На правах рукописи

**МАКСАКОВ**
**Серафим Павлович**

# $\omega$-ВЕЕРНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Брянск, 2024

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского».

Научный руководитель: д-р физ.-матем. наук, доцент
**Сорокина Марина Михайловна**.

Официальные оппоненты: **Монахов Виктор Степанович**,
д-р физ.-матем. наук, профессор, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии, профессор.

**Бажанова Екатерина Николаевна**,
канд. физ.-матем. наук, доцент, ГАОУ ВО «Московский городской педагогический университет», институт цифрового образования, департамент математики и физики, доцент.

Ведущая организация — ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

Защита состоится «  » октября 2024 года в  :  на заседании диссертационного совета 24.1.073.02 при ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук» по адресу: 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16, ауд. «  ». Телефон ученого секретаря: +7 (343) 361-81-02. E-mail: i_belousov@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук» https://www.imm.uran.ru.

Автореферат разослан «  »  2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Белоусов Иван Николаевич

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы диссертационного исследования и степень ее разработанности.** Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Классом групп называется множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы ей изоморфные. В теории классов групп центральное место занимают формации — классы, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, введенные в рассмотрение В. Гашюцем[1]. Теория формаций оказалась эффективным средством для систематизации и обобщения многих результатов теории групп, что обусловило интенсивное развитие теории формаций в последние десятилетия[2,3,4].

Удобным средством для изучения формаций является функциональный подход, заложенный В. Гашюцем[1], согласно которому с помощью функций-спутников (иначе, экранов[2]) были построены локальные формации, наиболее изученные в настоящее время и нашедшие многочисленные применения[2,5,6]. Для локальных формаций в качестве области определения используемых функций-спутников рассматривается множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел. С целью изучения непростых конечных групп оказалось целесообразным в качестве области определения функций-спутников рассмотреть класс $\mathfrak{J}$ всех простых групп. Данная идея была предложена Л.А. Шеметковым[7], в частности, им были построены композиционные формации[2], также хорошо известные и достаточно исследованные в настоящее время[8].

В дальнейшем, идея применения функциональных методов в теории формаций развивалась в направлении изменения области определения используемых функций. Л.А. Шеметковым были определены $\omega$-локальные формации[9] групп, где $\omega$ — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, являющиеся естественным обобщением локальных формаций. Позднее Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба построили $\mathfrak{L}$-композиционные формации[10], где $\mathfrak{L}$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{J}$. Ключевые свойства $\omega$-локальных и $\mathfrak{L}$-композиционных формаций были получены в совместных работах А.Н. Скибы, Л.А. Шеметкова[11,12], многие важные результаты о данных формациях представлены в монографии[13]. Л.А. Шеметковым была завершена разработка метода функционального задания формаций с помощью

[1]Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80, N 4. – P. 300–305.
[2]Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
[3]Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin – New Jork: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
[4]Guo W. The theory of classes of groups. – Beijing, New York: Kluwer Academic Publishers Science Press, 2000. – 259 p.
[5]Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
[6]Ballester-Bolinches A., Ezquerro M. Classes of Finite Groups. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.
[7]Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Матем. сборник. 1974. Т. 94, № 4. – С. 628–648.
[8]Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Мн.: Беларуская навука, 2003. – 254 с.
[9]Шеметков Л.А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 2. – С. 101–103.
[10]Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 4. – С. 5–8.
[11]Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\omega$-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. тр. 1999. Т. 2, № 2. – С. 114–147.
[12]Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. матем. журн. 2000. Т. 52, № 6. – С. 783–797.
[13]Воробьев Н.Н. Алгебра классов конечных групп. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

функций-спутников[14].

Следует отметить, что функциональные методы нашли применение не только в теории формаций групп. Двойственным к понятию формации является понятие класса Фиттинга, введенное в рассмотрение Б. Фишером, В. Гашюцем и Б. Хартли[15]. Развивая функциональный подход В. Гашюца, Б. Хартли с помощью специальной функции (в терминологии[11], функции Хартли) ввел в рассмотрение понятие локального класса Фиттинга[16]. Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой были построены $\omega$-локальные классы Фиттинга и установлены их ключевые свойства[11]. Локальные и $\omega$-локальные классы Фиттинга также достаточно хорошо изучены в настоящее время[13].

В 1999 году В.А. Ведерниковым был предложен функциональный подход к изучению классов конечных групп, основанный на использовании, наряду с функциями-спутниками, еще одной функции — функции-направления. В качестве области определения функций-направлений типа $\delta$ было предложено выбирать множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел, в качестве области определения функций-направлений типа $\varphi$ — класс $\mathfrak{I}$ всех простых групп. В.А. Ведерниковым совместно с М.М. Сорокиной были построены новые серии формаций и классов Фиттинга: серии $\omega$-веерных формаций и $\omega$-веерных классов Фиттинга и серии $\Omega$-расслоенных формаций и $\Omega$-расслоенных классов Фиттинга конечных групп[17,18,19], где $\Omega$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. При этом, $\omega$-локальные формации (классы Фиттинга) составили один из видов серии $\omega$-веерных формаций (классов Фиттинга), а $\Omega$-композиционные формации (классы Фиттинга) — один из видов серии $\Omega$-расслоенных формаций (классов Фиттинга). В.А. Ведерниковым были поставлены следующие проблемы:

**(A)** *Разработать теорию $\omega$-веерных формаций конечных групп*[20].

**(B)** *Разработать теорию $\Omega$-расслоенных формаций конечных групп*[21].

Исследованиями в рамках решения проблемы **(B)** занимались Ю.А. Еловикова, Д.Г. Коптюх, С.В. Чиспияков, М.М. Сорокина, М.А. Корпачева, Е.Н. Демина, А.Б. Еловиков, В.Е. Егорова и другие: изучены решеточные свойства $\Omega$-расслоенных формаций[22], максимальные подформации $\Omega$-расслоенных формаций[23], $\Omega$-расслоенные формации заданной длины[24], критические $\Omega$-расслоенные

[14]Шеметков Л.А. Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная матем. 2010. Т. 16, № 8. – С. 229–244.

[15]Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. Injektoren endlichen auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. V. 102, N 5. – P. 337–339.

[16]Hartley B. On Fischer's analization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. V. 3, N 9. – P. 193–207.

[17]Ведерников В.А. О новых типах $\omega$-веерных формаций конечных групп // Український математичный конгресс – 2001. Секція 1. Праці. Київ. 2002. – С. 36–45.

[18]Ведерников В.А., Сорокина М.М. $\Omega$-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. матем. 2001. Т. 13, № 3. – С. 125–144.

[19]Ведерников В.А., Сорокина М.М. $\omega$-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т. 71, № 1. – С. 43–60.

[20]Ведерников В.А., Сорокина М.М. $\omega$-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт, № 6. – Брянск: БГПУ, 1999. – 23 с.

