Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный университет
имени академика И.Г. Петровского»

На правах рукописи

Максаков Серафим Павлович

ω-ВЕЕРНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, доцент
М.М. Сорокина

Брянск – 2024

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертационного исследования и степень ее разработанности.

Рассматриваются только конечные группы. Большое значение в современной теории групп имеет понятие класса. Классом групп называется множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы ей изоморфные. В теории классов конечных групп центральное место занимают формации — классы, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, введенные в рассмотрение В. Гашюцем в 1963 году [61]. Многие важные классы конечных групп (классы всех разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных, абелевых групп и др.) являются формациями. Теория формаций оказалась эффективным средством для систематизации и обобщения многих результатов теории групп [53]. Это, в частности, обусловило интенсивное развитие теории формаций в последние десятилетия (см., например, [53, 55, 58, 59, 62]).

Удобным средством для изучения формаций является функциональный подход, заложенный в работе [61], в которой с помощью функций-спутников (в терминологии [53], экранов) были построены локальные формации, наиболее изученные в настоящее время и нашедшие многочисленные применения. Подтвеждением этому являются работы А.Н. Скибы, Л.А. Шеметкова, В.А. Ведерникова, А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова, В.Н. Семенчука, В.Г. Сафонова, М.В. Селькина, Е.А. Таргонского, К. Дерка, Т. Хоукса, В. Го, А. Баллестера-Болинше и многих других алгебраистов (см., например, [4–6, 36, 38, 40, 41, 43, 53, 58, 59, 62]). Для локальных формаций в качестве области определения используемых функций-спутников рассматривается множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Поскольку всякая простая абелева группа является в точности группой простого порядка, то на область определения таких функций можно смотреть как на класс всех конечных простых абелевых групп. С целью изучения непростых конечных групп оказалось целесообразным в качестве области определения функций рассмотреть класс $\mathfrak{I}$ всех простых групп. Данная идея была предложена Л.А. Шеметковым [52], в частности, в монографии [53] им были построены композиционные формации, также хорошо известные и достаточно исследованные в настоящее время (см., например, [3, 8, 24, 29, 47, 49]). Независимо от Л.А. Шеметкова композиционные формации были построены Бэром в терминах разрешимо насыщенных формаций (см. [59]). Композиционные формации также нашли широкое применение в теории конечных групп, в частности, при изучении субнормальных подгрупп и их обобщений (см. [29]).

В дальнейшем, идея применения функциональных методов в теории формаций развивалась в направлении изменения области определения используемых функций. Так, в качестве области определения стало рассматриваться некоторое непустое подмножество ω множества $\mathbb{P}$ в объединении с одноэлементным множеством, состоящим из элемента ω', не принадлежащим ω. Л.А. Шеметковым в работе [54] были определены ω-локальные формации групп, являющиеся естественным обобщением локальных формаций, а именно, всякая локальная формация является ω-локальной для любого множества ω. В 1999 году Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба построили $\mathfrak{L}$-композиционные формации [45], где $\mathfrak{L}$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. Многие важные результаты об ω-локальных и $\mathfrak{L}$-композиционных формациях групп были получены в работах [21, 37, 42, 44, 46, 48, 51], представлены в монографии [22]. В [56] Л.А. Шеметковым была завершена разработка метода функционального задания формаций с помощью функций-спутников.

Следует отметить, что функциональные методы нашли применение не только в теории формаций групп. Двойственным к понятию формации является понятие класса Фиттинга, введенное в рассмотрение Б. Фишером, В. Гашюцем и Б. Хартли в 1967 году [60]. Классом Фиттинга называется класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп, принадлежащих рассматриваемому классу. Развивая функциональный подход В. Гашюца, Б. Хартли с помощью специальной функции (в терминологии [44], функции Хартли) ввел в рассмотрение понятие локального класса Фиттинга [63]. Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой в работе [44] были построены ω-локальные классы Фиттинга и установлены их ключевые свойства. Локальные и ω-локальные классы Фиттинга также достаточно хорошо изучены в настоящее время (см., например, [20, 22]).

В 1999 году В.А. Ведерниковым был предложен новый функциональный подход к изучению классов конечных групп, основанный на использовании, наряду с функциями-спутниками, еще одной функции — функции-направления. В качестве области определения функций-направлений типа δ было предложено выбирать множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел, в качестве области определения функций-направлений типа φ было предложено выбирать класс $\mathfrak{I}$ всех простых групп, область значений данных функций — множество всех формаций Фиттинга групп. В.А. Ведерниковым совместно с М.М. Сорокиной были построены новые серии формаций и классов Фиттинга: серии ω-веерных формаций и ω-веерных классов Фиттинга и серии Ω-расслоенных формаций и Ω-расслоенных классов Фиттинга конечных групп (см. [10, 11, 13–15]), где Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. При этом, ω-локальные формации (классы Фиттинга) составили один из видов серии ω-веерных формаций (классов Фиттинга), а Ω-композиционные формации (классы Фиттинга) — один из видов серии Ω-расслоенных формаций (классов Фиттинга). В [13] доказано, что для фиксированного непустого множества ω простых чисел (класса Ω простых групп) можно построить бесконечное множество новых видов ω-веерных (Ω-расслоенных) формаций и классов Фиттинга. В 1999 году В.А. Ведерниковым были поставлены следующие общие проблемы:

(A) *Разработать теорию ω-веерных формаций конечных групп* [11].

(B) *Разработать теорию Ω-расслоенных формаций конечных групп* [10].

Исследованиями в рамках решения проблемы **(B)** занимались Ю.А. Еловикова, Д.Г. Коптюх, С.В. Чиспияков, М.М. Сорокина, М.А. Корпачева, Е.Н. Демина, А.Б. Еловиков, В.Е. Егорова и другие: изучены решеточные свойства Ω-расслоенных формаций (см., например, [25, 39]), максимальные подформации Ω-расслоенных формаций [32], Ω-расслоенные формации заданной длины [9], критические Ω-расслоенные формации [12, 30], факторизации однопорожденных Ω-расслоенных формаций конечных групп [26], в работе [16] исследовались Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп. Касательно решения проблемы **(A)**, в работах [13, 15] установлен ряд ключевых свойств ω-веерных формаций, в [1] построены простейшие примеры ω-веерных формаций, в серии работ (см., например, [31, 33]) проведено исследование критических ω-веерных формаций. Таким образом, многие аспекты изучения ω-веерных формаций являются в настоящее время недостаточно исследованными.

Как отмечено в монографии [43], уже в первые годы развития теории формаций выделились три общие задачи изучения формаций ([43], с. 7):

(1) разработка методов конструирования локальных формаций с различными заданными свойствами;

(2) классификация локальных формаций;

(3) применение локальных формаций в вопросах исследования внутреннего строения непростых конечных групп.

С развитием теории формаций понятие локальной формации получило свое естественное развитие в указанных выше направлениях. В этой связи общие задачи **(1)** — **(3)** изучения формаций в рамках рассмотрения локальных формаций распространяются на новые построенные виды формаций.

Естественным обобщением задачи **(1)** в рамках решения проблемы **(A)** является следующая задача:

(A1) *Исследовать методы конструирования ω-веерных формаций конечных групп.*

Как отмечено в ([53], с. 6) к основным методам построения локальных формаций относится метод, основанный на использовании групповых функций и экранов, а также некоторые комбинированные методы, например, использование понятия порожденной формации.

В теории формаций групп в рамках решения задачи **(2)** классификации локальных формаций большое внимание уделялось изучению решеточных свойств различных видов локальных формаций. В монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [55] авторы исследовали решетки формаций алгебраических систем, в том числе решетки формаций конечных групп и решетки локальных формаций конечных групп. В монографии А.Н. Скибы [43] изложены ключевые свойства решетки всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, в частности, исследованы свойства индуктивности, $\mathfrak{G}$-отделимости, модулярности, алгебраичности указанной решетки, доказана недистрибутивность решетки всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, изучены булевы подрешетки данной решетки. В работе [44] А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым были установлены решеточные свойства n-кратно ω-локальных формаций и классов Фиттинга, а также сформулирован ряд проблем, связанных с их дальнейшим изучением (см., например, [44], проблемы 1, 4, 5). В [46] исследованы решетки всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций и сформулированы проблемы, связанные с их изучением. В монографии Н.Н. Воробьева [22] представлено наиболее полное изложение полученных за последние десятилетия результатов о решетках n-кратно ω-локальных формаций и n-кратно ω-локальных классов Фиттинга конечных групп. О.В. Камозиной исследовались решеточные свойства ω-веерных и Ω-расслоенных классов Фиттинга (см., например, [27, 28]). В работах Ю.А. Еловиковой изучались свойства решетки Ω-расслоенных формаций (см., например, [25,39]). Отметим, что до недавнего времени не проводилось исследования решеток ω-веерных формаций.

Таким образом, актуальна следующая задача, являющаяся естественным обобщением задачи **(2)** в рамках решения проблемы **(A)**:

(A2) *Исследовать решетки ω-веерных формаций конечных групп.*

С развитием теории классов групп в конечных группах, на основе определений известных видов подгрупп, стали выделять новые виды подгрупп, определяемые с помощью рассматриваемых классов — $\mathfrak{F}$-корадикалы, $\mathfrak{F}$-радикалы, $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы, $\mathfrak{F}$-проекторы, $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы, $\mathfrak{F}$-нормализаторы, $\mathfrak{F}$-нормальные, $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы и многие другие (здесь $\mathfrak{F}$ — класс групп). Данный подход позволил систематизировать известные результаты в теории групп, а также получить их обобщение и дальнейшее развитие. В этом направлении большую роль сыграли локальные и композиционные формации (см., например, [29, 53, 62]).

Естественным обобщением задачи **(3)** применения локальных формаций в вопросах исследования подгруппового строения конечных групп в рамках решения проблемы **(A)** является следующая задача:

(A3) *Применить ω-веерные формации для изучения подгрупп конечных групп.*

Локальные формации успешно применялись к исследованию $\mathfrak{F}$-нормальных и $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп в группах (см., например, [53], гл. 2). В работе [35] Л.Я. Поляков для локальной формации $\mathfrak{F}$ установил условия, при которых все $\mathfrak{F}$-абнормальные (в смысле Кегеля) максимальные подгруппы в конечной группе G являются квазисубнормальными, а значит, ввиду теоремы П. Клейдмана [66], нормальными в G. Локальные формации нашли применение при изучении $\mathfrak{F}$-субнормальных и K-$\mathfrak{F}$-субнормальных (в терминологии [29], $\mathfrak{F}$-достижимых) подгрупп (см., например, [29], гл. 3). В совместной работе А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова и В.Н. Семенчука [5] для локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ было получено решение проблемы Л.А. Шеметкова о нахождении условий, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует решетку ([53], проблема 12), а также установлена эквивалентность данной проблемы и аналогичной задачи О. Кегеля из [65] о K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах для случая, когда $\mathfrak{F}$ является локальной наследственной формацией.

При изучении и применении ω-локальных формаций целесообразным оказалось рассмотрение подгрупп в конечных группах с учетом множества ω. На этом пути были определены ω-примитивные группы, $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы, $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторы, $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы групп и установлены их основные свойства (см., например, [17–19]). Естественным является вопрос рассмотрения обобщений понятий $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной) максимальной подгруппы, $\mathfrak{F}$-субнормальной (K-$\mathfrak{F}$-субнормальной) подгруппы с учетом множества ω и установления их свойств для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$.

Цель диссертационного исследования.
В диссертации ставится целью решение задач **(A1)** — **(A3)**.

Основные результаты диссертации.
1. Получено решение задачи **(A1)** исследования методов конструирования ω-веерных формаций групп в следующих аспектах:

(A1.1) построены ω-веерные формации, определяемые значениями функций-направлений (теоремы 1.2.1, 1.2.2);

(A1.2) построены ω-веерные формации с помощью описания функций-спутников (теоремы 1.3.1 — 1.3.3);

(A1.3) получены результаты, характеризующие внутреннюю структуру ω-веерных формаций (теоремы 1.4.1 — 1.4.5);

(A1.4) исследованы свойства ω-веерных формаций, построенных посредством применения решеточных операций (теоремы 1.5.1 — 1.5.3).

2. Получено решение задачи **(A2)** исследования свойств решеток ω-веерных формаций конечных групп в следующих аспектах:

(A2.1) доказана модулярность решетки всех ω-веерных формаций (теорема 2.2.1);

(A2.2) установлены условия, при которых решетки ω-веерных формаций обладают свойствами дистрибутивности, дополняемости, алгебраичности, стоуновости (теоремы 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1, 2.6.2).

3. Получено решение задачи **(A3)** применения ω-веерных формаций к изучению подгрупп конечных групп в следующих аспектах:

(A3.1) определены $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальные и $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы группы и для ω-локальной (ω-веерной с направлением δ_1) формации $\mathfrak{F}$ получено описание строения конечной группы G, все $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы которой являются нормальными (теорема 3.2.1);

(A3.2) определены $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы и для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых в любой конечной группе G множество всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку (теорема 3.3.1).

(A3.3) определены K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы и для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между решеточными свойствами K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных и $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в ω-разрешимых группах (теорема 3.5.2).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми, что подтверждается их опубликованностью в 2019 — 2024 гг. в журналах «Дискретная математика», «Математические заметки», «Труды Института математики и механики УрО РАН», «Lobachevskii Journal of Mathematics», «Известия Саратовского университета. Новая серия» и др. Доказанные в диссертации теоремы развивают известные результаты работ Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы, Д. Хоукса, Р. Бэра, С.Ф. Каморникова, В.Н. Семенчука, А.Ф. Васильева, Л.Я. Полякова, И.П. Шабалиной и других авторов.

Методы исследования. В диссертации используются классические методы теории групп, а также методы теории классов групп.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и теории классов конечных групп, при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в шести статьях [69–74] в журналах, входящих в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий. Все результаты диссертации опубликованы в четырнадцати статьях [69–82] в рецензируемых научных изданиях, а также в сборниках материалов Международных и Всероссийских научных конференций [83–100].

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации апробировались:

— на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в рамках семинара кафедры высшей алгебры МГУ «Избранные вопросы алгебры» (2019, 2020, 2021, 2022 гг., Москва);

— на Международной конференции «Мальцевские чтения» (2020, 2021, 2022 гг., Новосибирск);

— на Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвященной 125-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского ун-та члена-корреспондента АН СССР Н.Г. Чеботарева и 75-летию со дня рождения заведующего кафедрой академика АН РТ М.М. Арсланова (2019 г., Казань);

— на XIII международной школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова (2020 г., Екатеринбург);

— на Международной конференции «2020 Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics» (2020 г., Екатеринбург);

— на Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной столетию со дня рождения профессоров Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина (2020 г., Тула);

— на Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П.Л. Чебышева (2021 г., Тула);

— на Международной алгебраической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А.И. Старостина (2021 г., Екатеринбург);

— на XIV Международной школе-конференции по теории групп, посвященной памяти В.А. Белоногова, В.А. Ведерникова и Л.А. Шеметкова (2022 г., Брянск);

— на Международной (54-ой Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (2023 г., Екатеринбург);

— на Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 70-летию А.А. Махнева (2023 г., Нальчик);

— на Всероссийской с международным участием конференции «Современные тенденции развития фундаментальных и прикладных наук» (2019, 2020, 2021 гг., Брянск);

— на семинарах кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского (2018 – 2024 гг., Брянск).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора результатов, трех глав основной части, заключения, перечня условных обозначений и определений, перечня известных результатов, используемых в диссертации, списка литературы (98 наименований), составленного в алфавитном порядке, включающего 68 используемых источников и 30 публикаций автора диссертации по теме исследования. Объем диссертации — 120 страниц.

Обзор результатов

Обзор результатов Главы 1.

Глава 1 диссертации посвящена решению задачи **(A1)** исследования методов конструирования ω-веерных формаций. В главе 1 получены следующие основные результаты:

(A1.1) построены ω-веерные формации, определяемые значениями функций-направлений: Теоремы 1.2.1, 1.2.2;

(A1.2) построены ω-веерные формации с помощью описания функций-спутников: Теоремы 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3;

(A1.3) получены результаты, характеризующие подформационное строение ω-веерных формаций: Теоремы 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5;

(A1.4) исследованы свойства ω-веерных формаций, построенных посредством применения решеточных операций: Теоремы 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4.

Все основные результаты данной главы опубликованы в работах [70, 79, 80], анонсированы в [84, 86, 87, 90, 96].

Параграф 1.1 носит вводный характер. В нем представлены основные определения теории ω-веерных формаций групп.

Параграф 1.2 посвящен построению ω-веерных формаций, определяемых значениями функций-направлений.

Хорошо известно, что класс $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ всех конечных p-нильпотентных групп, где $p \in \mathbb{P}$, определяющий направление локальной формации, также является локальной формацией ([53], гл. 1, § 4, п. 5). В теореме 1.2.1 установлены условия, при которых значения функций-направлений ω-веерных формаций также являются ω-веерными формациями.

Теорема 1.2.1. [70] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Если δ — p-направление ω-веерной формации, то для любого $q \in \omega$ формация $\delta(q)$ является ω-веерной формацией с направлением δ.*

Следствие 1.2.1. *Если δ — p-направление веерной формации, то для любого простого числа q формация $\delta(q)$ является веерной формацией с направлением δ.*

Следствие 1.2.2. *Для любого $q \in \omega$ класс $\mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является ω-локальной формацией.*

Следствие 1.2.3. (Л.А. Шеметков, [53], с. 33) *Для любого $q \in \mathbb{P}$ класс $\mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является локальной формацией.*

Следствие 1.2.4. *Для любого $q \in \omega$ (для любого $q \in \mathbb{P}$) класс $\mathfrak{G}_{(Z_q)'}\mathfrak{N}_q$ является ω-специальной (специальной) формацией.*

Следствие 1.2.5. *Для любого $q \in \omega$ (для любого $q \in \mathbb{P}$) класс $\mathfrak{S}_{cq}$ является ω-центральной (центральной) формацией.*

В теореме 1.2.2 установлено, что всякое направление δ ω-веерной формации для любого $q \in \omega$ определяет ω-веерную формацию вида $\mathfrak{G}_\omega \delta(q)$.

Теорема 1.2.2. [70] *Пусть δ — произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. Тогда формация $\mathfrak{G}_\omega \delta(q)$ является ω-веерной формацией с направлением δ для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1.2.6. *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{G}_{q'}$ является ω-полной формацией для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1.2.7. *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{G}_{q'} \mathfrak{N}_q$ является ω-локальной формацией для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1.2.8. *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{G}_{(Z_q)'} \mathfrak{N}_q$ является ω-специальной формацией для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1.2.9. *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{S}_{cq}$ является ω-центральной формацией для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1.2.10. *Класс групп $\mathfrak{G}$ является веерной формацией с направлением δ, для любой $\mathbb{P}FR$-функции δ.*

Параграф 1.3 посвящен построению ω-веерных формаций с помощью описания функций-спутников.

В монографии [53] большое внимание уделяется методу построения локальных формаций с помощью групповых функций и экранов. Указанным способом в [53] было установлено, что формации всех групп, всех единичных групп, всех π-групп, всех π-разрешимых групп, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, и многие другие являются локальными формациями ([53], гл. 1, п. 4). В [1] установлено, что $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{E}$ являются $\omega\delta$-веерными формациями для произвольной $\mathbb{P}FR$-функции δ. В теореме 1.3.1 установлено, что формация $\omega\mathfrak{S}$ всех ω-разрешимых групп является ω-веерной формацией посредством описания ее ω-спутника.

Теорема 1.3.1. [80] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся s-направлением ω-веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $\omega\mathfrak{S} = \omega F(f, \delta)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \omega\mathfrak{S}$ и $f(p) = \omega\mathfrak{S}$ для любого $p \in \omega$.*

Следствие 1.3.1. *Класс $\omega\mathfrak{S}$ является ω-полной формацией, причем $\omega\mathfrak{S} = \omega AF(f)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \omega\mathfrak{S}$ и $f(p) = \omega\mathfrak{S}$ для любого $p \in \omega$.*

Следствие 1.3.2. *Класс $\omega\mathfrak{S}$ является ω-локальной формацией, причем $\omega\mathfrak{S} = \omega LF(f)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \omega\mathfrak{S}$ и $f(p) = \omega\mathfrak{S}$ для любого $p \in \omega$.*

Ввиду теоремы 3 [15], из теоремы 1.3.1 вытекают следующие результаты для класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп.

Следствие 1.3.3. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся s-направлением веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $\mathfrak{S} = \mathbb{P}F(f, \delta)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция,* *что $f(p) = \mathfrak{S}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Следствие 1.3.4. *Класс $\mathfrak{S}$ является полной формацией, причем $\mathfrak{S} = AF(f)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{S}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Следствие 1.3.5. (Л.А. Шеметков, [53], с. 35) *Класс $\mathfrak{S}$ является локальной формацией, причем $\mathfrak{S} = LF(f)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{S}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

В теореме 1.3.2 установлены условия, при которых класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп является $\omega\delta$-веерной формацией.

Теорема 1.3.2. [96] *Пусть δ — $\mathfrak{b}ps$-направление ω-веерной формации, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$. Тогда $\mathfrak{N} = \omega F(f, \delta)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$.*

Следствие 1.3.6. *Пусть δ — $\mathfrak{b}ps$-направление веерной формации, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$. Тогда $\mathfrak{N} = \mathbb{P}F(f, \delta)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Следствие 1.3.7. *Класс $\mathfrak{N}$ является ω-локальной формацией, причем $\mathfrak{N} = \omega LF(f)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$.*

Следствие 1.3.8. (Л.А. Шеметков, [53], с. 33) *Класс $\mathfrak{N}$ является локальной формацией, причем $\mathfrak{N} = LF(f)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Как отмечено в [53], при построении локальных формаций также удобно использовать комбинированные способы, одним из которых является метод построения локальных формаций на основе понятия порожденной формации. В теореме 1.3.3 установлено, что формация $\mathfrak{N}_p$ всех p-групп, где $p \in \omega$, является ω-веерной формацией посредством описания ее ω-спутника, а также на основе использования понятия порожденной $\omega\delta$-веерной формации. Напомним, что через $\omega F(G, \delta)$ обозначается ω-веерная формация с направлением δ, порожденная группой G, т.е. $\omega F(G, \delta)$ — пересечение всех $\omega\delta$-веерных формаций, содержащих группу G ([15], с. 49).

Теорема 1.3.3. [80] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся $\mathfrak{b}$-направлением ω-веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$, $p \in \omega$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *$\mathfrak{N}_p = \omega F(f, \delta)$, где f — ωF-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{E}$, $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$.*

(2) *$\mathfrak{N}_p = \omega F(Z_p, \delta)$.*

Следствие 1.3.9. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся $\mathfrak{b}$-направлением веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$, $p \in \mathbb{P}$. Тогда*:

(1) *$\mathfrak{N}_p = \mathbb{P}F(f, \delta)$, где f — $\mathbb{P}F$-функция такая, что $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$.*

(2) *$\mathfrak{N}_p = \mathbb{P}F(Z_p, \delta)$.*

Следствие 1.3.10. *Пусть $p \in \omega$. Тогда*:

(1) $\mathfrak{N}_p = \omega LF(f)$, *где f — ωF-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{E}$, $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$.*

(2) $\mathfrak{N}_p = \omega LF(Z_p)$.

Следствие 1.3.11. *Пусть $p \in \mathbb{P}$. Тогда*:

(1) $\mathfrak{N}_p = LF(f)$, *где f — $\mathbb{P}F$-функция такая, что $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$* (Л.А. Шеметков, [53], с. 33).

(2) $\mathfrak{N}_p = LF(Z_p)$.

Из теоремы 1.3.3 вытекают аналогичные результаты для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

При исследовании методов конструирования локальных формаций большую роль играют вопросы изучения их внутренней структуры (см., например, [43], гл. 5). В параграфе 1.4 представлены результаты, характеризующие внутреннюю структуру ω-веерных формаций.

В теореме 1.4.1 получено описание строения $\omega\delta$-веерной формации, не содержащей нетривиальных $\omega\delta$-веерных подформаций.

Теорема 1.4.1. [80] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \leq \delta$ и $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega\delta$-веерная формация. Если $\mathfrak{F}$ содержит лишь тривиальные $\omega\delta$-веерные подформации, то $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — простая группа.*

В теореме 1.4.2 установлены условия, при которых $\omega\delta$-веерная формация обладает единственной максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией. Следуя [43], $\omega\delta$-веерную формацию $\mathfrak{F}$ называют $\omega\delta$-неприводимой, если $\omega F(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \delta) \subset \mathfrak{F}$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех собственных $\omega\delta$-веерных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.4.2. [79] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Если $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-неприводимая формация, то в ней существует единственная максимальная $\omega\delta$-веерная подформация.*

В теореме 1.4.3 описаны свойства формации $\mathfrak{M}$, порождающей $\omega\delta$-веерную формацию $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.4.3. [96] *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{M}, \delta)$, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если $G \in \mathfrak{F}$ и $O_\omega(G) = 1$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

(2) *Если G — простая неабелева группа из $\mathfrak{F}$ и δ — s-направление, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность формаций, удовлетворяющая условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{E}$ для любых различных $i, j \in I$. Через $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ обозначается совокупность всех групп вида $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$, и говорят, что класс $\mathfrak{F}$ прямо разложим на классы (множители) $\mathfrak{F}_i$ (является прямым разложением классов $\mathfrak{F}_i$), $i \in I$ ([43], с. 171).

В теореме 1.4.4 установлена взаимосвязь между свойствами множителей пряморазложимой $\omega\delta$-веерной формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.4.4. [79] *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-веерная формация с $\mathfrak{b}p$-направлением δ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{H}, \mathfrak{L}$ — неединичные формации, $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \neq \varnothing$, $\pi(\mathfrak{L}) \cap \omega \neq \varnothing$ и $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega = \varnothing$. Если $\mathfrak{H}$ — $\omega\delta$-веерная формация, то и $\mathfrak{L}$ также является $\omega\delta$-веерной формацией.*

В теореме 1.4.5 установлены условия, при которых прямое разложение $\omega\delta$-веерных формаций является $\omega\delta$-веерной формацией.

Теорема 1.4.5. [90] *Пусть δ — p-направление, $\delta \leq \delta_1$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i, \delta)$, f_i — внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, $\mathfrak{H} = \omega F(f, \delta)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \omega \setminus (\cup_{i \in I} \pi(\mathfrak{F}_i))$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Параграф 1.5 посвящен исследованию ω-веерных формаций, построенных посредством применения решеточных операций.

Пусть Θ — непустое множество формаций. Формация $\mathfrak{F}$ называется Θ-*формацией*, если $\mathfrak{F} \in \Theta$. Для множества групп $\mathfrak{X}$ через $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех Θ-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$ [43]. Следуя [55], для любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ полагаем: $\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 \vee_\Theta \mathfrak{F}_2 = \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Аналогично, для любых $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$: $\wedge_{\Theta_{i \in I}} \mathfrak{F}_i = \cap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, $\vee_{\Theta_{i \in I}} \mathfrak{F}_i = \Theta\mathrm{form}(\cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$.

Следовательно, если пересечение любой совокупности Θ-формаций является Θ-формацией, то множество Θ относительно введенных операций образует решетку [55]. В таком случае формация $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ является наименьшей Θ-формацией, содержащей множество групп $\mathfrak{X}$, и называется Θ-*формацией, порожденной множеством* $\mathfrak{X}$. Таким образом, к способам конструирования Θ-формаций относится способ их получения в результате применения к формациям из Θ операций $\wedge_\Theta$ и $\vee_\Theta$.

Непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех формаций $\mathfrak{M} \in \Theta$ [43].

Пусть θ — произвольная полная решетка формаций. В соответствии с [43], ωF-функция ($\mathbb{P}F$-функция) называется *θ-значной*, если каждое ее непустое значение принадлежит θ.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество θ-значных ωF-функций ($\mathbb{P}F$-функций). Тогда полагаем: $\wedge_{\theta_{i \in I}} f_i = h$; $\vee_{\theta_{i \in I}} f_i = f$ — такие ωF-функции ($\mathbb{P}F$-функции), что для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для любого $x \in \mathbb{P}$) имеет место: $h(x) = \wedge_{\theta_{i \in I}} f_i(x)$;

$$f(x) = \begin{cases} \vee_{\theta_{i \in I}} f_i(x), \text{ если } f_j(x) \neq \varnothing \text{ для некоторого } j \in I, \\ \varnothing, \text{ если } f_i(x) = \varnothing \text{ для всех } i \in I. \end{cases}$$

Через $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$; через $\omega\delta F_\theta$ — множество всех $\omega\delta$-веерных формаций, обладающих хотя бы одним θ-значным ω-спутником; через δF_θ — множество всех δ-веерных формаций, обладающих хотя бы одним θ-значным спутником.

В теореме 1.5.1 для полной решетки формаций θ изучается строение минимального θ-значного ω-спутника $\omega\delta$-веерной формации, полученной из $\omega\delta$-веерных формаций посредством операции решеточного объединения.

Теорема 1.5.1. [73] *Пусть θ — полная решетка формаций, δ — такая $\mathbb{P}FR$-функция, что $\delta_0 \leq \delta$, $\Theta = \omega\delta F_\theta$, f_i — минимальный θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta_{i\in I}}\mathfrak{F}_i$. Тогда $\vee_{\theta_{i\in I}} f_i$ — минимальный θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.*

В теоремах 1.5.2 и 1.5.3 установлены простейшие решеточные свойства однопорожденной $\omega\delta$-веерной формации, т.е. $\omega\delta$-веерной формации, полученной из $\omega\delta$-веерных формаций, содержащих фиксированную группу, с помощью операции решеточного объединения.

Теорема 1.5.2. [86] *Пусть G — группа, $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда решетка $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ имеет конечное число атомов в каждом из следующих случаев*:

(1) $\mathfrak{F}$ — *ω-разрешимая формация*;

(2) δ — *s-направление.*

Следствие 1.5.6. (Н.Н. Воробьев, [22], с. 187) *Пусть G — группа, $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$. Тогда решетка всех ω-локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$ имеет конечное число атомов.*

Следствие 1.5.7. (А.Н. Скиба, [43], с. 174) *Пусть G — группа, $\mathfrak{F} = LF(G)$. Тогда решетка всех локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$ имеет конечное число атомов.*

Теорема 1.5.3. [80] *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — простая ω-отделимая группа, δ — b-направление и $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| \leq 3$.*

В теореме 1.5.4 получено описание $\omega\delta$-веерной формации $\mathfrak{F}$ ω-разрешимых групп, имеющей в точности три $\omega\delta$-веерные подформации.

Теорема 1.5.4. [80] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, δ — b-направление, $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-веерная формация, $\mathfrak{F} \subseteq \omega\mathfrak{S}$. Если $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 3$, то $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — монолитическая группа с монолитом R таким, что G/R — простая группа.*

Аналогичные результаты справедливы для веерных, ω-локальных (локальных), ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Обзор результатов Главы 2.

Глава 2 диссертации посвящена решению задачи **(A2)** исследования свойств решеток ω-веерных формаций конечных групп. В главе 2 получены следующие основные результаты:

(А2.1) доказана модулярность решетки всех ω-веерных формаций: Теорема 2.2.1;

(А2.2) установлены условия, при которых решетки ω-веерных формаций обладают свойствами дистрибутивности, дополняемости, алгебраичности, стоуновости: Теоремы 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1, 2.6.2.

Основные результаты Главы 2 опубликованы в работах [71, 73, 74, 79], анонсированы в [86, 87, 89–92, 97, 100].

Параграф 2.1 имеет вспомогательный характер. В нем установлено свойство $\omega\delta$-индуктивности решетки $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп.

Пусть Θ — некоторая полная решетка формаций. Следуя [43], решетка Θ называется *$\omega\delta$-индуктивной решеткой* формаций, если для всякого набора формаций $\{\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i, \delta) \mid i \in I\}$, где f_i — внутренний Θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, имеет место равенство $\omega F(f, \delta) = \vee_{\omega\delta F_{i\in I}}(\mathfrak{F}_i)$, где $f = \vee_{\Theta_{i\in I}} f_i$. Решетка Θ называется *δ-индуктивной решеткой* формаций, если для всякого набора формаций $\{\mathfrak{F}_i = \mathbb{P}F(f_i, \delta) \mid i \in I\}$, где f_i — внутренний Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, имеет место равенство $\mathbb{P}F(f, \delta) = \vee_{\delta F_{i\in I}}(\mathfrak{F}_i)$, где $f = \vee_{\Theta_{i\in I}} f_i$.

В теореме 2.1.1 установлены условия, при которых решетка $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является $\omega\delta$-индуктивной.

Теорема 2.1.1. [71] *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является $\omega\delta$-индуктивной решеткой.*

Параграф 2.2 посвящен доказательству модулярности решетки всех ω-веерных формаций, а также применению данного свойства к исследованию подформационного строения ω-веерных формаций.

Решетка Θ называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in \Theta$ таких, что $y \leq x$, справедливо: $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = y \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$ ([2], с. 26). В теореме 2.2.1 установлены условия, при которых множество $\omega\delta F$ всех $\omega\delta$-веерных формаций является модулярной решеткой.

Теорема 2.2.1. [71] *Пусть δ — bp-направление $\omega\delta$-веерной формации, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество $\omega\delta F$ всех $\omega\delta$-веерных формаций является модулярной решеткой.*

Следствие 2.2.1. *Пусть δ — bp-направление δ-веерной формации, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество δF всех δ-веерных формаций является модулярной решеткой.*

Следствие 2.2.2. (Н.Н. Воробьев, [22], с. 168) *Множество всех ω-локальных формаций является модулярной решеткой.*

Следствие 2.2.3. (А.Н. Скиба, [43], с. 167) *Множество всех локальных формаций является модулярной решеткой.*

Из теоремы 2.2.1 вытекает модулярность решетки всех ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Ввиду теоремы 13 [2] (см. с. 107), из теоремы 2.2.1 вытекает следующий результат.

Следствие 2.2.4. *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \omega\delta F$ интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{F}_2)/_{\omega\delta F}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{\omega\delta F}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\omega\delta F} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Следствие 2.2.5. *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \delta F$ интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\delta F} \mathfrak{F}_2)/_{\delta F}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{\delta F}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\delta F} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Следствие 2.2.6. *Для любых ω-локальных формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\omega LF} \mathfrak{F}_2)/_{\omega LF}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{\omega LF}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\omega LF} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Следствие 2.2.7. (А.Н. Скиба, [43], с. 168) *Для любых локальных формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{LF} \mathfrak{F}_2)/_{LF}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{LF}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{LF} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Далее представлены результаты, посвященные применению модулярности решетки $\omega\delta F$ при исследовании подформационного строения $\omega\delta$-веерных формаций.

Теорема 2.2.2. [79] *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная $\omega\delta$-веерные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная $\omega\delta$-веерная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Следствие 2.2.8. *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\delta F} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная δ-веерные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная δ-веерная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Следствие 2.2.9. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\omega LF} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная ω-локальные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная ω-локальная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Следствие 2.2.10. (А.Н. Скиба, [43], с. 183) *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{LF} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная локальные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная локальная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Теорема 2.2.3. [79] *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i \in \omega\delta F$, $i \in I$. Если формация $\mathfrak{F}$ обладает такой максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией $\mathfrak{M}$, что $\pi(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, и $\pi(\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{M}) \cap \pi(\oplus_{i \in I \setminus \{k\}}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})) \cap \omega = \varnothing$ для любого $k \in I$, то найдется* *такое $j \in I$, что формация $\mathfrak{F}_j$ также обладает максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-локальных (локальных), ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$. Следуя [43], группа $G \in \mathfrak{F}$ называется *$\omega\delta$-необразующей* группой формации $\mathfrak{F}$, если из того, что $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta)$, всегда следует равенство $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \delta)$. Если $\mathfrak{F} \in \omega LF$, то $\omega\delta_1$-необразующую группу формации $\mathfrak{F}$ будем называть *ωL-необразующей* группой формации $\mathfrak{F}$. Аналогично определяются δ-необразующие (в частности, L-необразующие) группы. Через $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$ обозначается пересечение всех максимальных $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$; $\Phi_{\omega LF}(\mathfrak{F})$ ($\Phi_{LF}(\mathfrak{F})$) — пересечение всех максимальных ω-локальных (локальных) подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.2.4. [79] *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$. Тогда формация $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех $\omega\delta$-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 2.2.11. *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} \in \delta F$. Тогда формация $\Phi_{\delta F}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех δ-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 2.2.12. (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков, [44], с. 129) *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация. Тогда формация $\Phi_{\omega LF}(\mathfrak{F})$ совпадает со множеством всех ωL-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ из теорем 2.2.2 — 2.2.4 вытекают соответствующие свойства для δ-веерных формаций групп, в частности, следующий результат для локальных формаций.

Следствие 2.2.13. (А.Н. Скиба, [43], с. 187) *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда формация $\Phi_{LF}(\mathfrak{F})$ совпадает со множеством всех L-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

Замечание 2.2.1. В работе [72] доказаны теоремы для Ω-расслоенных формаций, аналогичные теоремам 2.2.2 — 2.2.4. Ввиду теоремы В.А. Ведерникова о соответствии ([13], теорема 4), между ω-веерными и Ω-расслоенными формациями существует взаимосвязь, позволяющая утанавливать свойства ω-веерных формаций посредством использования характеристик Ω-расслоенных формаций.

В параграфе 2.3 изучаются дистрибутивные решетки ω-веерных формаций. Решетка Θ называется *дистрибутивной*, если для любых $x, y, z \in \Theta$ справедливо равенство: $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = (x \wedge_\Theta y) \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$ ([2], с. 24). Центральным результатом параграфа 2.3 является следующая теорема.

Теорема 2.3.1. [71] *Пусть δ — bp-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка.*

Следствие 2.3.1. *Пусть* δ *— bp-направление,* $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \delta F$*,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— множество всех атомов решетки* $\delta F(\mathfrak{F})$*.Тогда* $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ *— дистрибутивная решетка.*

Следствие 2.3.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— неединичная* ω*-локальная формация,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— множество всех атомов решетки* $\omega LF(\mathfrak{F})$*. Если* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ *для любого* $i \in I$*, то* $\omega LF(\mathfrak{F})$ *— дистрибутивная решетка.*

Следствие 2.3.3. (А.Н. Скиба, [43], с. 176) *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— неединичная локальная формация,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— множество всех атомов решетки* $LF(\mathfrak{F})$*. Тогда* $LF(\mathfrak{F})$ *— дистрибутивная решетка.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Параграф 2.4 посвящен изучению условий, при которых решетка всех ω-веерных подформаций заданной ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ является решеткой с дополнениями. Решетка Θ с нулем O и единицей I называется *решеткой с дополнениями*, если для любого элемента $x \in \Theta$ существует дополнение в Θ, т.е. такой элемент $y \in \Theta$, что $x \wedge_\Theta y = O$ и $x \vee_\Theta y = I$.

Теорема 2.4.1. [71] *Пусть* δ *— bp-направление,* $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$*,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— множество всех атомов решетки* $\omega\delta F(\mathfrak{F})$*. Если* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ *для любого* $i \in I$*, то* $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ *— решетка с дополнениями.*

Следствие 2.4.1. *Пусть* δ *— bp-направление,* $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \delta F$*,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— множество всех атомов решетки* $\delta F(\mathfrak{F})$*. Если* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ *для любого* $i \in I$*, то* $\delta F(\mathfrak{F})$ *— решетка с дополнениями.*

Следствие 2.4.2. (Н.Н. Воробьев, [22], с. 178) *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— неединичная* ω*-локальная формация,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— множество всех атомов решетки* $\omega LF(\mathfrak{F})$*. Если* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ *для любого* $i \in I$*, то* $\omega LF(\mathfrak{F})$ *— решетка с дополнениями.*

Следствие 2.4.3. (А.Н. Скиба, [43], с. 175) *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— неединичная локальная формация,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— множество всех атомов решетки* $LF(\mathfrak{F})$*. Тогда* $LF(\mathfrak{F})$ *— решетка с дополнениями.*

Согласно ([2], с. 32), дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой решеткой*. Из теоремы 2.3.1 и теоремы 2.4.1 вытекает следующий результат.

