15. *Бредихин, Д. А.* Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов универсальных алгебр / Д. А. Бредихин // Сибирск. матем. журнал. — 1975. — Т. 17, № 3. — С. 490—507.
16. *Molchanov, V. A.* Semigroups of mappings on graphs / V. A. Molchanov // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155—199. — DOI: 10.1007/BF02572738.
17. *Ершов, Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели / Ю. Л. Ершов. — М. : Наука. Физматлит, 1980. — 416 с.

18. *Eppstein*, *D.* Reset sequences for monotonic automata / D. Eppstein // SIAM Journal on Computing. — 1990. — Vol. 19, no. 3. — P. 500—510. — DOI: 10.1137/0219033.

19. *Ananichev*, *D. S.* Synchronizing monotonic automata / D. S. Ananichev, M. V. Volkov // Theoretical Computer Science. — 2004. — Vol. 327, no. 3. — P. 225—239. — DOI: 10.1016/j.tcs.2004.03.068.

20. *Szykuła*, *M.* Checking whether an automaton is monotonic is NP-complete / M. Szykuła // Implementation and application of automata / ed. by F. Drewes. — Cham : Springer, 2015. — P. 279—291. — DOI: 10.1007/978-3-319-22360-5_23.

Фарахутдинов Ренат Абуханович

Алгебраическая теория графовых квазибесконтурных автоматов

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________