[21]Ведерников В.А., Сорокина М.М. $\Omega$-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт, № 5. – Брянск: БГПУ, 1999. – 25 с.

[22]Еловикова (Скачкова) Ю.А. Решетки $\Omega$-расслоенных формаций // Дискрет. матем. 2002. Т. 14, № 2. – С. 85–94.

[23]Корпачева М.А., Сорокина М.М. О максимальных $\tau$-замкнутых подформациях $\tau$-замкнутых формаций // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. – С. 35–40.

[24]Ведерников В.А., Коптюх Д.Г. $\Omega$-расслоенные формации $\Omega\varphi$-длины 3 // Сборник научных трудов математического факультета МГПУ. – Москва: МГПУ, 2005. – С. 164–175.

формации[25], факторизации однопорожденных $\Omega$-расслоенных формаций конечных групп[26], исследованы $\Omega$-расслоенные формации мультиоператорных $T$-групп[27]. Касательно решения проблемы **(A)**, был установлен ряд ключевых свойств $\omega$-веерных формаций[17,19], проведено исследование критических $\omega$-веерных формаций[28,29]. Многие аспекты изучения $\omega$-веерных формаций являются в настоящее время недостаточно исследованными.

Как отмечено в монографии А.Н. Скибы[5], уже в первые годы развития теории формаций выделились три общие задачи изучения формаций:

**(1)** разработка методов конструирования локальных формаций с различными заданными свойствами;

**(2)** классификация локальных формаций;

**(3)** применение локальных формаций в вопросах исследования внутреннего строения непростых конечных групп.

С развитием теории формаций понятие локальной формации получило свое естественное развитие в указанных выше направлениях. В этой связи общие задачи **(1)** — **(3)** изучения формаций в рамках рассмотрения локальных формаций распространяются на новые построенные виды формаций.

Естественным обобщением задачи **(1)** в рамках решения проблемы **(A)** является следующая задача:

**(A1)** *Исследовать методы конструирования $\omega$-веерных формаций конечных групп.*

Как отмечено в монографии[2], к основным методам построения локальных формаций относится метод, основанный на использовании групповых функций и экранов, а также некоторые комбинированные методы, например, использование понятия порожденной формации.

В теории формаций групп в рамках решения задачи **(2)** классификации локальных формаций большое внимание уделялось изучению решеточных свойств различных видов локальных формаций. В монографии[30] авторы исследовали решетки формаций алгебраических систем, в том числе решетки локальных формаций конечных групп. В монографии[5] изложены ключевые свойства решетки всех $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций, в частности, исследованы свойства индуктивности, $\mathfrak{G}$-отделимости, модулярности, алгебраичности указанной решетки, доказана недистрибутивность решетки всех $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций, изучены булевы подрешетки данной решетки. В работе[11] были установлены решеточные свойства $n$-кратно $\omega$-локальных формаций и классов Фиттинга, а также сформулирован ряд проблем, связанных с их дальнейшим изу-

[25]Корпачева М.А., Сорокина М.М. О критических $\Omega$-расслоенных формациях конечных групп // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 1. – С. 94–101.

[26]Еловиков А.Б. Факторизация однопорожденных частично расслоенных формаций // Дискрет. матем. 2009. Т. 21, № 3. – С. 99–118.

[27]Ведерников В.А., Демина Е.Н. $\Omega$-расслоенные формации мультиоператорных $T$-групп // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 5. – С. 990–1009.

[28]Корпачева М.А., Сорокина М.М. О критических $\omega$-веерных формациях конечных групп // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 1. – С. 79–85.

[29]Корпачева М.А., Сорокина М.М. Критические $\omega$-веерные $\tau$-замкнутые формации конечных групп // Дискрет. математ. 2011. Т. 23, № 1. – С. 106–115.

[30]Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

чением. Были исследованы решетки всех $n$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций и сформулированы проблемы, связанные с их изучением[12]. В монографии[13] представлено наиболее полное изложение полученных за последние десятилетия результатов о решетках $n$-кратно $\omega$-локальных формаций и $n$-кратно $\omega$-локальных классов Фиттинга конечных групп. О.В. Камозиной исследовались решеточные свойства $\omega$-веерных и $\Omega$-расслоенных классов Фиттинга[31,32]. В работе[22] изучались свойства решетки $\Omega$-расслоенных формаций. Отметим, что до недавнего времени не проводилось исследования решеток $\omega$-веерных формаций.

Таким образом, актуальна следующая задача, являющаяся естественным обобщением задачи **(2)** в рамках решения проблемы **(A)**:

**(A2)** *Исследовать решетки $\omega$-веерных формаций конечных групп.*

С развитием теории классов групп в конечных группах, на основе определений известных видов подгрупп, стали выделять новые виды подгрупп, определяемые с помощью рассматриваемых классов — $\mathfrak{F}$-корадикалы, $\mathfrak{F}$-радикалы, $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы, $\mathfrak{F}$-проекторы, $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы, $\mathfrak{F}$-нормализаторы, $\mathfrak{F}$-нормальные, $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы и многие другие (здесь $\mathfrak{F}$ — класс групп). Данный подход позволил систематизировать известные результаты в теории групп, а также получить их обобщение и дальнейшее развитие. В этом направлении большую роль сыграли локальные и композиционные формации[2,4,8].

Естественным обобщением задачи **(3)** применения локальных формаций в вопросах исследования подгруппового строения конечных групп в рамках решения проблемы **(A)** является следующая задача:

**(A3)** *Применить $\omega$-веерные формации для изучения подгрупп конечных групп.*

Локальные формации успешно применялись к исследованию $\mathfrak{F}$-нормальных и $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп в группах[2]. Л.Я. Поляков[33] для локальной формации $\mathfrak{F}$ установил условия, при которых все $\mathfrak{F}$-абнормальные (в смысле Кегеля) максимальные подгруппы в конечной группе $G$ являются квазисубнормальными, а значит, ввиду теоремы П. Клейдмана[34], нормальными в $G$. Локальные формации нашли применение при изучении $\mathfrak{F}$-субнормальных и $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных (в терминологии[8], $\mathfrak{F}$-достижимых) подгрупп. В совместной работе[35] А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова и В.Н. Семенчука для локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ было получено решение проблемы Л.А. Шеметкова о нахождении условий, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует решетку (пробл. 12 из монографии[2]), а также уста-

[31]Камозина О.В. О неоднопорождённых $\omega$-веерных классах Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 3. – С. 366–376.
[32]Камозина О.В. Алгебраические решетки кратно $\Omega$-расслоенных классов Фиттинга // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 2. – С. 139–145.
[33]Поляков Л.Я. К теории обобщенных субнормальных подгрупп конечных групп // Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1981. – С. 62–66.
[34]Kleidman P.B. A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. of Math. (2), 1991. V. 133, N 2. – P. 369–428.
[35]Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 27–52.