Следствие 2.4.4. *Пусть* δ *— bp-направление,* $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$*,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— набор всех атомов решетки* $\omega\delta F(\mathfrak{F})$*. Если* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ *для любого* $i \in I$*, то* $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ *является булевой решеткой.*

Следствие 2.4.5. *Пусть* δ *— bp-направление,* $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \delta F$*,* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— набор всех атомов решетки* $\delta F(\mathfrak{F})$*. Тогда* $\delta F(\mathfrak{F})$ *является булевой решеткой.*

Следствие 2.4.6. (Н.Н. Воробьев, [22], с. 178) *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— неединичная* ω*-локальная формация„* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— набор всех атомов* *решетки $\omega LF(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega LF(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

Следствие 2.4.7. (А.Н. Скиба, [43], с. 175) *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $LF(\mathfrak{F})$. Тогда $LF(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

В параграфе 2.5 доказана алгебраичность решетки $\omega\delta F_\theta$ всех ω-веерных формаций с направлением δ и θ-значным ω-спутником при условии, что решетка формаций θ является алгебраической. Решетка Θ называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов решетки Θ ([2], с. 244). Элемент x решетки Θ называется *компактным* элементом, если для любого множества $\{y_i \,|\, i \in I\}$ элементов из Θ из того, что $x \leq \vee_{\Theta_{i \in I}}(y_i)$ всегда следует, что существует такое конечное множество $\{y_j \mid j = 1, ..., s\} \subseteq \{y_i \mid i \in I\}$, что $x \leq \vee_{\Theta_{j=1,\dots,s}}(y_j)$ ([2], с. 243).

Теорема 2.5.1. [73] *Пусть θ — полная решетка формаций, δ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Если решетка θ является алгебраической, то решетка $\omega\delta F_\theta$ (решетка δF_θ) также является алгебраической.*

Следствие 2.5.1. *Пусть τ — регулярный подгрупповой функтор. Тогда решетка $\omega\delta F_\tau$ (решетка δF_τ) всех $\omega\delta$-веерных (δ-веерных) формаций, обладающих τ-замкнутым ω-спутником (спутником), является алгебраической для любой $\mathbb{P}FR$-функции δ, удовлетворяющей условию $\delta_0 \leq \delta$.*

Следствие 2.5.2. *Решетка $\omega\delta F$ (решетка δF) всех $\omega\delta$-веерных (δ-веерных) формаций является алгебраической для любой $\mathbb{P}FR$-функции δ, удовлетворяющей условию $\delta_0 \leq \delta$.*

Следствие 2.5.3. *Пусть δ — $\mathfrak{b}p$-направление, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор. Тогда решетка $\tau\omega\delta F$ (решетка $\tau\delta F$) всех τ-замкнутых $\omega\delta$-веерных (δ-веерных) формаций является алгебраической.*

Следствие 2.5.4. *Решетки всех нормально наследственных ω-локальных, локальных, ω-специальных, специальных, ω-центральных, центральных формаций являются алгебраическими.*

Следствие 2.5.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Тогда решетка $\omega\delta^n F$ (решетка $\delta^n F$) всех n-кратно $\omega\delta$-веерных (n-кратно δ-веерных) формаций является алгебраической.*

Следствие 2.5.6. *Решетка всех ω-полных (n-кратно полных) формаций является алгебраической для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Следствие 2.5.7. (А.Н. Скиба, [43], с. 180) *Решетка всех n-кратно ω-локальных (n-кратно локальных) формаций является алгебраической для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Замечание 2.5.1. Алгебраичность решетки всех нормально наследственных ω-локальных формаций следует также из результата И.П. Шабалиной [51]. Алгебраичность решетки всех нормально наследственных локальных формаций вытекает из результата А.Н. Скибы (см. [43], п. 4.4.4).

В параграфе 2.6 установлены условия стоуновости решеток ω-веерных формаций. Пусть Θ — решетка, $a, b \in \Theta$, $\mathcal{X}_{a,b}$ — совокупность всех элементов из Θ, удовлетворяющих условию $a \wedge_\Theta x \leq b$. Наибольший элемент множества $\mathcal{X}_{a,b}$ называется *относительным псевдодополнением a в b* и обозначается $b|a$. Пусть Θ — решетка с нулем O, $a \in \Theta$. Элемент $O|a$ называется *псевдодополнением элемента a* и обозначается a^*. Дистрибутивная решетка Θ с нулем O и единицей I называется *стоуновой*, если Θ — решетка с псевдодополнениями (т.е. каждый элемент решетки обладает псевдодополнением) и $a^* \vee^\Theta (a^*)^* = I$ для любого $a \in \Theta$ ([23], с. 152).

В теореме 2.6.1 установлены условия, при которых брауэрова решетка ω-веерных формаций с произвольным направлением δ является стоуновой.

Теорема 2.6.1. [74] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega\delta$-веерная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Из теоремы 2.6.1 получаем соответствующие результаты для ω-полных, ω-локальных, ω-специальных, ω-центральных формаций. В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 2.6.1 вытекает результат для δ-веерных формаций, в частности, для полных, локальных, специальных, центральных формаций.

Согласно теоремам 2.3.1 и 2.4.1 решетка, исследуемая в теореме 2.6.1, является дистрибутивной решеткой с дополнениями. В этой связи справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6.2. [74] *Пусть δ — bp-направление ω-веерной формации, $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega\delta$-веерная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Из теоремы 2.6.2 получаем соответствующие результаты для ω-локальных, ω-специальных, ω-центральных формаций. В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 2.6.2 получаем результат для веерных формаций с bp-направлением, в частности, для локальных, специальных, центральных формаций.

Обзор результатов Главы 3.

Глава 3 диссертации посвящена решению задачи **(А3)** применения ω-веерных формаций к изучению подгрупп конечных групп. В главе 3 получены следующие основные результаты диссертации:

(A3.1) определены $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальные и $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы и для ω-локальной (ω-веерной с направлением δ_1) формации $\mathfrak{F}$ получено описание строения конечной группы G, все $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы которой являются нормальными: Теорема 3.1.1;

(A3.2) определены $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы и для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых, в любой конечной группе G множество всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку: Теорема 3.3.1.

(A3.3) определены K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы и для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между решеточными свойствами K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных и $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в ω-разрешимых группах: Теорема 3.5.2.

Основные результаты Главы 3 опубликованы в работах [69, 78, 81], анонсированы в [85, 88, 93, 95, 98, 99].

В параграфе 3.1 введены в рассмотрение понятия $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальной и $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальной максимальных подгрупп.

Определение 3.1.1. [69] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Максимальная подгруппа M группы G называется
— $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормальной* в G, если $G/(Core_G(M) \cap O_{\omega}(G)) \in \mathfrak{F}$;
— $\mathfrak{F}^{\omega}$-*абнормальной* в G, если $G/(Core_G(M) \cap O_{\omega}(G)) \notin \mathfrak{F}$.

Замечание 3.1.1. Если $\pi(G) \subseteq \omega$, то $O_{\omega}(G) = G$ и, следовательно, в этом случае понятия $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальной и $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальной и $\mathfrak{F}$-абнормальной) максимальных подгрупп группы G совпадают для любого непустого класса групп $\mathfrak{F}$. В случае, когда класс $\mathfrak{F}$ является гомоморфом, множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальных максимальных подгрупп группы G для любого множества ω содержится во множестве всех ее $\mathfrak{F}$-нормальных максимальных подгрупп, а множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G включает в себя множество всех ее $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп.

В теореме 3.1.1 для нормальной наследственной ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено строение группы, все $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы которой являются нормальными.

Теорема 3.1.1. [69] *Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная ω-локальная формация, замкнутая относительно расширений, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\omega \subseteq \pi$, G — группа. Если каждая $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, то $G = A \rtimes B$, где $A \in \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi \cap \omega'}$, $B \in \mathfrak{N}_{\omega'}$.*

Замечание 3.1.2. В работе [35] Л.Я. Поляков для локальной формации $\mathfrak{F}$ установил условия, при которых все $\mathfrak{F}$-абнормальные (в смысле Кегеля) максимальные подгруппы в конечной группе G являются квазисубнормальными, а значит, ввиду теоремы П. Клейдмана [66], нормальными в G. Теорема 3.1.1 развивает результат теоремы 1 из [35].

При доказательстве теоремы 3.1.1 используется следующая лемма, представляющая самостоятельный интерес.

Лемма 3.1.2. [69] *Пусть G — ω-примитивная группа. Если G обладает единственной минимальной нормальной ω-подгруппой L и индексы всех ω-примитиваторов группы G имеют общий делитель $p \in \omega$, то L является абелевой p-группой.*

Следствие 3.1.1. (Р. Бэр, [57], с. 118) *Пусть G — примитивная группа. Если G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой L и индексы всех примитиваторов группы G имеют общий простой делитель, то L является абелевой группой.*

В теореме 3.1.2 установлены условия, при которых в группе $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы являются нормальными.

Терема 3.1.2. [69] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G — группа. Если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, то всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G, индекс которой есть π'-число, является нормальной в G.*

В параграфе 3.2 введено в рассмотрение понятие $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной подгруппы и исследованы свойства таких подгрупп.

Определение 3.2.1. [81] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H — подгруппа группы G. $(G-H)$-цепь группы G называется *ω-цепью относительно* $\mathfrak{F}$ (или, иначе, $(G-H)^{\omega}$*-цепью относительно* $\mathfrak{F}$), если $\mathfrak{F}$-корадикал каждого члена данной цепи является ω-группой.

Определение 3.2.2. [81] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^{\omega}$*-субнормальной* подгруппой в G, если либо $H = G$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, либо существует максимальная $(G-H)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k = H$ такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,k}$.

Замечание 3.2.1. Из определения $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы (см., например, [53], с. 223) следует, что $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы является ее $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой. В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, понятие $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной подгруппы группы G совпадает с понятием $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы группы G.

Целью параграфа 3.2 является изучение простейших свойств $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в конечных группах.

Лемма 3.2.1. [81] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если $H \leq G$, $H^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap O_{\omega}(G)$, то H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

(2) *Если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G и $K \leq G$, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в K. В частности, если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G и $H \leq K$, то H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в K.*

(3) *Если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в K и K — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная*

подгруппа в G, то H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.

(4) *Если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы в G, то $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

Лемма 3.2.2. [81] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $H \leq G$, N — нормальная ω-подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то HN — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

(2) *Если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то HN/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N.*

(3) *Если $N \subseteq H$, H/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N, то H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

Замечание 3.2.3. В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, в качестве следствий из лемм 3.2.1 и 3.2.2 вытекают известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G (см. [29], леммы 3.1.3, 3.1.4).

Лемма 3.2.3. [81] *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, N — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G, H и M — такие подгруппы группы G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $G = HN$. Если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 3.2.1. (Т. Хоукс, [64], см. также [53], теорема 15.10) *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть H и M — такие подгруппы из G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $HF(G) = G$. Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

В параграфе 3.3 изучаются решеточные свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в конечных группах, где $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация.

Определение 3.3.1. [81] Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *R^{ω}-замкнутым*, если из того, что A и B — нормальные ω-подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует, что $AB \in \mathfrak{F}$.

Замечание 3.3.1. R-замкнутый класс групп является R^{ω}-замкнутым для любого ω (см., например, [53], с. 12). Если $\omega = \mathbb{P}$, то понятия R-замкнутого и R^{ω}-замкнутого классов совпадают.

В совместной работе А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова и В.Н. Семенчука [5] для локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ было получено решение задачи Л.А. Шеметкова о нахождении условий, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует решетку ([53], проблема 12).

В теореме 3.3.1 установлены необходимые и достаточные условия, при которых для наследственной ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ в любой конечной группе множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку, тем самым получено решение аналога вышеотмеченной проблемы Л.А. Шеметкова для $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп.

Теорема 3.3.1. [81] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) *В любой группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку.*

(2) *Если $G = \langle A_1, A_2\rangle$, где A_1, A_2 — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

(3) *$\mathfrak{F}$ — R^ω-замкнутый класс групп и каждая $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа любой группы содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале.*

Следствие 3.3.1. ([5], см. также [29], лемма 3.1.6) *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *$\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп*;

(2) *группа $G = \langle A_1, A_2\rangle$ принадлежит $\mathfrak{F}$, если A_1, A_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G*;

(3) *$\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга и всякая $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G содержится в $\mathfrak{F}$-радикале этой группы.*

В параграфе 3.4 введено в рассмотрение понятие K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппы и исследованы свойства таких подгрупп.

Определение 3.4.1. [82] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется *K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной* подгруппой в G, если существует $(G - H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq ... \supseteq H_k = H$ такая, что для любого $i \in \{1, ..., k\}$ либо $H_i \triangleleft H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Замечание 3.4.1. Из определения 3.2.2 следует, что всякая $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G является K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппой группы G. Очевидно, что всякая K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы является ее K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой (см., например, [29], с. 24). В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, понятие K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппы группы G совпадает с понятием K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы группы G.

Лемма 3.4.1. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если $H \leq G$, $H^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap O_\omega(G)$, то H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G.*

(2) *Если H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G и $M \leq G$, то $H \cap M$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в M. В частности, если H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G и $H \leq M$, то H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в M.*

(3) *Если H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в M и M — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G, то H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G.*

(4) *Если H_1 и H_2 — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы в G, то $H_1 \cap H_2$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G.*

Лемма 3.4.2. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $H \leq G$, N — нормальная ω-подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то HN — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

(2) *Если H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то HN/N — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N.*

(3) *Если $N \subseteq H$, H/N — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N, то H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

Замечание 3.4.2. В качестве следствий из лемм 3.4.1 и 3.4.2 вытекают известные результаты о K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах (см., например, [29], леммы 3.1.1, 3.1.2).

Целью параграфа 3.5 является изучение решеточных свойств K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в конечных группах. В совместной работе А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова и В.Н. Семенчука [5] для локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ была установлена эквивалентность проблемы 12 [53] Л.А. Шеметкова и аналогичной задачи О. Кегеля из [65] о K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах для случая, когда $\mathfrak{F}$ является локальной наследственной формацией. В теореме 3.5.2 для наследственной ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между решеточными свойствами K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп и $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в ω-разрешимых группах.

Теорема 3.5.2. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация, $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *В любой ω-разрешимой группе множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку*;

(2) *В любой ω-разрешимой группе множество всех K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс групп. Следуя терминологии [29], будем говорить, что класс групп $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных) подгрупп $\mathfrak{X}$-групп, если в любой $\mathfrak{X}$-группе множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных) подгрупп образует решетку.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс групп. Следуя терминологии [76], будем говорить, что класс групп $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных) подгрупп $\mathfrak{X}$-групп, если в любой $\mathfrak{X}$-группе множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных) подгрупп образует решетку.

Следствие 3.5.1. [99] *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_i$ – ω-локальная наследственная формация, обладающая решеточным свойством для K-$\mathfrak{F}_i^{\omega}$-субнормальных подгрупп $\omega\mathfrak{S}$-групп, $i = 1, 2$. Если $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп $\omega\mathfrak{S}$-групп.*

ГЛАВА 1
КОНСТРУИРОВАНИЕ ω-ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ

Глава 1 посвящена исследованию методов конструирования ω-веерных формаций конечных групп (задача **(A1)**). Данная глава состоит из пяти параграфов. Параграф 1.1 является вводным, в нем представлены основные определения теории ω-веерных формаций конечных групп. Параграф 1.2 посвящен построению ω-веерных формаций, определяемых значениями функций-направлений. В параграфе 1.3 построены примеры ω-веерных формаций посредством описания их функций-спутников. В параграфе 1.4 изучается внутренняя структура ω-веерных формаций: получено описание строения ω-веерной формации, не содержащей нетривиальных ω-веерных подформаций; установлены условия, при которых ω-веерная формация обладает единственной максимальной ω-веерной подформацией; описаны свойства формации, порождающей ω-веерную формацию; установлены свойства прямо разложимых ω-веерных формаций. В параграфе 1.5 изучаются ω-веерные формации, определяемые посредством решеточных операций. В рамках данного параграфа получены простейшие решеточные свойства ω-веерных формаций, связанные с их подформационным строением. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [70, 79, 80], анонсированы в [84, 86, 87, 90, 96].

§ 1.1. Основные определения теории ω-веерных формаций

Данный параграф носит вводный характер.

Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп, $\mathfrak{E}$ — класс всех единичных групп; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G. Группа G называется *ω-группой*, если $\pi(G) \subseteq \omega$; $\mathfrak{G}_\omega$ — класс всех ω-групп; $O_\omega(G) := G_{\mathfrak{G}_\omega}$ — $\mathfrak{G}_\omega$-радикал группы G. Для непустого множества групп $\mathfrak{X}$ через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$.

Определение 1.1.1. (1) Функции $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$, $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации$\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, $h : \mathbb{P} \to \{$формации$\}$ называются соответственно *$\mathbb{P}FR$-функцией*, *ωF-функцией* и *$\mathbb{P}F$-функцией* ([15], определение 1).

(2) Формация $\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$, где $G_{\delta(p)}$ — $\delta(p)$-радикал группы G, называется *ω-веерной формацией с направлением δ* (коротко, *$\omega\delta$-веерной формацией*) и *ω-спутником f*, обозначается $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ ([15], определение 2).

(3) Формация $\mathfrak{H} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\delta(p)} \in h(p)$ для всех $p \in \pi(G)\ )$ называется *веерной формацией с направлением δ* (коротко, *δ-веерной формацией*) и *спутником h*, обозначается $\mathfrak{H} = \mathbb{P}F(h, \delta)$ ([15], определение 2).

Замечание 1.1.1. Формацию $\mathfrak{F}$ будем называть *ω-веерной* (*веерной*) *формацией*, если $\mathfrak{F}$ является $\omega\delta$-веерной (δ-веерной) формацией для некоторого направления δ.

Пусть ψ_1 и ψ_2 — ωF-функции ($\mathbb{P}F$-функции, $\mathbb{P}FR$-функции). Полагают, что $\psi_1 \leq \psi_2$, если $\psi_1(x) \subseteq \psi_2(x)$ для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для любого $x \in \mathbb{P}$); $\psi_1 < \psi_2$, если $\psi_1 \leq \psi_2$ и $\psi_1(x) \neq \psi_2(x)$ для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для любого $x \in \mathbb{P}$) ([15], с. 49).

Пусть $p \in \mathbb{P}$. Через $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{G}_{p'}$ обозначаются соответственно классы всех p-групп и всех p'-групп; $\mathfrak{S}_{cp}$ — класс всех групп, у которых каждый главный p-фактор централен; $\mathfrak{G}_{(Z_p)'}$ — класс всех групп, у которых нет композиционных факторов, изоморфных Z_p, где Z_p — группа порядка p. $\mathbb{P}FR$-функции $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ определяются соответственно следующими равенствами: $\delta_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$, $\delta_1(p) = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$, $\delta_2(p) = \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p$, $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$, для любого $p \in \mathbb{P}$ [13]. Отсюда непосредственно следует справедливость следующих отношений: $\delta_0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$.

Определение 1.1.2. ω-Веерная (веерная) формация с ω-спутником (спутником) f и направлением δ_0 называется *ω-полной* (*полной*) и обозначается $\omega AF(f)$ ($AF(f)$); с направлением δ_1 — *ω-локальной* (*локальной*) и обозначается $\omega LF(f)$ ($LF(f)$); с направлением δ_2 — *ω-специальной* (*специальной*) и обозначается $\omega SF(f)$ ($SF(f)$); с направлением δ_3 — *ω-центральной* (*центральной*) и обозначается $\omega ZF(f)$ ($ZF(f)$) [13].

Определение 1.1.3. Направление δ ω-веерной (веерной) формации называется: *a-направлением*, если $Z_q \in \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; *b_q-направлением*, где $q \in \mathbb{P}$, если $\delta(q) = \delta(q)\mathfrak{N}_q$; *$b$-направлением*, если δ — b_q-направление для любого $q \in \mathbb{P}$; *p-направлением*, если $\delta(q) = \mathfrak{G}_{q'}\delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; *r-направлением*, если $\delta(q) = \mathfrak{G}_{(Z_q)'}\delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; *s-направлением*, если формация Фиттинга $\delta(q)$ q-разрешима для любого $q \in \mathbb{P}$ [13].

Замечание 1.1.2. Направление δ_0 ω-полной (полной) формации является ps-направлением; направление δ_1 ω-локальной (локальной) формации является $abps$-направлением; направление δ_2 ω-специальной (специальной) формации и направление δ_3 ω-центральной (центральной) формации являются $abpr$-направлениями.

§ 1.2. ω-Веерные формации, определяемые значениями функций-направлений

Параграф 1.2 посвящен построению ω-веерных формаций, определяемых значениями функций-направлений. В теореме 1.2.1 установлены условия, при которых значения функций-направлений ω-веерных формаций также являются ω-веерными формациями.

Теорема 1.2.1. [70] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Если δ — p-направление ω-веерной формации, то для любого $q \in \omega$ формация $\delta(q)$ является ω-веерной формацией с направлением δ.*

Доказательство. Пусть δ — p-направление ω-веерной формации, $q \in \omega$ и $\mathfrak{F} := \delta(q)$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с направлением δ. По определению 1.1.1(1) класс $\mathfrak{F}$ является формацией. Пусть $\mathfrak{H} := \omega F(h, \delta)$, где h — такая ωF-функция, что

$$h(r) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если} \quad r = \omega'; \\ \mathfrak{E}, & \text{если} \quad r = q; \\ \mathfrak{G}, & \text{если} \quad r \in \omega \setminus \{q\}. \end{cases}$$

Установим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$. Пусть $t \in \pi(G) \cap \omega$. Покажем, что $G/G_{\delta(t)} \in h(t)$. Рассмотрим случай, когда $t = q$. Поскольку $h(t) = \mathfrak{E}$, то достаточно проверить, что $G/G_{\delta(t)} = 1$. Действительно, $G \in \mathfrak{F} = \delta(q) = \delta(t)$. По определению $\mathfrak{F}$-радикала группы получаем, что $G = G_{\delta(t)}$, и, значит, $G/G_{\delta(t)} = 1 \in \mathfrak{E} = h(t)$. Если $t \neq q$, то $G/G_{\delta(t)} \in \mathfrak{G} = h(t)$. Следовательно, $G/G_{\delta(t)} \in h(t)$ для любого $t \in \pi(G) \cap \omega$ и $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$. По определению 1.1.1 (2) имеем $G \in \omega F(h, \delta) = \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Докажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим случай, когда $q \in \pi(H) \cap \omega$. По определению 1.1.1 (2) справедливо $H/H_{\delta(q)} \in h(q) = \mathfrak{E}$. Поэтому $H = H_{\delta(q)} \in \delta(q) = \mathfrak{F}$. Пусть $q \notin \pi(H) \cap \omega$. Из $q \in \omega$ получаем, что $q \notin \pi(H)$. Это означает, что H — q'-группа. Поскольку δ — p-направление ω-веерной формации, то $\mathfrak{G}_{q'}\delta(q) = \delta(q)$. Следовательно,

$$H \in \mathfrak{G}_{q'} \subseteq \mathfrak{G}_{q'}\delta(q) = \delta(q) = \mathfrak{F}.$$

Таким образом, во всех возможных случаях установлено, что $H \in \mathfrak{F}$, и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с направлением δ. *Теорема доказана.*

Ввиду теоремы 3 [15] (см. с. 109), из теоремы 1.2.1 вытекает результат для веерных формаций.

Следствие 1.2.1. *Если δ — p-направление веерной формации, то для любого простого числа q формация $\delta(q)$ является веерной формацией с направлением δ.*

Поскольку $\mathbb{P}FR$-функции δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 являются p-направлениями, то из теоремы 1.2.1 вытекают аналогичные результаты для ω-полных (полных), ω-локальных (локальных), ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Следствие 1.2.2. *Для любого $q \in \omega$ класс $\mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является ω-локальной формацией.*

Следствие 1.2.3. (Л.А. Шеметков, [53], с. 33) *Для любого $q \in \mathbb{P}$ класс $\mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является локальной формацией.*

Следствие 1.2.4. *Для любого $q \in \omega$ (для любого $q \in \mathbb{P}$) класс $\mathfrak{G}_{(Z_q)'}\mathfrak{N}_q$ является ω-специальной (специальной) формацией.*

Следствие 1.2.5. *Для любого $q \in \omega$ (для любого $q \in \mathbb{P}$) класс $\mathfrak{S}_{cq}$ является ω-центральной (центральной) формацией.*

В теореме 1.2.2 установлено, что всякое направление δ ω-веерной формации для любого $q \in \omega$ определяет ω-веерную формацию вида $\mathfrak{G}_\omega\delta(q)$.

Теорема 1.2.2. [70] *Пусть δ — произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. Тогда формация $\mathfrak{G}_\omega\delta(q)$ является ω-веерной формацией с направлением δ для любого $q \in \omega$.*

Доказательство. Пусть $q \in \omega$ и $\mathfrak{M} := \mathfrak{G}_\omega\delta(q)$. Покажем, что $\mathfrak{M}$ — ω-веерная формация с направлением δ. Пусть b — ωF-функция такая, что

$$b(r) = \begin{cases} \delta(q), & \text{если} \quad r = \omega'; \\ \mathfrak{M}, & \text{если} \quad r \in \omega, \end{cases}$$

и $\mathfrak{B} := \omega F(b, \delta)$. Установим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$.

Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Согласно утверждения IX.1.10 [59] (см. с. 111), справедливо равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_\omega \diamond \delta(q)$. Тогда по определению радикального произведения классов групп получаем, что $M/O_\omega(M) \in \delta(q) = b(\omega')$. Так как $\mathfrak{M}$ — формация и $M \in \mathfrak{M}$, то $M/M_{\delta(s)} \in \mathfrak{M} = b(s)$ для любого $s \in \pi(M) \cap \omega$. Таким образом, $M \in \omega F(b, \delta) = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$.

Пусть $B \in \mathfrak{B}$. По определению 1.1.1 (2) справедливо $B/O_\omega(B) \in b(\omega') = \delta(q)$. Тогда $B \in \mathfrak{G}_\omega\delta(q) = \mathfrak{M}$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$.

Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Это означает, что $\mathfrak{M}$ — ω-веерная формация с направлением δ. *Теорема доказана.*

Следствие 1.2.6. *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{G}_{q'}$ является ω-полной формацией для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1.2.7. *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является ω-локальной формацией для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1.2.8. *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{G}_{(Z_q)'}\mathfrak{N}_q$ является ω-специальной формацией для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1.2.9. *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{S}_{cq}$ является ω-центральной формацией для любого $q \in \omega$.*

Ввиду теоремы 3 [15], из теоремы 1.2.1 вытекает результат для веерных формаций.

Следствие 1.2.10. *Класс групп $\mathfrak{G}$ является веерной формацией с направлением δ, для любой $\mathbb{P}FR$-функции δ.*

§ 1.3. Построение ω-веерных формаций с помощью описания функций-спутников

Параграф 1.3 посвящен построению примеров ω-веерных формаций с помощью описания функций-спутников. В теореме 1.3.1 установлено, что формация $\omega\mathfrak{S}$ всех ω-разрешимых групп является ω-веерной формацией посредством описания ее ω-спутника.

Теорема 1.3.1. [80] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся s-направлением ω-веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $\omega\mathfrak{S} = \omega F(f, \delta)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \omega\mathfrak{S}$ и $f(p) = \omega\mathfrak{S}$ для любого $p \in \omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} := \omega\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{H} := \omega F(f, \delta)$, где f — ωF-функция, из заключения теоремы. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in \mathfrak{F} = f(p)$ для любого $p \in \pi(G) \cap \omega$. Следовательно, $G \in \omega F(f, \delta) = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/P \in \mathfrak{F}$, то H/P — ω-разрешимая группа. Поскольку $H \in \mathfrak{H}$, то $H/O_\omega(H) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$ и, значит, $P \subseteq O_\omega(H)$. Допустим, что P — неабелева группа и $q \in \pi(P)$. Так как $H \in \mathfrak{H}$, то $H/H_{\delta(q)} \in f(q) = \mathfrak{F}$. Следовательно, $P \subseteq H_{\delta(q)}$. Поскольку δ — s-направление, то $\delta(q)$ — q-разрешимый класс групп и, значит, P — q-разрешимая группа. Получили противоречие. Таким образом, P — абелева q-группа для некоторого $q \in \omega$. Тогда из того, что H/P — ω-разрешимая группа, ввиду свойства (1.8.3) [50] (см. с. 111), получаем, что H — ω-разрешимая группа. Это означает, что $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы H. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Теорема доказана.*

Поскольку $\mathbb{P}FR$-функции δ_0 и δ_1 являются s-направлениями, то из теоремы 1.3.1 вытекают следующие результаты для ω-полных и ω-локальных формаций.

Следствие 1.3.1. *Класс $\omega\mathfrak{S}$ является ω-полной формацией, причем $\omega\mathfrak{S} = \omega AF(f)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \omega\mathfrak{S}$ и $f(p) = \omega\mathfrak{S}$ для любого $p \in \omega$.*

Следствие 1.3.2. *Класс $\omega\mathfrak{S}$ является ω-локальной формацией, причем $\omega\mathfrak{S} = \omega LF(f)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \omega\mathfrak{S}$ и $f(p) = \omega\mathfrak{S}$ для любого $p \in \omega$.*

Ввиду теоремы 3 [15], из теоремы 1.3.1 вытекают следующие результаты для класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп.

Следствие 1.3.3. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся s-направлением веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $\mathfrak{S} = \mathbb{P}F(f,\delta)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{S}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Следствие 1.3.4. *Класс $\mathfrak{S}$ является полной формацией, причем $\mathfrak{S} = AF(f)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{S}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Следствие 1.3.5. (Л.А. Шеметков, [53], с. 35) *Класс $\mathfrak{S}$ является локальной формацией, причем $\mathfrak{S} = LF(f)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{S}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

В теореме 1.3.2 установлены условия, при которых класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп является $\omega\delta$-веерной формацией. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1.3.1. [96] *Пусть δ — bp-направление ω-веерной формации, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$, f — ωF-функция, имеющая следующее строение: $f(\omega') = \mathfrak{N}$, $f(p) = \mathfrak{E}$, для любого $p \in \omega$. Тогда $\omega F(f,\delta) \cap \omega\mathfrak{S} = \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\omega F(f,\delta) := \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \cap \omega\mathfrak{S}$. Пусть $G \in \mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{N}$ — формация, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{N} = f(\omega')$. Пусть $p \in \pi(G) \cap \omega$. Покажем, что $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$. Действительно, так как $G \in \mathfrak{N}$, то $G = G_p \times G_{p'}$, где G_p и $G_{p'}$ — соответственно силовская p-подгруппа и холлова p'-подгруппа группы G. Тогда $G \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{G}_{p'}\delta(p))\mathfrak{N}_p$. Так как δ — b-направление, то с учетом ассоциативности произведения классов групп (см., например, [53], с. 111), $(\mathfrak{G}_{p'}\delta(p))\mathfrak{N}_p = \mathfrak{G}_{p'}\delta(p)$. Так как δ — p-направление, то $\mathfrak{G}_{p'}\delta(p) = \delta(p)$. Следовательно, $G = G_{\delta(p)}$ и, значит, $G/G_{\delta(p)} = 1 \in \mathfrak{E} = f(p)$. Тогда по определению 1.1.1(2) $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{N} \subseteq \omega\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \cap \omega\mathfrak{S}$.

Покажем, что $\mathfrak{F} \cap \omega\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}$. Пусть $G \in \mathfrak{F} \cap \omega\mathfrak{S}$. Рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через $O_\omega(G)$: $1 = G_k \triangleleft ... \triangleleft O_\omega(G) = G_i \triangleleft ... \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$ (1). Тогда $1 = G_i/O_\omega(G) \triangleleft \ldots \triangleleft G_1/O_\omega(G) \triangleleft G_0/O_\omega(G) = G/O_\omega(G)$ (2) — главный ряд группы $G/O_\omega(G)$, причем $(G_{j-1}/O_\omega(G))/(G_j/O_\omega(G)) \cong G_{j-1}/G_j$, для любого $j = \overline{1,i}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{N}$ и, значит, все главные факторы группы G из (1), находящиеся выше $O_\omega(G)$, являются центральными в G. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ выполняется $G/G_{\delta(p)} \in f(p) = \mathfrak{E}$. Тогда для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ справедливо $G = G_{\delta(p)} \in \delta(p) \subseteq \delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ (3). Так как $G \in \omega\mathfrak{S}$, то каждый главный фактор группый G ниже $O_\omega(G)$ является главным p-фактором для некоторого $p \in \omega$. Это, ввиду (3), означает, что все главные факторы группы G в (1) ниже $O_\omega(G)$ являются центральными в G.

Таким образом, все главные факторы группы G в (1) являются центральными в G. Следовательно, $G \in \mathfrak{N}$ и, значит, $\mathfrak{F} \cap \omega\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{N}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{N} = \mathfrak{F} \cap \omega\mathfrak{G}$. *Лемма доказана.*

Теорема 1.3.2. [96] *Пусть δ — bps-направление ω-веерной формации, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$. Тогда $\mathfrak{N} = \omega F(f, \delta)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{P}FR$-функция δ является p-направлением, то $\delta_0 \leq \delta$. Тогда по теореме 1.3.1 $\omega\mathfrak{G} = \omega F(f_1, \delta) : \mathfrak{F}_1$, где f_1 — такая ωF-функция, что $f_1(\omega') = \omega\mathfrak{G}$ и $f_1(p) = \omega\mathfrak{G}$ для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{F}_2 := \omega F(f_2, \delta)$, где $f_2(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f_2(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$. Так как δ — bp-направление, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$, то, ввиду леммы 1.3.1, $\mathfrak{N} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. По лемме 5 [15] (см. с. 109) $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ — ω-веерная формация с ω-спутником f таким, что $f(\omega') = f_1(\omega') \cap f_2(\omega') = \omega\mathfrak{G} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ и $f(p) = f_1(p) \cap f_2(p) = \omega\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E} = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$. Таким образом, $\mathfrak{N} = \omega F(f, \delta)$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.3.6. *Пусть δ — bps-направление веерной формации, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$. Тогда $\mathfrak{N} = \mathbb{P}F(f, \delta)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Следствие 1.3.7. *Класс $\mathfrak{N}$ является ω-локальной формацией, причем $\mathfrak{N} = \omega LF(f)$, где f — такая ωF-функция, что $f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$.*

Следствие 1.3.8. (Л.А. Шеметков, [53], с. 33) *Класс $\mathfrak{N}$ является локальной формацией, причем $\mathfrak{N} = LF(f)$, где f — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

В теореме 1.3.3 установлено, что формация $\mathfrak{N}_p$ всех p-групп, где $p \in \omega$, является ω-веерной формацией посредством описания ее ω-спутника, а также на основе использования понятия порожденной $\omega\delta$-веерной формации. Напомним, что через $\omega F(G, \delta)$ обозначается ω-веерная формация с направлением δ, порожденная группой G, т.е. $\omega F(G, \delta)$ — пересечение всех $\omega\delta$-веерных формаций, содержащих группу G ([15], с. 49).

Теорема 1.3.3. [80] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся b-направлением ω-веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$, $p \in \omega$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $\mathfrak{N}_p = \omega F(f, \delta)$, *где f — ωF-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{E}$, $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$.*

(2) $\mathfrak{N}_p = \omega F(Z_p, \delta)$.

Доказательство. (1) Покажем, что класс $\mathfrak{N}_p$ является ω-веерной формаций с направлением δ. Пусть $\mathfrak{F} := \omega F(f, \delta)$, где f — ωF-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{E}$, $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$.

Проверим, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_p$. Так как $p \in \omega$, то $O_\omega(G) = G$ и поэтому $G/O_\omega(G) = 1 \in \mathfrak{E} = f(\omega')$. Поскольку δ является $\mathfrak{b}$-направлением ω-веерной формации, то $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и, значит, согласно определению 1.1.1(2), заключаем, что $G \in \omega F(f, \delta) = \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $H/O_\omega(H) \in f(\omega') = \mathfrak{E}$. Это означает, что $H = O_\omega(H)$ и $\pi(H) \subseteq \omega$. Далее, из того, что $H \in \mathfrak{F}$ следует $H/H_{\delta(r)} \in f(r)$ для любого $r \in \pi(H) \cap \omega = \pi(H)$. Тогда $f(r) \neq \varnothing$ для любого $r \in \pi(H)$. Отсюда, в силу задания ωF-функции f, получаем, что $\pi(H) = \{p\}$ и поэтому $H \in \mathfrak{N}_p$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p$.

Таким образом, $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{N}_p$ — ω-веерная формация с ω-спутником f. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $\mathfrak{F}_1 := \omega F(Z_p, \delta)$. Согласно теореме 5 [15] (см. с. 109) формация $\mathfrak{F}_1$ имеет единственный минимальный ω-спутник f_1, причем $f_1(\omega') = \mathrm{form}(Z_p/O_\omega(Z_p)) = \mathrm{form}(1) = \mathfrak{E}, f_1(p) = \mathrm{form}(Z_p/(Z_p)_{\delta(p)}) = \mathrm{form}(1) = \mathfrak{E}$ и $f_1(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$. Тогда $f_1 = f$, где f — ωF-функция из пункта (1) теоремы.

Из $f_1 = f$ по определению 1.1.1(2), с учетом доказанного равенства в пункте (1) теоремы, заключаем, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$. Утверждение (2) доказано. *Теорема доказана.*

Ввиду теоремы 3 [15], из теоремы 1.3.3 вытекает результат для веерных формаций.

Следствие 1.3.9. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся $\mathfrak{b}$-направлением веерной формации, $\delta_0 \leq \delta$, $p \in \mathbb{P}$. Тогда*:

(1) $\mathfrak{N}_p = \mathbb{P}F(f, \delta)$, *где f — $\mathbb{P}F$-функция такая, что $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$.*

(2) $\mathfrak{N}_p = \mathbb{P}F(Z_p, \delta)$.

Поскольку направление δ_1 ω-локальной (локальной) формации является $\mathfrak{b}$-направлениями, то из теоремы 1.3.3 вытекают следующие известные результаты.

Следствие 1.3.10. *Пусть $p \in \omega$. Тогда*:

(1) $\mathfrak{N}_p = \omega LF(f)$, *где f — ωF-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{E}$, $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$.*

(2) $\mathfrak{N}_p = \omega LF(Z_p)$.

Следствие 1.3.11. *Пусть $p \in \mathbb{P}$. Тогда*:

(1) $\mathfrak{N}_p = LF(f)$, *где f — $\mathbb{P}F$-функция такая, что $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$* (Л.А. Шеметков, [53], с. 33).

(2) $\mathfrak{N}_p = LF(Z_p)$.

Поскольку $\mathbb{P}FR$-функции δ_2 и δ_3 являются b-направлениями, то из теоремы 1.3.3 вытекают аналогичные результаты для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

§ 1.4. Подформационное строение ω-веерных формаций

При исследовании методов конструирования локальных формаций большую роль играют вопросы изучения их внутренней структуры (см., например, [43], гл. 5). В параграфе 1.4 представлены результаты, характеризующие внутреннюю структуру ω-веерных формаций.

В теореме 1.4.1 получено описание строения $\omega\delta$-веерной формации, не содержащей нетривиальных $\omega\delta$-веерных подформаций.

Теорема 1.4.1. [80] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \leq \delta$ и $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega\delta$-веерная формация. Если $\mathfrak{F}$ содержит лишь тривиальные $\omega\delta$-веерные подформации, то $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — простая группа.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ — множество всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — простая группа. Так как $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$, то существует неединичная группа $H \in \mathfrak{F}$. Если H — простая группа, то из $\mathfrak{E} \subset \omega F(H, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\omega F(H, \delta) = \mathfrak{F}$ и утверждение теоремы верно.

Допустим, что H не является простой группой. Тогда существует такая подгруппа $N \triangleleft H$, что $1 \neq N \neq H$. Так как $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — формация, то $H/N \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H} := \omega F(H/N, \delta)$. Тогда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, то $H/N = 1$ и $H = N$, что противоречит выбору N. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \omega F(H/N, \delta)$. Пусть $H/N := H_1$. Если H_1 — простая группа, то утверждение теоремы доказано. Пусть H_1 не является простой группой. Повторяя аналогичные рассуждения как для группы H, получим, что $\mathfrak{F} = \omega F(H_1/N_1, \delta)$, где $N_1 \triangleleft H_1$ и $1 \neq N_1 \neq H_1$. Если $H_1/N_1 := H_2$ — простая группа, то утверждение теоремы доказано. Пусть H_2 не является простой группой. Поскольку H — конечная группа, то продолжая аналогичные рассуждения, через конечное число шагов получим, что $\mathfrak{F} = \omega F(H_m/N_m, \delta)$, где H_m/N_m — простая группа.

Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — простая группа. *Теорема доказана.*

Следствие 1.4.1. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \leq \delta$ и $\mathfrak{F}$ — неединичная δ-веерная формация. Если $\mathfrak{F}$ содержит лишь тривиальные δ-веерные подформации, то $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G, \delta)$, где G — простая группа.*

Следствие 1.4.2. *Если неединичная ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ содержит лишь тривиальные ω-локальные подформации, то $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$, где G — простая группа.*

Следствие 1.4.3. *Если неединичная локальная формация $\mathfrak{F}$ содержит лишь тривиальные локальные подформации, то $\mathfrak{F} = LF(G)$, где G — простая группа.*

Из теоремы 1.4.1 вытекают аналогичные результаты для ω-полных (полных), ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Собственная $\omega\delta$-веерная подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется *максимальной* $\omega\delta$-веерной подформацией формации $\mathfrak{F}$, если для любой $\omega\delta$-веерной формации $\mathfrak{H}$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. В теореме 1.4.2 установлены условия, при которых $\omega\delta$-веерная формация обладает единственной максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией. Следуя [43], $\omega\delta$-веерная формация $\mathfrak{F}$ называется *$\omega\delta$-неприводимой*, если $\omega F(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \delta) \subset \mathfrak{F}$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех собственных $\omega\delta$-веерных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.4.2. [79] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Если $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-неприводимая формация, то в ней существует единственная максимальная $\omega\delta$-веерная подформация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-неприводимая формация, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех собственных $\omega\delta$-веерных подформаций из $\mathfrak{F}$ и $\omega F(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \delta) := \mathfrak{M}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ $\omega\delta$-неприводима, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{M}$ — максимальная $\omega\delta$-веерная подформация в $\mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\mathfrak{H}$ — такая $\omega\delta$-веерная подформация в $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. Отсюда, ввиду задания $\mathfrak{M}$, получаем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M}$ — максимальная $\omega\delta$-веерная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная $\omega\delta$-веерная подформация в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная максимальная $\omega\delta$-веерная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{X} \subseteq \omega F(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \delta) = \mathfrak{M}$. Из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, в силу выбора $\mathfrak{X}$, получаем $\mathfrak{X} = \mathfrak{M}$. Таким образом, всякая максимальная $\omega\delta$-веерная подформация в $\mathfrak{F}$ совпадает с $\mathfrak{M}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная $\omega\delta$-веерная подформация формации в $\mathfrak{F}$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.4.4. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Если $\mathfrak{F}$ — δ-неприводимая формация, то в ней существует единственная максимальная δ-веерная подформация.*

Следствие 1.4.5. *Если $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta_1$-неприводимая формация, то в ней существует единственная максимальная ω-локальная подформация.*

Следствие 1.4.6. *Если $\mathfrak{F}$ — δ_1-неприводимая формация, то в ней существует единственная максимальная локальная подформация.*

Из теоремы 1.4.2 вытекают аналогичные результаты для ω-полных (полных), ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

В теореме 1.4.3 описаны свойства формации $\mathfrak{M}$, порождающей $\omega\delta$-веерную формацию $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.4.3. [96] *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{M}, \delta)$, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если $G \in \mathfrak{F}$ и $O_\omega(G) = 1$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

(2) *Если G — простая неабелева группа из $\mathfrak{F}$ и δ — s-направление, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. По теореме 5 [15] (см. с. 109) формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ω-спутником f таким, что $f(\omega') = \mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}), f(p) = \mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{M})$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$ и $f(p) = \varnothing$ для любого $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M})$.

(1) Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $O_\omega(G) = 1$. Тогда по определению 1.1.1(2) $G \cong G/O_\omega(G) \in f(\omega') = \mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M})$. Поскольку $\mathfrak{M}$ — формация, то $f(\omega') \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $G \in \mathfrak{M}$.

(2) Пусть $G \in \mathfrak{F}$, G — простая неабелева группа и δ — s-направление. Если $\pi(G) \cap \omega = \varnothing$, то $O_\omega(G) = 1$ и по пункту (1) $G \in \mathfrak{M}$.

Рассмотрим случай, когда существует $q \in \pi(G) \cap \omega$. Тогда из $G \in \mathfrak{F}$ следует $G/G_{\delta(q)} \in f(q) = \mathrm{form}(G/G_{\delta(q)} \,|\, G \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$. Допустим, что $G_{\delta(q)} = G$. Тогда $G \in \delta(q)$. Поскольку δ — s-направление, то $\delta(q)$ — q-разрешимая формация и, значит, G — q-разрешимая группа. Получили противоречие. Следовательно, $G_{\delta(q)} = 1$ и $G \in \mathfrak{M}$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.4.7. *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(\mathfrak{M}, \delta)$, где $\delta_0 \leq \delta$. Если G — простая неабелева группа из $\mathfrak{F}$ и δ — s-направление, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Следствие 1.4.8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация, $\mathfrak{F} = \omega LF(\mathfrak{M})$. Если G — простая неабелева группа из $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Следствие 1.4.9. *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация, $\mathfrak{F} = LF(\mathfrak{M})$. Если G — простая неабелева группа из $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность формаций, удовлетворяющая условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{E}$ для любых различных $i, j \in I$. Через $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обозначается совокупность всех групп вида $A_{i_1} \times ... \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, ..., A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, ..., i_t \in I$, и говорят, что класс $\mathfrak{F}$ прямо разложим на классы (множители) $\mathfrak{F}_i$ (является прямым разложением классов $\mathfrak{F}_i$), $i \in I$ ([43], с. 171).

В теореме 1.4.4 установлена взаимосвязь между свойствами множителей пряморазложимой $\omega\delta$-веерной формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.4.4. [79] *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-веерная формация с $\mathfrak{b}p$-направлением δ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{H}, \mathfrak{L}$ — неединичные формации, $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \neq \varnothing$, $\pi(\mathfrak{L}) \cap \omega \neq \varnothing$ и $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega = \varnothing$. Если $\mathfrak{H}$ — $\omega\delta$-веерная формация, то и $\mathfrak{L}$ также является $\omega\delta$-веерной формацией.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — $\omega\delta$-веерная формация. Проверим, что формация $\mathfrak{L}$ является $\omega\delta$-веерной формацией. Пусть $\mathfrak{F} := \omega F(f, \delta)$, $\mathfrak{H} := \omega F(h, \delta)$. По лемме 4 (2) [15] (см. с. 109), можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(\omega') = \mathfrak{H}$. Рассмотрим такую ωF-функцию m, что $m(\omega') = \mathfrak{L}$, $m(q) = f(q)$ для любого $q \in (\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega) \setminus (\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega)$ и $m(q) = \varnothing$ для любого $q \in (\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega) \cup (\omega \setminus (\pi(\mathfrak{F}))$. Пусть $\mathfrak{M} := \omega F(m, \delta)$.

Проверим, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $M \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$M/O_\omega(M) \in m(\omega') = \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F} = f(\omega')$$

и $M/M_{\delta(p)} \in m(p)$ для любого $p \in \pi(M) \cap \omega$. Следовательно, $m(p) \neq \varnothing$ для любого $p \in \pi(M) \cap \omega$. Это означает, что $m(p) = f(p)$ и $M/M_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \pi(M) \cap \omega$. Таким образом, $M \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Проверим, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$. Пусть $L \in \mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{L}$ — Q-замкнутый класс, получаем $L/O_\omega(L) \in \mathfrak{L} = m(\omega')$. Пусть $p \in \pi(L) \cap \omega$. Тогда $p \in \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega$. Из $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega = \varnothing$ следует, что $p \in (\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega) \setminus (\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega)$. Ввиду $L \in \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$ заключаем, что $L/L_{\delta(p)} \in f(p) = m(p)$. Таким образом, $L \in \mathfrak{M}$ и, значит, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$.

Предположим, что $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$ и K — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{L}$. Тогда $K \neq 1$ и K — монолитическая группа. Предположим, что K — ω'-группа. Тогда $O_\omega(K) = 1$. Поскольку $K \in \mathfrak{M}$, то

$$K \cong K/O_\omega(K) \in m(\omega') = \mathfrak{L},$$

что невозможно. Следовательно, $\pi(K) \cap \omega \neq \varnothing$. Из $K \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $K \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $K = A \times B$, где $A \in \mathfrak{H}$, $B \in \mathfrak{L}$. Поскольку K — монолитическая группа, то $K = A$ или $K = B$. Если $K = B$, то $K \in \mathfrak{L}$. Противоречие. Следовательно, $K = A \in \mathfrak{H}$. Тогда $\pi(K) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$ и поэтому для любого $p \in \pi(K) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega$ справедливо $m(p) = \varnothing$. С другой стороны, из $K \in \mathfrak{M}$ следует, что $K/K_{\delta(p)} \in m(p)$ для любого $p \in \pi(K) \cap \omega$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.4.10. *Пусть $\mathfrak{F}$ — δ-веерная формация с $\mathfrak{b}p$-направлением δ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{H}, \mathfrak{L}$ — неединичные формации, $\pi(\mathfrak{H}) \neq \varnothing$, $\pi(\mathfrak{L}) \neq \varnothing$ и $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{L}) = \varnothing$. Если $\mathfrak{H}$ — δ-веерная формация, то и формация $\mathfrak{L}$ также является δ-веерной формацией.*

Следствие 1.4.11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{H}, \mathfrak{L}$ — неединичные формации, $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \neq \varnothing$, $\pi(\mathfrak{L}) \cap \omega \neq \varnothing$ и $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega = \varnothing$. Если $\mathfrak{H}$ — ω-локальная формация, то и формация $\mathfrak{L}$ также является ω-локальной формацией.*

Следствие 1.4.12. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{H}, \mathfrak{L}$ — неединичные формации, $\pi(\mathfrak{H}) \neq \varnothing$, $\pi(\mathfrak{L}) \neq \varnothing$ и $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{L}) = \varnothing$. Если $\mathfrak{H}$ — локальная формация, то и формация $\mathfrak{L}$ также является локальной формацией.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

В теореме 1.4.5 установлены условия, при которых прямое разложение $\omega\delta$-веерных формаций является $\omega\delta$-веерной формацией. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1.4.1. [90] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i,\delta)$, f_i — внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = \omega F(f,\delta)$, $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \omega \setminus (\cup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i))$.*

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $K = G^{\mathfrak{H}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то $G = G_1 \times ... \times G_t$, где $G_j \in \mathfrak{F}_{i_j}$, $j = 1, ..., t$. Из монолитичности группы G следует, что существует такое $n \in \{1, ..., t\}$, что $G = G_n \in \mathfrak{F}_{i_n}$. Тогда $\pi(G) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}_{i_n}) \cap \omega$ и поэтому $G/G_{\delta(p)} \in f_{i_n}(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Кроме того, $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Таким образом, $G \in \omega F(f,\delta) = \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. *Лемма доказана.*

Следствие 1.4.13. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \mathbb{P}F(f_i,\delta)$, f_i — внутренний спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = \mathbb{P}F(f,\delta)$, $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i)$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \mathbb{P} \setminus (\cup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i))$.*

Теорема 1.4.5. [90] *Пусть δ — p-направление, $\delta \le \delta_1$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i,\delta)$, f_i — внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, $\mathfrak{H} = \omega F(f,\delta)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \omega \setminus (\cup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i))$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. По лемме 1.4.1 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Если $R \nsubseteq O_\omega(G)$, то $O_\omega(G) = 1$. Ввиду того, что $G \in \mathfrak{H}$, имеем $G = G/O_\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G. Таким образом, $R \subseteq O_\omega(G)$ и поэтому R — ω-группа.

Пусть $p \in \pi(R) = \pi(R) \cap \omega$. Так как $G \in \mathfrak{H}$, то $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$. Тогда $f(p) \ne \varnothing$ и, значит, существует такое $j \in I$, что $p \in \pi(\mathfrak{F}_j) \cap \omega$ и $f(p) = f_j(p)$. Таким образом, $G/G_{\delta(p)} \in f_j(p)$ для некоторого $j \in I$ (1). Ввиду того, что f_j — внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}_j$ и $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$, то $f_j(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $G_{\delta(p)} = 1$, то, $G = G/G_{\delta(p)} \in f_j(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G. Таким образом, $G_{\delta(p)} \ne 1$. Так как $\delta \le \delta_1$, то $G_{\delta_1(p)} \ne 1$. Ввиду определения функции δ_1, справедливо равенство $G_{\delta_1(p)} = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}$. Исходя из определения произведения классов групп, возможны следующие варианты:

(a) существует $N \lhd G_{\delta_1(p)}$, где $N \ne 1$, $N \in \mathfrak{G}_{p'}$ и $1 \ne G_{\delta_1(p)}/N \in \mathfrak{N}_p$;

(b) $G_{\delta_1(p)} \in \mathfrak{G}_{p'}$;

(c) $G_{\delta_1(p)} \in \mathfrak{N}_p$.

Рассмотрим случай (a). Ввиду того, что N — p'-группа и $G_{\delta_1(p)}/N$ — p-группа, получаем, что N — холлова подгруппа в $G_{\delta_1(p)}$. Так как $N \lhd G_{\delta_1(p)}$, то N является характеристической подгруппой в $G_{\delta_1(p)}$. Поскольку $G_{\delta_1(p)}$ является характеристической подгруппой в G, то по лемме 2.11 [34] (см. с. 109) $N \lhd G$. Таким образом, $1 \neq N \lhd G$. Это, в силу монолитичности группы G, означает, что $R \subseteq N$. Поскольку $N \in \mathfrak{G}_{p'}$, то $p \notin \pi(R)$, что невозможно.

Рассмотрим случай (b). Поскольку $G_{\delta_1(p)} \in \mathfrak{G}_{p'}$ то, ввиду $R \subseteq G_{\delta_1(p)}$, справедливо $R \in \mathfrak{G}_{p'}$, что невозможно.

Рассмотрим случай (c). Так как $G_{\delta_1(p)} \in \mathfrak{N}_p$, то $G_{\delta_1(p)} \subseteq O_p(G)$. Следовательно, $O_p(G) = G_{\delta_1(p)}$ и поэтому $G/O_p(G) = G/G_{\delta_1(p)} \cong (G/G_{\delta(p)})/(G_{\delta_1(p)}/G_{\delta(p)})$. Так как $f_j(p)$ — класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов, то, в силу (1), получаем, что $(G/G_{\delta(p)})/(G_{\delta_1(p)}/G_{\delta(p)}) \in f_j(p)$, и, значит, $G/O_p(G) \in f_j(p)$. Поскольку f_j — внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}_j$, то $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}_j$ (2).

Из (1) и (2) по лемме 2 (1) [13] (см. с. 107) следует, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G. Это означает, что предположение неверно, и поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.4.14. *Пусть δ — p-направление, $\delta \leq \delta_1$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \mathbb{P}F(f_i, \delta)$, f_i — внутренний спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, $\mathfrak{H} = \mathbb{P}F(f, \delta)$, где $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i)$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \mathbb{P} \setminus (\cup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i))$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Следствие 1.4.15. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — ω-полная формация с внутренним ω-спутником f_i, $i \in I$, $\mathfrak{H} = \omega AF(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \omega \setminus (\cup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i))$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Следствие 1.4.16. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — полная формация с внутренним спутником f_i, $i \in I$, $\mathfrak{H} = AF(f)$, где $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i)$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \mathbb{P} \setminus (\cup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i))$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Следствие 1.4.17. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f_i, $i \in I$, $\mathfrak{H} = \omega LF(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \omega \setminus (\cup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i))$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Следствие 1.4.18. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — локальная формация с внутренним спутником f_i, $i \in I$, $\mathfrak{H} = LF(f)$, где $f(p) = f_i(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}_i)$ и $f(p) = \varnothing$ при $p \in \mathbb{P} \setminus (\cup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i))$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Замечание 1.4.1. В работах [72, 75–77] проведено исследование внутренней структуры ω-веерных и Ω-расслоенных формаций, в частности, в работе [72] (см. также [83]) для Ω-расслоенных формаций получен аналог теоремы 1.4.2.

§ 1.5. ω-Веерные формации, определяемые посредством решеточных операций

Данный параграф посвящен исследованию ω-веерных формаций, построенных посредством применения решеточных операций.

Пусть Θ — непустое множество формаций. Формация $\mathfrak{F}$ называется Θ-*формацией*, если $\mathfrak{F} \in \Theta$. Для множества групп $\mathfrak{X}$ через $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех Θ-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$ [43]. Следуя [55], для любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ полагаем:

$$\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta \mathfrak{F}_2 \;=\; \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2, \qquad \mathfrak{F}_1 \vee_\Theta \mathfrak{F}_2 \;=\; \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Аналогично, для $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$:

$$\wedge_{\Theta_{i\in I}}\mathfrak{F}_i \;=\; \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \qquad \vee_{\Theta_{i\in I}}\mathfrak{F}_i \;=\; \Theta\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i).$$

Следовательно, если пересечение любой совокупности Θ-формаций является Θ-формацией, то множество Θ относительно введенных операций образует решетку [55]. В таком случае формация $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ является наименьшей Θ-формацией, содержащей множество групп $\mathfrak{X}$, и называется Θ-*формацией, порожденной множеством* $\mathfrak{X}$. Формация $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ называется *однопорожденной* Θ-*формацией*, если $\mathfrak{X} = \{G\}$ для некоторой группы G; при этом используется запись $\Theta\mathrm{form}G$ или $\Theta\mathrm{form}(G)$. Таким образом, к способам конструирования Θ-формаций относится способ их получения в результате применения к формациям из Θ операций $\wedge_\Theta$ и $\vee_\Theta$.

Непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех формаций $\mathfrak{M} \in \Theta$ [43].

Через $\theta_\mathfrak{G}$ обозначим совокупность всех формаций конечных групп. Поскольку класс всех групп $\mathfrak{G}$ является формацией и пересечение любой совокупности формаций является формацией, то множество $\theta_\mathfrak{G}$ является полной решеткой.

Пусть τ — произвольный подгрупповой функтор, т.е. отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию: $(\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α каждой группы G (см., например, [29]). Через θ_τ обозначим совокупность всех τ-замкнутых формаций групп. Так как класс групп $\mathfrak{G}$ является τ-замкнутой формацией и пересечение любой совокупности τ-замкнутых формаций есть τ-замкнутая формация, то множество θ_τ также является полной решеткой.

Пусть θ — произвольная полная решетка формаций. В соответствии с [43], ωF-функция ($\mathbb{P}F$-функция) называется θ-*значной*, если каждое ее непустое значение принадлежит θ.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество θ-значных ωF-функций ($\mathbb{P}F$-функций). Тогда полагаем: $\wedge_{\theta_{i\in I}} f_i = h$; $\vee_{\theta_{i\in I}} f_i = f$ — такие ωF-функции ($\mathbb{P}F$-функции), что для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для любого $x \in \mathbb{P}$) имеет место: $h(x) = \wedge_{\theta_{i\in I}} f_i(x)$;

$$f(x) = \begin{cases} \vee_{\theta_{i\in I}} f_i(x), \text{ если } f_j(x) \neq \varnothing \text{ для некоторого } j \in I, \\ \varnothing, \text{ если } f_i(x) = \varnothing \text{ для всех } i \in I. \end{cases}$$

Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F}$ — формация, τ — подгрупповой функтор, θ — полная решетка формаций. Введем следующие обозначения:

$\omega\delta F$ — множество всех $\omega\delta$-веерных формаций;

δF — множество всех δ-веерных формаций;

ωAF — множество всех ω-полных (ω-веерных с направлением δ_0) формаций;

AF — множество всех полных (веерных с направлением δ_0) формаций;

ωLF — множество всех ω-локальных (ω-веерных с направлением δ_1) формаций;

LF — множество всех локальных (веерных с направлением δ_1) формаций;

ωSF — множество всех ω-специальных (ω-веерных с направлением δ_2) формаций;

SF — множество всех специальных (веерных с направлением δ_2) формаций;

ωZF — множество всех ω-центральных (ω-веерных с направлением δ_3) формаций;

ZF — множество всех центральных (веерных с направлением δ_3) формаций;

$\omega\delta F(\mathfrak{F})$ — множество всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$\delta F(\mathfrak{F})$ — множество всех δ-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$\omega A(\mathfrak{F})$ — множество всех ω-полных (ω-веерных с направлением δ_0) подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$A(\mathfrak{F})$ — множество всех полных (веерных с направлением δ_0) подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$\omega L(\mathfrak{F})$ — множество всех ω-локальных (ω-веерных с направлением δ_1) подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$L(\mathfrak{F})$ — множество всех локальных (веерных с направлением δ_1) подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$\omega S(\mathfrak{F})$ — множество всех ω-специальных (ω-веерных с направлением δ_2) подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$S(\mathfrak{F})$ — множество всех специальных (веерных с направлением δ_2) подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$\omega Z(\mathfrak{F})$ — множество всех ω-центральных (ω-веерных с направлением δ_3) подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$Z(\mathfrak{F})$ — множество всех центральных (веерных с направлением δ_3) подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$\omega\delta F_\tau$ — множество всех $\omega\delta$-веерных формаций, обладающих хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником;

δF_τ — множество всех δ-веерных формаций, обладающих хотя бы одним τ-замкнутым спутником;

$\omega\delta F_\tau(\mathfrak{F})$ — множество всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$, обладающих хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником;

$\delta F_\tau(\mathfrak{F})$ — множество всех δ-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$, обладающих хотя бы одним τ-замкнутым спутником;

$\tau\omega\delta F$ — множество всех τ-замкнутых $\omega\delta$-веерных формаций;

$\tau\delta F$ — множество всех τ-замкнутых δ-веерных формаций;

$\tau\omega\delta F(\mathfrak{F})$ — множество всех τ-замкнутых $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$\tau\delta F(\mathfrak{F})$ — множество всех τ-замкнутых δ-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$;

$\tau\omega LF$ — множество всех τ-замкнутых ω-локальных (ω-веерных с направлением δ_1) формации;

τLF — множество всех τ-замкнутых локальных (веерных с направлением δ_1) формации;

$\omega\delta F_\theta$ — множество всех $\omega\delta$-веерных формаций, обладающих хотя бы одним θ-значным ω-спутником;

δF_θ — множество всех δ-веерных формаций, обладающих хотя бы одним θ-значным спутником;

ωLF_θ — множество всех ω-локальных (ω-веерных с направлением δ_1) формаций, обладающих хотя бы одним θ-значным ω-спутником;

LF_θ — множество всех локальных (веерных с направлением δ_1) формаций, обладающих хотя бы одним θ-значным спутником;

$\omega\delta F_\theta(\mathfrak{F})$ — множество всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$, обладающих хотя бы одним θ-значным ω-спутником;

$\delta F_\theta(\mathfrak{F})$ — множество всех δ-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$, обладающих хотя бы одним θ-значным спутником.

Замечание 1.5.1. Если $\theta = \theta_{\mathfrak{G}}$, то $\omega\delta F_\theta = \omega\delta F$; если $\theta = \theta_\tau$, то $\omega\delta F_\theta = \omega\delta F_\tau$.

Доказательство утверждений (1) — (3) следующей леммы аналогично доказательству леммы 5 [15], теоремы 5 [15], следствия 5.1 [15] (см. с. 109) соответственно.

Лемма 1.5.1. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \le \delta$, θ — полная решетка формаций. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Пусть* f_i — *θ-значный ω-спутник формации* $\mathfrak{F}_i \in \omega\delta F_\theta$, $i \in I$, *и* $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\mathfrak{F} \in \omega\delta F_\theta$ *и* $f = \cap_{i\in I} f_i$ — *θ-значный ω-спутник формации* $\mathfrak{F}$.

(2) *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *непустой класс групп*, $\mathfrak{F} = \omega F_\theta(\mathfrak{X}, \delta)$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *обладает единственным минимальным θ-значным ω-спутником f таким, что* $f(\omega') = \theta\mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$; $f(p) = \theta\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{X})$ *для любого* $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$; $f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

(3) *Пусть* f_i — *минимальный θ-значный ω-спутник формации* $\mathfrak{F}_i \in \omega\delta F_\theta$, $i = 1, 2$. *Тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ *в том и только в том случае, когда* $f_1 \leq f_2$.

Следствие 1.5.1. *Пусть* δ — *$\mathbb{P}FR$-функция*, $\delta_0 \leq \delta$, θ — *полная решетка формаций. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Пусть* f_i — *θ-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i \in \delta F_\theta$, $i \in I$, *и* $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\mathfrak{F} \in \delta F_\theta$ *и* $f = \cap_{i\in I} f_i$ — *θ-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$.

(2) *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *непустой класс групп*, $\mathfrak{F} = F_\theta(\mathfrak{X}, \delta)$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *обладает единственным минимальным θ-значным спутником f таким, что* $f(p) = \theta\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{X})$ *для любого* $p \in \pi(\mathfrak{X})$; $f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \mathbb{P}\setminus\pi(\mathfrak{X})$.

(3) *Пусть* f_i — *минимальный θ-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i \in \delta F_\theta$, $i = 1, 2$. *Тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ *в том и только в том случае, когда* $f_1 \leq f_2$.

Замечание 1.5.2. Пусть θ — полная решетка формаций, $\mathfrak{G} \in \theta$ и δ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Так как $\mathfrak{G} \in \omega\delta F_\theta$, то из леммы 1.5.1 (1) следует, что $\omega\delta F_\theta$ является полной решеткой. Отсюда, в частности, ввиду замечания 1.5.1, вытекает, что $\omega\delta F$ и $\omega\delta F_\tau$ являются полными решетками. Аналогично, из следствия 1.5.1 (1), с учетом $\mathfrak{G} \in \delta F_\theta$, заключаем, что δF_θ — полная решетка и, значит, $\delta F_{\theta_\mathfrak{G}} = \delta F$ и $\delta F_{\theta_\tau} = \delta F_\tau$ — полные решетки. Аналогичным образом нетрудно проверить, что $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ $(\delta F(\mathfrak{F}))$ является полной решеткой формаций. Поскольку $\omega\delta F$ и θ_τ — полные решетки формаций, то для любой совокупности $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} \subseteq \tau\omega\delta F$ справедливо $\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i \in \tau\omega\delta F$. Следовательно, множество $\tau\omega\delta F$ является полной решеткой. Аналогично, $\tau\delta F$ — полная решетка формаций.

В теореме 1.5.1 для полной решетки формаций θ изучается строение минимального θ-значного ω-спутника $\omega\delta$-веерной формации, полученной из $\omega\delta$-веерных формаций посредством операции решеточного объединения.

Теорема 1.5.1. [73] *Пусть* θ — *полная решетка формаций*, δ — *такая $\mathbb{P}FR$-функция, что* $\delta_0 \leq \delta$, $\Theta = \omega\delta F_\theta$, f_i — *минимальный θ-значный ω-спутник формации* $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$, *и* $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta_{i\in I}}\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\vee_{\theta_{i\in I}} f_i$ — *минимальный θ-значный ω-спутник формации* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F} = \Theta\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \omega F_\theta(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \delta)$, то, согласно лемме 1.5.1 (2), формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным θ-значным ω-спутником f таким, что

$f(\omega') = \theta\mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$;

$f(p) = \theta\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} \mid G \in \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$,

$f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$.

Пусть $h := \vee_{\theta_{i\in I}} f_i$ и $\mathfrak{H} := \omega F(h, \delta)$. Тогда h — θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{F} = \Theta\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ — наименьшая Θ-формация, содержащая множество $\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, и $\mathfrak{H}$ — Θ-формация, то достаточно проверить, что $\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$. Действительно, так как $f_i \leq h$, то по определению 1.1.1 (2) имеем $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$ для любого $i \in I$. Это означает, что $\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$ и, следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Проверим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. В силу определения 1.1.1(2), достаточно установить, что $h \leq f$.

1. Докажем, что $h(\omega') \subseteq f(\omega')$. Так как f_i — минимальный θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, то по лемме 1.5.1 (2) $f_i(\omega') = \theta\mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)$ для любого $i \in I$. Следовательно,

$$h(\omega') = \theta\mathrm{form}\ (\cup_{i\in I} f_i(\omega')) = \theta\mathrm{form}\ (\cup_{i\in I}\ \theta\mathrm{form}\ (G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)).$$

Пусть $\mathfrak{X} := \cup_{i\in I}\theta\mathrm{form}\ (G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)$. Тогда $h(\omega') = \theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathfrak{X} \subseteq f(\omega')$. Пусть $j \in I$. Так как $\mathfrak{F}_j \subseteq \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то

$$\{G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_j\} \subseteq \theta\mathrm{form}\ (G/O_\omega(G) \mid G \in \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = f(\omega')$$

и, значит, $\theta\mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_j) \subseteq f(\omega')$. Таким образом, $\mathfrak{X} = \cup_{i\in I}\theta\mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i) \subseteq f(\omega')$ и $h(\omega') = \theta\mathrm{form}\mathfrak{X} \subseteq f(\omega')$.

2. Пусть $p \in \omega\cap\pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. Покажем, что $h(p) \subseteq f(p)$. Так как $p \in \pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$, то найдется такое $j \in I$, что $p \in \pi(\mathfrak{F}_j)$. Ввиду леммы 1.5.1 (2), $f_j(p) \neq \varnothing$. Это означает, что $h(p) \neq \varnothing$. Пусть $J := \{\ j \in I \mid f_j(p) \neq \varnothing\ \}$. Поскольку, согласно лемме 1.5.1 (2), $f_j(p) = \theta\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{F}_j)$ для любого $j \in J$, то

$$h(p) = \theta\mathrm{form}\ (\cup_{i\in I} f_i(p)) = \theta\mathrm{form}\ (\cup_{j\in J}\theta\mathrm{form}\ (G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{F}_j)).$$

Пусть $\mathfrak{Y} := \cup_{j\in J}\theta\mathrm{form}\ (G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{F}_j)$ и $s \in J$. Из $\{G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{F}_s\} \subseteq \theta\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} \mid G \in \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = f(p)$ следует, что $\theta\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{F}_s) \subseteq f(p)$. Таким образом, $\mathfrak{Y} \subseteq f(p)$ и $h(p) = \theta\mathrm{form}\mathfrak{Y} \subseteq f(p)$.

3. Пусть $q \in \omega \setminus \pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. Тогда для любого $i \in I$ имеет место $q \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F}_i)$ и, с учетом леммы 1.5.1 (2), справедливо равенство $f_i(q) = \varnothing$. Отсюда получаем $h(q) = \varnothing = f(q)$.

Таким образом, из 1 — 3 следует, что $h(x) \subseteq f(x)$ для любого $x \in \omega\cup\{\omega'\}$. Поэтому $h \leq f$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Поскольку h — θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, f — минимальный θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то из $h \leq f$ получаем, что $h = f$. *Теорема доказана.*

Следующий результат о веерных формациях доказывается аналогично теореме 1.5.1 с использованием следствия 1.5.1 (2) вместо леммы 1.5.1 (2).

Следствие 1.5.2. *Пусть θ — полная решетка формаций, δ — такая $\mathbb{P}FR$-функция, что $\delta_{0} \leq \delta$, $\Theta = \delta F_{\theta}$, f_i — минимальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta_{i\in I}} \mathfrak{F}_i$. Тогда $\vee_{\theta_{i\in I}} f_i$ — минимальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 1.5.3. *Пусть θ — полная решетка формаций, $\Theta = \omega LF_{\theta}$, f_i — минимальный θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta_{i\in I}} \mathfrak{F}_i$. Тогда $\vee_{\theta_{i\in I}} f_i$ — минимальный θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 1.5.3 для случая $I = \{1, 2\}$ представляет известный результат из [44] (см. [44], лемма 12).

Следствие 1.5.4. (А.Н. Скиба, [43], с. 152) *Пусть θ — полная решетка формаций, $\Theta = LF_{\theta}$, f_i — минимальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta_{i\in I}} \mathfrak{F}_i$. Тогда $\vee_{\theta_{i\in I}} f_i$ — минимальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-полных (полных), ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

В теоремах 1.5.2 и 1.5.3 установлены простейшие решеточные свойства однопорожденной $\omega\delta$-веерной формации.

Пусть Θ — решетка с нулем O. Напомним, что элемент $a \in \Theta$ называется *атомом решетки* Θ, если $a \neq O$ и не существует такого элемента $x \in \Theta$, что $O < x < a$ [2].

Теорема 1.5.2. [86] *Пусть G — группа, $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где $\delta_{0} \leq \delta$. Тогда решетка $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ имеет конечное число атомов в каждом из следующих случаев*:

(1) $\mathfrak{F}$ — *ω-разрешимая формация*;

(2) δ — *s-направление.*

Доказательство. (1) Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-разрешимая формация и $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}$ содержит лишь тривиальные $\omega\delta$-веерные подформации $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}$. По теореме 1.4.1 $\mathfrak{M} = \omega F(A, \delta)$, где A — простая группа. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $A \in \mathfrak{F}$ и, значит, A — ω-разрешимая группа. Рассмотрим следующие возможные случаи.

Пусть A — ω'-группа. Тогда $O_{\omega}(A) = 1$. Из $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$ следует, что $\mathfrak{F} = \omega F(\mathrm{form}(G), \delta)$. По теореме 1.4.3 (1) получаем $A \in \mathrm{form}(G)$. Поскольку, согласно теореме 2.2 [53] (см. с. 112), $\mathrm{form}(G) = QR_0(G)$, то для группы A существует конечное число вариантов с точностью до изоморфизма.

Пусть A — абелева p-группа, где $p \in \omega$. Тогда $\pi(A) = \{p\} \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(G) \cap \omega \subseteq \pi(G)$. Так как $\pi(G)$ является конечным множеством, то для группы A существует конечное число вариантов.

Таким образом, формаций вида $\mathfrak{M} = \omega F(A, \delta)$, где A — простая группа, существует конечное число, т.е. решетка $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ имеет конечное число атомов.

(2) Пусть δ — s-направление и $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. По теореме 1.4.1 $\mathfrak{M} = \omega F(A, \delta)$, где A — простая группа. Рассмотрим следующие случаи.

Пусть A — неабелева группа. Так как $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta) = \omega F(\mathrm{form}(G), \delta)$ и $A \in \mathfrak{F}$, то по теореме 1.4.3 (2) имеем $A \in \mathrm{form}(G) = QR_0(G)$. Тогда для группы A существует конечное число вариантов с точностью до изоморфизма.

Пусть A — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Так как $\pi(A) = \{p\} \subseteq \pi(G)$ и $\pi(G)$ — конечное множество, то для группы A существует конечное число вариантов.

Тем самым установленно, что формаций вида $\mathfrak{M} = \omega F(A, \delta)$, где A — простая группа, существует конечное число. *Теорема доказана.*

Следствие 1.5.5. *Пусть G — группа, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G, \delta)$, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда решетка $\delta F(\mathfrak{F})$ имеет конечное число атомов в каждом из следующих случаев*:

(1) $\mathfrak{F}$ — *разрешимая формация*;

(2) δ — *s-направление.*

Следствие 1.5.6. (Н.Н. Воробьев, [22], с. 187) *Пусть G — группа, $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$. Тогда решетка всех ω-локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$ имеет конечное число атомов.*

Следствие 1.5.7. (А.Н. Скиба, [43], с. 174) *Пусть G — группа, $\mathfrak{F} = LF(G)$. Тогда решетка всех локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$ имеет конечное число атомов.*

Теорема 1.5.3. [80] *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — простая ω-отделимая группа, δ — b-направление и $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| \leq 3$.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{E} \in \omega\delta F(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F} \in \omega\delta F(\mathfrak{F})$, то $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| \geq 2$. Отметим, что из определения 1.1.1 следует, что $\varnothing \notin \omega\delta F$ и, значит, $\varnothing \notin \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{H} \in \omega\delta F(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, h и f — минимальные ω-спутники формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Ввиду следствия 5.1 [15] (см. с. 109), $h < f$. По теореме 5 [15] (см. с. 109) ωF-функции h и f имеют следующее строение:

$h(\omega') = \mathrm{form}(H/O_\omega(H) \mid H \in \mathfrak{H})$;

$h(p) = \mathrm{form}(H/H_{\delta(p)} \mid H \in \mathfrak{H})$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega$;

$h(p) = \varnothing$ для любого $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$;

$f(\omega') = \mathrm{form}(G/O_\omega(G))$;

$f(p) = \mathrm{form}(G/G_{\delta(p)})$ для любого $p \in \pi(G) \cap \omega$;

$f(p) = \varnothing$ для любого $p \in \omega \setminus \pi(G)$.

Отметим, что по определению 1.1.1(1), $h(\omega') \neq \varnothing$ и $f(\omega') \neq \varnothing$. Так как $h < f$, то $h(q) = f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \pi(G)$. По теореме 1 [1] (см. с. 108) $\mathfrak{E} = \omega F(m, \delta)$, где $m(\omega') = \mathfrak{E}$ и $m(p) = \varnothing$ для любого $p \in \omega$.

Так как G — простая ω-отделимая группа, то $|\omega \cap \pi(G)| \leq 1$. Это означает, что группа A является либо ω'-группой, либо $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$ для некоторого простого числа p.

1. Пусть G — ω'-группа. Тогда $O_\omega(G) = 1$. Так как $\varnothing \neq h(\omega') \subseteq f(\omega') = \mathrm{form}(G)$, то, ввиду следствия 4.4 [7] (см. с. 108), либо $h(\omega') = f(\omega')$, либо $h(\omega') = \mathfrak{E}$. Поскольку $\pi(G) \cap \omega = \varnothing$, то $\omega \setminus \pi(G) = \omega$ и $h(p) = f(p) = \varnothing$ для любого $p \in \omega$. Это, в силу $h < f$, означает, что $h(\omega') \neq f(\omega')$. Таким образом, $h(\omega') = \mathfrak{E}$. Поэтому $h = m$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$.

2. Рассмотрим случай, когда $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$.

2.1. Пусть G — абелева p-группа, где $p \in \omega$. Тогда $O_\omega(G) = G$ и $f(\omega') = h(\omega') = \mathfrak{E}$. Рассмотрим формацию $f(p)$. Ввиду того, что δ — b-направление, имеем $G \in \delta(p)$ и поэтому $G_{\delta(p)} = G$. Следовательно, $G/G_{\delta(p)} = 1$ и $f(p) = \mathfrak{E}$. Из $h < f$ получаем, что $h(p) = \varnothing$ и, значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$.

2.2. Пусть G — неабелева pd-группа, где $p \in \omega$. Тогда $O_\omega(G) = 1$ и $f(\omega') = \mathrm{form}(G)$. Если $h(\omega') = f(\omega')$, то $G \in h(\omega') \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $h(\omega') \neq f(\omega')$ и, ввиду следствия 4.4 [7] (см. с. 108), $h(\omega') = \mathfrak{E}$.

Рассмотрим формацию $f(p)$. Так как G — простая группа и $G_{\delta(p)} \lhd G$, то либо $G_{\delta(p)} = G$, либо $G_{\delta(p)} = 1$. Пусть $G_{\delta(p)} = G$. Тогда $f(p) = \mathfrak{E}$. Для формации $h(p)$ возможно два случая: либо $h(p) = \varnothing$, либо $h(p) = \mathfrak{E}$. Если $h(p) = \varnothing$, то $h = m$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$. Если $h(p) = \mathfrak{E}$, то по теореме 1.3.3 $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p$.

Пусть $G_{\delta(p)} = 1$. Тогда $f(p) = \mathrm{form}(G)$. Так как $G \notin \mathfrak{H}$, то $h(p) \subset f(p)$ и поэтому либо $h(p) = \varnothing$, либо $h(p) = \mathfrak{E}$. Если $h(p) = \varnothing$, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$. Если $h(p) = \mathfrak{E}$, то по теореме 1.3.3 $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p$.

Таким образом установлено, что либо $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ и в этом случае $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 2$, либо $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p$ и в этом случае $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 3$. Это означает, что $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| \leq 3$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.5.8. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — простая ω-разрешимая группа, δ — b-направление, $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 2$.*

Доказательство. Ввиду того, что G — простая ω-разрешимая группа, то G — простая ω-отделимая группа. По теореме 1.5.3 $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| \leq 3$. Ввиду того, что пункт 2.2 из доказательства теоремы 1.5.3 невозможен для ω-разрешимой группы, получаем, что $\omega\delta F(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$. Таким образом, $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 2$. *Следствие доказано.*

Следствие 1.5.9. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — простая ω'-группа, δ — b-направление, $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 2$.*

Доказательство. Ввиду того, что G — простая ω-группа, то будет иметь место только случай 1 из доказательства теремы 1.5.3. Таким образом, из доказательства теоремы 1.5.3 следует, что $\omega\delta F(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$. Таким образом, $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 2$. *Следствие доказано.*

Следствие 1.5.10. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$, где G — простая ω-разрешимая группа. Тогда $|\omega L(\mathfrak{F})| = 2$.*

Следствие 1.5.11. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$, где G — простая ω'-группа. Тогда $|\omega L(\mathfrak{F})| = 2$.*

В теореме 1.5.4 получено описание $\omega\delta$-веерной формации $\mathfrak{F}$ ω-разрешимых групп, имеющей в точности три $\omega\delta$-веерные подформации.

Теорема 1.5.4. [80] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, δ — $\mathfrak{b}$-направление, $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-веерная формация, $\mathfrak{F} \subseteq \omega\mathfrak{S}$. Если $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 3$, то $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G — монолитическая группа с монолитом R таким, что G/R — простая группа.*

Доказательство. Пусть $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 3$. Тогда существует такая ω-веерная формация $\mathfrak{H} \in \omega\delta F(\mathfrak{F})$, что $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, то G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{H}}$. Тогда существует ω-веерная формация $\omega F(G, \delta) \in \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Отметим, что $G \notin \mathfrak{H}$ и, значит, $\omega F(G, \delta) \notin \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{E} \subseteq \omega F(G, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$ и $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 3$, то $\omega F(G, \delta) = \mathfrak{E}$ или $\omega F(G, \delta) = \mathfrak{F}$. Если $\omega F(G, \delta) = \mathfrak{E}$, то $G = 1$ и $G \in \mathfrak{H}$. Получили противоречие. Следовательно, $\omega F(G, \delta) = \mathfrak{F}$.