новлена эквивалентность данной проблемы и аналогичной задачи О. Кегеля[36] о $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах для случая, когда $\mathfrak{F}$ является локальной наследственной формацией.

При изучении и применении $\omega$-локальных формаций целесообразным оказалось рассмотрение подгрупп в конечных группах с учетом множества $\omega$. На этом пути были определены $\omega$-примитивные группы, $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы, $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторы, $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы групп и установлены их основные свойства[37]. Естественным является вопрос рассмотрения обобщений понятий $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной) максимальной подгруппы, $\mathfrak{F}$-субнормальной ($K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной) подгруппы с учетом множества $\omega$ и установления их свойств для $\omega$-локальной формации $\mathfrak{F}$.

**Цель диссертационного исследования.**
В диссертации ставится целью решение задач **(А1)** — **(А3)**.

**Основные результаты диссертации.**

**1.** Получено решение задачи **(А1)** исследования методов конструирования $\omega$-веерных формаций групп в следующих аспектах:

(А1.1) построены $\omega$-веерные формации, определяемые значениями функций-направлений (теоремы 1.2.1, 1.2.2);

(А1.2) построены $\omega$-веерные формации с помощью описания функций-спутников (теоремы 1.3.1 — 1.3.3);

(А1.3) получены результаты, характеризующие внутреннюю структуру $\omega$-веерных формаций (теоремы 1.4.1 — 1.4.5);

(А1.4) исследованы свойства $\omega$-веерных формаций, построенных посредством применения решеточных операций (теоремы 1.5.1 — 1.5.4).

**2.** Получено решение задачи **(А2)** исследования свойств решеток $\omega$-веерных формаций конечных групп в следующих аспектах:

(А2.1) доказана модулярность решетки всех $\omega$-веерных формаций (теорема 2.2.1);

(А2.2) установлены условия, при которых решетки $\omega$-веерных формаций обладают свойствами дистрибутивности, дополняемости, алгебраичности, стоуновости (теоремы 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1, 2.6.2).

**3.** Получено решение задачи **(А3)** применения $\omega$-веерных формаций к изучению подгрупп конечных групп в следующих аспектах:

[36] Kegel O.H. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math., 1978. V. 30, N 3. – P. 225–228.
[37] Ведерников В.А., Сорокина М.М. $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы конечных групп // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 1. – С. 64–82.

(A3.1) определены $\mathfrak{F}^\omega$-нормальные и $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальные максимальные подгруппы группы и для $\omega$-локальной ($\omega$-веерной с направлением $\delta_1$) формации $\mathfrak{F}$ получено описание строения конечной группы $G$, все $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальные максимальные подгруппы которой являются нормальными (теорема 3.2.1);

(A3.2) определены $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы и для $\omega$-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых в любой конечной группе $G$ множество всех ее $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку (теорема 3.3.1).

(A3.3) определены $K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы и для $\omega$-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между решеточными свойствами $K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных и $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп в $\omega$-разрешимых группах (теорема 3.5.2).

**Научная новизна.** Все результаты диссертации являются новыми, что подтверждается их опубликованностью в 2019 — 2024 гг. в журналах «Дискретная математика», «Математические заметки», «Труды Института математики и механики УрО РАН», «Lobachevskii Journal of Mathematics», «Известия Саратовского университета. Новая серия» и др. Доказанные в диссертации теоремы развивают известные результаты работ Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы, Д. Хоукса, Р. Бэра, С.Ф. Каморникова, В.Н. Семенчука, А.Ф. Васильева, Л.Я. Полякова, И.П. Шабалиной и других авторов.

**Методы исследования.** В диссертации используются классические методы теории групп, а также методы теории классов групп.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и теории классов конечных групп, при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в шести статьях [1–6] в журналах, входящих в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий. Все результаты диссертации опубликованы в четырнадцати статьях [1–14] в рецензируемых научных изданиях, а также в сборниках материалов Международных и Всероссийских научных конференций (см., например, [15–22]).

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации апробировались:

— на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в рамках семинара кафедры высшей алгебры МГУ «Избранные вопросы алгебры» (2019, 2020, 2021, 2022 гг., Москва);

— на Международной конференции «Мальцевские чтения» (2020, 2021, 2022 гг., Новосибирск);

— на Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвященной 125-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского ун-та члена-корреспондента АН СССР Н.Г. Чеботарева и 75-летию со дня рождения заведующего кафедрой академика АН РТ М.М. Арсланова (2019 г., Казань);

— на XIII Международной школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова (2020 г., Екатеринбург);

— на Международной конференции «2020 Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics» (2020 г., Екатеринбург);

— на Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной столетию со дня рождения профессоров Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина (2020 г., Тула);

— на Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П.Л. Чебышева (2021 г., Тула);

— на Международной алгебраической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А.И. Старостина (2021 г., Екатеринбург);

— на XIV Международной школе-конференции по теории групп, посвященной памяти В.А. Белоногова, В.А. Ведерникова и Л.А. Шеметкова (2022 г., Брянск);

— на Международной (54-ой Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (2023 г., Екатеринбург);

— на Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 70-летию А.А. Махнева (2023 г., Нальчик);

— на Всероссийской с международным участием конференции «Современные тенденции развития фундаментальных и прикладных наук» (2019, 2020, 2021 гг., Брянск);

— на семинарах кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского (2018 – 2024 гг., Брянск).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, обзора результатов, трех глав основной части, заключения, перечня условных обозначений и определений, перечня известных результатов, используемых в диссертации, списка литературы (100 наименований), составленного в алфавитном порядке, включающего 68 используемых источников и 32 публикации автора диссертации по теме исследования. Объем диссертации — 120 страниц.

# Основное содержание работы

**Глава 1** диссертации посвящена решению задачи **(A1)** исследования методов конструирования $\omega$-веерных формаций конечных групп.

Параграф 1.1 носит вводный характер. В нем представлены основные определения теории $\omega$-веерных формаций.

Через $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}, \mathfrak{N}$ обозначаются соответственно классы всех конечных, всех конечных разрешимых и всех конечных нильпотентных групп, $\mathfrak{E}$ — класс всех единичных групп; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; $\omega$ — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $\mathfrak{G}_\omega$ и $\omega\mathfrak{S}$ — классы всех $\omega$-групп и всех $\omega$-разрешимых групп соответственно; $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная $\omega$-подгруппа группы $G$. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Через $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{G}_{p'}$ обозначаются соответственно классы всех $p$-групп и всех $p'$-групп; $\mathfrak{S}_{cp}$ — класс всех групп, у которых каждый главный $p$-фактор централен; $\mathfrak{G}_{(Z_p)'}$ — класс всех групп, у которых нет композиционных факторов, изоморфных $Z_p$, где $Z_p$ — группа порядка $p$. Для непустого множества групп $\mathfrak{X}$ через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$.

**Определение 1.1.1.** (1) Функции $\delta : \mathbb{P} \to$ {непустые формации Фиттинга}, $f : \omega \cup \{\omega'\} \to$ {формации}, где $f(\omega') \neq \varnothing$, $h : \mathbb{P} \to$ {формации} называются соответственно $\mathbb{P}FR$*-функцией*, $\omega F$*-функцией* и $\mathbb{P}F$*-функцией*[19].

(2) Формация $\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\ )$, где $G_{\delta(p)}$ — $\delta(p)$-радикал группы $G$, называется *$\omega$-веерной формацией с направлением $\delta$* (коротко, *$\omega\delta$-веерной формацией*) и *$\omega$-спутником $f$*, обозначается $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$[19].

(3) Формация $\mathfrak{H} = (\ G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\delta(p)} \in h(p)$ для всех $p \in \pi(G)\ )$ называется *веерной формацией с направлением $\delta$* (коротко, *$\delta$-веерной формацией*) и *спутником $h$*, обозначается $\mathfrak{H} = \mathbb{P}F(h, \delta)$[19].

$\mathbb{P}FR$-функции $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ определяются соответственно следующими равенствами: $\delta_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$, $\delta_1(p) = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$, $\delta_2(p) = \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p$, $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$, для любого $p \in \mathbb{P}$[17].

**Определение 1.1.2.** $\omega$-Веерная (веерная) формация с $\omega$-спутником (спутником) $f$ и направлением $\delta_0$ называется *$\omega$-полной* (*полной*) и обозначается $\omega AF(f)$ $(AF(f))$; с направлением $\delta_1$ — *$\omega$-локальной* (*локальной*) и обозначается $\omega LF(f)$ $(LF(f))$; с направлением $\delta_2$ — *$\omega$-специальной* (*специальной*) и обозначается $\omega SF(f)$ $(SF(f))$; с направлением $\delta_3$ — *$\omega$-центральной* (*центральной*) и обозначается $\omega ZF(f)$ $(ZF(f))$[17].

**Определение 1.1.3.** Направление $\delta$ $\omega$-веерной (веерной) формации называется: *$a$-направлением*, если $Z_q \in \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; *$b_q$-направлением*, где $q \in \mathbb{P}$, если $\delta(q) = \delta(q)\mathfrak{N}_q$; *$b$-направлением*, если $\delta$ — $b_q$-направление для любого $q \in \mathbb{P}$; *$p$-направлением*, если $\delta(q) = \mathfrak{G}_{q'}\delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; *$r$-направлением*, если $\delta(q) = \mathfrak{G}_{(Z_q)'}\delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; *$s$-направлением*, если формация Фиттинга $\delta(q)$ $q$-разрешима для любого $q \in \mathbb{P}$[17].

Параграф 1.2 посвящен построению $\omega$-веерных формаций, определяемых значениями функций-направлений (задача (A1.1)).

Хорошо известно, что класс $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ всех конечных $p$-нильпотентных групп, где $p \in \mathbb{P}$, определяющий направление локальной формации, также является локальной формацией[2]. В теореме 1.2.1 установлены условия, при которых значения функций-направлений $\omega$-веерных формаций также являются $\omega$-веерными формациями.

**Теорема 1.2.1.** [2] *Пусть $\delta$ — $\mathbb{P}FR$-функция. Если $\delta$ — $p$-направление $\omega$-веерной формации, то для любого $q \in \omega$ формация $\delta(q)$ является $\omega$-веерной формацией с направлением $\delta$.*

**Следствие 1.2.1.** *Если $\delta$ — $p$-направление веерной формации, то для любого простого числа $q$ формация $\delta(q)$ является веерной формацией с направлением $\delta$.*

**Следствие 1.2.2.** *Для любого $q \in \omega$ класс $\mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является $\omega$-локальной формацией.*

**Следствие 1.2.3.** (Л.А. Шеметков[2]) *Для любого $q \in \mathbb{P}$ класс $\mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является локальной формацией.*

**Следствие 1.2.4.** *Для любого $q \in \omega$ (для любого $q \in \mathbb{P}$ ) класс $\mathfrak{G}_{(Z_q)'}\mathfrak{N}_q$ является $\omega$-специальной (специальной) формацией.*

**Следствие 1.2.5.** *Для любого $q \in \omega$ (для любого $q \in \mathbb{P}$ ) класс $\mathfrak{S}_{cq}$ является $\omega$-центральной (центральной) формацией.*

В теореме 1.2.2 установлено, что всякое направление $\delta$ $\omega$-веерной формации для любого $q \in \omega$ определяет $\omega$-веерную формацию вида $\mathfrak{G}_\omega\delta(q)$.

**Теорема 1.2.2.** [2] *Пусть $\delta$ — произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. Тогда формация $\mathfrak{G}_\omega\delta(q)$ является $\omega$-веерной формацией с направлением $\delta$ для любого $q \in \omega$.*

**Следствие 1.2.6.** *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{G}_{q'}$ является $\omega$-полной формацией для любого $q \in \omega$.*

**Следствие 1.2.7.** *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является $\omega$-локальной формацией для любого $q \in \omega$.*

**Следствие 1.2.8.** *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{G}_{(Z_q)'}\mathfrak{N}_q$ является $\omega$-специальной формацией для любого $q \in \omega$.*

**Следствие 1.2.9.** *Класс групп $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{S}_{cq}$ является $\omega$-центральной формацией для любого $q \in \omega$.*

Параграф 1.3 посвящен построению $\omega$-веерных формаций с помощью описания их функций-спутников (задача (A1.2)).

В монографии[2] большое внимание уделяется методу построения локальных формаций с помощью групповых функций и экранов. Указанным способом было установлено, что формации всех групп, всех единичных групп, всех $\pi$-групп, всех $\pi$-разрешимых групп, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, и многие другие являются локальными формациями[2]. В теоремах 1.3.1 — 1.3.3 соответственно установлено, что формации $\omega\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_p$ являются $\omega$-веерными формациями посредством описания их $\omega$-спутников.