По определению $\mathfrak{H}$-корадикала группы справедливо $G/R \in \mathfrak{H}$. Тогда существует ω-веерная формация $\omega F(G/R, \delta) \in \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Это означает, что $\mathfrak{E} \subseteq \omega F(G/R, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 3$, то $\omega F(G/R, \delta) = \mathfrak{E}$ или $\omega F(G/R, \delta) = \mathfrak{H}$. Если $\omega F(G/R, \delta) = \mathfrak{E}$, то $G = R$ и G — простая группа. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то G — ω-разрешимая группа. Тогда по следствию 1.5.8 имеем $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| = 2$. Получили противоречие. Следовательно, $\omega F(G/R, \delta) = \mathfrak{H}$. Это означает, что $|\omega\delta F(\mathfrak{H})| = 2$, где $\omega\delta F(\mathfrak{H}) = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}$ и $\mathfrak{H} = \omega F(G/R, \delta)$. По теореме 1.4.1 G/R — простая группа. *Теорема доказана.*

Следствие 1.5.12. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, δ — $\mathfrak{b}$-направление, $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F}$ — δ-веерная формация, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Если $|\delta F(\mathfrak{F})| = 3$, то $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G, \delta)$, где G — монолитическая группа с монолитом R таким, что G/R — простая группа.*

Следствие 1.5.13. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, $\mathfrak{F} \subseteq \omega\mathfrak{S}$. Если $|\omega LF(\mathfrak{F})| = 3$, то $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$, где G — монолитическая группа с монолитом R таким, что G/R — простая группа.*

Следствие 1.5.14. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Если $|LF(\mathfrak{F})| = 3$, то $\mathfrak{F} = LF(G)$, где G — монолитическая группа с монолитом R таким, что G/R — простая группа.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

ГЛАВА 2
РЕШЕТКИ ω-ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ

Глава 2 посвящена исследованию свойств решеток ω-веерных формаций конечных групп (задача **(A2)**). Данная глава состоит из шести параграфов. Параграф 2.1 носит вспомогательный характер. В нем установлено свойство $\omega\delta$-индуктивности решетки всех формаций конечных групп. Параграф 2.2 посвящен доказательству модулярности решетки всех ω-веерных формаций конечных групп, а также применению данного свойства к исследованию подформационного строения ω-веерных формаций. В параграфе 2.3 изучаются дистрибутивные решетки ω-веерных формаций. Параграф 2.4 посвящен изучению условий, при которых решетка всех ω-веерных подформаций заданной ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ является решеткой с дополнениями. В параграфе 2.5 доказана алгебраичность решетки $\omega\delta F_\theta$ всех ω-веерных формаций с направлением δ и θ-значным ω-спутником при условии, что решетка формаций θ является алгебраической. В качестве следствий установлена алгебраичность ряда решеток ω-веерных формаций. Параграф 2.6 посвящен изучению брауэровых и стоуновых решеток ω-веерных формаций, в частности, в данном параграфе установлены условия стоуновости решеток ω-веерных формаций. Основные результаты Главы 2 опубликованы в работах [71,73,74,80], анонсированы в [86,87,89–92,97,100].

§ 2.1. Индуктивность решетки всех формаций конечных групп

В данном параграфе установлено свойство $\omega\delta$-индуктивности решетки $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп.

Пусть Θ — некоторая полная решетка формаций. Следуя [43], решетка Θ называется *$\omega\delta$-индуктивной решеткой* формаций, если для всякого набора формаций $\{\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i,\delta) \mid i \in I\}$, где f_i — внутренний Θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, имеет место $\omega F(f,\delta) = \vee_{\omega\delta F}{}_{i\in I}(\mathfrak{F}_i)$, где $f = \vee_{\Theta}{}_{i\in I} f_i$. Решетка Θ называется *δ-индуктивной*, если для всякого набора формаций $\{\mathfrak{F}_i = \mathbb{P}F(f_i,\delta) \mid i \in I\}$, где f_i — внутренний Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, имеет место равенство $\mathbb{P}F(f,\delta) = \vee_{\delta F}{}_{i\in I}(\mathfrak{F}_i)$, где $f = \vee_{\Theta}{}_{i\in I} f_i$.

$\omega\delta_0$-Индуктивную (δ_0-индуктивную) решетку назовем ωA-индуктивной (A-индуктивной); $\omega\delta_1$-индуктивную (δ_1-индуктивную) решетку — ωL-индуктивной (L-индуктивной); $\omega\delta_2$-индуктивную (δ_2-индуктивную) решетку — ωS-индуктивной (S-индуктивной); $\omega\delta_3$-индуктивную (δ_3-индуктивную) решетку — ωZ-индуктивной (Z-индуктивной).

В теореме 2.1.1 установлены условия, при которых решетка $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является $\omega\delta$-индуктивной решеткой.

Теорема 2.1.1. [71] *Пусть δ — $\mathfrak{b}p$-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является $\omega\delta$-индуктивной решеткой.*

Доказательство. Как отмечено в параграфе 1.5 (см. с. 42), множество $\theta_{\mathfrak{G}}$ является полной решеткой формаций. Пусть $\mathfrak{X} := \vee_{\omega\delta F_{i\in I}}(\mathfrak{F}_i)$, где $\mathfrak{F}_i := \omega F(f_i, \delta)$ и f_i — внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Отметим, что по определению 1.1.1 (1) f_i является $\theta_{\mathfrak{G}}$-значным ω-спутником формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Пусть $\mathfrak{Y} := \omega F(f, \delta)$, где $f := \vee_{\theta_{\mathfrak{G}_{i\in I}}} f_i$.

Покажем, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Так как $\mathfrak{X} = \vee_{\omega\delta F_{i\in I}}(\mathfrak{F}_i)$, то $\mathfrak{X} = \omega F(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \delta)$. Ввиду $f_i \leq f$, имеем $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{Y}$, $i \in I$, и, значит, $\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{Y}$. Поскольку $\mathfrak{X}$ — наименьшая $\omega\delta$-веерная формация, содержащая множество $\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$.

Установим, что $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$. По теореме 5 [15] (см. с. 109) существет единственный минимальный ω-спутник h формации $\mathfrak{X}$ и существует единственный минимальный ω-спутник h_i формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Поскольку $\delta_0 \leq \delta \leq \delta_3$, то виду теоремы 6 [13] (см. с. 107), формация $\mathfrak{X}$ обладает единственным максимальным внутренним ω-спутником m таким, что $m(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ для любого $p \in \omega$ и $m(\omega') = \mathfrak{X}$; формация $\mathfrak{F}_i$ обладает единственным максимальным внутренним ω-спутником m_i и $m_i(p) = \mathfrak{N}_p h_i(p)$ для любого $p \in \omega$, $i \in I$. Проверим, что $f \leq m$. Достаточно показать, что $f(x) \subseteq m(x)$ для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$. Пусть $f_i(x) = \varnothing$ для любого $i \in I$. Тогда $f(x) = \vee_{\theta_{\mathfrak{G}_{i\in I}}} f_i(x) = \varnothing$ и, значит, $f(x) \subseteq m(x)$ для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$. Предположим, что $f_j(x) \neq \varnothing$ для некоторого $j \in I$. Тогда $f(x) = \vee_{\theta_{\mathfrak{G}_{i\in I}}} f_i(x) = \mathrm{form}(\cup_{i\in I} f_i(x))$ для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Пусть $p \in \omega$. Рассмотрим случай, когда $p \in \omega \setminus \pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. По теореме 5 [15] (см. с. 109) $h(p) = \varnothing$ и, значит, $m(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \varnothing$. Так как $p \in \omega \setminus \pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$, то $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F}_i)$ для любого $i \in I$. Ввиду теоремы 5 [15] (см. с. 109), это означает, что $h_i(p) = \varnothing$ и $m_i(p) = \mathfrak{N}_p h_i(p) = \varnothing$ для любого $i \in I$. Поскольку f_i является внутренним ω-спутником формации $\mathfrak{F}_i$ и m_i — единственный максимальный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, то $f_i \leq m_i$ и, следовательно, $f_i(p) = \varnothing$ для любого $i \in I$. Это означает, что $f(p) = \varnothing$. Таким образом, в случае $p \in \omega \setminus \pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ установлено, что $f(p) = \varnothing = m(p)$.

Предположим, что $p \in \omega \cap \pi(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ и $J = \{j \in I \mid p \in \pi(\mathfrak{F}_j)\}$. Тогда по теореме 5 [15] (см. с. 108) $h_j(p) \neq \varnothing$ для любого $j \in J$, $h_k(p) = \varnothing$ для любого $k \in I \setminus J$ и поэтому

$$\mathrm{form}(\ \cup_{i\in I} h_i(p)\ ) = \mathrm{form}(\ \cup_{j\in J}\ (\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)}) \mid G \in \mathfrak{F}_j)\ ) \subseteq$$

$$\subseteq \mathrm{form}(\ G/G_{\delta(p)} \mid G \in \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\ ) = h(p).$$

Так как $f_i \leq m_i$, $i \in I$, то

$$f(p)\ =\ \mathrm{form}(\ \cup_{i\in I} f_i(p)\ )\ \subseteq\ \mathrm{form}(\ \cup_{i\in I} m_i(p)\ )\ =$$

$$=\ \mathrm{form}(\ \cup_{i\in I}\ \mathfrak{N}_p h_i(p)\ )\ \subseteq\ \mathfrak{N}_p \mathrm{form}(\ \cup_{i\in I} h_i(p)\ )\ \subseteq\ \mathfrak{N}_p h(p)\ =\ m(p).$$

Таким образом, $f(p) \subseteq m(p)$ для любого $p \in \omega$.

Ввиду того, что f_i является внутренним ω-спутником формации $\mathfrak{F}_i$, то $f_i(\omega') \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{X}$, $i \in I$. Поскольку $\mathfrak{X} \in \theta_{\mathfrak{G}}$, имеем $f(\omega') = \mathrm{form}(\ \cup_{i\in I} f_i(\omega')\ ) \subseteq$

$\mathfrak{X} = m(\omega')$. Таким образом, $f(x) \subseteq m(x)$ для каждого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следовательно, $f \leq m$. Это означает, что $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$. Таким образом установленно, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Тем самым установлено, что решетка $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является $\omega\delta$-индуктивной. *Теорема доказана.*

Следствие 2.1.1. *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является δ-индуктивной решеткой.*

Следствие 2.1.2. *Множество $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является ωL-индуктивной решеткой.*

Следствие 2.1.3. *Множество $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является L-индуктивной решеткой.*

Из теоремы 2.1.1 вытекает ωS-индуктивность (S-индуктивность), ωZ-индуктивность (Z-индуктивность) решетки $\theta_{\mathfrak{G}}$.

§ 2.2. Модулярность решетки всех ω-веерных формаций и ее применение

Данный параграф посвящен доказательству модулярности решетки всех ω-веерных формаций, а также применению данного свойства к исследованию подформационного строения ω-веерных формаций.

Решетка Θ называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in \Theta$ таких, что $y \leq x$, справедливо: $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = y \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$ ([2], с. 26). В теореме 2.2.1 установлены условия, при которых множество $\omega\delta F$ всех $\omega\delta$-веерных формаций является модулярной решеткой.

Теорема 2.2.1. [71] *Пусть δ — bp-направление $\omega\delta$-веерной формации, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество $\omega\delta F$ всех $\omega\delta$-веерных формаций является модулярной решеткой.*

Доказательство. Как отмечено в замечании 1.5.2, множество $\omega\delta F$ является полной решеткой. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3 \in \omega\delta F$ и $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Установим, что

$$\mathfrak{F}_1 \wedge_{\omega\delta F} (\mathfrak{F}_2 \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee_{\omega\delta F} (\mathfrak{F}_1 \wedge_{\omega\delta F} \mathfrak{F}_3).$$

Пусть $\mathfrak{H} := \mathfrak{F}_2 \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{M} := \mathfrak{F}_1 \wedge_{\omega\delta F} \mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{X} := \mathfrak{F}_1 \wedge_{\omega\delta F} \mathfrak{H}$, $\mathfrak{Y} := \mathfrak{F}_2 \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{M}$. Проверим, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Пусть f_i — минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2, 3$, и

$$h := f_2 \vee_{\Theta_{\mathfrak{G}}} f_3, \quad m := f_1 \wedge_{\theta_{\mathfrak{G}}} f_3, \quad x := f_1 \wedge_{\theta_{\mathfrak{G}}} h, \quad y := f_2 \vee_{\theta_{\mathfrak{G}}} m.$$

Предварительно докажем, что $\mathfrak{X} = \omega F(x, \delta)$ и $\mathfrak{Y} = \omega F(y, \delta)$. Действительно, по теореме 2.1.1 решетка $\theta_{\mathfrak{G}}$ является $\omega\delta$-индуктивной и, значит, $\mathfrak{H} = \omega F(h, \delta)$. Следовательно, ввиду леммы 5 [15] (см. с. 108), имеем $\mathfrak{X} = \omega F(x, \delta)$. По лемме

5 [15] (см. с. 108) справедливо $\mathfrak{M} = \omega F(m, \delta)$ и, в соответствии с теоремой 2.1.1, заключаем, что $\mathfrak{Y} = \omega F(y, \delta)$.

Установим, что $x = y$. Пусть $p \in \omega \cup \{\omega'\}$. Ввиду включения $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$ с учетом следствия 5.1 [15] (см. с. 108), получаем $f_2 \leq f_1$ и, следовательно, $f_2(p) \subseteq f_1(p)$. В силу следствия 9.9 [55] (см. с. 112), решетка $\theta_{\mathfrak{G}}$ является модулярной. Тогда

$$x(p) = (f_1 \wedge_{\theta_{\mathfrak{G}}} (f_2 \vee_{\theta_{\mathfrak{G}}} f_3))(p) = (f_2 \vee_{\theta_{\mathfrak{G}}} (f_1 \wedge_{\theta_{\mathfrak{G}}} f_3))(p) = y(p).$$

Таким образом, $x = y$ и, значит, $\mathfrak{X} = \omega F(x, \delta) = \omega F(y, \delta) = \mathfrak{Y}$. Следовательно, решетка $\omega\delta F$ всех $\omega\delta$-веерных формаций является модулярной решеткой. *Теорема доказана.*

Следствие 2.2.1. *Пусть δ — $\mathfrak{b}p$-направление δ-веерной формации, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество δF всех δ-веерных формаций конечных групп является модулярной решеткой.*

Следствие 2.2.2. (Н.Н. Воробьев, [22], с. 168) *Множество всех ω-локальных формаций конечных групп является модулярной решеткой.*

Следствие 2.2.3. (А.Н. Скиба, [43], с. 167) *Множество всех локальных формаций является модулярной решеткой.*

Из теоремы 2.2.1 вытекает модулярность решетки всех ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Ввиду теоремы 13 [2] (см. с. 107), из теоремы 2.2.1 вытекает следующий результат.

Следствие 2.2.4. *Пусть δ — $\mathfrak{b}p$-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \omega\delta F$ интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{F}_2)/_{\omega\delta F}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{\omega\delta F}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\omega\delta F} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Следствие 2.2.5. *Пусть δ — $\mathfrak{b}p$-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \delta F$ интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\delta F} \mathfrak{F}_2)/_{\delta F}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{\delta F}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\delta F} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Следствие 2.2.6. *Для любых ω-локальных формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\omega LF} \mathfrak{F}_2)/_{\omega LF}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{\omega LF}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\omega LF} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Следствие 2.2.7. (А.Н. Скиба, [43], следствие 4.2.9) *Для любых локальных формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{LF} \mathfrak{F}_2)/_{LF}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{LF}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{LF} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Далее представлены результаты, посвященные применению модулярности решетки $\omega\delta F$ при исследовании подформационного строения $\omega\delta$-веерных формаций.

Следующая лемма доказывается аналогично доказательству леммы 2.1.3 [43].

Лемма 2.2.1. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_1 \leq \delta$. Если $\mathfrak{F}_i \in \omega\delta F$, $i \in I$, $\mathfrak{F} \cup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Если множество $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является цепью, то $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$.*

Теорема 2.2.2. [79] *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная $\omega\delta$-веерные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная $\omega\delta$-веерная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}, \delta)$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$, что, в силу $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, невозможно. Следовательно, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}$. Покажем, что в $\mathfrak{B}$ существует максимальная $\omega\delta$-веерная подформация, содержащая $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$. Пусть $\mathscr{X} = \{\mathfrak{X} \in \omega\delta F \mid \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subset \mathfrak{B}\}$, $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — произвольная цепь в $\mathscr{X}$ и $\mathfrak{D} := \cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i$. Тогда по лемме 2.2.1 $\mathfrak{D} \in \omega\delta F$, причем $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$. По условию $\mathfrak{B} = \omega F(B, \delta)$, где B — некоторая группа. Если $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$, то найдется такое $j \in I$, что $B \in \mathfrak{X}_j$ и $\mathfrak{B} = \omega F(B, \delta) \subseteq \mathfrak{X}_j$, что противоречит выбору $\mathscr{X}$. Следовательно, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$ и поэтому $\mathfrak{D} \in \mathscr{X}$. Тогда, согласно лемме Цорна, в $\mathscr{X}$ имеется максимальный элемент $\mathfrak{M}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — максимальная $\omega\delta$-веерная подформация в $\mathfrak{B}$. Действительно, пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{L} \in \omega\delta F$. Так как $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$ и поэтому $\mathfrak{L} \in \mathscr{X}$. Тогда из $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$ следует, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — максимальная $\omega\delta$-веерная подформация в $\mathfrak{B}$. Так как, ввиду теоремы 2.2.1, множество $\omega\delta F$ является модулярной решеткой формаций, то, согласно следствию 2.2.4, интервал $(\mathfrak{B} \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{H})/_{\omega\delta F}\mathfrak{H}$ изоморфен интервалу $\mathfrak{B}/_{\omega\delta F}(\mathfrak{B} \wedge_{\omega\delta F} \mathfrak{H})$, т.е. $\mathfrak{F}/_{\omega\delta F}\mathfrak{H} \cong \mathfrak{B}/_{\omega\delta F}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H})$. В силу данного изоморфизма, из того, что в $\mathfrak{B}$ существует максимальная $\omega\delta$-веерная подформация, содержащая $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$, следует, что в $\mathfrak{F}$ существует максимальная $\omega\delta$-веерная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$. *Теорема доказана.*

Следствие 2.2.8. *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\delta F} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная δ-веерные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная δ-веерная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Следствие 2.2.9. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{\omega LF} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная ω-локальные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная ω-локальная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Следствие 2.2.10. (А.Н. Скиба, [43], с. 183) *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{LF} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная локальные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная локальная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Теорема 2.2.3. [79] *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \le \delta \le \delta_3$, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i \in \omega\delta F$, $i \in I$. Если формация $\mathfrak{F}$ обладает такой максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией $\mathfrak{M}$, что $\pi(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, и $\pi(\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{M}) \cap \pi(\oplus_{i\in I\setminus\{k\}}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})) \cap \omega = \varnothing$ для любого $k \in I$, то найдется такое $j \in I$, что формация $\mathfrak{F}_j$ также обладает максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией.*

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{F}$ обладает максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей условию теоремы. Предположим, что формация $\mathfrak{F}_i$ не имеет максимальных $\omega\delta$-веерных подформаций для любого $i \in I$. По определению 1.1.1 (2) $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Тогда, согласно лемме 4.3.4 [43] (см. с. 110), $\mathfrak{M} = \oplus_{i\in I}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$. Пусть $\mathfrak{M}_i := \mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}$, $i \in I$. Так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то существует такое $j \in I$, что $\mathfrak{M}_j \neq \mathfrak{F}_j$. Ввиду $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_j$, получаем, что $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{F}_j$. По предположению формация $\mathfrak{F}_j$ не имеет максимальных $\omega\delta$-веерных подформаций. Следовательно, в $\mathfrak{F}_j$ существует такая собственная $\omega\delta$-веерная подформация $\mathfrak{H}_j$, что $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{F}_j$. Пусть $\mathfrak{M}_{j'} := \oplus_{i\in I\setminus\{j\}}\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{H} := \omega F(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \delta)$. Покажем, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

1. Проверим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$. Предварительно установим, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $G = A_{i_1} \times ... \times A_{i_t}$, где $A_{i_r} \in \mathfrak{M}_{i_r}$, $i_r \in I$, $r = \overline{1,t}$. Пусть $i_r \neq j$ для любого $r = \overline{1,t}$. Тогда $G \in \mathfrak{M}_{j'}$ и $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $j \in \{i_1, ..., i_t\}$. Если $t = 1$, то $i_1 = i_t = j$ и $G = A_j \in \mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{H}_j$. Поэтому при $t = 1$ имеем $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $t \neq 1$. Поскольку в прямом произведении $A_{i_1} \times ... \times A_{i_t}$ множители попарно перестановочны, то можем считать $A_{i_t} = A_j$. Это означает, что $G/A_j = G/A_{i_t} \cong A_{i_1} \times ... \times A_{i_{t-1}} \in \mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A := A_{i_1} \times ... \times A_{i_{t-1}}$. Тогда $G/A \cong A_j \in \mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ — формация, то из $G/A_j \in \mathfrak{H}$ и $G/A \in \mathfrak{H}$ следует, что $G \cong G/(A_j \cap A) \in \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{M}$ и, ввиду $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{F}_j$, получаем $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{H}_j$, что невозможно. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Предварительно установим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{H} = \omega F(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \delta)$ и $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-веерная формация, то достаточно проверить, что $\mathfrak{F}$ содержит множество $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}$. Действительно, из $\mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}_{j'} \subset \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $\mathfrak{H}$ — наименьшая $\omega\delta$-веерная формация, содержащая множество $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}$, имеем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j$ (1). С другой стороны, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \omega F(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \delta) \cap \mathfrak{F}_j$. Так как $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j \oplus \mathfrak{M}_{j'}$, то, с учетом условия теоремы, справедливо $\pi(\mathfrak{M}_{j'}) \cap \omega = (\cup_{i\in I\setminus\{j\}}\pi(\mathfrak{M}_i)) \cap \omega = \cup_{i\in I\setminus\{j\}}(\pi(\mathfrak{M}_i) \cap \omega) \neq \varnothing$. Тогда по теореме 1.4.4 $\mathfrak{M}_{j'} \in \omega\delta F$. Поскольку, согласно теореме 2.2.1, решетка $\omega\delta F$ модулярна, то, ввиду $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M}_{j'} = \mathfrak{E}$, имеем $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \omega F(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \delta) \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j \wedge_{\omega\delta F} (\mathfrak{H}_j \vee_{\omega\delta F} \mathfrak{M}_{j'}) = \mathfrak{H}_j \vee_{\omega\delta F} (\mathfrak{F}_j \wedge_{\omega\delta F} \mathfrak{M}_{j'}) = \omega F(\mathfrak{H}_j \cup (\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M}_{j'}), \delta) = \mathfrak{H}_j$. Таким образом, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{H}_j$ (2). Из (1) и (2) следует равенство $\mathfrak{H}_j = \mathfrak{F}_j$, что, в силу выбора формации $\mathfrak{H}_j$, невозможно. Следовательно, $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 получаем $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, что противоречит выбору $\mathfrak{M}$. Таким образом, найдется $j \in I$ такое, что формация $\mathfrak{F}_j$ обладает максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией. *Теорема доказана.*

Из теоремы 2.2.3 вытекают аналогичные результаты для ω-локальных (локальных), ω-специальных (специальных) и ω-центральных (центральных) формаций.

Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$. Следуя [43], группа $G \in \mathfrak{F}$ называется *$\omega\delta$-необразующей* группой формации $\mathfrak{F}$ если из того, что $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta)$ всегда следует равенство $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \delta)$. Если $\mathfrak{F} \in \omega LF$ ($\mathfrak{F} \in LF$), то $\omega\delta_1$-необразующую (δ_1-необразующую) группу формации $\mathfrak{F}$ будем называть *ωL-необразующей* (*L-необразующей*) группой формации $\mathfrak{F}$. Через $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$ ($\Phi_{\delta F}(\mathfrak{F})$) обозначим пересечение всех максимальных $\omega\delta$-веерных (δ-веерных) подформаций формации $\mathfrak{F}$. $\Phi_{\omega LF}(\mathfrak{F})$ ($\Phi_{LF}(\mathfrak{F})$) — пересечение всех максимальных ω-локальных (локальных) подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.2.4. [79] *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$. Тогда формация $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех $\omega\delta$-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ — множество всех $\omega\delta$-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.

1. Установим, что $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$. Пусть $G \in \Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$. Проверим, что $G \in \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta)$. Достаточно показать, что $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \delta)$. Отметим, что $\omega F(\mathfrak{X}, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\omega F(\mathfrak{X}, \delta) \subset \mathfrak{F}$. Так как $\omega F(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta) = \omega F(\mathfrak{X}, \delta) \vee_{\omega\delta F} \omega F(G, \delta)$, то по теореме 2.2.2 в $\mathfrak{F}$ существует такая максимальная $\omega\delta$-веерная подформация $\mathfrak{H}$, что $\omega F(\mathfrak{X}, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$, и, значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $G \in \Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$, то $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $\omega F(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\omega F(\mathfrak{X}, \delta) = \mathfrak{F}$ и поэтому $G \in \mathfrak{K}$. Следовательно, $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{K} \subseteq \Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$. Пусть $K \in \mathfrak{K}$. Предположим, что $K \notin \Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$. Тогда $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{F}$ и, согласно определению формации $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$, в $\mathfrak{F}$ существует такая максимальная $\omega\delta$-веерная подформация $\mathfrak{F}_1$, что $K \notin \mathfrak{F}_1$. Рассмотрим формацию $\omega F(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \delta)$. Так как справедливо $\mathfrak{F}_1 = \omega F(\mathfrak{F}_1, \delta) \subset \omega F(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\omega F(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \delta) = \mathfrak{F}$. Ввиду выбора группы K, имеем $\omega F(\mathfrak{F}_1, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Это означает, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $K \in \Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$ и поэтому $\mathfrak{K} \subseteq \Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$. Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{K} = \Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$. *Теорема доказана.*

Следствие 2.2.11. *Пусть δ — bp-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} \in \delta F$. Тогда формация $\Phi_{\delta F}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех δ-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 2.2.12. (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков, [44], с. 129) *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация. Тогда формация $\Phi_{\omega LF}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех ωL-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ из теорем 2.2.2 — 2.2.4 вытекают соответствующие свойства для δ-веерных формаций групп, в частности, следующий результат для локальных формаций.

Следствие 2.2.13. (А.Н. Скиба, [43], с. 187) *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда формация $\Phi_{LF}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех L-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

Из теоремы 2.2.4 вытекают аналогичные результаты для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

Замечание 2.2.1. В работе [72] доказаны теоремы для Ω-расслоенных формаций, аналогичные теоремам 2.2.2 — 2.2.4. Ввиду теоремы В.А. Ведерникова о соответствии ([13], теорема 4), между ω-веерными и Ω-расслоенными формациями существует взаимосвязь, позволяющая утанавливать свойства ω-веерных формаций посредством использования характеристик Ω-расслоенных формаций.

§ 2.3. Дистрибутивные решетки ω-веерных формаций

В данном параграфе изучаются дистрибутивные решетки ω-веерных формаций. Решетка Θ называется *дистрибутивной*, если для любых $x, y, z \in \Theta$ справедливо: $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = (x \wedge_\Theta y) \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$ ([2], с. 24).

Предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма 2.3.1. [71] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция такая, что $\delta_0 \leq \delta$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — атом решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$, $i \in I$. Если $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{H} \in \omega\delta F(\mathfrak{F})$, то существует такое множество $J \subseteq I$, что $\mathfrak{H} = \oplus_{j \in J}\mathfrak{F}_j$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} \in \omega\delta F(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{E}$. В соответствии с леммой 4.3.4 [43] (см. с. 110), имеем $\mathfrak{H} = \oplus_{i \in I}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{H})$. Поскольку $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_i$ и ввиду леммы 5 [15] (см. с. 108), $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{H} \in \omega\delta F$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}_i$ — атом решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ справедливо, что $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ или $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_i$. Пусть $J = \{j \in I \mid \mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_j\}$. Тогда $\mathfrak{H} = \oplus_{j \in J}(\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{H}) = \oplus_{j \in J}\mathfrak{F}_j$. *Лемма доказана.*

Лемма 2.3.2. [71] *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — такие ω-веерные формации с bp-направлением δ, что $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{E}$. Тогда $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть f_i — минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega \neq \varnothing$. Тогда существует такое простое число p, что $p \in \pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega$. Так как $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$, то $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$ и $f_i(p) \neq \varnothing$, $i = 1, 2$. Тогда по лемме 6 (1) [13] (см. с. 107) $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Таким образом, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{E}$. Получили противоречие. Следовательно, $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega = \varnothing$. *Лемма доказана.*

В теореме 2.3.1 для ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых решетка $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$ является дистрибутивной.

Теорема 2.3.1. [71] *Пусть δ — bp-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i)\cap\omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка.*

Доказательство. Пусть $\Theta := \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Как указано в замечании 1.5.2, множество Θ является решеткой. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X} \in \Theta$. Проверим, что

$$(\mathfrak{M} \wedge_\Theta \mathfrak{X}) \vee_\Theta (\mathfrak{M} \wedge_\Theta \mathfrak{H}) = \mathfrak{M} \wedge_\Theta (\mathfrak{X} \vee_\Theta \mathfrak{H}) \qquad \text{(I)}.$$

Если хотя бы одна из формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{X}$ является единичной, то утверждение (I) верно. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ — неединичные формации. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathscr{X} &:= (\mathfrak{M} \wedge_\Theta \mathfrak{X}) \vee_\Theta (\mathfrak{M} \wedge_\Theta \mathfrak{H}), \\ \mathscr{Y} &:= \mathfrak{M} \wedge_\Theta (\mathfrak{X} \vee_\Theta \mathfrak{H}), \end{aligned}$$

т.е. $\mathscr{X}$ — Θ-формация, порожденная множеством $(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{X})\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H})$, $\mathscr{Y}$ — пересечение формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X} \vee_\Theta \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{X} \vee_\Theta \mathfrak{H} := \mathscr{Z}$ — Θ-формация, порожденная множеством $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}$.

Покажем, что $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$. Ввиду включений $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, справедливо $(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{X})\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M} \in \Theta$, имеем $\mathscr{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Далее, так как $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\cup\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}\cup\mathfrak{H}$, получаем $(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{X})\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{X} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathscr{Z}$ и $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Z}$. Следовательно, $\mathscr{X} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathscr{Z} = \mathscr{Y}$.

Предположим, что $\mathscr{X} \subset \mathscr{Y}$ и G — группа минимального порядка из $\mathscr{Y} \setminus \mathscr{X}$. Тогда $G \neq 1$. Ввиду того, что $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — формации, получаем, что G — монолитическая группа. Поскольку $G \in \mathscr{Y} = \mathfrak{M} \cap \mathscr{Z}$, то $G \in \mathfrak{M}$ и $G \in \mathscr{Z} = \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$. Из $G \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ и того, что G — монолитическая группа, следует $G \in \mathfrak{F}_j$ для некоторого $j \in I$. Рассмотрим формацию $\Theta\mathrm{form}(G)$. Ввиду $\mathfrak{E} \subset \Theta\mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}_j$ и того, что $\mathfrak{F}_j$ — атом решетки Θ, получаем $\mathfrak{F}_j = \Theta\mathrm{form}(G)$. Так как $G \in \mathscr{Z}$, то справедливо включение $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathscr{Z}$.

Пусть $\mathscr{Z}_1 := \omega F(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}, \delta)$. Покажем, что $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_1$. Напомним, что

$$\mathscr{Z} = \Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}), \text{ где } \Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F}).$$

Так как $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathscr{Z}$ и $\mathscr{Z} \in \omega\delta F$, то $\mathscr{Z}_1 \subseteq \mathscr{Z}$. Проверим, что $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{Z}_1$. Ввиду $\mathfrak{X}\cup\mathfrak{H} \subseteq \mathscr{Z}_1$, достаточно показать, что $\mathscr{Z}_1 \in \Theta$. Поскольку $\mathscr{Z}_1 \in \omega\delta F$, достаточно проверить, что $\mathscr{Z}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Действительно, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, заключаем, что $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathscr{Z}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathscr{Z}_1 \in \Theta$. Это означает, что $\mathscr{Z}_1$ является Θ-формацией, содержащей множество $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}$. Тогда $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{Z}_1$. Таким образом установлено, что $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_1$ и справедливо равенство $\pi(\mathscr{Z}) = \pi(\mathscr{Z}_1)$. Ввиду теоремы 5 [15] (см. с. 108), $\pi(\mathscr{Z}_1) \cap \omega = \pi(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}) \cap \omega$ и, следовательно, $\pi(\mathscr{Z}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}) \cap \omega$.

В соответствии с леммой 2.3.1, существуют такие подмножества T, R, S множества I, что $\mathfrak{X} = \oplus_{t\in T}\mathfrak{F}_t$, $\mathfrak{H} = \oplus_{r\in R}\mathfrak{F}_r$, $\mathscr{Z} = \oplus_{s\in S}\mathfrak{F}_s$. Проверим, что $S = R \cup T$. Так как $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathscr{Z}$, то $R \cup T \subseteq S$. Предположим, что $R \cup T \subset S$ и $s_1 \in S \setminus (R \cup T)$. Тогда $\mathfrak{F}_{s_1} \subseteq \mathscr{Z}$, но $\mathfrak{F}_{s_1} \nsubseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_{s_1} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Это означает, что

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \omega \ \subseteq \ \pi(\mathscr{Z}) \cap \omega \ = \ \pi(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}) \cap \omega \ = \\ = \ (\pi(\mathfrak{X}) \cup \pi(\mathfrak{H})) \cap \omega \ = \ (\pi(\mathfrak{X}) \cap \omega) \cup (\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega). \end{aligned}$$

Тогда $\pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega$ или $\pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega$. Следовательно,

$$\begin{gathered} \pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \omega \neq \varnothing \ \text{ или} \\ \pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \omega \neq \varnothing. \end{gathered}$$

С другой стороны, ввиду $\mathfrak{F}_{s_1} \nsubseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} = \oplus_{t\in T}\mathfrak{F}_t$, заключаем, что $\mathfrak{F}_{s_1} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{E}$. По лемме 2.3.2, $\pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega = \varnothing$. Более того, $\mathfrak{F}_{s_1} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ и, ввиду леммы 2.3.2, справедливо $\pi(\mathfrak{F}_{s_1}) \cap \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega = \varnothing$. Получили противоречие. Таким образом, $S = R \cup T$.

Поскольку $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathscr{Z}$, то $j \in S$, и значит, $j \in R$ или $j \in T$. Таким образом, $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{X}$ или $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}$ или $G \in \mathfrak{H}$. Предположим, что $G \in \mathfrak{X}$. Так как $G \in \mathfrak{M}$, то $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{M} \wedge_\Theta \mathfrak{X} \subseteq \mathscr{X}$. Получили противоречие. Если $G \in \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \wedge_\Theta \mathfrak{H} \subseteq \mathscr{X}$. Противоречие. Таким образом, $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$ и равенство (I) верно. *Теорема доказана.*

Следствие 2.3.1. *Пусть δ — bp-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\delta F(\mathfrak{F})$. Тогда $\delta F(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка.*

Следствие 2.3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\omega LF(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega LF(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка.*

Следствие 2.3.3. (А.Н. Скиба, [43], с. 176) *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $LF(\mathfrak{F})$. Тогда $LF(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка*

Аналогичные результаты справедливы для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

§ 2.4. Решетки ω-веерных формаций с дополнениями

Данный параграф посвящен изучению условий, при которых решетка всех ω-веерных подформаций заданной ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ является решеткой с дополнениями. Решетка Θ с нулем O и единицей I называется *решеткой с дополнениями*, если для любого элемента $x \in \Theta$ существует дополнение в Θ, т.е. такой элемент $y \in \Theta$, что $x \wedge_\Theta y = O$ и $x \vee_\Theta y = I$.

Теорема 2.4.1. [71] *Пусть δ — bp-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.*

Доказательство. Пусть $\Theta := \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Отметим, что решетка Θ обладает нулем $\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H} \in \Theta$. Проверим, что $\mathfrak{H}$ имеет дополнение в решетке Θ. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, то $\mathfrak{F}$ — дополнение к $\mathfrak{H}$ в Θ. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{E}$ — дополнение к $\mathfrak{H}$ в Θ. Пусть $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2.3.1, получаем, что $\mathfrak{H} = \oplus_{i\in J}\mathfrak{F}_i$, где $J \subset I$, $J \neq \varnothing$. Положим $I_1 := I \setminus J$ и $\mathfrak{M} := \oplus_{i\in I_1}\mathfrak{F}_i$. Тогда $\mathfrak{F} = (\oplus_{i\in J}\mathfrak{F}_i) \oplus (\oplus_{i\in I_1}\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$. Проверим, что $\mathfrak{M}$ — дополнение к $\mathfrak{H}$ в решетке Θ. Поскольку $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{E}$ для любого $i \neq j$, то, в соответствии с леммой 2.3.2, заключаем, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) \cap \omega = \varnothing$ для любого $i \neq j$, и, значит, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega = \varnothing$. Так как $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{E}$ и, в соответствии с теоремой 1.4.4, справедливо $\mathfrak{M} \in \Theta$.

Покажем, что $\mathfrak{H} \wedge_\Theta \mathfrak{M} = \mathfrak{E}$. Отметим, что $\mathfrak{H} \wedge_\Theta \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$. Предположим, что $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \neq \mathfrak{E}$. Тогда существует такая формация $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$, что $\mathfrak{X}$ — атом решетки Θ. Ввиду $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ получаем, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_j$ для некоторого $j \in J$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_{i_1}$ для некоторого $i_1 \in I_1$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{E}$.

Установим, что $\mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Действительно, ввиду $\mathfrak{H} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \in \Theta$, справедливо $\mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Докажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$, то достаточно проверить, что $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M}$. Пусть $A \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$. Если $A \in \mathfrak{H}$, то $A \in \mathfrak{H} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M}$. Если $A \in \mathfrak{M}$, то, аналогично, $A \in \mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M}$. Так как $A \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$, то $A = H \times M$, где $H \in \mathfrak{H}$, $M \in \mathfrak{M}$, $H \neq 1, M \neq 1$. Это означает, что

$$A/H \cong M \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M},$$
$$A/M \cong H \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M}.$$

Так как $\mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M}$ — формация, то $A \cong A/(H \cap M) \in \mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M}$ и, значит, $\mathfrak{H} \vee_\Theta \mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Таким образом, Θ — решетка с дополнениями. *Теорема доказана.*

Следствие 2.4.1. *Пусть δ — bp-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\delta F(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.*

Следствие 2.4.2. (Н.Н. Воробьев, [22], с. 178) *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\omega L(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega L(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.*

Следствие 2.4.3. (А.Н. Скиба, [43], с. 175) *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $L(\mathfrak{F})$. Тогда $L(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.*

Согласно ([2], с. 32), дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой решеткой.* Из теоремы 2.3.1 и теоремы 2.4.1 вытекает следующий результат.

Следствие 2.4.4. *Пусть δ — bp-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

Следствие 2.4.5. *Пусть δ — bp-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\delta F(\mathfrak{F})$. Тогда $\delta F(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

Следствие 2.4.6. (Н.Н. Воробьев, [22], с. 178) *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-локальная формация,, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\omega L(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega L(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

Следствие 2.4.7. (А.Н. Скиба, [43], с. 175) *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L(\mathfrak{F})$. Тогда $L(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

Аналогичные результаты справедливы для ω-специальных (специальных), ω-центральных (центральных) формаций.

§ 2.5. Алгебраические решетки ω-веерных формаций

В данном параграфе доказана алгебраичность решетки $\omega\delta F_\theta$ всех ω-веерных формаций с направлением δ и θ-значным ω-спутником при условии, что решетка формаций θ является алгебраической. Решетка Θ называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов решетки Θ ([2], с. 244). Элемент x решетки Θ называется *компактным* элементом, если для любого множества $\{y_i | i \in I\}$ элементов из Θ из того, что $x \leq \vee_{\Theta_{i\in I}}(y_i)$ всегда следует, что существует такое конечное множество $\{y_j \mid j = 1, ..., s\} \subseteq \{y_i \mid i \in I\}$, что $x \leq \vee_{\Theta_{j=1,\dots,s}}(y_j)$ ([2], с. 243). В качестве следствий установлена алгебраичность решеток $\omega\delta F$, $\omega\delta F_\tau$, $\tau\omega\delta F$.

Теорема 2.5.1. [73] *Пусть θ — полная решетка формаций, δ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Если решетка θ является алгебраической, то решетка $\omega\delta F_\theta$ (решетка δF_θ) также является алгебраической.*

Доказательство. Пусть θ — алгебраическая решетка и $\Theta := \omega\delta F_\theta$. Покажем, что каждая формация, принадлежащая Θ, совпадает с решеточным объединением компактных элементов из Θ.

I. Поскольку для любой формации $\mathfrak{X} \in \Theta$ справедливо

$$\mathfrak{X} = \Theta\text{form}\mathfrak{X} = \omega F_\theta(\mathfrak{X}, \delta) = \omega F_\theta(\cup_{H\in\mathfrak{X}}\{H\}, \delta) =$$

$$= \omega F_\theta(\cup_{H\in\mathfrak{X}}\omega F_\theta(H,\delta),\delta) \;=\; \vee_{\Theta_{H\in\mathfrak{X}}}\omega F_\theta(H,\delta) \;=\; \vee_{\Theta_{H\in\mathfrak{X}}}\Theta\mathrm{form}H,$$

то каждая Θ-формация совпадает с решеточным объединением своих однопорожденных Θ-подформаций.

II. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная однопорожденная Θ-формация. Установим, что $\mathfrak{F}$ является компактным элементом решетки Θ. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} \subseteq \Theta$ и $\mathfrak{F} \subseteq \vee_{\Theta_{i\in I}}\mathfrak{F}_i$. Покажем, что существует такое конечное множество $\{i_1, i_2, ..., i_s\} \subseteq I$, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{i_1} \vee_\Theta \mathfrak{F}_{i_2} \vee_\Theta \ldots \vee_\Theta \mathfrak{F}_{i_s}$.

Так как $\mathfrak{F}$ — однопорожденная Θ-формация, то $\mathfrak{F} = \omega F_\theta(G,\delta)$, где G — некоторая группа. Согласно лемме 1.5.1 (2), формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным θ-значным ω-спутником f, причем $f(\omega') = \theta\mathrm{form}(G/O_\omega(G))$, $f(p) = \theta\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)})$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(q) = \varnothing$, если $q \in \omega \setminus \pi(G)$. Следовательно, все непустые значения функции f являются однопорожденными θ-формациями. Поскольку θ — алгебраическая решетка формаций, то по лемме 4.8.1 [22] (см. с. 109) формации $f(\omega')$ и $f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ являются компактными элементами решетки θ.

Так как $\mathfrak{F}_i \in \omega F_\theta$, то по теореме 1.5.1 (2) формация $\mathfrak{F}_i$ обладает единственным минимальным θ-значным ω-спутником f_i, $i \in I$. Пусть $h := \vee_{\theta_{i\in I}} f_i$ и $\mathfrak{H} := \vee_{\Theta_{i\in I}}\mathfrak{F}_i$. Согласно лемме 1.5.1, h — минимальный θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, ввиду леммы 1.5.1 (3), заключаем, что $f \le h$. Поэтому $f(x) \subseteq h(x)$ для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$. Поскольку $f(\omega')$ — компактный элемент решетки θ, $\{f_i(\omega') \mid i \in I\} \subseteq \theta$ и $f(\omega') \subseteq h(\omega') = \vee_{\theta_{i\in I}} f_i(\omega')$, то существуют $j_1, j_2, \ldots, j_{r_0} \in I$ такие, что

$$f(\omega') \;\subseteq\; f_{j_1}(\omega') \vee_\theta \ldots \vee_\theta f_{j_{r_0}}(\omega') \;=\; \theta\mathrm{form}(f_{j_1}(\omega') \cup \ldots \cup f_{j_{r_0}}(\omega')).$$

Пусть $\omega \cap \pi(G) = \{p_1, \ldots, p_t\}$ и $l \in \{1, \ldots, t\}$. Так как $f(p_l)$ — компактный элемент решетки θ, $\{f_i(p_l) \mid i \in I\} \subseteq \theta$ и $f(p_l) \subseteq h(p_l) = \vee_{\theta_{i\in I}} f_i(p_l)$, то существуют $j_{l1}, j_{l2}, \ldots, j_{lr_l} \in I$ такие, что

$$f(p_l) \;\subseteq\; f_{j_{l1}}(p_l) \vee_\theta \ldots \vee_\theta f_{j_{lr_l}}(p_l) \;=\; \theta\mathrm{form}(f_{j_{l1}}(p_l) \cup \ldots \cup f_{j_{lr_l}}(p_l)).$$

Пусть $J := \{j_1, j_2, \ldots, j_{r_0}, j_{11}, j_{12}, \ldots, j_{1r_1}, j_{21}, j_{22}, \ldots, j_{2r_2}, \ldots, j_{t1}, j_{t2}, \ldots, j_{tr_t}\}$, $h_1 := \vee_{\theta_{j\in J}} f_j$ и $\mathfrak{H}_1 := \vee_{\Theta_{j\in J}}\mathfrak{F}_j$. Согласно теореме 1.5.1, h_1 является ω-спутником формации $\mathfrak{H}_1$. Поскольку $f(\omega') \subseteq \theta\mathrm{form}(f_{j_1}(\omega') \cup \ldots \cup f_{j_r}(\omega')) \subseteq h_1(\omega')$, $f(p_l) \subseteq \theta\mathrm{form}(f_{j_{l1}}(p_l) \cup \ldots \cup f_{j_{lr_l}}(p_l)) \subseteq h_1(p_l)$ для любого $l \in \{1, \ldots, t\}$ и $f(q) = \varnothing \subseteq h_1(q)$ для всех $q \in \omega \setminus \pi(G)$, то $f \le h_1$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}_1$. Таким образом заключаем, что каждая однопорожденная формация $\mathfrak{F} \in \Theta$ является компактным элементом в Θ.

Из I и II следует, что каждая Θ-формация совпадает с решеточным объединением компактных элементов из Θ. Тем самым установлено, что решетка Θ является алгебраической. *Теорема доказана.*

Доказательство алгебраичности решетки δF_θ проводится аналогично с использованием следствий 1.5.1 и 1.5.2 вместо теоремы 1.5.1 и леммы 1.5.1 соответственно.

Следствие 2.5.1. *Пусть τ — регулярный подгрупповой функтор. Тогда решетка $\omega\delta F_\tau$ (решетка δF_τ) всех $\omega\delta$-веерных (δ-веерных) формаций, обладающих τ-замкнутым ω-спутником (спутником), является алгебраической для любой $\mathbb{P}FR$-функции δ, удовлетворяющей условию $\delta_0 \leq \delta$.*

Доказательство. Поскольку, согласно замечанию 1.5.2, $\omega\delta F_\tau = \omega\delta F_{\theta_\tau}$ ($\delta F_\tau = \delta F_{\theta_\tau}$), то, ввиду теоремы 2.5.1, достаточно установить, что решетка θ_τ всех τ-замкнутых формаций групп является алгебраической. Действительно, для любой $\mathfrak{X} \in \theta_\tau$ имеем

$$\mathfrak{X} = \theta_\tau\mathrm{form}\mathfrak{X} = \tau\mathrm{form}\mathfrak{X} = \tau\mathrm{form}(\cup_{H\in\mathfrak{X}}\tau\mathrm{form}H) = \vee_{\theta_\tau}{}_{H\in\mathfrak{X}}\theta_\tau\mathrm{form}H,$$

т.е. каждая θ_τ-формация совпадает с решеточным объединением своих однопорожденных θ_τ-подформаций.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} \subseteq \theta_\tau$, $\mathfrak{F} = \theta_\tau\mathrm{form}G$ и $\mathfrak{F} \subseteq \vee_{\theta_\tau}{}_{i\in I}\mathfrak{F}_i := \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{H} = \tau\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$, то по лемме 1.2.22 [43] (см. с. 110) $\mathfrak{H} = QR_0S_{\overline{\tau}}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = Q(R_0(S_{\overline{\tau}}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)))$. Так как $G \in \mathfrak{H}$, то, согласно определению операции Q на классах групп, справедливо $G \cong M/N$, где $M \in R_0(S_{\overline{\tau}}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i))$. Это, в силу определения операции R_0, означает, что $M \cong K/(N_1 \cap \ldots \cap N_t)$, где $K/N_1, \ldots, K/N_t \in S_{\overline{\tau}}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. По определению класса $S_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$ имеем $K/N_r \cong T_r$, где $T_r \in \overline{\tau}(L_r)$ для некоторой группы $L_r \in \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, $r = \overline{1,t}$. Из $L_r \in \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ следует, что существует такая формация $\mathfrak{F}_{j_r} \in \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, что $L_r \in \mathfrak{F}_{j_r}$, $r = \overline{1,t}$. Пусть $J := \{j_1, j_2, \ldots, j_t\}$. Тогда $L_1, \ldots, L_t \in \cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j$. Отсюда получаем, что $K/N_1, \ldots, K/N_t \in S_{\overline{\tau}}(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$. Поэтому $M \in R_0S_{\overline{\tau}}(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$ и $G \in QR_0S_{\overline{\tau}}(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$. Это, согласно лемме 1.2.22 [43] (см. с. 110), означает, что $G \in \tau\mathrm{form}(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — наименьшая τ-замкнутая формация, содержащая группу G, то $\mathfrak{F} \subseteq \tau\mathrm{form}(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j) = \vee_{\theta_\tau}{}_{j\in J}\mathfrak{F}_j$. Таким образом, каждая однопорожденная θ_τ-формация является компактным элементом в θ_τ.

Следовательно, каждая θ_τ-формация совпадает с решеточным объединением компактных элементов из θ_τ и поэтому решетка θ_τ является алгебраической. Отсюда по теореме 2.5.1 следует алгебраичность решетки $\omega\delta F_{\theta_\tau} = \omega\delta F_\tau$ (решетки $\delta F_{\theta_\tau} = \delta F_\tau$). *Следствие доказано.*

Следствие 2.5.2. *Решетка $\omega\delta F$ (решетка δF) всех $\omega\delta$-веерных (δ-веерных) формаций является алгебраической для любой $\mathbb{P}FR$-функции δ, удовлетворяющей условию $\delta_0 \leq \delta$.*

Доказательство. Пусть τ — тривиальный подгрупповой функтор, т.е. подгрупповой функтор, сопоставляющий каждой группе G совокупность $\tau(G) = \{G\}$. Тогда τ — регулярный подгрупповой функтор и, кроме того, множество всех формаций совпадает с множеством всех τ-замкнутых формаций.

Следовательно, $\omega\delta F = \omega\delta F_\tau$ ($\delta F = \delta F_\tau$) и по следствию 2.5.1 решетка $\omega\delta F$ (решетка δF) является алгебраической. *Следствие доказано.*

Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Подгрупповой функтор τ называется *δ-радикальным подгрупповым функтором*, если для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $G_{\delta(p)} \cap N = N_{\delta(p)}$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

Следствие 2.5.3. *Пусть δ — bp-направление, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор. Тогда решетка $\tau\omega\delta F$ (решетка $\tau\delta F$) всех τ-замкнутых $\omega\delta$-веерных (δ-веерных) формаций является алгебраической.*

Следствие 2.5.4. *Решетки всех нормально наследственных ω-локальных, локальных, ω-специальных, специальных, ω-центральных, центральных формаций являются алгебраическими.*

Следствие 2.5.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Тогда решетка $\omega\delta^n F$ (решетка $\delta^n F$) всех n-кратно $\omega\delta$-веерных (n-кратно δ-веерных) формаций является алгебраической.*

Следствие 2.5.6. *Решетка всех ω-полных (n-кратно полных) формаций является алгебраической для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Следствие 2.5.7. (А.Н. Скиба, [43], с. 180) *Решетка всех n-кратно ω-локальных (n-кратно локальных) формаций является алгебраической для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть τ — нормально наследственный подгрупповой функтор, т.е. подгрупповой функтор, сопоставляющий каждой группе совокупность всех ее нормальных подгрупп. Тогда τ является регулярным δ-радикальным подгрупповым функтором для любой $\mathbb{P}FR$-функции δ. Поскольку $\mathbb{P}FR$-функции δ_1, δ_2, δ_3 являются bp-направлениями и удовлетворяют условию $\delta \leq \delta_3$, то из следствия 2.5.3 непосредственно вытекает справедливость утверждения. *Следствие доказано.*

Замечание 2.5.1. Алгебраичность решетки всех нормально наследственных ω-локальных формаций следует также из результата И.П. Шабалиной [51]. Алгебраичность решетки всех нормально наследственных локальных формаций вытекает из результата А.Н. Скибы (см. [43], п. 4.4.4).

§ 2.6. Брауэровы и стоуновы решетки ω-веерных формаций

В данном параграфе установлены условия стоуновости решеток ω-веерных формаций. Пусть Θ — решетка, $a, b \in \Theta$, $\mathcal{X}_{a,b}$ — совокупность всех элементов из Θ, удовлетворяющих условию $a \wedge_\Theta x \leq b$. Наибольший элемент множества $\mathcal{X}_{a,b}$ называется *относительным псевдодополнением a в b* и обозначается $b|a$ ([23], с. 152).

Замечание 2.6.1. Для любой решетки формаций Θ и любых $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$, ввиду $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_2$, справедливо $\mathfrak{F}_2 \in \mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$.

Замечание 2.6.2. Поскольку для любых формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2 \in \theta_{\mathfrak{G}}$ имеет место $\mathfrak{F}_1 \cap \varnothing = \varnothing \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\varnothing \in \mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$, т.е. в решетке $\theta_{\mathfrak{G}}$ для любых формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$ имеет наименьший элемент, равный $\varnothing$. Аналогично, в решетке $\Theta = \omega\delta F$ ($\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — непустая формация) для любых $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2 \in \Theta$ множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$ обладает наименьшим элементом, равным $\mathfrak{E}$.

Замечание 2.6.3. Пусть Θ — решетка формаций, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2 \in \Theta$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_2|\mathfrak{F}_1$ — относительное псевдодополнение $\mathfrak{F}_1$ в $\mathfrak{F}_2$. Тогда по замечанию 2.6.2 $\mathfrak{M}$ — наибольший элемент в $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2\}$, т.е.

(1) $\mathfrak{M} \in \Theta$;

(2) $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}_2$;

(3) если $\mathfrak{X} \in \Theta$ и $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$.

Пример 2.6.1. Пусть G — простая ω-разрешимая группа, δ — b-направление $\omega\delta$-веерной формации, $\delta_0 \le \delta$, $\mathfrak{F} := \omega F(G,\delta)$ и $\Theta := \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Согласно следствию 1.5.8, $\Theta = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$. Тогда

$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}\}$ и поэтому $\mathfrak{E}|\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ и $\mathfrak{F}|\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ и $\mathfrak{F}|\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ и $\mathfrak{E}|\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$.

Пример 2.6.2. Пусть G — простая ω-отделимая группа, не являющаяся ω-разрешимой, δ — b-направление $\omega\delta$-веерной формации, $\delta_0 \le \delta$, $\mathfrak{F} := \omega F(G,\delta)$ и $\Theta := \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Тогда, ввиду теоремы 1.5.3, $\Theta = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$, где $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная $\omega\delta$-веерная подформация формации $\mathfrak{F}$. Поскольку

$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{H}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{H},\mathfrak{H}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{H},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{F}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{H}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{H},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}\}$;
$\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{E}\}$,

то $\mathfrak{E}|\mathfrak{E} = \mathfrak{H}|\mathfrak{E} = \mathfrak{F}|\mathfrak{E} = \mathfrak{H}|\mathfrak{H} = \mathfrak{F}|\mathfrak{H} = \mathfrak{F}|\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}|\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}|\mathfrak{H} = \mathfrak{E}|\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$.

Решетка Θ называется *брауэровой*, если для любых элементов $a, b \in \Theta$ в Θ существует относительное псевдодополнение a в b [2] (см. с. 107). Согласно данному определению, решетки из примеров 2.6.1 и 2.6.2 являются брауэровыми. В частности, для простого числа $p \in \omega$, с учетом равенства $\mathfrak{N}_p = \omega F(Z_p, \delta)$

(теорема 1.3.3), получаем тот факт, что решетка $\omega\delta F(\mathfrak{N}_p)$ всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{N}_p$ является брауэровой.

Пример 2.6.3. Пусть δ — b-направление $\omega\delta$-веерной формации, $p, q \in \omega$, $p \neq q$, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{N}_q, \delta)$, Θ_1 — совокупность всех собственных $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{E}, \mathfrak{N}_p, \mathfrak{N}_q \in \Theta_1$. Рассмотрим $\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$:

$$\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p} = \{\mathfrak{X} \in \Theta_1 \mid \mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}_p\}.$$

Так как $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{N}_p$ для любой формации $\mathfrak{X} \in \Theta_1$, то $\mathfrak{E}, \mathfrak{N}_p, \mathfrak{N}_q \in \mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$. Кроме того, поскольку $\mathfrak{F} \notin \Theta_1$, то $\mathfrak{F} \notin \mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$.

Допустим, что множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$ обладает наибольшим элементом. Пусть, например, $\mathfrak{H}$ — наибольший элемент в $\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$. Тогда $\mathfrak{H}$ — собственная $\omega\delta$-веерная подформация формации $\mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{N}_q, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$. С другой стороны, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Таким образом, множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{E},\mathfrak{N}_p}$ не имеет наибольшего элемента, т.е. в Θ_1 не существует относительного псевдодополнения $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{N}_p$. Это означает, что совокупность Θ_1 всех собственных $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{N}_q, \delta)$ не является брауэровой решеткой.

Пусть Θ — брауэрова решетка с нулем O, $a \in \Theta$. Элемент $O|a$ называется псевдодополнением элемента a и обозначается a^* ([2], с. 173).

Замечание 2.6.4. Пусть Θ — брауэрова решетка формаций с нулем $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F} \in \Theta$, $\mathfrak{F}^*$ — псевдодополнение формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}|\mathfrak{F}$ — наибольший элемент множества $\mathcal{X}_{\mathfrak{F},\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\}$, т.е.

(1) $\mathfrak{F}^* \in \Theta$;
(2) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$;
(3) если $\mathfrak{X} \in \Theta$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Брауэрова решетка Θ с нулем O и единицей I называется *стоуновой* решеткой, если $a^* \vee_\Theta (a^*)^* = I$ для всех $a \in \Theta$ ([2], с. 173).

Замечание 2.6.5. В монографии [2] указано несколько условий, определяющих стоунову решетку, эквивалентных условию из замечания 2.6.4.

Пример 2.6.4. Пусть $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — формация из примера 2.6.1. Напомним, что $\Theta = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ является брауэровой решеткой формаций с нулем $\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{F}$. По определению псевдодополнения $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$. Тогда $(\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}^* \vee_\Theta (\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{F} \vee_\Theta \mathfrak{E} = \omega F(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{E}, \delta) = \mathfrak{F}$. Далее, из $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$ следует $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{F}^* \vee_\Theta (\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{E} \vee_\Theta \mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{E} \cup \mathfrak{F}, \delta) = \mathfrak{F}$. Таким образом, по определению стоуновой решетки, решетка $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$ является стоуновой.

Пример 2.6.5. Пусть $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — формация из примера 2.6.2. Напомним, что $\Theta = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}\}$ является брауэровой решеткой формаций с нулем

$\mathfrak{E}$ и единицей $\mathfrak{F}$. По определению псевдодополнения $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$. Тогда $(\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}$ и $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{E}^* \vee_\Theta (\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{F} \vee_\Theta \mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^* \vee_\Theta (\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{E} \vee_\Theta \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Далее, $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$. Тогда $(\mathfrak{H}^*)^* = \mathfrak{E}^* = \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{H}^* \vee_\Theta (\mathfrak{H}^*)^* = \mathfrak{E} \vee_\Theta \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Таким образом, по определению стоуновой решетки, решетка $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$ является стоуновой.

В теореме 2.6.1 установлены условия, при которых брауэрова решетка ω-веерных формаций с произвольным направлением δ является стоуновой.

Теорема 2.6.1. [74] *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega\delta$-веерная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ и $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$ — брауэрова решетка. Поскольку $\mathfrak{F} \in \Theta$, то $\mathfrak{F}$ — единица решетки Θ. Ввиду определения стоуновой решетки, достаточно установить, что для любой формации $\mathfrak{B} \in \Theta$ имеет место равенство $\mathfrak{B}^* \vee_\Theta (\mathfrak{B}^*)^* = \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная формация из Θ и $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B}^* \vee_\Theta (\mathfrak{B}^*)^*$, т.е. $\mathfrak{B}_1 = \omega F(\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^*, \delta)$ — наименьшая $\omega\delta$-веерная формация, содержащая множество $\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^*$. Покажем, что $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно замечанию 2.6.4 (1), $\mathfrak{B}^* \in \Theta$ и $(\mathfrak{B}^*)^* \in \Theta$. Тогда $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{F}$ и $(\mathfrak{B}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}$ и, следовательно, $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{F}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{B}_1$. Поскольку $\mathfrak{B}_1 \neq \varnothing$, то $G \neq 1$. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, то $G = \times_{j\in J}A_j$, где $A_j \in \mathfrak{F}_j$, $j \in J \subseteq I$. С учетом того, что классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{B}_1$ являются формациями, заключаем, что группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой. Поэтому $G = A_k$, для некоторого $k \in I$, т.е. $G \in \mathfrak{F}_k$. Следовательно, $\omega F(G, \delta) \subseteq \mathfrak{F}_k$. Так как $\mathfrak{F}_k$ — атом решетки Θ и $\omega F(G, \delta) \neq \mathfrak{E}$, то $\omega F(G, \delta) = \mathfrak{F}_k$. Для группы G возможны 2 случая: а) $G \in \mathfrak{B}$; б) $G \notin \mathfrak{B}$. Рассмотрим каждый из случаев.

а) Пусть $G \in \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{B}$. Допустим, что $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B}^* \neq \mathfrak{E}$. Тогда в $\mathfrak{F}_k$ существует группа $H \neq 1$ такая, что $H \in \mathfrak{B}^*$. Поскольку $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{B}$, то $H \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$. Ввиду замечания 2.6.4 (2), получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$. Из того, что $\mathfrak{F}_k \in \Theta$ и $\mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{F}_k = \mathfrak{E}$, по замечанию 2.6.4 (3) следует, что $\mathfrak{F}_k \subseteq (\mathfrak{B}^*)^*$ и, значит, $G \in \mathfrak{B}_1$, что, в силу выбора группы G, невозможно.

б) Пусть $G \notin \mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{F}_k = \mathfrak{E}$, то по замечанию 2.6.4 (3) $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{B}^*$ и, следовательно, $G \in \mathfrak{B}^*$. Тогда $G \in \mathfrak{B}_1$. Получили противоречие. Если $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B} \neq \mathfrak{E}$, то, с учетом $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}_k$, заключаем, что $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{F}_k$. Следовательно, $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^*$. По замечанию 2.6.4 (2) имеет место равенство $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$ и поэтому $\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$. Согласно замечанию 2.6.4 (3), получаем $\mathfrak{F}_k \subseteq (\mathfrak{B}^*)^* \subseteq \mathfrak{B}_1$. Это означает, что $G \in \mathfrak{B}_1$, что невозможно.

Таким образом, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{B}^* \cup (\mathfrak{B}^*)^*, \delta)$ для любой формации $\mathfrak{B} \in \Theta$. Это, по определению стоуновой решетки, означает, что решетка Θ является стоуновой. *Теорема доказана.*

Из теоремы 2.6.1 получаем соответствующие результаты для основных видов ω-веерных формаций.

Следствие 2.6.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-полная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega A(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-локальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega L(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-специальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega S(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная ω-центральная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega Z(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 2.6.1 вытекает результат для δ-веерных формаций, в частности, для полных, локальных, специальных, центральных формаций.

Следствие 2.6.5. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F}$ — неединичная δ-веерная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \delta F(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Рассматривая в качестве δ функции δ_0, δ_1, δ_2, δ_3, из следствия 2.6.5 получаем соответственно результаты для полных, локальных, специальных и центральных формаций.

Следствие 2.6.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная полная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = A(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная локальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = L(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная специальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = S(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная центральная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = Z(\mathfrak{F})$. Если Θ — брауэрова решетка и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Наряду с определением стоуновой решетки из монографии [2], хорошо известно другое определение стоуновой решетки. В соответствии с монографией [23] (с. 152; см. также [22], с. 185), *стоуновой* называется дистрибутивная решетка Θ с нулем O и единицей I, если Θ — решетка с псевдодополнениями (т.е. каждый элемент решетки обладает псевдодополнением) и $a^* \vee^\Theta (a^*)^* = I$ для любого $a \in \Theta$.

Согласно теоремам 2.3.1 и 2.4.1 решетка, исследуемая в теореме 2.6.1, является дистрибутивной решеткой с дополнениями. В этой связи справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6.2. [74] *Пусть δ — bp-направление ω-веерной формации, $\mathfrak{F}$ — нееденичная $\omega\delta$-веерная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Доказательство. Пусть $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$. Тогда, согласно теоремам 2.3.1 и 2.4.1, решетка Θ является дистрибутивной решеткой с дополнениями.

Установим, что Θ — решетка с псевдодополнениями. Для этого достаточно проверить, что дополнение любой формации $\mathfrak{B} \in \Theta$ является ее псевдодополнением. Пусть $\mathfrak{B} \in \Theta$ и $\mathfrak{B}_1$ — дополнение к $\mathfrak{B}$ в Θ, т.е. $\mathfrak{B} \wedge^\Theta \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{B} \vee^\Theta \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}^*$. Действительно, так как $\mathfrak{B}_1 \in \{\mathfrak{X} \in \Theta \mid \mathfrak{B} \wedge^\Theta \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}\} = \mathcal{X}_{\mathfrak{B},\mathfrak{E}}$ и $\mathfrak{B}^*$ — наибольший элемент в $\mathcal{X}_{\mathfrak{B},\mathfrak{E}}$, то $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}^*$. Поскольку решетка Θ является дистрибутивной, то $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}^* \wedge^\Theta \mathfrak{F} = \mathfrak{B}^* \wedge^\Theta (\mathfrak{B} \vee^\Theta \mathfrak{B}_1) = (\mathfrak{B}^* \wedge^\Theta \mathfrak{B}) \vee^\Theta (\mathfrak{B}^* \wedge^\Theta \mathfrak{B}_1) = \mathfrak{E} \vee^\Theta \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1$. Таким образом, Θ — решетка с псевдодополнениями. Повторяя рассуждения, как и при доказательстве теоремы 2.6.1, нетрудно убедиться, что для любой формации $\mathfrak{B} \in \Theta$ имеет место равенство $\mathfrak{B}^* \vee^\Theta (\mathfrak{B}^*)^* = \mathfrak{F}$. Тогда, ввиду замечания **??**, Θ является стоуновой решеткой. *Теорема доказана.*

Поскольку функции δ_1, δ_2, δ_3 являются bp-направлениями, из теоремы 2.6.2 вытекают результаты для ω-локальных, ω-специальных, ω-центральных формаций.

Следствие 2.6.10. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нееденичная ω-локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega L(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нееденичная ω-специальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega S(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.12. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нееденичная ω-центральная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega Z(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то Θ является стоуновой решеткой.*

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 2.6.2 получаем результат для веерных формаций с bp-направлением, в частности, для локальных, специальных, центральных формаций.

Следствие 2.6.13. *Пусть δ — bp-направление веерной формации, $\mathfrak{F}$ — неединичная δ-веерная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \delta F(\mathfrak{F})$. Тогда Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.14. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = L(\mathfrak{F})$. Тогда Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.15. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная специальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = S(\mathfrak{F})$. Тогда Θ является стоуновой решеткой.*

Следствие 2.6.16. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная центральная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = Z(\mathfrak{F})$. Тогда Θ является стоуновой решеткой.*

Замечание 2.6.6. В [43] (с. 159) введено в рассмотрение понятие $\mathfrak{X}$-отделимой решетки формаций. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Полная решетка Θ называется $\mathfrak{X}$-отделимой, если для любого терма $\lambda(x_1, ..., x_m)$ сигнатуры $\{\wedge_\Theta, \vee_\Theta\}$, любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, ..., \mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \lambda(\mathfrak{F}_1, ..., \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2, ..., A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \lambda(\Theta\mathrm{form}(A_1), ..., \Theta\mathrm{form}(A_m))$. В [43] (теорема 4.1.16) доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой, а решетка разрешимых тотально локальных формаций $\mathfrak{S}$-отделима. В [94] установлена $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех n-кратно ω-специальных (n-кратно специальных, ω-специальных (специальных)) формаций конечных групп.

ГЛАВА 3
ПРИМЕНЕНИЕ ω-ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Данная глава посвящена применению ω-веерных формаций к изучению подгрупп конечных групп (задача **(A3)**). Она состоит из пяти параграфов. В параграфе 3.1 введены в рассмотрение понятия $\mathfrak{F}^\omega$-нормальной и $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной максимальных подгрупп и установлено строение группы, все $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальные максимальные подгруппы которой являются нормальными. В параграфе 3.2 введено в рассмотрение понятие $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппы и изучены их простейшие свойства. В параграфе 3.3 установлены условия, при которых в любой конечной группе G множество всех ее $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку для ω-локальной (ω-веерной с направлением δ_1) формации $\mathfrak{F}$. В параграфе 3.4 определены K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы и изучены их простейшие свойства. Параграф 3.5 посвящен исследованию взаимосвязи между решеточными свойствами K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных и $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп в ω-разрешимых группах для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$. Основные результаты Главы 3 опубликованы в работах [69, 78, 81], анонсированы в [85, 88, 93, 95, 98, 99].

§ 3.1. $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальные максимальные подгруппы и их свойства

Определение 3.1.1. ([69]) Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Максимальная подгруппа M группы G называется
— $\mathfrak{F}^\omega$-*нормальной* в G, если $G/(\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{F}$;
— $\mathfrak{F}^\omega$-*абнормальной* в G, если $G/(\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G)) \notin \mathfrak{F}$.

Целью данного параграфа является изучение свойств $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальных подгрупп конечных групп.

Замечание 3.1.1. Если $\pi(G) \subseteq \omega$, то $O_\omega(G) = G$ и, следовательно, в этом случае понятия $\mathfrak{F}^\omega$-нормальной и $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной и $\mathfrak{F}$-абнормальной) максимальных подгрупп группы G совпадают для любого непустого класса групп $\mathfrak{F}$. В случае, когда класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов, множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-нормальных максимальных подгрупп группы G для любого множества ω содержится во множестве всех ее $\mathfrak{F}$-нормальных максимальных подгрупп, а множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальных максимальных подгрупп группы G включает в себя множество всех ее $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп.

Пример 3.1.1. Пусть $G = \mathbb{S}_3 \times C_3$ (см. [68], IdGroup(G) = [18,3]), H — силовская 3-подгруппа группы G, $\omega = \{2\}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_2$ — класс всех конечных

2-групп. Тогда

$$G/H_G \cong C_2 \in \mathfrak{F},$$

и поэтому максимальная подгруппа H группы G не является $\mathfrak{F}$-абнормальной в G. С другой стороны, так как $O_\omega(G) = 1$, то

$$G/(H_G \cap O_\omega(G)) \cong G \notin \mathfrak{F}.$$

Следовательно, H — $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальная максимальная подгруппа группы G.

В теореме 3.1.1 для ω-локальной нормально наследственной формации $\mathfrak{F}$ получено описание строения группы, все $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальные максимальные подгруппы которой нормальны.

Предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма 3.1.1. [69] *Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная ω-локальная формация, $\varnothing \neq \omega_1 \subseteq \omega'$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\omega_1}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $\mathfrak{F}_1$ *— нормально наследственная ω-локальная формация.*

(2) $\mathfrak{F}_1\mathfrak{N}_{\omega_1} = \mathfrak{F}_1$.

Доказательство. (1) Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}_{\omega_1}$ — нормально наследственные формации, то, согласно теореме 5.38 [34] и теореме 5.10 (4) [34] (см. с. 110), $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}_{\omega_1}$ — нормально наследственная формация. Поскольку $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация и $\mathfrak{G}_{\omega_1}$ — ω-локальная формация (см. пример 1 [44]), то по теореме 7 [44] (см. с. 110) формация $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}_{\omega_1}$ является ω-локальной. Таким образом, $\mathfrak{F}_1$ — нормально наследственная ω-локальная формация.

(2) Покажем, что $\mathfrak{F}_1\mathfrak{N}_{\omega_1} = \mathfrak{F}_1$. Действительно, согласно пункту (1) данной леммы формация $\mathfrak{F}_1$ является нормально наследственной. Тогда по теореме 5.10 (4) [34] (см. с. 111) $\mathfrak{F}_1\mathfrak{N}_{\omega_1} = \mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{N}_{\omega_1}$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\omega_1} \circ \mathfrak{N}_{\omega_1} = \mathfrak{G}_{\omega_1}$, то, ввиду теоремы 5.11 (2) [34] (см. с. 110), справедливо

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{N}_{\omega_1} = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}_{\omega_1}) \circ \mathfrak{N}_{\omega_1} = \mathfrak{F} \circ (\mathfrak{G}_{\omega_1} \circ \mathfrak{N}_{\omega_1}) = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}_{\omega_1} = \mathfrak{F}_1.$$

Лемма доказана.

Группа G называется *ω-примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M (*ω-примитиватор*) такая, что $\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$. Используя методы доказательства леммы 3 раздела 2 работы [57], установим следующий результат.

Лемма 3.1.2. [69] *Пусть G — ω-примитивная группа. Если G обладает единственной минимальной нормальной ω-подгруппой L и индексы всех ω-примитиваторов группы G имеют общий делитель $p \in \omega$, то L является абелевой p-группой.*

Доказательство. Пусть L — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа ω-примитивной группы G, p — общий делитель индексов всех ω-примитиваторов группы G, $p \in \omega$ и M — некоторый ω-примитиватор группы G.

Если $L \subseteq M$, то $L \subseteq \mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, что невозможно. Следовательно, $L \nsubseteq M$ и поэтому $G = ML$. Отсюда получаем

$$| G : M | = | ML : M | = | L : L \cap M |.$$

Так как по условию леммы $| G : M |$ — pd-число, то L является pd-группой и по теореме Силова в L существуют силовские p-подгруппы.

Пусть P — силовская p-подгруппа группы L. Покажем, что $L = P$. Предположим, что $P < L$. Согласно лемме Фраттини $G = LN_G(P)$. Если $N_G(P) = G$, то ввиду минимальности нормальной подгруппы L в G получаем $P = 1$, что невозможно. Следовательно, $N_G(P) < G$ и поэтому существует такая подгруппа $K < \cdot\, G$, что $N_G(P) \subseteq K$. Тогда $G = LK$. Если $L \subseteq K$, то $G = K$, что, в силу выбора K, невозможно. Таким образом, $L \nsubseteq K$ и, значит, $L \nsubseteq \mathrm{Core}_G(K) \cap O_\omega(G)$. Поскольку L — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа в G, то $\mathrm{Core}_G(K) \cap O_\omega(G) = 1$ и K — ω-примитиватор группы G. По условию леммы $| G : K |$ — pd-число. Так как $G = KL$, то $| G : K | = | L : L \cap K |$. Поскольку $P \leq L \cap N_G(P) \leq L \cap K$, то

$$| L : P | = | L : L \cap K | \cdot | L \cap K : P |$$

и, значит, $| L : P |$ — pd-число. С другой стороны, так как P — силовская p-подгруппа в L, то $| L : P |$ — p'-число. Получили противоречие. Следовательно, $L = P$ — абелева p-группа. *Лемма доказана.*

Следствие 3.1.1. (Р. Бэр, [57], с. 121) *Пусть G — примитивная группа. Если G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой L и индексы всех примитиваторов группы G имеют общий простой делитель, то L является абелевой группой.*

Теорема 3.1.1. [69] *Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная ω-локальная формация, замкнутая относительно расширений, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\omega \subseteq \pi$, G — группа. Если каждая $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальная максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, то $G = A \rtimes B$, где $A \in \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi \cap \omega'}$, $B \in \mathfrak{N}_{\omega'}$.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка. Это означает, что каждая $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальная максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, но группа G не представима в виде $G = A \rtimes B$, где $A \in \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi \,\cap\, \omega'}$, $B \in \mathfrak{N}_{\omega'}$, причем G — группа наименьшего порядка с такими свойствами. Тогда $G \notin \mathfrak{N}_{\omega'}$ и $G \notin \mathfrak{F}_1$, где $\mathfrak{F}_1 := \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi \,\cap\, \omega'}$. Возможны следующие 2 случая.

1. *Пусть все максимальные подгруппы группы G являются $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальными в G.* Тогда по условию теоремы все максимальные подгруппы группы G нормальны в G и, следовательно, $G \in \mathfrak{N}$. Это означает, что группа G представима в виде $G = G_\omega \times G_{\omega'}$, где G_ω и $G_{\omega'}$ — соответственно ω-холлова и ω'-холлова подгруппы группы G. Отметим, что $G_{\omega'} \in \mathfrak{N}_{\omega'}$.

Покажем, что $G_\omega \in \mathfrak{F}_1$. Пусть $\pi(G) \cap \omega = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Тогда

$$G_\omega = G_{p_1} \times G_{p_2} \times \ldots \times G_{p_k},$$

где G_{p_j} — силовская p_j-подгруппа группы G, $j = \overline{1,k}$. Пусть $i \in \{1, \ldots, k\}$. Предварительно установим, что $G_{p_i} \in \mathfrak{F}$. Пусть f — минимальный ω-спутник ω-локальной формации $\mathfrak{F}$. Так как $p_i \in \omega = \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, то по теореме 5 [15] (см. с. 109) $f(p_i) \neq \varnothing$ и поэтому $\mathfrak{N}_{p_i} \subseteq \mathfrak{N}_{p_i} f(p_i)$. Ввиду леммы 3.1.1, справедливо включение $\mathfrak{N}_{p_i} f(p_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $G_{p_i} \in \mathfrak{F}$ для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$. Так как класс $\mathfrak{F}$ является формацией, то $\mathfrak{F}$ замкнут относительно прямых произведений и $G_\omega \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$, то $G_\omega \in \mathfrak{F}_1$.

Таким образом, в случае, когда все максимальные подгруппы группы G являются $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальными в G, мы получаем противоречие с выбором группы G.

2. *Пусть в группе G существует хотя бы одна $\mathfrak{F}^\omega$-нормальная максимальная подгруппа M.* Тогда по определению 3.1.1 $G/(\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{F}$. Если $\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, то $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$, что невозможно. Следовательно, $\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \neq 1$ и поэтому в G существуют неединичные нормальные ω-подгруппы. Пусть K — минимальная нормальная ω-подгруппа группы G.

Покажем, что группа G/K удовлетворяет условию теоремы. Пусть $\overline{L}$ — $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальная максимальная подгруппа группы $\overline{G} := G/K$. Установим, что $\overline{L}$ является нормальной подгруппой в $\overline{G}$. По лемме 3.17 (5) [34] (см. с. 110) существует максимальная подгруппа L в G такая, что $K \leq L$ и $\overline{L} = L/K$. Покажем, что L — $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальная подгруппа в G. Допустим, что подгруппа L является $\mathfrak{F}^\omega$-нормальной в G. Тогда по определению 3.1.1 $G/(\mathrm{Core}_G(L) \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{F}$. Поскольку $K \subseteq \mathrm{Core}_G(L) \cap O_\omega(G)$, то

$$G/(\mathrm{Core}_G(L) \cap O_\omega(G)) \cong (G/K)/((\mathrm{Core}_G(L) \cap O_\omega(G))/K) \in \mathfrak{F}.$$

Пусть $\overline{H} := (\mathrm{Core}_G(L) \cap O_\omega(G))/K$. Так как $\overline{H} \subseteq (L/K)_{G/K} \cap O_\omega(G/K) = \mathrm{Core}_{\overline{G}}(\overline{L}) \cap O_\omega(\overline{G})$, то

$$\overline{G}/(\mathrm{Core}_{\overline{G}}(\overline{L}) \cap O_\omega(\overline{G})) \cong (\overline{G}/\overline{H})/((\mathrm{Core}_{\overline{G}}(\overline{L}) \cap O_\omega(\overline{G}))/\overline{H}).$$

Поскольку $\overline{G}/\overline{H} \in \mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов, то

$$\overline{G}/(\mathrm{Core}_{\overline{G}}(\overline{L}) \cap O_\omega(\overline{G})) \in \mathfrak{F}.$$

Это, ввиду определения 3.1.1, означает, что $\overline{L}$ — $\mathfrak{F}^\omega$-нормальная максимальная подгруппа в $\overline{G}$. Получили противоречие с выбором $\overline{L}$. Поэтому L — $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальная максимальная подгруппа в G. Тогда по условию теоремы подгруппа L нормальна в G и, значит, подгруппа $\overline{L}$ нормальна в $\overline{G}$. Таким образом, любая $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальная максимальная подгруппа группы G/K нормальна в G/K. Следовательно, группа G/K удовлетворяет условию теоремы и в силу выбора группы G получаем

$$G/K = A/K \rtimes B/K, \text{ где } A/K \in \mathfrak{F}_1,\ B/K \in \mathfrak{N}_{\omega'}.$$

Покажем, что группа G/K π'-разрешима. Так как $B/K \in \mathfrak{N}_{\omega'}$, то

$$B/K = C/K \times D/K, \text{ где } C/K \in \mathfrak{N}_{\pi\cap\omega'},\ D/K \in \mathfrak{N}_{\omega'\setminus\pi}.$$

Таким образом,

$$G/K = A/K \rtimes (C/K \times D/K) = AC/K \cdot\ D/K,$$

где AC/K — π-группа, D/K — π'-группа. Проверим, что $AC/K \lhd G/K$. Действительно, так как $A/K \lhd G/K$, C/K и D/K перестановочны поэлементно, то для любого элемента $dK \in D/K$ справедливо

$$(AC/K)^{dK} = (A/K)^{dK} \cdot\ (C/K)^{dK} = A/K \cdot\ C/K = AC/K.$$

Следовательно, $G/K = AC/K \cdot\ D/K \subseteq N_{G/K}(AC/K)$. Поэтому $AC/K \lhd G/K$ и

$$G/K = AC/K \rtimes D/K,$$

где AC/K — π-группа, D/K — нильпотентная π'-группа. Тем самым установлено, что G/K — π'-разрешимая группа, причем AC/K — единственная π-холлова подгруппа в G/K, D/K — π'-холлова подгруппа в G/K, $D/K \in \mathfrak{N}_{\omega'}$. Поскольку $A/K \in \mathfrak{F}_1$, $C/K \in \mathfrak{N}_{\pi\cap\omega'}$, то

$$AC/K = A/K \rtimes C/K \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}_{\pi\cap\omega'}.$$

По лемме 3.1.1 (2) $\mathfrak{F}_1\mathfrak{N}_{\pi\cap\omega'} = \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $AC/K \in \mathfrak{F}_1$.