**Теорема 1.3.1.** [12] *Пусть $\delta$ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся $s$-*

*направлением $\omega$-веерной формации, $\delta_0 \le \delta$. Тогда $\omega\mathfrak{S} = \omega F(f,\delta)$, где $f$ — такая $\omega F$-функция, что $f(\omega') = \omega\mathfrak{S}$ и $f(p) = \omega\mathfrak{S}$ для любого $p \in \omega$.*

**Следствие 1.3.2.** *Класс $\omega\mathfrak{S}$ является $\omega$-локальной формацией, причем $\omega\mathfrak{S} = \omega LF(f)$, где $f$ — такая $\omega F$-функция, что $f(\omega') = \omega\mathfrak{S}$ и $f(p) = \omega\mathfrak{S}$ для любого $p \in \omega$.*

**Следствие 1.3.5.** (Л.А. Шеметков[2]) *Класс $\mathfrak{S}$ является локальной формацией, причем $\mathfrak{S} = LF(f)$, где $f$ — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{S}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

**Теорема 1.3.2.** [20] *Пусть $\delta$ — $bps$-направление $\omega$-веерной формации, удовлетворяющее условию $\delta \le \delta_3$. Тогда $\mathfrak{N} = \omega F(f,\delta)$, где $f$ — такая $\omega F$-функция, что $f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$.*

**Следствие 1.3.7.** *Класс $\mathfrak{N}$ является $\omega$-локальной формацией, причем $\mathfrak{N} = \omega LF(f)$, где $f$ — такая $\omega F$-функция, что $f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$.*

**Следствие 1.3.8.** (Л.А. Шеметков[2]) *Класс $\mathfrak{N}$ является локальной формацией, причем $\mathfrak{N} = LF(f)$, где $f$ — такая $\mathbb{P}F$-функция, что $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Через $\omega F(\mathfrak{X},\delta)$ (соответственно $\omega F(G,\delta)$) обозначается $\omega$-веерная формация с направлением $\delta$, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$ (группой $G$)[19].

**Теорема 1.3.3.** [12] *Пусть $\delta$ — $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся $b$-направлением $\omega$-веерной формации, $\delta_0 \le \delta$, $p \in \omega$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *$\mathfrak{N}_p = \omega F(f,\delta)$, где $f$ — $\omega F$-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{E}$, $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$.*

(2) *$\mathfrak{N}_p = \omega F(Z_p,\delta)$.*

**Следствие 1.3.10.** *Пусть $p \in \omega$. Тогда $\mathfrak{N}_p = \omega LF(f)$, где $f$ — $\omega F$-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{E}$, $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$.*

**Следствие 1.3.11.** (Л.А. Шеметков[2]) *Пусть $p \in \mathbb{P}$. Тогда $\mathfrak{N}_p = LF(f)$, где $f$ — $\mathbb{P}F$-функция такая, что $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$.*

При исследовании методов конструирования локальных формаций большую роль играют вопросы изучения их внутренней структуры[5]. В параграфе 1.4 проводится исследование внутреннего строения $\omega$-веерных формаций (задача (A1.3)).

В теореме 1.4.1 получено описание строения $\omega\delta$-веерной формации, не содержащей нетривиальных $\omega\delta$-веерных подформаций.

**Теорема 1.4.1.** [12] *Пусть $\delta$ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \le \delta$ и $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega\delta$-веерная формация. Если $\mathfrak{F}$ содержит лишь тривиальные $\omega\delta$-веерные подформации, то $\mathfrak{F} = \omega F(G,\delta)$, где $G$ — простая группа.*

В теореме 1.4.2 установлены условия, при которых $\omega\delta$-веерная формация обладает единственной максимальной $\omega\delta$-веерной подформацией.

**Теорема 1.4.2.** [11] *Пусть $\delta$ — $\mathbb{P}FR$-функция. Если $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-неприводимая формация, то в ней существует единственная максимальная $\omega\delta$-веерная под-*

*формация.*

В теореме 1.4.3 описаны свойства формации, порождающей $\omega\delta$-веерную формацию.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность формаций, удовлетворяющая условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{E}$ для любых различных $i, j \in I$. Через $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ обозначается совокупность всех групп вида $A_{i_1} \times ... \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, ..., A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, ..., i_t \in I$, и говорят, что класс $\mathfrak{F}$ прямо разложим на классы (множители) $\mathfrak{F}_i$ (является прямым разложением классов $\mathfrak{F}_i$), $i \in I$ [5]. В теореме 1.4.4 установлена взаимосвязь между свойствами множителей прямо разложимой $\omega\delta$-веерной формации $\mathfrak{F}$.

**Теорема 1.4.4.** [11] *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega\delta$-веерная формация с $bp$-направлением $\delta$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{H}, \mathfrak{L}$ — неединичные формации, $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \neq \varnothing$, $\pi(\mathfrak{L}) \cap \omega \neq \varnothing$ и $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega = \varnothing$. Если $\mathfrak{H}$ — $\omega\delta$-веерная формация, то и $\mathfrak{L}$ также является $\omega\delta$-веерной формацией.*

В теореме 1.4.5 установлены условия, при которых прямое разложение $\omega\delta$-веерных формаций является $\omega\delta$-веерной формацией.

Параграф 1.5 посвящен исследованию $\omega$-веерных формаций, построенных посредством применения решеточных операций (задача (A1.4)).

Пусть $\Theta$ — непустое множество формаций. Формация $\mathfrak{F}$ называется $\Theta$-*формацией*, если $\mathfrak{F} \in \Theta$. Для множества групп $\mathfrak{X}$ через $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех $\Theta$-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$ [5]. Для любых $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$, полагаем: $\wedge_{\Theta_{i \in I}}\mathfrak{F}_i = \cap_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, $\vee_{\Theta_{i \in I}}\mathfrak{F}_i = \Theta\mathrm{form}(\cup_{i \in I}\mathfrak{F}_i)$ [30]. Если пересечение любой совокупности $\Theta$-формаций является $\Theta$-формацией, то множество $\Theta$ относительно введенных операций образует решетку. В таком случае формация $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ является наименьшей $\Theta$-формацией, содержащей множество групп $\mathfrak{X}$, и называется $\Theta$-*формацией, порожденной множеством* $\mathfrak{X}$. К способам конструирования $\Theta$-формаций относится способ их получения в результате применения к формациям из $\Theta$ операций $\wedge_\Theta$ и $\vee_\Theta$.

Непустая совокупность формаций $\Theta$ называется *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из $\Theta$ снова принадлежит $\Theta$ и в $\Theta$ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех формаций $\mathfrak{M} \in \Theta$ [5]. Пусть $\theta$ — произвольная полная решетка формаций. В соответствии с терминологией[5], $\omega F$-функция ($\mathbb{P}F$-функция) называется *$\theta$-значной*, если каждое ее непустое значение принадлежит $\theta$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество $\theta$-значных $\omega F$-функций ($\mathbb{P}F$-функций). Тогда полагаем: $\wedge_{\theta_{i \in I}} f_i = h$, $\vee_{\theta_{i \in I}} f_i = f$ — такие $\omega F$-функции ($\mathbb{P}F$-функции), что для любого $x \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для любого $x \in \mathbb{P}$) имеет место:

$$h(x) = \wedge_{\theta_{i \in I}} f_i(x);$$

$$f(x) = \begin{cases} \vee_{\theta_{i \in I}} f_i(x), & \text{если } f_j(x) \neq \varnothing \text{ для некоторого } j \in I, \\ \varnothing, & \text{если } f_i(x) = \varnothing \text{ для всех } i \in I. \end{cases}$$

Через $\omega\delta F$ обозначается множество всех $\omega\delta$-веерных формаций; через $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ — множество всех $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$; через $\omega\delta F_\theta$ — множество всех $\omega\delta$-веерных формаций, обладающих хотя бы одним $\theta$-значным $\omega$-спутником.