Покажем, что K — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа группы G. Допустим, что существует минимальная нормальная ω-подгруппа K_1 группы G, отличная от K. Как и выше для G/K, получим, что G/K_1 — π'-разрешимая группа,

$$G/K_1 = A_1/K_1 \rtimes (C_1/K_1 \times D_1/K_1) = A_1C_1/K_1 \rtimes D_1/K_1,$$

A_1C_1/K_1 — единственная π-холлова подгруппа в G/K_1, $A_1C_1/K_1 \in \mathfrak{F}_1$, D_1/K_1 — π'-холлова подгруппа в G/K_1, $D_1/K_1 \in \mathfrak{N}_{\omega'}$.

Поскольку G/K и G/K_1 — π'-разрешимые группы и класс всех π'-разрешимых групп замкнут относительно подпрямых произведений, то $G/(K \cap K_1) \cong G$ — π'-разрешимая группа. По теореме 1.8.2 [50] (см. с. 112) в группе G существуют π'-холловы и π-холловы подгруппы. Пусть G_π — π-холлова подгруппа группы G. Так как AC/K — единственная π-холлова подгруппа в G/K, то, ввиду леммы 4.34 (2) [34] (см. с. 109), $G_\pi K/K = AC/K$. Так как $AC/K \lhd G/K$, то $G_\pi K \lhd G$. Поскольку K — ω-группа и $\omega \subseteq \pi$, то $G_\pi K$ —

π-группа и поэтому $G_\pi K = G_\pi$. Следовательно, $G_\pi \lhd G$ и G_π — единственная π-холлова подгруппа в G. Тогда

$$G_\pi/(G_\pi \cap K) \cong G_\pi K/K = AC/K \in \mathfrak{F}_1,$$

$$G_\pi/(G_\pi \cap K_1) \cong G_\pi K_1/K_1 = A_1C_1/K_1 \in \mathfrak{F}_1.$$

Так как, согласно лемме 3.1.1 (1), класс $\mathfrak{F}_1$ является формацией, а значит, $\mathfrak{F}_1$ замкнут относительно подпрямых произведений, то

$$G_\pi \cong G_\pi/(G_\pi \cap K \cap K_1) \in \mathfrak{F}_1.$$

Пусть $G_{\pi'}$ — такая π'-холлова подгруппа группы G, что $G_{\pi'}K/K = D/K$. Тогда

$$G_{\pi'}/(G_{\pi'} \cap K) \in \mathfrak{N}_{\omega'}.$$

Пусть ${G_{\pi'}}^*$ — π'-холлова подгруппа группы G такая, что ${G_{\pi'}}^*K_1/K_1 = D_1/K_1$. По теореме 1.8.2 [50] (см. с. 112) ${G_{\pi'}}^* = (G_{\pi'})^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Тогда

$$G_{\pi'}/(G_{\pi'} \cap K_1) \cong G_{\pi'}K_1/K_1 \cong (G_{\pi'}K_1/K_1)^{gK_1} = (G_{\pi'})^g K_1/K_1 = {G_{\pi'}}^*K_1/K_1$$

и поэтому

$$G_{\pi'}/(G_{\pi'} \cap K_1) \in \mathfrak{N}_{\omega'}.$$

Так как класс $\mathfrak{N}_{\omega'}$ замкнут относительно подпрямых произведений, то

$$G_{\pi'} \cong G_{\pi'}/(G_{\pi'} \cap K \cap K_1) \in \mathfrak{N}_{\omega'}.$$

Тем самым установлено, что $G = G_\pi \rtimes G_{\pi'}$, где $G_\pi \in \mathfrak{F}_1$, $G_{\pi'} \in \mathfrak{N}_{\omega'}$. Получили противоречие с выбором группы G. Следовательно, K — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа группы G.

Пусть $\Phi := \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Рассмотрим два возможных случая.

2.1. Пусть $\Phi \neq 1$. Как и выше для группы G/K, повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что группа G/Φ удовлетворяет условию теоремы. Тогда, в силу выбора группы G, справедливо

$$G/\Phi = A_2/\Phi \rtimes B_2/\Phi,$$

где $A_2/\Phi \in \mathfrak{F}_1$, $B_2/\Phi \in \mathfrak{N}_{\omega'}$. Далее,

$$G/\Phi = A_2/\Phi \rtimes (C_2/\Phi \times D_2/\Phi) = A_2C_2/\Phi \rtimes D_2/\Phi,$$

где $C_2/\Phi \in \mathfrak{N}_{\pi\cap\omega'}$, $D_2/\Phi \in \mathfrak{N}_{\omega'\setminus\pi}$. Ввиду леммы 3.1.1 (2), $A_2C_2/\Phi \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}_{\pi\cap\omega'} = \mathfrak{F}_1$ и A_2C_2/Φ — нормальная π-холлова подгруппа группы G/Φ, D_2/Φ — нильпотентная π'-холлова подгруппа в G/Φ. Это означает, что группа G/Φ является π'-разрешимой. Так как подгруппа Φ нильпотентна, а значит, π'-разрешима, то по свойству (1.8.3) [50] (см. с. 111) группа G также является π'-разрешимой и, следовательно, в G существует π-холлова подгруппа G_π и π'-холлова подгруппа

$G_{\pi'}$. Поскольку G/Φ — π-замкнутая группа, то по лемме 3.1 (2) [17] (см. с. 109), группа G также является π-замкнутой и поэтому $G = G_\pi \rtimes G_{\pi'}$.

Покажем, что $G_\pi \in \mathfrak{F}_1$. Поскольку $G_\pi\Phi/\Phi = A_2C_2/\Phi \in \mathfrak{F}_1$, то

$$G_\pi/(G_\pi \cap \Phi) = G_\pi/(G_\pi \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{F}_1.$$

Так как по лемме 3.1.1 (1) $\mathfrak{F}_1$ — ω-локальная формация, то по лемме 3.2 (1) [17] (см. с. 109), $G_\pi \in \mathfrak{F}_1$.

Покажем, что $G_{\pi'} \in \mathfrak{N}_{\omega'}$. Ввиду теоремы 1.8.2 [50] (см. с. 111) и леммы 4.34 (2) [34] (см. с. 110), найдется такой элемент $a \in G$, что $(G_{\pi'})^a\Phi/\Phi = D_2/\Phi$. Поэтому

$$G_{\pi'}\Phi/\Phi \cong (G_{\pi'}\Phi/\Phi)^{a\Phi} = (G_{\pi'})^a\Phi/\Phi = D_2/\Phi \in \mathfrak{N}.$$

Из $G_{\pi'}/(G_{\pi'} \cap \Phi) \cong G_{\pi'}\Phi/\Phi \in \mathfrak{N}$ по теореме 3.24 [34] (см. с. 110) следует, что $G_{\pi'} \in \mathfrak{N}$. Так как $\pi' \subseteq \omega'$, то $G_{\pi'} \in \mathfrak{G}_{\omega'}$. Таким образом, $G_{\pi'} \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_{\omega'} = \mathfrak{N}_{\omega'}$.

Следовательно, $G = G_\pi \rtimes G_{\pi'}$, где $G_\pi \in \mathfrak{F}_1$, $G_{\pi'} \in \mathfrak{N}_{\omega'}$. Получили противоречие с выбором группы G.

2.2. Пусть $\Phi = 1$. Если $K \subseteq \Phi(G)$, то $K \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G) = \Phi$, что невозможно. Следовательно, $K \nsubseteq \Phi(G)$ и, значит, найдется такая максимальная подгруппа M в группе G, что $K \nsubseteq M$. Тогда $G = KM$. Поскольку $K \nsubseteq \mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G)$ и K — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа в G, то $\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$. Тем самым установлено, что группа G является ω-примитивной.

Покажем, что $G = K \rtimes M$. Пусть $p \in \pi(G) \cap \omega$. Предварительно установим, что p является общим делителем индексов всех ω-примитиваторов группы G. Пусть H — произвольный ω-примитиватор группы G и G_p — силовская p-подгруппа в G. Допустим, что $\mid G : H \mid$ — p'-число. Тогда все силовские p-подгруппы группы G содержатся в H и поэтому, ввиду теоремы Силова, ${G_p}^G \subseteq H$. Так как $p \in \omega$, то ${G_p}^G \subseteq \mathrm{Core}_G(H) \cap O_\omega(G) = 1$, что невозможно. Следовательно, $\mid G : H \mid$ — pd-число. Таким образом, индексы всех ω-примитиваторов группы G имеют общий делитель $p \in \omega$. Отсюда по лемме 3.1.2 получаем, что K является абелевой p-группой и поэтому $G = K \rtimes M$.

Так как $G/K \cong M$ и $G/K = A/K \rtimes B/K$, то $M = M_1 \rtimes M_2$, где $M_1 \in \mathfrak{F}_1$, $M_2 \in \mathfrak{N}_{\omega'}$. Поскольку $M_2 \in \mathfrak{N}_{\omega'}$, то $M_2 = X \times Y$, где $X \in \mathfrak{N}_{\pi\cap\omega'}$, $Y \in \mathfrak{N}_{\pi'}$. Пусть $Z := KM_1X$. Тогда

$$G = K \rtimes M = KM_1M_2 = KM_1XY = ZY.$$

Так как K, M_1, X — π-группы, то Z — π-группа. Поскольку Y — π'-группа, то $Z \cap Y = 1$. Установим, что $Z \lhd G$. Действительно, так как $K \lhd G$, $M_1 \lhd M$, $X \lhd M_2$, то для любого элемента $y \in Y$ справедливо

$$Z^y = (KM_1X)^y = K^y{M_1}^yX^y = KM_1X = Z.$$

Поэтому $Y \subseteq N_G(Z)$ и, значит, $G = ZY \subseteq N_G(Z)$. Следовательно, $Z \lhd G$ и $G = Z \rtimes Y$.

Покажем, что $Z \in \mathfrak{F}_1$. Пусть $T := M_1X$. Тогда $Z = KT$. Так как $M_1 \lhd M$ и $M_1 \leq T \leq M$, то $M_1 \lhd T$. Поскольку $M_1 \cap M_2 = 1$ и $X \subseteq M_2$, то $M_1 \cap X = 1$. Из $T = M_1X$, $M_1 \cap X = 1$, $M_1 \lhd T$ получаем, ввиду леммы 3.1.1 (2),

$$T = M_1 \rtimes X \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}_{\pi\cap\omega'} = \mathfrak{F}_1.$$

Поскольку $K \cap M = 1$ и $T \subseteq M$, то $K \cap T = 1$. Тогда $Z = K \rtimes T \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_1$. Из $p \in \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ по теореме 5 [15] (см. с. 109) и лемме 6 [13] (см. с. 108) следует, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $K \in \mathfrak{F}$ и, значит, $Z \in \mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$. Так как по условию теоремы формация $\mathfrak{F}$ замкнута относительно расширений, то, ввиду теоремы 5.11 (2) [34] (см. с. 111), справедливо

$$Z \in \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} \circ (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}_{\pi\cap\omega'}) = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}) \circ \mathfrak{G}_{\pi\cap\omega'} = (\mathfrak{F}\mathfrak{F})\mathfrak{G}_{\pi\cap\omega'} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi\cap\omega'} = \mathfrak{F}_1.$$

Таким образом, $G = Z \rtimes Y$, где $Z \in \mathfrak{F}_1$, $Y \in \mathfrak{N}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}$. Получили противоречие с выбором группы G. *Теорема доказана.*

Замечание 3.1.2. В работе [35] Л.Я. Поляков для локальной формации $\mathfrak{F}$ установил условия, при которых все $\mathfrak{F}$-абнормальные (в смысле Кегеля) максимальные подгруппы в конечной группе G являются квазисубнормальными, а значит, ввиду теоремы П. Клейдмана [66], нормальными в G. Теорема 3.1.1 развивает результат теоремы 1 Л.Я. Полякова ([35], с. 63).

В теореме 3.1.2 установлены условия, при которых в группе $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы являются нормальными.

Теорема 3.1.2. [69] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G — группа. Если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, то всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G, индекс которой есть π'-число, является нормальной в G.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Покажем, что всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G, индекс которой есть π'-число, является нормальной в G. Из $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ следует, что в группе G существует нормальная подгруппа A такая, что $A \in \mathfrak{F}$ и $G/A \in \mathfrak{N}$.

Если $A = 1$, то $G \in \mathfrak{N}$ и, значит, всякая максимальная подгруппа группы G нормальна в G. Если $G = A$, то $G \in \mathfrak{F}$ и поэтому $G/(\mathrm{Core}_G(M) \cap O_{\omega}(G)) \in \mathfrak{F}$ для любой $M < \cdot\, G$. Это означает, что в G нет $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных максимальных подгрупп и поэтому утверждение верно.

Пусть $1 < A < G$ и M — $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G такая, что $\mid G : M \mid$ — π'-число. Возможны следующие 2 случая.

1. Пусть $A \not\subseteq M$. Тогда $G = MA$ и поэтому

$$\mid G : M \mid = \mid MA : M \mid = \mid A : A \cap M \mid \text{ — } \pi'\text{-число.}$$

С другой стороны, из $A \in \mathfrak{F}$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ следует, что A является π-группой. Таким образом, $|\, A : A \cap M \,| = 1$ и, значит, $A = A \cap M$. Тогда $A \subseteq M$. Получили противоречие.

2. Пусть теперь $A \subseteq M$. Тогда $A \subseteq \mathrm{Core}_G(M)$ и поэтому $G/\mathrm{Core}_G(M) \cong (G/A)/(\mathrm{Core}_G(M)/A)$. Так как $G/A \in \mathfrak{N}$, то $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{N}$. По лемме 3.17 (3) [34] (см. с. 110) $M/\mathrm{Core}_G(M) < \cdot \; G/\mathrm{Core}_G(M)$ и, согласно теореме 3.13 [34] (см. с. 110), $M/\mathrm{Core}_G(M) \lhd G/\mathrm{Core}_G(M)$. Следовательно, подгруппа M нормальна в G. *Теорема доказана.*

§ 3.2. $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы и их простейшие свойства

Определение 3.2.1. [81] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H — подгруппа группы G. $(G-H)$-цепь группы G называется *ω-цепью относительно* $\mathfrak{F}$ (или, иначе, *$(G-H)^\omega$-цепью относительно* $\mathfrak{F}$), если $\mathfrak{F}$-корадикал каждого члена данной цепи является ω-группой.

Определение 3.2.2. [81] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной* подгруппой в G, если либо $H = G$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, либо существует максимальная $(G-H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k = H$ такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,k}$.

Замечание 3.2.1. Из определения $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы (см., например, [53], с. 223) следует, что $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы является ее $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой. В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, понятие $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппы группы G совпадает с понятием $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы группы G.

Замечание 3.2.2. Исходя из определения 3.1.1, определение $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппы можно сформулировать в следующем виде.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной* подгруппой в G, если либо $H = G$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, либо существует $(G-H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k = H$ такая, что H_i является $\mathfrak{F}^\omega$-нормальной максимальной подгруппой в (H_{i-1}), $i = \overline{1,k}$.

Целью данного параграфа является изучение простейших свойств $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп в конечных группах.

Лемма 3.2.1. [81] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если $H \leq G$, $H^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap O_\omega(G)$, то H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G.*

(2) *Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G и $K \leq G$, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в K. В частности, если H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G и $H \leq K$, то H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в K.*

(3) *Если* H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальная подгруппа в* K *и* K — $\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальная подгруппа в* G, *то* H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальная подгруппа в* G.

(4) *Если* H_1 *и* H_2 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальные подгруппы в* G, *то* $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальная подгруппа в* G.

Доказательство. (1) Пусть $H \le G$, $H^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap O_{\omega}(G)$. Если $H = G$, то, ввиду $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap O_{\omega}(G)$, H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Пусть $H \neq G$. Тогда существует максимальная $(G - H)$-цепь подгрупп группы G вида $G = H_0 \supset H_1 \supset ... \supset H_k = H$ (α). Пусть $i \in \{1, ..., k\}$. Поскольку $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \subseteq H_i$, то $H_i/G^{\mathfrak{F}} \le G/G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $H_i/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и поэтому ${H_i}^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда, с учетом включения $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{\omega}(G)$, получаем, что (α) — ω-цепь группы G относительно $\mathfrak{F}$. Кроме того, справедливы следующие включения ${H_{i-1}}^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \subseteq H_i$, $i = \overline{1, k}$. Таким образом, H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G и $K \le G$. Установим, что $H \cap K$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в K. Если $H = G$, то $H \cap K = K$. Покажем, что $K^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Действительно, из $K/(K \cap G^{\mathfrak{F}}) \cong (KG^{\mathfrak{F}})/G^{\mathfrak{F}} \le G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, в силу наследственности формации $\mathfrak{F}$, следует, что $K^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и поэтому K — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $H \neq G$. Так как H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то существует максимальная $(G - H)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset ... \supset H_m = H$, где $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1, m}$. Пусть $K_i := K \cap H_i$, $i = \overline{0, m}$. Тогда $K = K_0 \supseteq K_1 \supseteq ... \supseteq K_m = H \cap K$ (β) — $(K - (H \cap K))$-цепь.

Проверим, что (β) является ω-цепью группы K относительно $\mathfrak{F}$. Из

$$K_i/(K \cap {H_i}^{\mathfrak{F}}) = (H_i \cap K)/(K \cap {H_i}^{\mathfrak{F}}) = (H_i \cap K)/(H_i \cap K \cap {H_i}^{\mathfrak{F}}) \cong$$

$$\cong ((H_i \cap K){H_i}^{\mathfrak{F}})/{H_i}^{\mathfrak{F}} \le H_i/{H_i}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$$

следует, что ${K_i}^{\mathfrak{F}} \subseteq {H_i}^{\mathfrak{F}}$ и, значит, ${K_i}^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, $i = \overline{0, m}$.

Покажем, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$, $i = \overline{1, m}$. Действительно, как показано выше, $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}$ и, с учетом включения $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, получаем $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1, m}$. Так как $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_{i-1} = K \cap H_{i-1} \subseteq K$, то $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K \cap H_i = K_i$, $i = \overline{1, m}$.

Пусть $i \in \{1, ..., m\}$ и T — такая подгруппа группы K, что $K_{i-1} > T > K_i$. Тогда $T/(T \cap (K_{i-1})^{\mathfrak{F}}) \cong T(K_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \le K_{i-1}/(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и поэтому $T^{\mathfrak{F}} \subseteq (K_{i-1})^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $T^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Поскольку $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$, то $T^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ и $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq T$. Таким образом, при уплотнении цепи (β) через конечное число шагов получим $(K - (H \cap K))^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$, удовлетворяющую определению 3.2.2. Следовательно, $H \cap K$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в K. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в K и K — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Если $H = K$ или $K = G$, то H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа

в G. Пусть $H \neq K$ и $K \neq G$. Тогда существует максимальная $(G-H)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_r = K = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset ... \supset H_s = H$ такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$, $i = \overline{1,r}$ и $(H_{j-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j$, $j = \overline{1,s}$. Следовательно, H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Утверждение (3) доказано.

(4) Пусть H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы в G. Ввиду пункта (2) данной леммы, $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в H_2. Так как H_2 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то с учетом пункта (3) данной леммы получаем, что $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Утверждение (4) доказано. *Лемма доказана.*

Лемма 3.2.2. [81] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $H \leq G$, N — нормальная ω-подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то HN — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

(2) *Если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то HN/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N.*

(3) *Если $N \subseteq H$, H/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N, то H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

Доказательство. (1) Пусть H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Если $H = G$, то $HN = G$ и по определению 3.2.2 HN — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Пусть $H \neq G$. Тогда существует максимальная $(G-H)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset ... \supset H_k = H$ (α) такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,k}$. Исходя из (α), получим цепь группы G вида $G = H_0N \supseteq H_1N \supseteq ... \supseteq H_kN = HN$ (β).

Пусть $i \in \{1, ..., k\}$. Покажем, что $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN$. Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \subseteq H_iN$. Покажем, что $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N$. Поскольку $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \lhd H_{i-1}N$, то

$$(H_{i-1}N)/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N) = (H_{i-1}(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N)/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N) \cong H_{i-1}/(H_{i-1} \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N) \cong$$

$$\cong (H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}})/((H_{i-1} \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N)/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}.$$

Таким образом, $H_{i-1}N/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N) \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N$ и $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN$.

Как показано при доказательстве пункта (2) леммы 3.2.1 при уплотнении цепи (β) через конечное число шагов получаем максимальную ω-цепь, удовлетворяющую определению 3.2.2. Таким образом, HN — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Ввиду леммы 1.2 (1) [53] (см. с. 112), $(G/N)^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}}N)/N$ и поэтому $(G/N)^{\mathfrak{F}}$ также является ω-группой. Если $H = G$, то HN/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N. Пусть $H \neq G$. Тогда существует максимальная $(G-H)^{\omega}$-цепь

относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k = H$ такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,k}$. Согласно лемме 3.17 (3) [34] (см. с. 110) и лемме 1.2 (1) [53] (см. с. 112), $G/N = H_0/N \supset (H_1N)/N \supset \ldots \supset (H_kN)/N = (HN)/N$ — максимальная ω-цепь группы G/N относительно $\mathfrak{F}$.

Пусть $i \in \{1, \ldots, k\}$. Покажем, что $(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_iN)/N$. Так как $H_{i-1}/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}(H_{i-1} \cap N)) \cong (H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}})/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}(H_{i-1} \cap N)/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$, то

$$H_{i-1}/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}(H_{i-1} \cap N)) = H_{i-1}/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \cap H_{i-1}) \cong$$

$$\cong (H_{i-1}(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N)/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N) = (H_{i-1}N)/((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N) \in \mathfrak{F}.$$

Тогда $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N$. Посколь из $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то, с учетом леммы 1.2 (1) [53] (см. с. 112), имеем $(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} = ((H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}}N)/N \subseteq ((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N)/N \subseteq (H_iN)/N$.

Таким образом, H/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть H/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N. Тогда $(G/N)^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Так как $(G/N)^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}}N)/N$ и N — ω-группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ также является ω-группой. Если $H/N = G/N$, то $H = G$ и H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Пусть $H/N \neq G/N$. Тогда существует максимальная $(G/N - H/N)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G/N = H_0/N \supset H_1/N \supset \ldots \supset H_k/N = H/N$ такая, что $(H_{i-1}/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i/N$, $i = \overline{1,k}$. Ввиду леммы 3.17 (5) [34] (см. с. 110) и леммы 1.2 (1) [53] (см. с. 112), $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k = H$ — максимальная ω-цепь группы G относительно $\mathfrak{F}$. Покажем, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,k}$. Действительно, $((H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N)/N = (H_{i-1}/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i/N$ и, поэтому, $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Следовательно, H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Утверждение (3) доказано. *Лемма доказана.*

Замечание 3.2.3. В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, в качестве следствий из лемм 3.2.1 и 3.2.2 вытекают известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G (см., [29], леммы 3.1.3, 3.1.4).

Лемма 3.2.3. [81] *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, N — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G, H и M — такие подгруппы группы G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $G = HN$. Если H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в M. Применим индукцию по порядку группы G. Рассмотрим случай, когда $M < G$. Так как $M = M \cap G = M \cap HN = H(M \cap N)$, $M \cap N \in \mathfrak{N}$, $M \cap N \triangleleft M$, $M \cap N$ — ω-группа, то M удовлетворяет условию леммы. Следовательно, по индукции $M \in \mathfrak{F}$.

Пусть $M = G$. Тогда H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Установим, что $G \in \mathfrak{F}$. Если $H = G$, то ввиду $H \in \mathfrak{F}$, получаем, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $H \neq G$. Тогда существует максимальная $(G-H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m = H$ (α) такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,m}$. Поэтому $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H_1$. Индукцией по длине m цепи (α) докажем, что $G \in \mathfrak{F}$. По индукции $H_1 \in \mathfrak{F}$. Так как $H \subseteq H_1$, то $G = H_1N$. Поскольку H_1 — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, то теореме 3.4 [18] (см. с. 109) H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Так как $G/N = (HN)/N = H/(H \cap N) \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Следовательно, из $H_1 \subseteq G$ по определению $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппы получаем, что $G = H_1G^{\mathfrak{F}} = H_1$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$. *Лемма доказана.*

Следствие 3.2.1. (Т. Хоукс, [64], см. также [53], теорема 15.10) *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть H и M — такие подгруппы из G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $HF(G) = G$. Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

§ 3.3. Решеточные свойства $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп

Целью данного параграфа является изучение решеточных свойств $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп в конечных группах.

Определение 3.3.1. [81] Класс групп $\mathfrak{F}$ назовем *R^ω-замкнутым*, если из того, что A и B — нормальные ω-подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует, что $AB \in \mathfrak{F}$.

Замечание 3.3.1. R-замкнутый класс групп является R^ω-замкнутым для любого ω (см., например, [53], с. 12). Если $\omega = \mathbb{P}$, то понятия R-замкнутого и R^ω-замкнутого классов совпадают.

В совместной работе А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова и В.Н. Семенчука [5] для локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ было получено решение задачи Л.А. Шеметкова о нахождении условий, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует решетку ([53], пробл. 12). В теореме 3.3.1 установлены необходимые и достаточные условия, при которых для наследственной ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ в любой конечной группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку, тем самым получено решение аналога вышеотмеченной проблемы Л.А. Шеметкова для $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп.

Теорема 3.3.1. [81] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *В любой группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку.*

(2) *Если $G = \langle A_1, A_2 \rangle$, где A_1, A_2 — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

(3) $\mathfrak{F}$ — R^{ω}-замкнутый класс групп и каждая $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа любой группы содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале.

Доказательство. I. Покажем, что из (1) следует (2).

Пусть справедливо утверждение (1). Установим справедливость утверждения (2). Пусть G — контрпример минимального порядка, т.е. $G = \langle A_1, A_2\rangle$, где A_1, A_2 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G, $G \notin \mathfrak{F}$ и G — группа наименьшего порядка с такими свойствами. Тогда $G \neq A_1$, $G \neq A_2$ и по определению 3.2.2 существует максимальная ω-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_k = A_1$ (α), где $(G_{j-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq G_j$ (β), $j = 1, .., k$. Так как (α) — ω-цепь, то $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и поэтому $O_{\omega}(G) \neq 1$. Следовательно, существует минимальная нормальная подгруппа N группы G такая, что $N \subseteq O_{\omega}(G)$.

1. Покажем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Для этого установим, что группа G/N удовлетворяет условию утверждения (2) теоремы. Проверим, что $G/N = \langle A_1N/N, A_2N/N\rangle$. Пусть $\langle A_1N/N, A_2N/N\rangle := H/N$. Из $G = \langle A_1, A_2\rangle$ следует, что $G/N = \langle A_1, A_2\rangle/N$. Так как $A_1N/N \leq H/N$, то $A_1N \leq H$ и поэтому $A_1 \leq H$. Аналогично, из $A_2N/N \leq H/N$ получаем $A_2 \leq H$. Таким образом, $\langle A_1, A_2\rangle \leq H$ и $\langle A_1, A_2\rangle/N \leq H/N$. Следовательно, $G/N = \langle A_1N/N, A_2N/N\rangle$.

Покажем, что A_1N/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G/N. Так как $A_1 \in \mathfrak{F}$, то $A_1N/N \in \mathfrak{F}$. Поскольку A_1 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G и N — нормальная ω-подгруппа группы G, то по лемме 3.2.2 (2) A_1N/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G/N. Аналогично, A_2N/N — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G/N. Таким образом, нами установлено, что G/N удовлетворяет условию утверждения (2) теоремы. Тогда, в силу выбора группы G, получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

2. Установим, что N — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $N \neq G$. Допустим, что в G существует минимальная нормальная ω-подгруппа M такая, что $M \neq N$. Проведя рассуждения для G/M, аналогичные рассуждениям, изложенным выше для G/N, получим, что $G/M \in \mathfrak{F}$. Так как класс $\mathfrak{F}$ является формацией, то $G/(M \cap N) \in \mathfrak{F}$ и поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, N — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа группы G.

Проверим, что $G^{\mathfrak{F}} = N$. Действительно, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Это, в силу выбора N, означает, что либо $G^{\mathfrak{F}} = 1$, либо $G^{\mathfrak{F}} = N$. Если $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $G \cong G/1 \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} = N$.

Проверим, что $N \neq G$. Допустим, что $N = G$. Тогда $(G_0)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} = N = G$. Поэтому $(G_0)^{\mathfrak{F}} = G \subseteq G_1$. Следовательно, $G = G_1$. С другой стороны, так как (α) — максимальная ω-цепь группы G относительно $\mathfrak{F}$, то $G_1 < G$. Получили противоречие. Это означает, что $N \neq G$.

3. Пусть $R_i := A_iN$, $i = 1, 2$. Покажем, что R_i — собственная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G, $i = 1, 2$. Допустим, что $R_1 = G$. Тогда из $N = G^{\mathfrak{F}} = (G_0)^{\mathfrak{F}} \subseteq G_1$ и

$A_1 \subseteq G_1$ следует $G = A_1 N \subseteq G_1$, что невозможно. Тем самым установлено, что $R_1 < G$. Аналогично, $R_2 < G$.

Покажем, что $R_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$.

a) Рассмотрим случай, когда N — абелева группа. Так как A_i — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, то по лемме 3.2.1 (2) $A_i \cap R_i = A_i$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы R_i и, ввиду леммы 3.2.3, имеем $R_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$.

b) Пусть N — неабелева группа. Тогда $N = N_1 \times ... \times N_t$ — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп, т.е. $N_j \cong B$, B — простая неабелева группа, $j = 1, ..., t$. Если $C_G(N) \cap O_\omega(G) \neq 1$, то $N \subseteq C_G(N) \cap O_\omega(G)$ и N — абелева группа. Противоречие. Следовательно, $C_G(N) \cap O_\omega(G) = 1$.

Рассмотрим $A_i^{R_i} = \langle A_i^x \mid x \in R_i \rangle$ — нормальное замыкание подгруппы A_i в R_i, $i = 1, 2$. Покажем, что $A_1^{R_1} \in \mathfrak{F}$. Так как $|R_1| < |G|$, то $|A_1^{R_1}| < |G|$. Проверим, что $A_1^{R_1}$ удовлетворяет условию утверждения (2) теоремы. Пусть $x \in R_1$. Поскольку (α) — максимальная $(G - A_1)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$, то по лемме 3.17 (2) [34] (см. с. 110) $G = {G_0}^x \supset {G_1}^x \supset ... \supset {G_k}^x = {A_1}^x$ — максимальная $(G - A_1^x)$-цепь. Пусть $0 \leq j \leq k - 1$. Так как $({G_j}^{\mathfrak{F}}) \subseteq G_{j+1}$, то $({G_j}^{\mathfrak{F}})^x \subseteq {G_{j+1}}^x$. По лемме 2.2 гл. 2 [7] (см. с. 108) имеет место равенство $({G_j}^{\mathfrak{F}})^x = ({G_j}^x)^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $({G_j}^x)^{\mathfrak{F}} \subseteq {G_{j+1}}^x$. Пусть $0 \leq j \leq k$. Поскольку ${G_j}^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой и $({G_j}^{\mathfrak{F}})^x = ({G_j}^x)^{\mathfrak{F}}$, то $({G_j}^x)^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Тогда по определению 3.2.2 ${A_1}^x$ является $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппой в G/N. По лемме 3.2.1 (2) ${A_1}^x$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы $A_1^{R_1}$ для любого $x \in R_1$. Следовательно, $A_1^{R_1}$ удовлетворяет условию утверждения (2) теоремы и, в силу выбора группы G, получаем $A_1^{R_1} \in \mathfrak{F}$. Аналогично, $A_2^{R_2} \in \mathfrak{F}$.

Допустим, что $A_i^{R_i} \cap N = 1$, $i = 1, 2$. Так как $A_i^{R_i} \lhd R_i = A_i N$ и $A_i^{R_i} \subseteq A_i^{R_i} N$, то $A_i^{R_i} \lhd A_i^{R_i} N$. Тогда $A_i^{R_i} N = A_i^{R_i} \times N$ и $A_i \subseteq A_i^{R_i} \subseteq C_G(N)$. Поэтому $G = \langle A_1, A_2 \rangle \subseteq C_G(N)$ и $C_G(N) = G$. Это означает, что N — абелева группа. Противоречие. Таким образом, $A_1^{R_1} \cap N \neq 1$ или $A_2^{R_2} \cap N \neq 1$. Пусть, например, $A_1^{R_1} \cap N \neq 1$.

Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Поскольку $A_1^{R_1} \lhd R_1$, то $A_1^{R_1} \cap N \lhd N$ и по лемме 4.2 гл. 2 [7] (с. 107) $A_1^{R_1} \cap N$ — прямое произведение групп, изоморфных B. Так как $A_1^{R_1} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $A_1^{R_1} \cap N \in \mathfrak{F}$. Поэтому $B \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$.

Так как $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_\omega(G)$ и N — ω-группа, то, ввиду леммы 3.2.1 (1) N — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G и по лемме 3.2.1 (2) N — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы R_i, $i = 1, 2$. По лемме 3.2.1 (2) A_i — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы R_i. Тогда, в силу выбора группы G, получаем $R_i = A_i N = \langle A_i, N \rangle \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$.

Таким образом, R_i — собственная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G, $i = 1, 2$.

4. Пусть H — добавление к N в G. По лемме 11.1 [53] (см. с. 112) $G = HN$ и $H \cap N \subseteq \Phi(H)$. Так как $G/N = HN/N \cong H/H \cap N \in \mathfrak{F}$ и $H \cap N \subseteq$

$\Phi(G) \cap O_\omega(H)$, то $H/\Phi(H) \cap O_\omega(H) \in \mathfrak{F}$. Поскольку, ввиду теоремы 1 (1) [44] (см. с. 111), формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной, то $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $H \neq G$. Согласно модулярному тождеству Дедекинда, имеет место $R_i = A_iN = A_iN \cap G = A_iN \cap HN = N(H \cap A_iN)$. Таким образом, $R_i = N(H \cap R_i)$, $i = 1, 2$.

Пусть $H \cap R_i := T_i$, $i = 1, 2$. Если $T_1 = 1$, тогда $R_1 = NT_1$ получаем $R_1 = N$ и $G = \langle A_1, A_2 \rangle \subseteq \langle A_1N, A_2 \rangle = \langle R_1, A_2 \rangle = \langle N, A_2 \rangle = NA_2 = R_2$. Противоречие. Поэтому $T_1 \neq 1$. Аналогично, $T_2 \neq 1$.

Установим, что T_i — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, $i = 1, 2$. Так как A_i — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G и $N \lhd G$, то по лемме 3.2.2 (1) A_iN — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Поскольку $R_i \in \mathfrak{F}$, то ${R_i}^{\mathfrak{F}} = 1 \subseteq T_i \cap O_\omega(R_i)$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $T_i \in \mathfrak{F}$ и, значит, ${T_i}^{\mathfrak{F}} = 1$ — ω-группа. Тогда по лемме 3.2.1 (1) T_i — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы R_i. Поскольку R_i — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, то по лемме 3.2.1 (3) заключаем, что T_i — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, $i = 1, 2$.

Пусть ${T_i}^H = \langle {T_i}^h \mid h \in H \rangle$ — нормальное замыкание подгруппы T_i в группе H, $i = 1, 2$. Рассуждая аналогично, как в части b) пункта 3, получим, что ${T_i}^x$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, для любого $x \in G$. Согласно утверждению (1) теоремы ${T_i}^H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, $i = 1, 2$.

5. Покажем, что $G = N{T_1}^HT_1$. Поскольку $G = HN$, $N \lhd G$, ${T_1}^H \lhd H$, то ${T_1}^HN \lhd G$. Тогда из $A_1 \subseteq A_1N = R_1 = N(H \cap R_1) = NT_1 \subseteq N{T_1}^H$ получаем $G = \langle A_1, A_2 \rangle \subseteq \langle N{T_1}^H, A_2 \rangle = N{T_1}^HA_2 = {T_1}^HR_2 = N{T_1}^HT_2$. Таким образом, $G = N{T_1}^HT_1$.

Установим, что ${T_1}^HT_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Так как ${T_1}^H \lhd H$, $T_2 \leq H$, то ${T_1}^HT_2 \leq H$ и ${T_1}^HT_2 = \langle {T_1}^H, T_2 \rangle$. Как показано в пункте 4, T_2 и ${T_1}^H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы G. Тогда по утверждению (1) теоремы $\langle {T_1}^H, T_2 \rangle = {T_1}^HT_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Так как ${T_1}^HT_2 \leq H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то ${T_1}^HT_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому ${T_1}^HT_2 \neq G$ и, значит, существует максимальная $(G - {T_1}^HT_2)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ (α') вида (α) с условием, аналогичным условию (β). Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq Y_1$ и $G = N{T_1}^HT_2 \subseteq Y_1$, где Y_1 — максимальная подгруппа в группе G, являющаяся первым членом цепи (α'). Получили противоречие.

Таким образом, нами установлено, что из (1) следует (2).

II. Покажем, что из утверждения (2) следует утверждение (3). Пусть справедливо утверждение (2).

1. Установим, что $\mathfrak{F}$ — R^ω-замкнутый класс. Пусть G — произвольная группа, A и B — нормальные ω-подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, и $K = AB$. Покажем, что $K \in \mathfrak{F}$.

Установим, что K удовлетворяет условию утверждения (2). Так как $K/A = AB/A \cong B/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$ и $K/B \cong A/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$, то $K/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$. Тогда $(K/(A \cap B))^{\mathfrak{F}} = 1 \subseteq A/(A \cap B) \cap O_\omega(K/(A \cap B))$. Поскольку $(A/(A \cap B))^{\mathfrak{F}} =$

$A^{\mathfrak{F}}(A\cap B)/(A\cap B)\cong A^{\mathfrak{F}}/(A^{\mathfrak{F}}\cap B)$ и $A^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, то $(A/(A\cap B))^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой. Тогда по лемме 3.2.1 (1) имеем $A/(A\cap B)$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы $K/(A\cap B)$. Аналогично, $B/(A\cap B)$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы $K/(A\cap B)$.

Поскольку $A\cap B$ — ω-группа, то по лемме 3.2.2 (3) A и B — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы K.

Так как $K=AB$, A и B — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы K, то по утверждению (2) $K\in\mathfrak{F}$. Следовательно, по определению 3.4.1 $\mathfrak{F}$ — R^{ω}-замкнутый класс.

2. Покажем, что каждая $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа любой группы содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале. Пусть G — произвольная группа, A — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Установим, что $A\subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Так как $A\subseteq A^G$, то достаточно показать, что $A^G\subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $A^G\lhd G$, то достаточно проверить, что $A^G\in\mathfrak{F}$.