В теореме 1.5.1 для полной решетки формаций $\theta$ изучается строение минимального $\theta$-значного $\omega$-спутника $\omega\delta$-веерной формации, полученной из $\omega\delta$-веерных формаций посредством операции решеточного объединения.

**Теорема 1.5.1.** [5] *Пусть $\theta$ — полная решетка формаций, $\delta$ — такая $\mathbb{P}FR$-функция, что $\delta_0 \leq \delta$, $\Theta = \omega\delta F_\theta$, $f_i$ — минимальный $\theta$-значный $\omega$-спутник формации $\mathfrak{F}_i \in \Theta$, $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta_{i\in I}} \mathfrak{F}_i$. Тогда $\vee_{\theta_{i\in I}} f_i$ — минимальный $\theta$-значный $\omega$-спутник формации $\mathfrak{F}$.*

В теоремах 1.5.2 и 1.5.3 установлены простейшие решеточные свойства однопорожденной $\omega\delta$-веерной формации, т.е. $\omega\delta$-веерной формации, полученной из $\omega\delta$-веерных формаций, содержащих фиксированную группу, с помощью операции решеточного объединения.

**Теорема 1.5.2.** [16] *Пусть $G$ — группа, $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда решетка $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ имеет конечное число атомов в каждом из случаев*:

(1) $\mathfrak{F}$ — *$\omega$-разрешимая формация*;

(2) $\delta$ — *$s$-направление.*

**Следствие 1.5.6.** (Н.Н. Воробьев[13]) *Пусть $G$ — группа, $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$. Тогда решетка всех $\omega$-локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$ имеет конечное число атомов.*

**Следствие 1.5.7.** (А.Н. Скиба[5]) *Пусть $G$ — группа, $\mathfrak{F} = LF(G)$. Тогда решетка всех локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$ имеет конечное число атомов.*

**Теорема 1.5.3.** [12] *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где $G$ — простая $\omega$-отделимая группа, $\delta$ — $b$-направление и $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $|\omega\delta F(\mathfrak{F})| \leq 3$.*

В теореме 1.5.4 получено описание $\omega\delta$-веерной формации $\mathfrak{F}$ $\omega$-разрешимых групп, имеющей в точности три $\omega\delta$-веерные подформации.

**Глава 2** диссертации посвящена решению задачи **(А2)** исследования свойств решеток $\omega$-веерных формаций конечных групп.

Параграф 2.1 носит вспомогательный характер. В теореме 2.1.1 установлены условия, при которых решетка $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является $\omega\delta$-индуктивной. Пусть $\Theta$ — некоторая полная решетка формаций. Следуя терминологии[5], решетка $\Theta$ называется *$\omega\delta$-индуктивной решеткой*, если для всякого набора формаций $\{\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i, \delta) \mid i \in I\}$, где $f_i$ — внутренний $\Theta$-значный $\omega$-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, имеет место равенство $\omega F(f, \delta) = \vee_{\omega\delta F_{i\in I}}(\mathfrak{F}_i)$, где $f = \vee_{\Theta_{i\in I}} f_i$.

**Теорема 2.1.1.** [3] *Пусть $\delta$ — $bp$-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество $\theta_{\mathfrak{G}}$ всех формаций конечных групп является $\omega\delta$-индуктивной решеткой.*

Параграф 2.2 посвящен доказательству модулярности решетки всех $\omega$-веерных формаций, а также применению данного свойства к исследованию подформационного строения $\omega$-веерных формаций (задача (A2.1)).

Решетка $\Theta$ называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in \Theta$ таких, что $y \leq x$, справедливо: $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = y \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$ [38]. Центральным результатом параграфа 2.2 является следующая теорема.

**Теорема 2.2.1.** [3] *Пусть $\delta$ — $\mathfrak{b}p$-направление $\omega\delta$-веерной формации, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда множество $\omega\delta F$ всех $\omega\delta$-веерных формаций является модулярной решеткой.*

**Следствие 2.2.2.** (Н.Н. Воробьев[13]) *Множество всех $\omega$-локальных формаций является модулярной решеткой.*

**Следствие 2.2.3.** (А.Н. Скиба[5]) *Множество всех локальных формаций является модулярной решеткой.*

Из теоремы 2.2.1 также вытекает модулярность решетки всех $\omega$-специальных (специальных) и $\omega$-центральных (центральных) формаций.

В теоремах 2.2.2 — 2.2.4 свойство модулярности решетки $\omega\delta F$ используется для исследования подформационного строения $\omega\delta$-веерных формаций. Пусть $\delta$ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$. Следуя терминологии[5], группа $G \in \mathfrak{F}$ называется *$\omega\delta$-необразующей* группой формации $\mathfrak{F}$, если из того, что $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \delta)$, всегда следует равенство $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \delta)$. Если $\mathfrak{F} \in \omega LF$, то $\omega\delta_1$-необразующую группу формации $\mathfrak{F}$ будем называть *$\omega L$-необразующей* группой формации $\mathfrak{F}$. Аналогично определяются $\delta$-необразующие (в частности, $L$-необразующие) группы. Через $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$ обозначим пересечение всех максимальных $\omega\delta$-веерных подформаций формации $\mathfrak{F}$; $\Phi_{\omega LF}(\mathfrak{F})$ ($\Phi_{LF}(\mathfrak{F})$) — пересечение всех максимальных $\omega$-локальных (локальных) подформаций формации $\mathfrak{F}$.

**Теорема 2.2.4.** [11] *Пусть $\delta$ — $\mathfrak{b}p$-направление, $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{F} \in \omega\delta F$. Тогда формация $\Phi_{\omega\delta F}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех $\omega\delta$-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

**Следствие 2.2.12.** (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков[11]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega$-локальная формация. Тогда формация $\Phi_{\omega LF}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех $\omega L$-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

**Следствие 2.2.13.** (А.Н. Скиба[5]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда формация $\Phi_{LF}(\mathfrak{F})$ совпадает с множеством всех $L$-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

Параграфы 2.3 — 2.6 посвящены исследованию основных свойств решеток $\omega$-веерных формаций (задача (A2.2)).