Пусть $x\in G$. Покажем, что A^x — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы A^G. Так как A — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G, то по лемме 3.2.1 (2) A — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы A^G. Тогда либо $A=A^G$, либо существует максимальная $(A^G-A)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $A^G=L_0\supset\ldots\supset L_k=A$ такая, что $(L_{i-1})^{\mathfrak{F}}\subseteq L_i$ для любого $i\in\overline{1,k}$. Тогда, согласно лемме 3.17 (2) [34] (см. с. 110), $A^G=(A^G)^x={L_0}^x\supset\ldots\supset{L_k}^x=A^x$ — максимальная (A^G-A^x)-цепь. Покажем, что $({L_{i-1}}^x)^{\mathfrak{F}}\subseteq O_{\omega}({L_{i-1}}^x)\cap{L_i}^x$, $i=1,\ldots,k$. Действительно, из $(L_{i-1})^{\mathfrak{F}}\subseteq O_{\omega}(L_{i-1})\cap L_i$ по лемме 2.2 гл. 2 [7] (см. с. 108) следует, что $({L_{i-1}}^x)^{\mathfrak{F}}=({L_{i-1}}^{\mathfrak{F}})^x\subseteq(O_{\omega}(L_{i-1})\cap L_i)^x\subseteq O_{\omega}({L_{i-1}}^x)\cap{L_i}^x$. Так как $(O_{\omega}(L_{i-1}))^x\subseteq O_{\omega}({L_{i-1}}^x)$, то $({L_{i-1}}^x)^{\mathfrak{F}}\subseteq O_{\omega}({L_{i-1}}^x)\cap{L_i}^x$. Кроме того, $({L_k}^x)^{\mathfrak{F}}=({L_k}^{\mathfrak{F}})^x$ — ω-группа. Следовательно, A^x — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы A^G для любого $x\in G$.

Так как $A^G=\langle A^x\mid x\in G\rangle$ и A^x — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы A^G для любого $x\in G$, то, согласно утверждению (2), $A^G\in\mathfrak{F}$.

Из $A^G\lhd G$ и $A^G\in\mathfrak{F}$ получаем включение $A^G\subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $A\subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Из пунктов 1 и 2 следует, что утверждение (2) влечет утверждение (3).

III. Покажем, что из утверждения (3) следует утверждение (1).

Пусть справедливо утверждение (3). Установим справедливость утверждения (1). По лемме 3.2.1 (4) пересечение $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп группы является $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной подгруппой в группе.

Пусть G — группа, H и K — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы G. Докажем, что $\langle H,K\rangle$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Пусть $\langle H,K\rangle:=Q$. Если $H=1$, то $Q=K$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G. Если $K=1$, то $Q=H$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G. Пусть $H\neq1$, $K\neq1$. Если $G=H$ или $G=K$, то $G=Q$ и Q — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G. Пусть $G\neq H$

и $G \neq K$. Если $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq Q \cap O_\omega(G)$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$ и формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $Q \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-корадикал группы Q равен 1. Следовательно, по лемме 3.2.1 (1) Q — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Пусть $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Тогда существует минимальная нормальная подгруппа N группы G такая, что $N \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_\omega(G)$, то $N \subseteq O_\omega(G)$.

Покажем, что QN/N — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G/N. Так как H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, то по лемме 3.2.2 (2) HN/N — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G/N. Аналогично, KN/N — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G/N. Из $Q = \langle H, K\rangle$ следует, что $QN/N = \langle HN/N, KN/N\rangle$. Поскольку $|G/N| < |G|$, то по индукции QN/N — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G/N. Тогда по лемме 3.2.2 (2) QN — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $QN \neq G$. Тогда $|QN| < |G|$. Так как H и K — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы G, то по лемме 3.2.1 (2) H и K — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы QN. По индукции $Q = \langle H, K\rangle$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы QN. Согласно лемме 3.2.1 (3), Q — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $QM = G$ для любой минимальной нормальной подгруппы M группы G. Если $\mathrm{Core}_G(Q) \neq 1$, то существует минимальная нормальная подгруппа N_1 группы G такая, что $N_1 \subseteq Q$. Тогда $QN_1 = Q$ и $G = Q$. Следовательно, Q — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $\mathrm{Core}_G(Q) = 1$. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$ и $K \in \mathfrak{F}$.

Установим, что $H^{\mathfrak{F}} = 1$. Допустим, что $H^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Так как H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Следовательно, H — K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа и по лемме 3.1.5 [29] (см. с. 110) $H^{\mathfrak{F}} \lhd\lhd G$. По лемме 2.42 [34] (см. с. 110) $N \subseteq N_G(H^{\mathfrak{F}})$ и, значит, $(H^{\mathfrak{F}})^n = H^{\mathfrak{F}}$ для любого $n \in N$. Тогда $(H^{\mathfrak{F}})^G = (H^{\mathfrak{F}})^{NQ} = \langle (H^{\mathfrak{F}})^{nq} \mid n \in N, q \in Q\rangle = \langle (H^{\mathfrak{F}})^q \mid q \in Q\rangle \subseteq Q$. Так как $H^{\mathfrak{F}} \subseteq (H^{\mathfrak{F}})^G$, то $(H^{\mathfrak{F}})^G \neq 1$. Ввиду того, что $(H^{\mathfrak{F}})^G \lhd G$ и $(H^{\mathfrak{F}})^G \subseteq Q$, имеем $(H^{\mathfrak{F}})^G \subseteq \mathrm{Core}_G(Q)$. Следовательно, $\mathrm{Core}_G(Q) \neq 1$. Получили противоречие. Таким образом, $H^{\mathfrak{F}} = 1$. Аналогично, $K^{\mathfrak{F}} = 1$. Это означает, что $H \in \mathfrak{F}$ и $K \in \mathfrak{F}$.

Так как H и K — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G, то по утверждению (3) справедливы включения $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $K \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $Q = \langle H, K\rangle \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $G_{\mathfrak{F}} \neq 1$. Следовательно, существует минимальная нормальная подгруппа L группы G такая, что $L \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Это означает, что $G = LQ \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = 1$. Получили противоречие. Таким образом, из утверждения (3) следует утверждение (1). *Теорема доказана.*

Следствие 3.3.1. ([5], см. также [29], лемма 3.1.6) *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{F}$ *обладает решеточным свойством для* $\mathfrak{F}$*-субнормальных подгрупп*;

(2) *группа* $G = \langle A_1, A_2 \rangle$ *принадлежит* $\mathfrak{F}$, *если* A_1, A_2 — $\mathfrak{F}$*-субнормальные* $\mathfrak{F}$*-подгруппы группы* G;

(3) $\mathfrak{F}$ — *формация Фиттинга и всякая* $\mathfrak{F}$*-субнормальная* $\mathfrak{F}$*-подгруппа группы* G *содержится в* $\mathfrak{F}$*-радикале этой группы.*

§ 3.4. K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы и их простейшие свойства

Определение 3.4.1. [82] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальной* подгруппой в G, если существует $(G - H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq ... \supseteq H_k = H$ такая, что для любого $i \in \{1, ..., k\}$ либо $H_i \triangleleft H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Замечание 3.4.1. Из определения 3.2.2 следует, что всякая $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G является K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппой группы G. Очевидно, что всякая K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы является ее K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой (см., например, [29] с. 24). В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, понятие K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппы группы G совпадает с понятием K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы группы G.

В данном параграфе изучаются простейшие свойства K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп.

Лемма 3.4.1. [82] *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если* $H \leq G$, $H^{\mathfrak{F}}$ — ω*-группа и* $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap O_\omega(G)$, *то* H — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа в* G.

(2) *Если* H — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа в* G *и* $M \leq G$, *то* $H \cap M$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа в* M. *В частности, если* H — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа группы* G *и* $H \leq M$, *то* H — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа в* M.

(3) *Если* H — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа в* M *и* M — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа в* G, *то* H — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа в* G.

(4) *Если* H_1 *и* H_2 — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальные подгруппы в* G, *то* $H_1 \cap H_2$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальная подгруппа в* G.

Доказательство. (1) Пусть $H \leq G$, $H^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap O_\omega(G)$. По лемме 3.2.1(1) H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G. Согласно замечанию 3.5.1, H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G и $M \leq G$. Покажем, что $H \cap M$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в M. Так как H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G, то существует $(G - H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$

вида $G = H_0 \supseteq H_1 \supset ... \supseteq H_m = H$ (α) такая, что для любого $i \in \{1, ..., m\}$ либо $H_i \lhd H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Исходя из (α), получаем цепь подгрупп группы M вида $M = G \cap M \supseteq H_1 \cap M \supseteq ... \supseteq H_m \cap M = H \cap M$ (β).

a) Покажем, что (β) — $(G - M)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$. Пусть $i \in \{1, ..., m\}$. Проверим, что $(H_i \cap M)^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Так как $(H_i \cap M)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap M \subseteq H_i$, $H_i/{H_i}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $(H_i \cap M){H_i}^{\mathfrak{F}}/{H_i}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Тогда $(H_i \cap M){H_i}^{\mathfrak{F}}/{H_i}^{\mathfrak{F}} \cong (H_i \cap M)/(H_i \cap M \cap {H_i}^{\mathfrak{F}}) = (H_i \cap M)/(M \cap {H_i}^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $(H_i \cap M)^{\mathfrak{F}} \subseteq M \cap {H_i}^{\mathfrak{F}} \subseteq {H_i}^{\mathfrak{F}}$. Поскольку (α) — ω-цепь группы G относительно $\mathfrak{F}$, то ${H_i}^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Следовательно, $(H_i \cap M)^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и поэтому (β) — ω-цепь группы M относительно $\mathfrak{F}$.

b) Пусть $i \in \{1, ..., m\}$. Если $H_i \lhd H_{i-1}$, то $H_i \cap (H_{i-1} \cap M) \lhd H_{i-1} \cap M$, то есть $H_i \cap M \lhd H_{i-1} \cap M$. Пусть $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Покажем, что $(H_{i-1} \cap M)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap M$. Так как $H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то

$$(H_{i-1} \cap M)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Тогда

$$(H_{i-1} \cap M)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cong (H_{i-1} \cap M)/(H_{i-1} \cap M \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}) =$$

$$= (H_{i-1} \cap M)/(M \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $(H_{i-1} \cap M)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap M \subseteq H_i \cap M$.

Из a) и b) по определению 3.4.1 получаем, что $H \cap M$ — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы M. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в M и M — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная в G. Если $H = M$ или $M = G$, то H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Пусть $H \neq M$ и $M \neq G$. Тогда существует ω-цепь подгрупп группы G относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset ... \supset M_r = M = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset ... \supset H_s = H$ такая, что для любого $i \in \{1, ..., r\}$ либо $M_i \lhd M_{i-1}$, либо $(M_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq M_i$ и для любого $j \in \{1, ..., s\}$ либо $H_j \lhd H_{j-1}$, либо $(H_{j-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j$. Таким образом, H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G. Утверждение (3) доказано.

(4). Так как H_1 — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то, ввиду пункта (2) данной леммы, справедливо, что $H_1 \cap H_2$ — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в H_2. Так как $H_1 \cap H_2$ — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в H_2 и H_2 — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то с учетом пункта (3) данной леммы получаем, что $H_1 \cap H_2$ — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Утверждение (4) доказано. *Лемма доказана.*

Лемма 3.4.2. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $H \leq G$, N — нормальная ω-подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то HN — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G.*

(2) *Если* H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальная подгруппа в* G, *то* HN/N — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальная подгруппа в* G/N.

(3) *Если* $N \subseteq H$, H/N — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальная подгруппа в* G/N, *то* H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальная подгруппа в* G.

Доказательство. (1) Пусть H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Тогда существует $(G-H)^{\omega}$-цепь подгрупп группы G относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq ... \supseteq H_k = H$ (α) такая, что для любого $i \in \{1, ..., k\}$ либо $H_i \triangleleft H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Покажем, что HN — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Исходя из (α) получим цепь $G = H_0N \supseteq H_1N \supseteq ... \supseteq H_kN = HN$ (β).

a) Покажем, что (β) — ω-цепь группы G относительно $\mathfrak{F}$. Пусть $i \in \{1, ..., k\}$. Установим, что $(H_iN)^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Ввиду того, что ${H_i}^{\mathfrak{F}}N$ — ω-группа, достаточно показать, что $(H_iN)^{\mathfrak{F}} \subseteq {H_i}^{\mathfrak{F}}N$. Установим, что ${H_i}^{\mathfrak{F}}N \triangleleft H_iN$. Пусть $h_i \in H_i$, $n \in N$. Тогда $({H_i}^{\mathfrak{F}}N)^{h_in} = ({H_i}^{\mathfrak{F}}N)^n = n^{-1}{H_i}^{\mathfrak{F}}N = {H_i}^{\mathfrak{F}}N$. Следовательно, ${H_i}^{\mathfrak{F}}N \triangleleft H_iN$ и $H_iN/{H_i}^{\mathfrak{F}}N = (H_i{H_i}^{\mathfrak{F}}N)/{H_i}^{\mathfrak{F}}N \cong H_i/(H_i \cap {H_i}^{\mathfrak{F}}N)$. Поскольку $H_i/(H_i \cap {H_i}^{\mathfrak{F}}N) \cong (H_i/{H_i}^{\mathfrak{F}})/((H_i \cap {H_i}^{\mathfrak{F}}N)/{H_i}^{\mathfrak{F}})$ и $H_i/{H_i}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $H_iN/{H_i}^{\mathfrak{F}}N \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $(H_iN)^{\mathfrak{F}} \subseteq {H_i}^{\mathfrak{F}}N$ и поэтому $(H_iN)^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Таким образом, (β) — ω-цепь группы G относительно $\mathfrak{F}$.

b) Пусть $i \in \{1, ..., k\}$. Если $H_i \triangleleft H_{i-1}$, то $H_iN \triangleleft H_{i-1}N$. Пусть $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Покажем, что $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN$. Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \subseteq H_iN$. Поскольку $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \triangleleft H_{i-1}N$, то имеет место $H_{i-1}N/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N = (H_{i-1}(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N)/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \cong H_{i-1}/(H_{i-1} \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N)$. Так как $H_{i-1}/(H_{i-1} \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N) \cong (H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}})/((H_{i-1} \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N)/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$, то $H_{i-1}N/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N$. Тем самым установлено, что $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN$.

Из a) и b) следует, что HN — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Покажем, что HN/N — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N. Поскольку H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G, то существует $(G-H)^{\omega}$-цепь подгрупп группы G относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq ... \supseteq H_k = H$ (α) такая, что для любого $i \in \{1, ..., k\}$ либо $H_i \triangleleft H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Исходя из (α), получим цепь $G/N = H_0/N \supseteq H_1N/N \supseteq ... \supseteq H_kN/N = HN/N$ (γ).

a) Покажем, что (γ) — ω-цепь группы G/N относительно $\mathfrak{F}$. Пусть $i \in \{1, ..., k\}$. По лемме 1.2 (1) [53] (см., с. 112) $(H_iN/N)^{\mathfrak{F}} = (H_iN)^{\mathfrak{F}}N/N$. Как и при доказательстве пункта a) (1) данной леммы, нетрудно проверить, что $(H_iN)^{\mathfrak{F}} \subseteq {H_i}^{\mathfrak{F}}N$. Тогда $(H_iN)^{\mathfrak{F}}N/N \subseteq {H_i}^{\mathfrak{F}}N/N$. Поскольку ${H_i}^{\mathfrak{F}}N$ — ω-группа, то $(H_iN/N)^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой. Это означает, что (γ) — ω-цепь группы G/N относительно $\mathfrak{F}$.

b) Пусть $i \in \{1, ..., k\}$. Если $H_i \triangleleft H_{i-1}$, то $H_iN/N \triangleleft H_{i-1}N/N$. Пусть $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Тогда по лемме 1.2 (1) [53] (см., с. 112) справедливо $(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} =$

$(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}}N/N \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N/N \subseteq H_iN/N$.

Из a) и b) следует, что H/N — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть H/N — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G/N. Тогда существует ω-цепь подгрупп группы G/N относительно $\mathfrak{F}$ вида $G/N = H_0/N \supseteq H_1/N \supseteq ... \supseteq H_k/N = H/N$ (δ) такая, что для любого $i \in \{1, ..., k\}$ либо $H_i/N \lhd H_{i-1}/N$, либо $(H_{i-1}/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i/N$.

a) Покажем, что (δ) — ω-цепь группы G/N относительно $\mathfrak{F}$. Пусть $i \in \{1, ..., k\}$. Так как $(H_{i-1}/N)^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, то ввиду леммы 1.2 (1) [53] (см., с. 112) $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N/N$ — ω-группа. Отсюда следует, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и, значит, (δ) — ω-цепь группы G/N относительно $\mathfrak{F}$.

b) Пусть $i \in \{1, ..., k\}$. Если $H_i/N \lhd H_{i-1}/N$, то $H_i \lhd H_{i-1}$. Пусть $(H_{i-1}/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i/N$. Так как $(H_{i-1}/N)^{\mathfrak{F}} = (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N/N$, то $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N/N \subseteq H_i/N$ и поэтому $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Из a) и b) следует, что H — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная в G. Утверждение (3) доказано. *Лемма доказана.*

Замечание 3.4.2. В качестве следствий из лемм 3.4.1 и 3.4.2 вытекают известные результаты о K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах (см., например, [29], леммы 3.1.1, 3.1.2).

§ 3.5. Решеточные свойства K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп

Целью параграфа 3.5 является изучение решеточных свойств K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в конечных группах. В работе А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова и В.Н. Семенчука [5] для локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ была установлена эквивалентность проблемы 12 [53] Л.А. Шеметкова и аналогичной задачи О. Кегеля из [65] о K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах для случая, когда $\mathfrak{F}$ является локальной наследственной формацией. В теореме 3.5.2 для наследственной ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между решеточными свойствами K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп и $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в ω-разрешимых группах. Предварительно докажем следующие леммы.

Через $S(G)$ обозначается совокупность всех подгрупп группы G; $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $K(S(G)) := \cup_{A \in S(G)} K(A)$; $K(\mathfrak{F}) := \cup_{G \in \mathfrak{F}} K(G)$.

Лемма 3.5.1. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, G — группа, $N \lhd G$. Если $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $K(G) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим композиционный ряд группы G, проходящий через N: $1 = G_m \lhd ... \lhd N = G_k \lhd ... \lhd G_1 \lhd G_0 = G$

(1). Тогда $K(G) = (G_0/G_1, ..., G_{m-1}/G_m)$. Так как $N \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственный класс, то $G_k, ..., G_{m-1} \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, то $G_{j-1}/G_j \in \mathfrak{F}$, $j = \overline{k+1, m}$.

Исходя из (1), построим композиционный ряд группы G/N: $1 = N/N = G_k/N \lhd ... \lhd G_1/N \lhd G_0/N = G/N$. Так как $G/N \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $G_{i-1}/N \in \mathfrak{F}$, $i = \overline{1, k}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, то $G_{i-1}/G_i \cong (G_{i-1}/N)/(G_i/N) \in \mathfrak{F}$, $i = \overline{1, k}$.

Тем самым установлено, что $K(G) \subseteq \mathfrak{F}$. *Лемма доказана.*

Лемма 3.5.2. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, G — группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $H \in S(G)$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $H \in \mathfrak{F}$ и, согласно лемме 3.5.1 имеет место включение $K(H) \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$. *Лемма доказана.*

Лемма 3.5.3. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, G — группа, $N \lhd G$. Если $N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$, то $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in S(G)$. Проверим, что $K(H) \subseteq \mathfrak{F}$. Рассмотрим композиционный ряд группы G, проходящий через N:

$1 = G_m \lhd ... \lhd N = G_k \lhd ... \lhd G_1 \lhd G_0 = G$ (1). Тогда $1 = N/N = G_k/N \lhd ... \lhd G_1/N \lhd G_0/N = G/N$ — композиционный ряд группы G/N. Так как $G/N \in \mathfrak{F}$, то, ввиду леммы 3.5.2, $K(G/N) \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $G_{i-1}/G_i \in \mathfrak{F}$, $i = \overline{1, k}$. Исходя из (1), построим субнормальный ряд группы H: $1 = H \cap G_m \lhd ... \lhd H \cap N = H \cap G_k \lhd ... \lhd H \cap G_1 \lhd H \cap G_0 = H \cap G = H$ (2).

Пусть $H \cap G_i := H_i$, $i = \overline{0, m}$. Уплотним ряд (2) до композиционного ряда группы H: $1 = H_m \lhd ... \lhd H \cap N = H_k \lhd ... \lhd H_0 = H$ (3). Так как $N \in \mathfrak{F}$, $H \cap N \leq N$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $H \cap N \in \mathfrak{F}$. По лемме 3.5.2 $K(H \cap N) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, все композиционные факторы группы H на участке $1 \lhd ... \lhd H \cap N = H_k$ ряда (3) принадлежат $\mathfrak{F}$ (4).

Пусть $1 \leq i \leq k$. Так как

$$H_{i-1}/H_i = (H \cap G_{i-1})/(H \cap G_i) = (H \cap G_{i-1})/(G_{i-1} \cap H \cap G_i) \cong$$
$$\cong (G_{i-1} \cap H)G_i/G_i \leq G_{i-1}/G_i \in \mathfrak{F}$$

и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $H_{i-1}/H_i \in \mathfrak{F}$. Пусть $H_i = L_s \lhd ... \lhd L_1 \lhd L_0 = H_{i-1}$ — участок композиционного ряда (3) группы H. Покажем, что $L_{t-1}/L_t \in \mathfrak{F}$, $t = \overline{1, s}$. Действительно, так как $L_{t-1}/H_i \leq H_{i-1}/H_i$, то $L_{t-1}/H_i \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — Q-замкнутый класс групп, то $L_{t-1}/L_t \cong (L_{t-1}/H_i)/(L_t/H_i) \in \mathfrak{F}$. Таким образом, все композиционные факторы группы H на участке $H_k \lhd ... \lhd H_0 = H$ ряда (3) принадлежат $\mathfrak{F}$ (5).

Из (4) и (5) следует, что $K(H) \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$. *Лемма доказана.*

Лемма 3.5.4. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, G — группа. Если $K(G) \subseteq K(\mathfrak{F})$, то $K(G) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $K(G) \subseteq K(\mathfrak{F})$. Покажем, что $K(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $A/B \in K(G)$. Из включения $K(G) \subseteq K(\mathfrak{F})$ следует, что $A/B \in K(\mathfrak{F})$. Тогда существует группа $X \in \mathfrak{F}$ такая, что $A/B \cong M/N$, где M/N — композиционный фактор группы X. Из того, что $X \in \mathfrak{F}$, $M \leq X$, в силу наследственности формации $\mathfrak{F}$, получаем $M \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, то $M/N \in \mathfrak{F}$ и, значит, $A/B \in \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $K(G) \subseteq \mathfrak{F}$. *Лемма доказана.*

Лемма 3.5.5. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, G — группа, $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной в G тогда и только тогда, когда H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство.

I. *Необходимость.* Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда по определению 3.4.1 H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G.

II. *Достаточность.* Пусть H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Согласно определению 3.4.1, существует $(G-H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq ... \supseteq H_k = H$ (α), где для любого $i \in \{1, ..., k\}$ либо $H_i \triangleleft H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Если $G = H$, то H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Пусть $G \neq H$ и $j \in \{1, ..., k\}$. Можем считать, что $H_{j-1} \neq H_j$. Согласно определению 3.2.1, $(H_{j-1})^{\mathfrak{F}}$ и ${H_j}^{\mathfrak{F}}$ — ω-группы и либо $H_j \triangleleft H_{j-1}$, либо $(H_{j-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j$.

Если $(H_{j-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j$, то по лемме 3.2.1 (1) H_j — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в H_{j-1}. Поскольку $H_j \neq H_{j-1}$, то существует максимальная $(H_{j-1} - H_j)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $H_{j-1} = L_0 \supset L_1 \supset ... \supset L_r = H_{j-1}$ (β) такая, что $(L_{s-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq L_s$, $s = \overline{1, r}$.

Пусть $H_j \triangleleft H_{j-1}$. Уплотним участок $H_{j-1} \supseteq H_j$ цепи (α) субнормальными в H_{j-1} подгруппами до композиционной $(H_{j-1} - H_j)$-цепи $H_{j-1} = T_m \triangleleft ... \triangleleft T_1 \triangleleft T_0 = H_j$ (γ). Так как $T_{n-1}/T_n \in K(H_{j-1}) \subseteq \cup_{A \in S(G)} K(A) = K(S(G))$ и по условию $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$, то $T_{n-1}/T_n \in \mathfrak{F}$ и по определению $\mathfrak{F}$-корадикала группы $(T_{n-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq T_n$, $n = \overline{1, m}$. Поскольку $T_n/(T_{n-1})^{\mathfrak{F}} \leq T_{n-1}/(T_{n-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $T_n/(T_{n-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и поэтому ${T_n}^{\mathfrak{F}} \subseteq (T_{n-1})^{\mathfrak{F}}$, $n = \overline{1, m}$. Таким образом, $(H_{j-1})^{\mathfrak{F}} = {T_0}^{\mathfrak{F}} \supseteq {T_1}^{\mathfrak{F}} \supseteq {T_2}^{\mathfrak{F}} \supseteq ... \supseteq (T_{m-1})^{\mathfrak{F}} \supseteq {T_m}^{\mathfrak{F}} = {H_j}^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $(H_{j-1})^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, то (γ) — ω-цепь группы H_{j-1} относительно $\mathfrak{F}$, удовлетворяющая условию $(T_{n-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq T_n$ для любого $n = \overline{1, m}$. Таким образом, заменяя в (α) каждый из участков $H_{j-1} \supseteq H_j$ либо цепью (β), либо цепью (γ), из (α) получим $(G-H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$, удовлетворяющую определению 3.2.2. Следовательно, H — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. *Лемма доказана.*

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательствеу теоремы 3.3.1.

Теорема 3.5.1. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *В любой ω-разрешимой группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку.*

(2) *Если $G = \langle A_1, A_2\rangle$ — ω-разрешимая группа, где A_1, A_2 — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

(3) *$\mathfrak{F}$ — R^ω-замкнутый класс групп и каждая $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа любой ω-разрешимой группы содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале.*

Теорема 3.5.2. [82] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация, $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *В любой ω-разрешимой группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку.*

(2) *В любой ω-разрешимой группе множество всех K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку.*

Доказательство. I. Покажем, что из (1) следует (2). Пусть справедливо утверждение (1). Покажем, что справедливо утверждение (2).

1) Предварительно установим, что *в любой ω-разрешимой группе всякая K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале* (3).

Пусть G — контрпример минимального порядка, т.е. G — ω-разрешимая группа, H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа в G, но $H \nsubseteq G_{\mathfrak{F}}$, причем G — группа наименьшего порядка с такими свойствами. Согласно определению 3.5.1, существует $(G-H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_k = H$ такая, что для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ либо $H_i \lhd H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Отметим, что по определению 3.2.1 ${H_i}^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, $i = \overline{0,k}$. В частности, $G^{\mathfrak{F}} = {H_0}^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Если $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $G_{\mathfrak{F}} = G$ и $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, что противоречит выбору группы G. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и поэтому $O_\omega(G) \neq 1$. Тогда существует минимальная нормальная подгруппа N группы G такая, что $N \subseteq O_\omega(G)$.

Покажем, что $HN/N \subseteq (G/N)_{\mathfrak{F}}$. Так как G — ω-разрешимая группа, то по свойству (1.8.3) [50] (см., с. 111) группа G/N ω-разрешима. Поскольку $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — формация, то $HN/N \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 3.4.2 (2) HN/N — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G/N. Таким образом, G/N удовлетворяет условию утверждения (3). Так как $|G/N| < |G|$, то, в силу выбора группы G, получаем $HN/N \subseteq (G/N)_{\mathfrak{F}}$ (a).

Покажем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Пусть $(G/N)_{\mathfrak{F}} := R/N$. Допустим, что $R/N < G/N$. Тогда $R < N$. Проверим, что R удовлетворяет условию утверждения (3). Согласно свойству (1.8.3) [50] (см., с. 111) R — ω-разрешимая группа. Из (a) следует, что $H \subseteq R$. Тогда по лемме 3.4.1 (2) H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в R. Таким образом, R удовлетворяет условию утверждения (3). Поскольку $|R| < |G|$, то, в силу выбора группы G, $H \subseteq R_{\mathfrak{F}}$. Так как $R_{\mathfrak{F}}$ — характеристическая подгруппа в R и $R \lhd G$, то по лемме 2.11 (2) [34] (см., с. 110)

$R_{\mathfrak{F}} \lhd G$ и поэтому из $R_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ получаем $R_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Таким образом, $G/N = R/N$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ (b).

Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Поскольку G — ω-разрешимая группа и $N/1$ — главный ω-фактор группы G, то N — элементарная абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$. Согласно условию теоремы, $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и, значит, $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{F} = \omega LF(\mathfrak{F})$, то по теореме 5 [15] (см., с. 109) $f(p) \neq \varnothing$, где f — минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 6 (1) [13] (см., с. 108), $\mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда из $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ получаем, что $N \in \mathfrak{F}$ (c).

Из (b) и (c) по лемме 3.5.3 справедливо включение $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$ и, согласно лемме 3.5.5, H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G. Так как G — ω-разрешимая группа, то по утверждению (1) теоремы множество всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку. Тогда, согласно лемме 3.5.1 $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Тем самым установлена справедливость утверждения (3).

2) Покажем, что *в любой ω-разрешимой группе подгруппа, порожденная двумя K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальными подгруппами, является K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной в группе* (4).

Пусть G — контрпример минимального порядка, т.е. G — ω-разрешимая группа, U и V — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы G, но подгруппа $\langle U, V\rangle$ не является K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной в G, причем G — группа наименьшего порядка с такими свойствами. Согласно определению 3.4.1, существует $(G–U)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = U_0 \supseteq U_1 \supseteq ... \supseteq U_n = U$ (α) такая, что для любого $i \in \{1, ..., n\}$ либо $U_i \lhd U_{i-1}$, либо $(U_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq U_i$; существует $(G-V)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = V_0 \supseteq V_1 \supseteq ... \supseteq V_m = V$ (β) такая, что для любого $j \in \{0, ..., m\}$ либо $V_j \lhd V_{j-1}$, либо $(V_{j-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq V_j$. Так как $G^{\mathfrak{F}} = {U_0}^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{\omega}(G)$. Если $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{\omega}(G) \cap \langle U, V\rangle$. Поскольку $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $G \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $\langle U, V\rangle \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\langle U, V\rangle^{\mathfrak{F}} = 1$. Таким образом, $\langle U, V\rangle^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Тогда, согласно лемме 3.4.1 (1), $\langle U, V\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальныая подгруппа группы G. Получили противоречие. Таким образом, $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и поэтому $O_{\omega}(G) \neq 1$. Следовательно, существует минимальная нормальная ω-подгруппа N группы G. Рассмотрим группу G/N. Согласно свойству (1.8.3) [50] (см., с. 111) G/N — ω-разрешимая группа. Поскольку U и V — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы G и N — нормальная ω-подгруппа группы G, то по лемме 3.4.2 (2) UN/N и VN/N — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы G/N. Тем самым установлено, что группа G/N удовлетворяет условию утверждения (4) теоремы и, в силу выбора группы G, получаем, что $\langle UN/N, VN/N\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G/N. Ввиду того, что $\langle UN/N, VN/N\rangle = \langle U, V\rangle N/N$, то $\langle U, V\rangle N/N$ — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G/N. Согласно лемме 3.4.2 (3), $\langle U, V\rangle N$ — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа в G. Допустим, что $\langle U, V\rangle N < G$. Так как по свойству (1.8.3) [50] (см., с. 111) $\langle U, V\rangle N$ — ω-разрешимая группа и по лемме 3.4.1 (2) U и V — K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы $\langle U, V\rangle N$, то, в силу выбора группы G, $\langle U,V\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $\langle U,V\rangle N$. Поскольку $\langle U,V\rangle N$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, то по лемме 3.4.1 (3) $\langle U,V\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G. Получили противоречие. Это означает, что $\langle U,V\rangle N = G$. Ввиду того, что U — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, то U — K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и, по лемме 3.1.5 [29] (см., с. 110) $U^\mathfrak{F} \triangleleft\triangleleft G$. Аналогично, $V^\mathfrak{F} \triangleleft\triangleleft G$.

Пусть $D := \langle U^\mathfrak{F}, V^\mathfrak{F}\rangle$. Согласно следствию 1.10.17 (1) [62] (см., с. 112), $U^\mathfrak{F} \subseteq O_\omega(G)$, $V^\mathfrak{F} \subseteq O_\omega(G)$ и, следовательно, $U^\mathfrak{F} \cup V^\mathfrak{F} \subseteq O_\omega(G)$. Это означает, что $D \subseteq O_\omega(G)$. По теореме Виландта (см., например, [53], теорема 7.6, с. 111), $D \triangleleft\triangleleft G$. В работе [67] установлено, что $N \subseteq N_G(D)$. Тогда $D^G = D^{\langle U,V\rangle N} = (D^N)^{\langle U,V\rangle} = D^{\langle U,V\rangle} \subseteq \langle U,V\rangle$. Пусть $D^G \cap O_\omega(G) := X$. Предположим, что $D \neq 1$. Тогда X — неединичная нормальная ω-подгруппа группы G. Следовательно существует минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в X, и поэтому в качестве N можно выбрать ту, которая содержится в X. Таким образом, можем считать, что $N \subseteq X$. Тогда $N \subseteq D^G \subseteq \langle U,V\rangle$ и $\langle U,V\rangle N = \langle U,V\rangle$. Это означает, что $\langle U,V\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G. Получили противоречие. Следовательно, $D = 1$. Тогда $U^\mathfrak{F} = 1$, $V^\mathfrak{F} = 1$ и поэтому U, $V \in \mathfrak{F}$. Ввиду утверждения (3) теоремы, $U \subseteq G_\mathfrak{F}$ и $V \subseteq G_\mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\langle U,V\rangle \subseteq G_\mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $\langle U,V\rangle \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\langle U,V\rangle^\mathfrak{F} = 1$. Так как $(G_\mathfrak{F})^\mathfrak{F} = 1 \subseteq \langle U,V\rangle \cap O_\omega(G_\mathfrak{F})$, то по лемме 3.4.1 (1) $\langle U,V\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы $G_\mathfrak{F}$.

Покажем, что $G_\mathfrak{F}$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G. Рассмотрим цепь подгрупп группы G вида $G = G_0 \triangleright G_1 = G_\mathfrak{F}$. Так как $G^\mathfrak{F} \subseteq O_\omega(G)$, то ${G_0}^\mathfrak{F} = G^\mathfrak{F}$ — ω-группа. Кроме того, ${G_1}^\mathfrak{F} = (G_\mathfrak{F})^\mathfrak{F} = 1$ и, значит, ${G_1}^\mathfrak{F}$ — ω-группа. Таким образом, $G_\mathfrak{F}$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G.

Поскольку $\langle U,V\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G_\mathfrak{F}$ и $G_\mathfrak{F}$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G, то по лемме 3.4.1 (3) $\langle U,V\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G. Получили противоречие. Тем самым установлена справедливость утверждения (4). Ввиду леммы 3.4.1 (4) в любой ω-разрешимой группе множество всех K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку. Следовательно, из (1) следует (2).

II. Покажем, что из (2) следует (1). Пусть справедливо утверждение (2). Установим справедливость утверждения (1).

Проверим, что *в любой ω-разрешимой группе подгруппа, порожденная двумя $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальными подгруппами, является $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной* (5). Пусть G — контрпример минимального порядка, т.е. G — ω-разрешимая группа, U и V — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы G, но $\langle U,V\rangle$ не является $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппой в G, причем G — группа наименьшего порядка с такими свойствами. Тогда $U \neq V$. Согласно определению 3.2.2, либо $G = U$, либо существует максимальная $(G-U)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = U_0 \supset U_1 \supset ... \supset U_n = U$ такая, что $(U_{i-1})^\mathfrak{F} \subseteq U_i$, $i = \overline{1,n}$. Аналогично, либо $G = V$, либо существует максимальная $(G-V)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_m = V$ такая, что $(V_{j-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq V_j$, $j = \overline{1,m}$. Если $G = U$ или $G = V$, то $\langle U, V\rangle = G$ и, значит, $\langle U, V\rangle$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G. Пусть $G \neq U$ и $G \neq V$. Так как U и V — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы в G, то U и V — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы в G. Тогда, ввиду утверждения (2) теоремы, $\langle U, V\rangle$ — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Согласно определению 3.4.1, $\langle U, V\rangle^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Если $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \langle U, V\rangle \cap O_\omega(G)$. Тогда по лемме 3.2.1 (1) $\langle U, V\rangle$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G. Получили противоречие. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и поэтому $O_\omega(G) \neq 1$. Таким образом, в G существует минимальная нормальная ω-подгруппа N. По лемме 3.2.2 (2) UN/N и VN/N — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы G/N. Ввиду того, что G/N — ω-разрешимая группа и $|G/N| < |G|$, то $\langle UN/N, VN/N\rangle = \langle U, V\rangle N/N$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G/N. Тогда по лемме 3.2.2 (3) $\langle U, V\rangle N$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{K(\mathfrak{F})}$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и, значит, $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, то $G^{\mathfrak{H}}$ — ω-группа. Поскольку U и V — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы G, то U и V — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы в G. Тогда по лемме 3.1.8 [29] (см., с. 110) справедливо $U^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}} = V^{\mathfrak{H}}$ (γ).

Пусть $G \notin \mathfrak{H}$. Тогда $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$ и подгруппу N можно выбрать содержащейся в $G^{\mathfrak{H}}$. Ввиду (γ), $N \subseteq U$, $N \subseteq V$ и, значит, $\langle U, V\rangle N = \langle U, V\rangle$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы G, что невозможно.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Проверим, что $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $X \leq G$. Так как по лемме 2.4.6 [29] (см., с. 110) класс $\mathfrak{H}$ является наследственным, то $X \in \mathfrak{H}$ и поэтому $K(X) \subseteq K(\mathfrak{F})$. Тогда, согласно лемме 3.5.4, $K(X) \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $K(S(G)) \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда по лемме 3.5.5 получаем что $\langle U, V\rangle$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в G. Противоречие. Тем самым установлена справедливость утверждения (5). Ввиду леммы 3.2.1 (4), в любой ω-разрешимой группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку. Таким образом, из (2) следует (1). *Теорема доказана.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс групп. Следуя терминологии [29], будем говорить, что класс групп $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных) подгрупп $\mathfrak{X}$-групп, если в любой $\mathfrak{X}$-группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных) подгрупп образует решетку.

Следствие 3.5.1. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_i$ – ω-локальная наследственная формация, обладающая решеточным свойством для K-$\mathfrak{F}_i^\omega$-субнормальных подгрупп $\omega\mathfrak{S}$-групп, $i = 1, 2$. Если $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для K-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп $\omega\mathfrak{S}$-групп.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выводы. В диссертации проведено исследование ω-веерных формаций в рамках решения проблемы **(A)** В.А. Ведерникова о разработке теории ω-веерных формаций конечных групп. При этом, в диссертации решены следующие задачи:

1. Получено решение задачи (A1) исследования методов конструирования ω-веерных формаций конечных групп в следующих аспектах: построены ω-веерные формации, определяемые значениями функций-направлений; построены ω-веерные формации с помощью описания функций-спутников; получены результаты, характеризующие внутреннюю структуру ω-веерных формаций; исследованы свойства ω-веерных формаций, построенных посредством применения решеточных операций.

2. Получено решение задачи (A2) исследования решеток ω-веерных формаций конечных групп в следующих аспектах: доказана модулярность решетки всех ω-веерных формаций конечных групп; установлены условия, при которых решетки ω-веерных формаций конечных групп обладают свойствами дистрибутивности, дополняемости, алгебраичности, стоуновости.

3. Получено решение задачи (A3) применения ω-веерных формаций к изучению подгрупп конечных групп в следующих аспектах: определены $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальные и $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы и для ω-локальной (ω-веерной с направлением δ_1) формации $\mathfrak{F}$ получено описание строения конечной группы G, все $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы которой являются нормальными; определены $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы и для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых в любой конечной группе G множество всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку; определены K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы и для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между решеточными свойствами K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных и $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в ω-разрешимых группах.

Перечень условных обозначений и определений

Рассматриваются только конечные группы.

$H \leq G$ — H является подгруппой группы G.
$H < G$ — H является собственной подгруппой группы G.
$H \lhd G$ — H является нормальной подгруппой группы G.
$H \cdot\!\lhd G$ — H является минимальной нормальной подгруппой в G.
$H < \cdot\, G$ — H является максимальной подгруппой группы G.
$H := K$ — равенство $H = K$ верно по определению.
$H \rtimes K$ — полупрямое произведение подгрупп H и K группы G, где $H \lhd G$.
$H \times K$ — прямое произведением подгрупп H и K группы G.
$\langle H, K \rangle$ — подгруппа группы G, порожденная подгруппами H и K.
$\mathrm{Core}_G(H)$ — ядро подгруппы H в группе G.
1 — единичная группа.
$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.
$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G.
$S(G)$ — множество всех подгрупп группы G.
$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.
π — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$.
$\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G.
$K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G.
$\pi(\mathfrak{X}) = \cup_{G \in \mathfrak{X}} \pi(G)$.
$K(\mathfrak{X}) = \cup G \in \mathfrak{X} K(G)$.
Z_p — группа простого порядка p.