В параграфе 2.3 изучаются дистрибутивные решетки $\omega$-веерных формаций. Решетка $\Theta$ называется *дистрибутивной*, если для любых $x, y, z \in \Theta$ справедливо равенство: $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = (x \wedge_\Theta y) \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$ [38]. Центральным результатом параграфа 2.3 является следующая теорема.

**Теорема 2.3.1.** [3] *Пусть $\delta$ — $\mathfrak{b}p$-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка.*

[38] Биркгоф Г. Теория решеток. – Москва: Наука, 1984. – 568 с.

Параграф 2.4 посвящен установлению условий, при которых решетка всех $\omega$-веерных подформаций заданной $\omega$-веерной формации $\mathfrak{F}$ является решеткой с дополнениями. Решетка $\Theta$ с нулем $O$ и единицей $I$ называется *решеткой с дополнениями*, если для любого элемента $x \in \Theta$ существует дополнение в $\Theta$, т.е. такой элемент $y \in \Theta$, что $x \wedge_\Theta y = O$ и $x \vee_\Theta y = I$. Центральным результатом параграфа 2.4 является следующая теорема.

**Теорема 2.4.1.** [3] *Пусть $\delta$ — $\mathfrak{b}p$-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех атомов решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i)\cap\omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.*

Дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой решеткой*[38].

**Следствие 2.4.4.** *Пусть $\delta$ — $\mathfrak{b}p$-направление, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F} \in \omega\delta F$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

**Следствие 2.4.7.** (А.Н. Скиба[5]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная локальная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $LF(\mathfrak{F})$. Тогда $LF(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

В параграфе 2.5 доказана алгебраичность решетки $\omega\delta F_\theta$ всех $\omega$-веерных формаций с направлением $\delta$ и $\theta$-значным $\omega$-спутником при условии, что решетка формаций $\theta$ является алгебраической. Решетка $\Theta$ называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов решетки $\Theta$[38].

**Теорема 2.5.1.** [5] *Пусть $\theta$ — полная решетка формаций, $\delta$ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Если решетка $\theta$ является алгебраической, то решетка $\omega\delta F_\theta$ (решетка $\delta F_\theta$ ) также является алгебраической.*

**Следствие 2.5.1.** *Пусть $\tau$ — регулярный подгрупповой функтор. Тогда решетка $\omega\delta F_\tau$ (решетка $\delta F_\tau$) всех $\omega\delta$-веерных ($\delta$-веерных) формаций, обладающих $\tau$-замкнутым $\omega$-спутником (спутником), является алгебраической для любой $\mathbb{P}FR$-функции $\delta$, удовлетворяющей условию $\delta_0 \leq \delta$.*

**Следствие 2.5.2.** *Решетка $\omega\delta F$ (решетка $\delta F$) всех $\omega\delta$-веерных ($\delta$-веерных) формаций является алгебраической для любой $\mathbb{P}FR$-функции $\delta$, удовлетворяющей условию $\delta_0 \leq \delta$.*

**Следствие 2.5.4.** *Решетки всех нормально наследственных $\omega$-локальных, локальных, $\omega$-специальных, специальных, $\omega$-центральных, центральных формаций являются алгебраическими.*

**Следствие 2.5.5.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta$ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Тогда решетка $\omega\delta^n F$ (решетка $\delta^n F$) всех $n$-кратно $\omega\delta$-веерных ($n$-кратно $\delta$-веерных) формаций является алгебраической.*

**Следствие 2.5.7.** (А.Н. Скиба[5]) *Решетка всех $n$-кратно $\omega$-локальных ($n$-кратно локальных) формаций является алгебраической для любого $n \in \mathbb{N}$.*

**Замечание 2.5.1.** Алгебраичность решетки всех нормально наследственных $\omega$-локальных формаций следует также из результата И.П. Шабалиной[39].

[39]Шабалина И.П. Алгебраичность решетки $\tau$-замкнутых $n$-кратно $\omega$-локальных формаций // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры – 18. 2002. Т. 5, № 14. – С. 59–67.

Алгебраичность решетки всех нормально наследственных локальных формаций вытекает из результата А.Н. Скибы[5] (см., п. 4.4.4).

В параграфе 2.6 установлены условия стоуновости решеток $\omega$-веерных формаций. Пусть $\Theta$ — решетка, $a, b \in \Theta$, $\mathcal{X}_{a,b}$ — совокупность всех элементов из $\Theta$, удовлетворяющих условию $a \wedge_\Theta x \leq b$. Наибольший элемент множества $\mathcal{X}_{a,b}$ называется *относительным псевдодополнением $a$ в $b$* и обозначается $b|a$. Пусть $\Theta$ — решетка с нулем $O$, $a \in \Theta$. Элемент $O|a$ называется *псевдодополнением элемента $a$* и обозначается $a^*$. Дистрибутивная решетка $\Theta$ с нулем $O$ и единицей $I$ называется *стоуновой*, если $\Theta$ — решетка с псевдодополнениями и $a^* \vee^\Theta (a^*)^* = I$ для любого $a \in \Theta$[40]. В теореме 2.6.2 установлены условия, при которых решетка $\omega$-веерных формаций является стоуновой.

**Теорема 2.6.2.** [6] *Пусть $\delta$ — bp-направление $\omega$-веерной формации, $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega\delta$-веерная формация, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $\Theta = \omega\delta F(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\Theta$ является стоуновой решеткой.*

Из теоремы 2.6.2 получаем соответствующие результаты для $\omega$-локальных (локальных), $\omega$-специальных (специальных), $\omega$-центральных (центральных) формаций.

**Глава 3** диссертации посвящена решению задачи **(А3)** применения $\omega$-веерных формаций к изучению подгрупп конечных групп.

В параграфе 3.1 определены $\mathfrak{F}^\omega$-нормальные и $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальные максимальные подгруппы группы и для $\omega$-локальной ($\omega$-веерной с направлением $\delta_1$) формации $\mathfrak{F}$ получено описание строения группы $G$, все $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальные максимальные подгруппы которой являются нормальными (задача (А3.1)).

**Определение 3.1.1.** [1] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Максимальная подгруппа $M$ группы $G$ называется

— $\mathfrak{F}^\omega$-*нормальной* в $G$, если $G/(Core_G(M) \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{F}$;

— $\mathfrak{F}^\omega$-*абнормальной* в $G$, если $G/(Core_G(M) \cap O_\omega(G)) \notin \mathfrak{F}$.

**Замечание 3.1.1.** Если $\pi(G) \subseteq \omega$, то $O_\omega(G) = G$ и, следовательно, в этом случае понятия $\mathfrak{F}^\omega$-нормальной и $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной и $\mathfrak{F}$-абнормальной) максимальных подгрупп группы $G$ совпадают для любого непустого класса групп $\mathfrak{F}$. В случае, когда класс $\mathfrak{F}$ является гомоморфом, множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-нормальных максимальных подгрупп группы $G$ для любого множества $\omega$ содержится во множестве всех ее $\mathfrak{F}$-нормальных максимальных подгрупп, а множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальных максимальных подгрупп группы $G$ включает в себя множество всех ее $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп.