Монолитическая группа — группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу (монолит).

π-группа (*πd-группа*, *π'-группа*) — группа G такая, что $\pi(G) \subseteq \pi$ (соответственно $\pi(G) \cap \pi \neq \varnothing$, $\pi(G) \cap \pi = \varnothing$).

π-разрешимая группа — группа G, если каждый главный фактор группы G является либо π'-группой, либо абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi$.

π-отделимая группа — группа G, если каждый главный фактор группы G является либо π-группой, либо π'-группой.

$O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа группы G.

Примитивная группа — группа G, в которой существует максимальная подгруппа M (примитиватор) такая, что $\mathrm{Core}_G(M) = 1$.

π-примитивная группа — группа G такая, что в G существует максимальная подгруппа M (π-примитиватор) такая, что $\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\pi(G) = 1$.

Расширение группы A с помощью группы B — группа G, если в G существует нормальная подгруппа N такая, что $N \cong A$ и $G/N \cong B$.

Класс групп — совокупность групп, содержащая с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

$\mathfrak{X}$-*группа* — группа, принадлежащая классу групп $\mathfrak{X}$.

$(\mathfrak{X})$ — класс групп, порожденный множеством групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$.

(G) — класс групп, порожденный множеством групп $\mathfrak{X} = \{G\}$.

$\mathfrak{E}$ — класс всех единичных групп.

$\mathfrak{G}$ — класс всех групп.

$\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп.

$\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп.

$\mathfrak{F}_\pi$ — класс всех π-групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп, где $p \in \mathbb{P}$.

$\mathfrak{G}_{p'}$ — класс всех p'-групп, где $p \in \mathbb{P}$.

$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп.

$\pi\mathfrak{S}$ — класс всех π-разрешимых групп.

$\mathfrak{S}_{cp}$ — класс всех групп, у которых каждый главный p-фактор централен, где $p \in \mathbb{P}$.

Операция на классах групп — всякое отображение множества всех классов групп в себя.

Операции S, S_n, Q, R, R_0 определяются следующим образом:

$G \in S\mathfrak{X} \Leftrightarrow G \leq H$, где $H \in \mathfrak{X}$;

$G \in S_n\mathfrak{X} \Leftrightarrow G \triangleleft H$, где $H \in \mathfrak{X}$;

$G \in Q\mathfrak{X} \Leftrightarrow G \cong H/N$, где $H \in \mathfrak{X}$;

$G \in R\mathfrak{X} \Leftrightarrow G = N_1 \cdot ... \cdot N_k$, $N_i \triangleleft G$, $N_i \in \mathfrak{X}$, $i = \overline{1,k}$;

$G \in R_0\mathfrak{X} \Leftrightarrow G \cong H/(N_1 \cap ... \cap N_k)$, $H/N_i \in \mathfrak{X}$, $i = \overline{1,k}$.

U-замкнутый класс групп, где U — некоторая операция на классах групп, — класс групп $\mathfrak{X}$, если $U\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

Наследственный (S*-замкнутый*) *класс групп* — класс $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию: из того, что $G \in \mathfrak{X}$ и $H \leq G$ следует $H \in \mathfrak{X}$.

Нормально наследственный (S_n*-замкнутый*) *класс групп* — класс $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию: из $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft G$ следует $N \in \mathfrak{X}$.

Гомоморф (Q*-замкнутый класс групп*) — класс $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию: из $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft G$ следует $G/N \in \mathfrak{X}$.

R-замкнутый класс групп — класс групп $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию: из $G = N_1 \cdot N_2$, $N_1 \in \mathfrak{X}$, $N_2 \in \mathfrak{X}$, $N_1 \triangleleft G$, $N_2 \triangleleft G$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$.

R_0-замкнутый класс групп — класс групп $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию: из $G/N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{X}$ следует, что $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{X}$.

Класс групп, замкнутый относительно расширений (коротко, *Ext-замкнутый*) — класс групп $\mathfrak{X}$, если каждое расширение $\mathfrak{X}$-группы с помощью $\mathfrak{X}$-группы является $\mathfrak{X}$-группой.

ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$.

ω' — дополнение к подмножеству ω во множестве $\mathbb{P}$.

$\mathfrak{G}_\omega$ — класс всех ω-групп.

$\mathfrak{I}$ — класс всех простых групп.

Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$.

$\mathfrak{G}_\Omega$ — класс всех Ω-групп, т.е. таких групп G, что $K(G) \subseteq \Omega$.

Формация — QR_0-замкнутый класс групп.

form $\mathfrak{X}$ — формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$.

form $G =$ form $\{G\}$.

Класс Фиттинга — S_nR-замкнутый класс групп.

Формация Фиттинга — формация, являющаяся классом Фиттинга.

$G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — непустая формация.

$G_{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G, где $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга.

$O_\omega(G)$ — $\mathfrak{G}_\omega$-радикал группы G.

$O_p(G)$ — $\mathfrak{N}_p$-радикал группы G.

$F_p(G)$ — $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$-радикал группы G.

$F_{cp}(G)$ — $\mathfrak{S}_{cp}$-радикал группы G.

$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid$ существует $N \triangleleft G$ такая, что $N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{H}\ )$ — произведение классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\ )$ — формационное произведение $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ — класс групп, $\mathfrak{H}$ — формация.

$\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}\ )$ — радикальное произведение $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ — класс групп.

$\mathfrak{F}$-нормальная ($\mathfrak{F}$-абнормальная) максимальная подгруппа группы G — максимальная подгруппа M группы G такая, что $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{F}$ (соответственно $G/\mathrm{Core}_G(M) \notin \mathfrak{F}$), где $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп.

$\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа в смысле Кегеля (K-$\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа) — подгруппа H группы G, если либо $H \triangleleft G$, либо $G/Core_G(H) \in \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — класс групп.

$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G — подгруппа H группы G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$ такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\mathfrak{F}$ — непустая формация.

K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G — подгруппа H группы G, если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_n = H$ такая, что либо $H_i \triangleleft H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\mathfrak{F}$ — непустая формация.

$\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа группы G — подгруппа H группы G такая, что $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \le U \le G$, V — нормальная подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$, где $\mathfrak{F}$ — класс групп.

$\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G — подгруппа H группы G такая, что $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$, где $\mathfrak{F}$ — класс групп.

$\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G — подгруппа H группы G такая, что $H \in \mathfrak{F}$ и из $H \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = H$, где $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп.

ωF-функция — функция вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \longrightarrow \{$ формации групп $\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$.

$\mathbb{P}F$-функция — функция вида $h : \mathbb{P} \longrightarrow \{$ формации групп $\}$.

$\mathbb{P}FR$-функция — функция вида $\delta : \mathbb{P} \longrightarrow \{$ непустые формации Фиттинга $\}$.

Веерная формация со спутником h и направлением δ — формация $\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\delta(p)} \in h(p)$ для всех $p \in \pi(G)\ )$, где h и δ — $\mathbb{P}F$-функция и $\mathbb{P}FR$-функция соответственно, обозначается $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(g, \delta)$.

δ-Веерная формация — веерная формация с некоторым спутником и направлением δ.

ω-веерная формация с ω-спутником f и направлением δ — формация $\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\ )$, где f и δ — ωF-функция и $\mathbb{P}FR$-функция соответственно, обозначается $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$.

$\omega\delta$-Веерная формация — ω-веерная формация с некоторым ω-спутником и направлением δ.

Внутренний ω-спутник (спутник) ω-веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}$ — ω-спутник (спутник) формации $\mathfrak{F}$, все значения которого содержатся в $\mathfrak{F}$.

n-кратно ω-веерная (веерная) формация с направлением δ, где $n \in \mathbb{N}$ — ω-веерная (веерная) формация $\mathfrak{F}$ с направлением δ, обладающая ω-спутником (спутником), все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно ω-веерными (веерными) формациями с направлением δ. Полагают, что любая формация является 0-кратно ω-веерной (веерной) формацией с направлением δ.

a-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $Z_q \in \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

b-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $\delta(q)\mathfrak{N}_q = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

b_q-направление ω-веерной (веерной) формации, где $q \in \mathbb{P}$, — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $\delta(q)\mathfrak{N}_q = \delta(q)$.

p-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $\mathfrak{G}_{q'}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

r-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $\mathfrak{G}_{(Z_q)'}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

s-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ такая, что формация Фиттинга $\delta(q)$ q-разрешима для любого $q \in \mathbb{P}$.

$i_1 i_2 ... i_n$-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, которая является i_j-направлением для любого $j \in \{ 1, ..., n \}$.

ω-полная (полная) формация — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_0, где $\delta_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

ω-локальная (локальная) формация — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_1, где $\delta_1(p) = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

ω-специальная (специальная) формация — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_2, где $\delta_2(p) = \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

ω-центральная (центральная) формация — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_3, где $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

$\omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ ($\mathbb{P}F(\mathfrak{X}, \delta)$) — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех ω-веерных (веерных) формаций с направлением δ, содержащих множество групп $\mathfrak{X}$.

Подгрупповой функтор — отображение τ, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию: $(\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α каждой группы G.

τ-подгруппа группы G — подгруппа группы G, принадлежащая $\tau(G)$, где τ — подгрупповой функтор.

Регулярный подгрупповой функтор — подгрупповой функтор τ, удовлетворяющий условиям:

1) из $M \in \tau(G)$ и $N \triangleleft G$ следует, что $MN/N \in \tau(G/N)$;

2) из $M/N \in \tau(G/N)$ следует, что $M \in \tau(G)$.

ω-радикальный подгрупповой функтор — подгрупповой функтор τ такой, что для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $O_\omega(G) \cap N = O_\omega(N)$.

δ-радикальный подгрупповой функтор, где δ — $\mathbb{P}FR$-функция, — подгрупповой функтор τ такой, что для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $G_{\delta(p)} \cap N = N_{\delta(p)}$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

$\omega\delta$-радикальный подгрупповой функтор — подгрупповой функтор τ, являющийся ω-радикальным и δ-радикальным.

τ-замкнутый класс групп — класс групп $\mathfrak{X}$, содержащий вместе с каждой своей группой G и все ее τ-подгруппы, где τ — подгрупповой функтор.

$\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — τ-замкнутая формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех τ-замкнутых формаций, содержащих $\mathfrak{X}$.

τ-замкнутый ω-спутник (спутник) — ω-спутник (спутник) ω-веерной (веерной) формации, если каждое его значение является τ-замкнутой формацией.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность непустых подклассов класса $\mathfrak{F}$. Говорят, что класс $\mathfrak{F}$ *прямо разложим на классы* $\mathfrak{F}_i$ и пишут $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j =$

$\mathfrak{E}$ и каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$.

Θ-*формация* — формация $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F} \in \Theta$, где Θ — непустое множество формаций.

ω-*насыщенная формация* — формация $\mathfrak{F}$, удовлетворяющая условию: для любой группы G и любой $N \triangleleft G$ такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

$\omega\delta$-*неприводимая формация* — $\omega\delta$-веерная формация $\mathfrak{F}$, если $\omega F(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \delta) \subset \mathfrak{F}$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех собственных $\omega\delta$-веерных подформаций из $\mathfrak{F}$, δ — $\mathbb{P}FR$-функция.

$\omega\delta$-*необразующая группа* — группа G такая, что из $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta)$ всегда следует $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \delta)$, где δ — $\mathbb{P}FR$-функция.

Решетка — множество Θ с заданным на нем отношением частичного порядка $\leq$, в котором любые два элемента x и y имеют точную нижнюю грань $x \wedge_\Theta y$, называемую *решеточным пересечением*, и точную верхнюю грань $x \vee_\Theta y$, называемую *решеточным объединением*. Решеточное пересечение и решеточное объединение элементов $y_i \in \Theta$, $i \in I$, обозначают соответственно $\wedge_{\Theta_{i\in I}} y_i$ и $\vee_{\Theta_{i\in I}} y_i$.

Полная решетка формаций — непустая совокупность формаций Θ, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех формаций $\mathfrak{M} \in \Theta$.

Θ-*значная* ωF-*функция* ($\mathbb{P}F$-*функция*) — ωF-функция ($\mathbb{P}F$-функция), если каждое ее непустое значение принадлежит полной решетке формаций Θ.

$\omega\delta$-*Индуктивная решетка* — решетка формаций Θ, если для всякого набора формаций $\{\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i, \delta) \mid i \in I\}$, где f_i — внутренний Θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, имеет место $\omega PF(f, \delta) = \vee_{\omega\delta F_{i\in I}}(\mathfrak{F}_i)$, где $f = \vee_{\Theta_{i\in I}} f_i$.

δ-*Индуктивная решетка* — решетка формаций Θ, если для всякого набора формаций $\{\mathfrak{F}_i = \mathbb{P}F(f_i, \delta) \mid i \in I\}$, где f_i — внутренний Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, имеет место $\mathbb{P}F(f, \delta) = \vee_{\delta F_{i\in I}}(\mathfrak{F}_i)$, где $f = \vee_{\Theta_{i\in I}} f_i$.

Модулярная решетка — решетка Θ, если для любых $x, y, z \in \Theta$ таких, что $y \leq x$, справедливо: $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = y \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$.

Дистрибутивная решетка — решетка Θ, если для любых $x, y, z \in \Theta$ справедливо: $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = (x \wedge_\Theta y) \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$.

Атом решетки — элемент $a \in \Theta$, если $a \neq O$ и не существует такого элемента $x \in \Theta$, что $O < x < a$, где Θ — решетка с нулем O.

Решетка с дополнениями — решетка Θ с нулем O и единицей I, если для любого элемента $x \in \Theta$ существует такой элемент $y \in \Theta$, что $x \wedge_\Theta y = O$ и $x \vee_\Theta y = I$.

Компактный элемент решетки — элемент x решетки Θ, если для любого множества $\{y_i \mid i \in I\}$ элементов из Θ из того, что $x \leq \vee_{\Theta_{i\in I}}(y_i)$ всегда следует, что существует такое конечное множество $\{y_j \mid j = 1, ..., s\} \subseteq \{y_i \mid i \in I\}$, что $x \leq \vee_{\Theta_{j=1,\dots,s}}(y_j)$.

Алгебраическая решетка — решетка Θ, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов решетки Θ.

$\mathcal{X}_{a,b}$ — совокупность всех элементов из Θ, удовлетворяющих условию $a \wedge_\Theta x \leq b$, т.е. $\mathcal{X}_{a,b} = \{x \in \Theta \mid a \wedge_\Theta x \leq b\}$, где Θ — решетка, $a, b \in \Theta$.

Относительное псевдодополнение элемента a в b — наибольший элемент множества $\mathcal{X}_{a,b} = \{x \in \Theta \mid a \wedge_\Theta x \leq b\}$, где Θ — решетка, a, $b \in \Theta$, и обозначается $b : a$ или $b|a$

Брауэрова решетка — решетка Θ, если для любых элементов $a, b \in \Theta$ в Θ существует относительное псевдодополнение a в b.

Псевдодополнение элемента a — элемент $O|a$ брауэровой решетки Θ с нулем O, $a \in \Theta$. Обозначается a^*.

Стоунова решетка — брауэрова решетка Θ с нулем O и единицей I, если $a^* \vee_\Theta (a^*)^* = I$ для всех $a \in \Theta$.

Стоунова решетка — дистрибутивная решетка Θ с нулем O и единицей I, если Θ — решетка с псевдодополнениями (т.е. каждый элемент решетки обладает псевдодополнением) и $a^* \vee^\Theta (a^*)^* = I$ для любого $a \in \Theta$.

Используемые известные результаты

[1], Теорема 1. *Класс $\mathfrak{E}$ всех единичных групп является ω-веерной формацией с ω-спутником f и направлением δ, где δ — произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, f — ωF-функция, имеющая следующее строение: $f(\omega') = \mathfrak{E}$, $f(p) = \varnothing$ для любого $p \in \omega$.*

[1], Теорема 3. *Пусть $p \in \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$, где δ — b-направление, f — ωF-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{N}_p$, $f(p) = (1)$ и $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$.*

[2], Теорема 13. *В любой модулярной решетке M отображение $\varphi_a : x \to x \wedge a$ и $\psi_b : y \to y \vee b$ являются взаимно обратными изоморфизмами между интервалами $[b, a \vee b]$ и $[a \wedge b, a]$.*

[7], гл. 2, Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, K — нормальная подгруппа группы G. Тогда если множество всех нормальных подгрупп в G является конечным или $\mathfrak{F}$ является многообразием, то $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$, более того $(G^{\varphi})^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}})^{\varphi}$ для любого гомоморфизма φ группы G.*

[7], гл. 2, Лемма 4.2. *Пусть группа $G = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ — прямое произведение простых неабелевых подгрупп $A_i (i = 1, 2, ..., n)$. Если N — неединичная нормальная подгруппа группы G, то $N = \prod_{i \in I} A_i$ для некоторого непустого множества $\mathfrak{I} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. В частности, каждая минимальная нормальная подгруппа M группы G совпадает с одной из подгрупп $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ и каждая нормальная подгруппа из G обладает нормальным дополнением в G.*

[7], гл. 2, Следствие 4.4. *Непустая формация $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$ из $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда содержит лишь тривиальные подформации, когда $\mathfrak{F}$ порождается простой группой.*

[13], Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$ с внутренним ω-спутником f и bp-направлением φ таким, что $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_3$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним ω-спутником h таким, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого $p \in \omega$.*

[13], Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$ с p-направлением φ. Тогда:*

(1) *Если $p \in \omega$, $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\varphi(p)} \in f(p)$, то $G \in \mathfrak{F}$;*

(2) *Если $G/O_{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$;*

(3) *Если $G/M \in \mathfrak{F}$, $G/G_{\varphi(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(M)$ и $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

[13], Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с внутренним ω-спутником f и bp-направлением φ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$;*

(2) *$\mathfrak{F}$ обладает внутренним ω-спутником g таким, что $g(\omega') = f(\omega')$ и $g(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \omega$.*

[15], Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая неединичная формация и* $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. *Формация* $\mathfrak{F}$ *является* ω*-веерной формацией с направлением* φ *и* ωF*-спутником* f *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{F}$ *— веерная формация с направлением* φ *и* $\mathbb{P}F$*-спутником* f_1 *таким, что* $f_1(p) = f(p)$ *для любого* $p \in \omega$ *и* $f_1(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$. *Такие* ωF*-спутник* f *и* $\mathbb{P}F$*-спутник* f_1 *формации* $\mathfrak{F}$ *называются* ω*-равными.*

[15], Лемма 4.2. *Пусть* $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$, *где* φ *— произвольная* $\mathbb{P}FR$*-функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathfrak{F} = \omega F(g, \varphi)$, *где* $g(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ *для любого* $p \in \omega \cup \{\omega'\}$;

(2) $\mathfrak{F} = \omega F(h, \varphi)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *для любого* $p \in \omega$.

[15], Лемма 5. *Пусть* φ *— произвольная* $\mathbb{P}FR$*-функция,* $\mathfrak{F} = \cap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i, \varphi)$, $i \in I$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$, *где* $f = \cap_{i \in I} f_i$.

[15], Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустой класс групп. Тогда* ω*-веерная формация* $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ *с направлением* φ, *где* $\varphi_0 \leq \varphi$, *обладает единственным минимальным* ωF*-спутником* f *таким, что:* $f(\omega') = \mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, $f(p) = \mathrm{form}(G/G_{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ *и* $f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

[15], Следствие 5.1. *Пусть* f_i *— минимальный* ωF*-спутник* ω*-веерной формации* $\mathfrak{F}_i$ *с направлением* φ, *где* $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, *когда* $f_1 \leq f_2$.

[17], Лемма 3.1. *Пусть* N *— субнормальная подгруппа группы* G, $K \triangleleft N$ *и* $K \leq \Phi(G)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $\Phi(N) \leq \Phi(G)$;

(2) *если* N/K π*-замкнута, то и* N π*-замкнута, в частности,* $F_p(N/K) = F_p(N)/K$;

(3) *если* N/K π*-разложима, то и* N π*-разложима.*

[17], Лемма 3.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* ω*-локальная формация,* N *— субнормальная подгруппа группы* G *и* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* $N/(N \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{F}$, *то* $N \in \mathfrak{F}$;

(2) *если* $N/(N \cap \Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ *и* $N \cap \Phi(G)$ *является* ω*-группой, то* $N \in \mathfrak{F}$;

(3) *если* $N/(N \cap \Phi(G)) \in \mathfrak{F}$, *то* $N = N \times Q$, *где* F *—* π*-группа,* Q *—* π'*-группа,* $Q \subseteq N \cap \Phi(G) = \Phi$, $F \cap \Phi = A \times B$, *где* A *— нормальная в* N ω*-подгруппа,* B *— нормальная в* N ω'*-подгруппа, причем* $N/BQ \cong F/B \in \mathfrak{F}$.

[18], Теорема 3.4. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— наследственный гомоморф,* $\mathfrak{F}$ *— непустой* ωP*-гомоморф в* $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, N *— нильпотентная нормальная* ω*-подгруппа группы* G. *Если* H *—* $\mathfrak{F}$*-подгруппа в* G *такая, что* $G = HN$, *то* H *содержится в некоторой* $\mathfrak{F}^\omega$*-покрывающей подгруппе группы* G. *В частности, если* H *—* $\mathfrak{F}$*-максимальная подгруппа группы* G *такая, что* $G = HN$, *то* H *—* $\mathfrak{F}^\omega$*-покрывающая подгруппа в* G.

[18], Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, G — группа, $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ которой является ω-группой, M — максимальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *M является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической в G тогда и только тогда, когда M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и $G = M\tilde{F}(G)$*;

2) *если M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и $G = MF(G)$, то M является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G.*

[22], Лемма 4.8.1. *Если решетка формаций Θ является алгебраической, то ее компактными элементами являются в точности однопорожденные формации из Θ.*

[29], Лемма 2.4.6. *Если формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то наследственным будет и класс $EK(\mathfrak{F})$.*

[29], Лемма 3.1.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Если A — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $A^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа G.*

[29], Лемма 3.1.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $\mathfrak{H} = EK(\mathfrak{F})$. Тогда для любой $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы A группы G справедливо равенство $A^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}$.*

[34], Лемма 2.11. *Пусть $H \leq K \leq G$. Тогда*:

(1) *если $H \mathrm{char} K \mathrm{char} G$, то $H \mathrm{char} G$*;

(2) *если $H \mathrm{char} K \lhd G$, то $H \lhd G$.*

[34], Лемма 2.42. *Если $U \lhd\lhd G$, то $\mathrm{Soc} G \leq N_G(U)$.*

[34], Теорема 3.13. *Для группы G следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *G — нильпотентная группа*;

(2) *G — прямое произведение своих силовских подгрупп*;

(3) *каждая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора*;

(4) *все максимальные подгруппы нормальны*;

(5) *все подгруппы группы G нормальны.*

[34], Лемма 3.17. *Пусть $M <\cdot G$ и $K \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если $\alpha \in \mathrm{Aut} G$, то $\alpha(M) <\cdot G$*;

(2) *Если $x \in G$, то $M^x <\cdot G$*;

(3) *Если $K \leq M$, то $M/K <\cdot G/K$*;

(4) *Если K не содержится в M, то $MK = G$*;

(5) *Если $\overline{U}$ — максимальная подгруппа фактор-группы $\overline{G} = G/K$, то существует $U <\cdot G$ такая, что $K \leq U$ и $\overline{U} = U/K$*;

(6) *Если $M \lhd G$, то индекс подгруппы M в группе G является простым числом.*

[34], Теорема 3.24. *Пусть $D \lhd K \lhd G$, $D \leq \Phi(G)$ и $D \lhd G$. Если фактор-группа*

K/D нильпотентна, то K нильпотентна.

[34], Лемма 4.34. *Пусть $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, M, $N \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *$\alpha(H) \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}G$; в частности $H^g \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ для любого $g \in G$*;

(2) *$HN/N \in \mathrm{Hall}_\pi(G/N)$*;

(3) *$H \cap N \in \mathrm{Hall}_\pi(N)$*;

(4) *$H \cap MN = (H \cap M)(H \cap N) \in \mathrm{Hall}_\pi(MN)$.*

[34], Теорема 5.10. (1) *Если $\mathfrak{X}$ — гомоморф, а $\mathfrak{F}$ — формация, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — гомоморф*;

(2) *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — формации, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — формация*;

(3) *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственный формации, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — наследственная формация*;

(4) *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — нормально наследственные формации, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация.*

[34], Теорема 5.11. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ — формации. Тогда*:

(1) $G^{(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})} = (G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}}$;

(2) $(\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y}) \circ \mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \circ (\mathfrak{Y} \circ \mathfrak{Z})$.

[34], Теорема 5.38. *Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп, и $\mathfrak{Y}$ — формация, то $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y} = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}$.*

[43], Лемма 1.2.22. *Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство $\tau\mathrm{form}\mathfrak{X} = QR_0S_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$.*

[43], Лемма 4.3.4. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{M}$ — непустая подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{M} = \oplus_{i\in I}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$.*

[43], Следствие 4.2.8. *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций l_n^τ модулярна, но не дистрибутивна.*

[44], Теорема 1. *Для любой формации $\mathfrak{F}$ следующие условия равносильны*:

(1) *формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной*;

(2) *$\mathfrak{N}_p(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$*;

(3) *$\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p(F_p)$ для всех $p \in \omega$*;

(4) *формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной.*

[44], Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = LF_\omega(h)$, $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$ и спутники h и m являются внутренними. Тогда $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация и $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, \text{ если } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega, \\ h(p), \text{ если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

[50], Свойство (1.8.3). *Если H — нормальный делитель групп G, то для*

π-разрешимости G необходимо и достаточно, чтобы H и G/H были π-разрешимы.

[50], Теорема 1.8.2. *Если группа G является π-разрешимой, то она обладает свойством $D^s_{\pi_1}$ и $D_{\pi_1'}$ для любого $\pi_1 \subseteq \pi$.*

[53], Лемма 1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $K \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $(K/G)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$;

(2) *Если $G = HK$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$*;

(3) *Если $G = HK$ и $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$.*

[53], Теорема 2.2. *Для любого класса $\mathfrak{X}$ имеет место равенство:* $\mathrm{form}\mathfrak{X} = QR_0\mathfrak{X}$.

[53], Теорема 7.6. *Множество всех субнормальных подгрупп группы G образует подрешетку решетки* $\mathrm{L}(G)$.

[53], Лемма 11.1. *Подгруппа H тогда и только тогда является добавлением к нормальной подгруппе K группы G, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.*

[55], Следствие 9.9.*Решетка всех формаций конечных групп модулярна, но не дистрибутивна.*

[59], IV.1.7. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — классы групп. Если $\mathfrak{F}_1$ — S_n-замкнутый класс и $\mathfrak{F}_2$ — формация, то* $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$.

[59], IX.1.10. *Если $\mathfrak{F}_1$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{F}_2$ — Q-замкнутый класс, то* $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$.

[62], Следствие 1.10.17. *Если H — субнормальная подгруппа группы G, то*:

(1) *$H \subseteq O_\pi(G)$, если H — π-группа*;

(2) *$H \subseteq F(G)$, если H — нильпотентная группа*;

(3) *$H \subseteq F_p(G)$, если H — p-нильпотентная группа*;

(4) *$H \subseteq G_{\mathfrak{S}}$, если H — разрешимая группа.*

ГЛАВА *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрюшин С.Р.* Об ω-веерных формациях конечных групп // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований / Сб. ст. по материалам XIV междунар. науч.-практ. конф. / Новосибирск: Изд. АНС «СибАК». 2019. Т. 11. № 4. – С. 35–41.

2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. — Москва: Наука, 1984. – 568 с.

3. *Близнец И.В., Воробьев Н.Н.* О прямых разложениях композиционных формаций // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1998. Вып. 12. – С. 106–112.

4. *Васильев А.Ф.* О максимальной наследственной подформации локальной формации // Вопросы алгебры. – Минск, 1990. Вып 5. – С. 39–45.

5. *Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 27–52.

6. *Ведерников В.А.* О локальных формациях конечных групп // Математические заметки. 1989. Т. 46. № 3. – С. 32–37.

7. *Ведерников В.А.* Элементы теории классов групп. – Смоленск: СГПИ, 1988. – 95 с.

8. *Ведерников В.А., Коптюх Д.Г.* Композиционные формации c-длины 3 // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 1. – С. 119–131.

9. *Ведерников В.А., Коптюх Д.Г.* Ω-расслоенные формации $\Omega\varphi$-длины 3 // Сборник научных трудов математического факультета МГПУ. — Москва: МГПУ, 2005. – С. 164–175.

10. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт, № 5. – Брянск: БГПУ, 1999. – 25 с.

11. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт, № 6. – Брянск: БГПУ, 1999. – 23 с.

12. *Ведерников В.А., Егорова В.Е.* Критические неоднопорожденные тотально Ω-канонические формации конечных групп // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2006. №. 3. – С. 8–13.

13. *Ведерников В.А.* О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Український математичный конгресс – 2001. Секція 1. Праці. Київ. 2002. – С. 36–45.

14. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. матем. 2001. Т. 13, № 3. – С. 125–144.

15. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т. 71, № 1. – С. 43–60.

16. *Ведерников В.А., Демина Е.Н.* Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 5. – С. 990–1009.

17. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* О дополнениях к корадикалам конечных групп // Математический сборник. 2016. Т. 207. № 6. – С. 27–52.

18. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 6. – С. 1224–1239.

19. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы конечных групп // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 1. – С. 64–82.

20. *Воробьев Н.Т.* Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга // Математические заметки. 1992. Т. 51. № 3. – С. 3–8.

21. *Воробьев Н.Н.* О прямых разложениях ω-локальных формаций и классов Фиттинга // Вестник Витебского государственного университета. 1997. № 3. – С. 75–78.

22. *Воробьев Н.Н.* Алгебра классов конечных групп. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

23. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. Перевод с англ. — Москва: Мир, 1981. – 456 с.

24. *Еловиков А.Б.* Однопорожденные композиционные формации // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 3. – С. 153–160.

25. *Еловикова (Скачкова) Ю.А.* Решетки Ω-расслоенных формаций // Дискрет. матем. 2002. Т. 14, № 2. – С. 85–94.

26. *Еловиков А.Б.* Факторизация однопорожденных частично расслоенных формаций // Дискрет. матем. 2009. Т. 21, № 3. – С. 99–118.

27. *Камозина О.В.* О неоднопорождённых ω-веерных классах Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 3. – С. 366–376.

28. *Камозина О.В.* Алгебраические решетки кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 2. – С. 139–145.

29. *Каморников С.Ф., Селькин М.В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Мн.: Беларуская навука, 2003. – 254 с.

30. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О критических Ω-расслоенных формациях конечных групп // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 1. – С. 94–101.

31. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О критических ω-веерных формациях конечных групп // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 1. – С. 79–85.

32. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О максимальных τ-замкнутых подформациях τ-замкнутых формаций // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. – С. 35–40.

33. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические ω-веерные τ-замкнутые формации конечных групп // Дискрет. матем. 2011. Т. 23, № 1. – С. 106–115.

34. *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.

35. *Поляков Л.Я.* К теории обобщенных субнормальных подгрупп конечных групп // Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1981. – С. 62–66.

36. *Сафонов В.Г.* О минимальных кратно локальных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1995. Вып. 8. – С. 109–138.

37. *Сафонова И.Н.* О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 2. – С. 23–27.

38. *Селькин В.М.* О минимальных локальных нормально наследственных не $\mathfrak{H}$-формациях // Вести АН РБ. Сер. физ.-мат. н. 1996. № 3. – С. 73–83.

39. *Скачкова Ю.А.* (*Еловикова Ю.А.*) Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций // Дискретная математика. 2002. Т. 14. № 3. – С. 42–46.

40. *Скиба А.Н., Таргонский Е.А.* Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 // Математические заметки. 1987. Т. 41. № 4. – С. 490–499.

41. *Скиба А.Н.* О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями // Известия высших учебных заведений. 1994. № 10. – С. 75–80.

42. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* О частично локальных формациях // ДАН Беларуси. 1995. Т. 39. № 3. – С. 123–143.

43. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

44. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. тр. 1999. Т. 2, № 2. – С. 114–147.

45. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 4. – С. 5–8.

46. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. матем. журн. 2000. Т. 52, № 6. – С. 783–797.

47. *Сорокина М.М.* О композиционных и локальных критических формациях // Известия вузов. Математика. 2000. № 7. – С. 1–8.

48. *Царев А.А.* О недистрибутивности решетки всех n-кратно Ω-композиционных формаций // Проблемы физики, математики и техники. 2011. Т. 8. № 3. – С. 84–88.

49. *Чиспияков С.В.* О c-формациях с нильпотентными предмаксимальными c-подформациями // Математические заметки. 2001. Т. 69. № 1. – С. 113–121.

50. *Чунихин С.А.* Подгруппы конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1964. – 158 с.

51. *Шабалина И.П.* Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры – 18. 2002. Т. 5, № 14. – С. 59–67.

52. *Шеметков Л.А.* Ступенчатые формации групп // Матем. сборник. 1974. Т. 94, № 4. – С. 628–648.

53. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

54. *Шеметков Л.А.* О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 2. – С. 101–103.

55. *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

56. *Шеметков Л.А.* Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная матем. 2010. Т. 16, № 8. – С. 229–244.

57. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. – P. 115–187.

58. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro M.* Classes of Finite Groups. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

59. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin – New Jork: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

60. *Fischer B., Gaschütz W., Hartley B.* Injektoren endlichen auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. V. 102, N 5. – P. 337–339.

61. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80, N 4. – P. 300–305.

62. *Guo W.* The theory of classes of groups. – Beijing, New York: Kluwer Academic Publishers Science Press, 2000. – 259 p.

63. *Hartley B.* On Fischer's analization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. V. 3, N 9. – P. 193–207.

64. *Hawkes T.* On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1968. V. 44, N 2. – P. 243–250.

65. *Kegel O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math., 1978. V. 30, N 3. – P. 225–228.

66. *Kleidman P.B.* A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. of Math. (2), 1991. V. 133, N 2. – P. 369–428.

67. *Wielandt H.* Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen // Math. Z. (2), 1958. V. 69, N 8. – P. 463–465.

68. GAP, *The GAP Small Groups Library, Version* 4.10.2, `www.gap-system.org`, 2019.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ

69. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О нормальности $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных максимальных подгрупп конечных групп // Матем. заметки. 2020. Т. 108, № 3. – С. 428–440.

70. *Sorokina M.M., Maksakov S.P.* On the directions of ω-fibered and Ω-foliated formations and fitting classes of finite groups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41, № 2. – P. 273–279.

71. *Maksakov S.P.* On the lattices of the ω-fibered formations of finite groups // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. – С. 258–267.

72. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О максимальных подформациях n-кратно Ω-расслоенных формаций конечных групп // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия "Математика. Механика. Информатика». 2021. Т. 21, № 1. – С. 15–25.

73. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* Об алгебраичности решеток ω-веерных формаций конечных групп // Дискрет. матем. 2022. Т. 34, № 1. – С. 23–35.

74. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О брауэровых и стоуновых решетках ω-веерных формаций конечных групп // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 2. Принята к печати.

Статьи в других рецензируемых научных изданиях

75. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О строении ω-веерных и Ω-расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп // Ученые записки Брянского государственного университета. 2018. Т. 11 (11). — С. 11–18.

76. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* Об Ω-расслоенных формациях конечных групп // Ученые записки Брянского государственного университета. 2019 (15). — С. 7–13.

77. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О минимальных спутниках Ω-расслоенных формаций конечных групп // Ежегодник НИИ фундаментальных и прикладных исследований за 2019 год, № 1 (11). – Брянск: РИО БГУ, 2020. – С. 61–65.

78. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* Свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных подгрупп конечных групп // Ежегодник НИИ фундаментальных и прикладных исследований за 2020 год, № 1 (12). – Брянск: РИО БГУ, 2021. – С. 36–38.

79. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О максимальных подформациях n-кратно ω-веерных формаций конечных групп // Ученые записки Брянского государственного университета. 2021. – № 4 (24). — С. 10–17.

80. *Maksakov S.P., Sorokina M.M.* The Arithmetic Properties of Lattices of ω-Fibered formations of Finite Groups // American Scientific Journal. 2021. V. 1, N 48. – P. 45–49.

81. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Ученые записки Брянского государственного университета: естественные науки. 2022. № 3 (27). — С. 7–17.

82. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы конечных групп // Ученые записки Брянского государственного университета. 2023. № 1 (29). — С. 11–19.

Материалы конференций

83. *Максаков С.П.* Максимальные подформации Ω-расслоенных формаций конечных групп // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019», Москва, 8 – 12 апреля 2019 г.: тез. докл. / Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – Москва, 2019. Режим доступа: `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2019/data/16175/86011_uid334088_report.pdf`

84. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О направлениях расслоенных и веерных формаций и классов Фиттинга конечных групп // Материалы конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (г. Казань, 24 – 28 июня 2019 г.) – Казань: КФУ, 2019. – С. 165–167.

85. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О субнормальности $\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальных и K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальных подгрупп конечных групп // XIII Школа-конференция по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова, Екатеринбург, 3 – 7 августа 2020 г.: тез. докл. / Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН. – Екатеринбург, 2020. – С. 93–94.

86. *Maksakov S.P.* On the lattice of ω-fibered formations of finite groups // 2020 Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics: Abstracts of 2020 Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics. Yekaterinburg: N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2020. – P. 54.

87. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О прямо разложимых ω-веерных формациях конечных групп // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, 2020. — С. 87–89.

88. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных подгруппах конечных групп // Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 16 – 20 ноября 2020 г.: тез. докл. / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский национальный исследовательский гос. университет. – Новосибирск, 2020. – С. 169.

89. *Максаков С.П.* О свойствах решетки ω-веерных формаций конечных групп // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, 10 – 27 ноября 2020 г.: тез.

докл. / Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – Москва, 2020. Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020_2/data/19357/105594_uid334088_report.pdf

90. *Максаков С.П.* О свойствах прямых разложений ω-веерных формаций конечных групп // Современные тенденции развития фундаментальных и прикладных наук: Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (Брянск, 25 января 2021 г.) / под ред. С.А. Коньшаковой. – Брянск: БГИТУ, 2021. – С. 162–166.

91. *Максаков С.П.* Об алгебраичности решеток ω-веерных формаций конечных групп // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021», Москва, 12 – 23 апреля 2021 г.: тез. докл. / Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – Москва, 2021. Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22110/125085_uid334088_report.pdf

92. *Максаков С.П.* Брауэровы решетки ω-веерных формаций конечных групп // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XIX Международной конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения академика П.Л. Чебышёва. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, 2021. – С. 58–59.

93. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 20 – 24 сентября 2021 г.: тез. докл. / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский национальный исследовательский гос. университет. – Новосибирск, 2021. – С. 106.

94. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О $\mathfrak{G}$-отделимости решетки кратно ω-специальных формаций конечных групп // Международная алгебраическая конференция, посвященная 90-летию со дня рождения А.И. Старостина, Екатеринбург, 4 – 9 октября 2021 г.: тез. докл. / Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН и Уральский федеральный университет. – Екатеринбург, 2021. – С. 49.

95. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Теоретические и прикладные аспекты естественнонаучного образования в эпоху цифровизации: материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Брянск: РИСО БГУ, 2022. – С. 97–99.

96. *Максаков С.П.* О подформациях ω-веерных формаций конечных групп // Международная научная конференция студентов, аспирантов и мо-

лодых ученых «Ломоносов-2022», Москва, 11 – 22 апреля 2022 г.: тез. докл. / Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – Москва, 2022. Режим доступа: `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2022/data/25627/139672_uid334088_report.pdf`

97. *Максаков С.П.* О решетках кратно ω-веерных формаций конечных групп // XIV Международная школа-конференция по теории групп, посвященная памяти В.А. Белоногова, В.А. Ведерникова и Л.А. Шеметкова, Брянск, 5 – 11 сентября 2022 г.: тез. докл. / Брянский государственный униерситет им. И.Г. Петровского. – Брянск, 2022. – С. 44–45.

98. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных и K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 14 – 18 ноября 2022 г.: тез. докл. / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский национальный исследовательский гос. университет. – Новосибирск, 2022. – С. 104.

99. *Максаков С.П.* О решеточных свойствах $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп конечных групп // Международная (54-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Екатеринбург, 6 – 10 и 17 февраля 2023 г.: тез. докл. / Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН. – Екатеринбург, 2023. – С. 17.

100. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О стоуновых решетках ω-веерных формаций конечных групп // Международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 70-летию А.А. Махнева, Нальчик, 9 –15 июля 2023 г.: тез. докл. / Изд-во «Принт-центр». – Нальчик, 2023. – С. 88–89.