Л.Я. Поляков[33] для локальной формации $\mathfrak{F}$ установил условия, при которых все $\mathfrak{F}$-абнормальные (в смысле Кегеля) максимальные подгруппы в конечной группе $G$ являются квазисубнормальными, а значит, ввиду теоремы П. Клейдмана[34], нормальными в $G$. Центральным результатом параграфа 3.1

[40] Гретцер Г. Общая теория решеток. Перевод с англ. — Москва: Мир, 1981. – 456 с.

является следующая теорема, которая развивает указанный результат Л.Я. Полякова.

**Теорема 3.1.1.** [1] *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— нормально наследственная* $\omega$*-локальная формация, замкнутая относительно расширений,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\omega \subseteq \pi$, $G$ *— группа. Если каждая* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-абнормальная максимальная подгруппа группы* $G$ *является нормальной в* $G$, *то* $G = A \rtimes B$, *где* $A \in \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi\cap\omega'}$, $B \in \mathfrak{N}_{\omega'}$.

При доказательстве теоремы 3.1.1 используется следующий результат, являющийся обобщением известного результата Р. Бэра[41] о примитивных группах.

**Лемма 3.1.2.** [1] *Пусть* $G$ *—* $\omega$*-примитивная группа. Если* $G$ *обладает единственной минимальной нормальной* $\omega$*-подгруппой* $L$ *и индексы всех* $\omega$*-примитиваторов группы* $G$ *имеют общий делитель* $p \in \omega$, *то* $L$ *является абелевой* $p$*-группой.*

В теореме 3.1.2 установлены условия, при которых в группе $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы являются нормальными.

**Теорема 3.1.2.** [1] *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $G$ *— группа. Если* $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, *то всякая* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-абнормальная максимальная подгруппа группы* $G$, *индекс которой есть* $\pi'$*-число, является нормальной в* $G$.

В параграфе 3.2 определены $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы группы и описаны их простейшие свойства. В параграфе 3.3 для $\omega$-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых в любой группе $G$ множество всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку (задача (A3.2)).

**Определение 3.2.1.** [13] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $H$ — подгруппа группы $G$. $(G-H)$-цепь группы $G$ называется *$\omega$-цепью относительно* $\mathfrak{F}$ (или, иначе, *$(G-H)^{\omega}$-цепью относительно* $\mathfrak{F}$), если $\mathfrak{F}$-корадикал каждого члена данной цепи является $\omega$-группой.

**Определение 3.2.2.** [13] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа $H$ группы $G$ называется *$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной* в $G$, если либо $H = G$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — $\omega$-группа, либо существует максимальная $(G-H)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset ... \supset H_k = H$ такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,k}$.

**Замечание 3.2.1.** Всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы $G$ является ее $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой. В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, понятие $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной подгруппы группы $G$ совпадает с понятием $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы группы $G$.

В параграфе 3.2 установлены простейшие свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в конечных группах.

**Лемма 3.2.1.** [13] *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если* $H \leq G$, $H^{\mathfrak{F}}$ *—* $\omega$*-группа и* $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap O_{\omega}(G)$, *то* $H$ *—* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-субнормальная подгруппа в* $G$.

(2) *Если* $H$ *—* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-субнормальная подгруппа в* $G$ *и* $K \leq G$, *то* $H \cap K$ *—* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-субнормальная подгруппа в* $K$. *В частности, если* $H$ *—* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-субнормальная*

[41] Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. – P. 115–187.

*подгруппа группы $G$ и $H \le K$, то $H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $K$.*

(3) *Если $H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $K$ и $K$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G$, то $H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G$.*

(4) *Если $H_1$ и $H_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы в $G$, то $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G$.*

**Лемма 3.2.2.** [13] *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $H \le G$, $N$ — нормальная $\omega$-подгруппа группы $G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если $H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G$, то $HN$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G$.*

(2) *Если $H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G$, то $HN/N$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G/N$.*

(3) *Если $N \subseteq H$, $H/N$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G/N$, то $H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $G$.*

**Замечание 3.2.3.** В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, в качестве следствий из лемм 3.2.1 и 3.2.2 вытекают известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы $G$[8].

**Лемма 3.2.3.** [13] *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega$-локальная формация, $N$ — нильпотентная нормальная $\omega$-подгруппа группы $G$, $H$ и $M$ — такие подгруппы группы $G$, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $G = HN$. Если $H$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа в $M$, то $M \in \mathfrak{F}$.*

**Следствие 3.2.1.** (Т. Хоукс[42]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $G$ — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть $H$ и $M$ — такие подгруппы из $G$, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $HF(G) = G$. Если $H$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в $M$, то $M \in \mathfrak{F}$.*

В работе[35] для локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ было получено решение проблемы Л.А. Шеметкова (пробл. 12 из монографии[2]) о нахождении условий, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует решетку. В теореме 3.3.1 установлены необходимые и достаточные условия, при которых для наследственной $\omega$-локальной формации $\mathfrak{F}$ в любой конечной группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку, тем самым получено решение аналога вышеотмеченной проблемы Л.А. Шеметкова для $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп.

**Теорема 3.3.1.** [13] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная $\omega$-локальная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *В любой группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп образует решетку.*

(2) *Если $G = \langle A_1, A_2 \rangle$, где $A_1$, $A_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы $G$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

(3) *$\mathfrak{F}$ — $R^\omega$-замкнутый класс групп и каждая $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа любой группы содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале.*

**Следствие 3.3.1.** (А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук[35]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация. Тогда следующие утвержде-*

[42]Hawkes T. On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1968. V. 44, N 2. – P. 243–250.

*ния эквивалентны*:

(1) $\mathfrak{F}$ *обладает решеточным свойством для* $\mathfrak{F}$*-субнормальных подгрупп*;

(2) *группа* $G = \langle A_1, A_2 \rangle$ *принадлежит* $\mathfrak{F}$*, если* $A_1$*,* $A_2$ *—* $\mathfrak{F}$*-субнормальные* $\mathfrak{F}$*-подгруппы группы* $G$;

(3) $\mathfrak{F}$ *— формация Фиттинга и всякая* $\mathfrak{F}$*-субнормальная* $\mathfrak{F}$*-подгруппа группы* $G$ *содержится в* $\mathfrak{F}$*-радикале этой группы.*

В параграфе 3.4 определены $K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальные подгруппы группы и описаны их простейшие свойства. В параграфе 3.5 установлена взаимосвязь между решеточными свойствами $K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных и $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп в $\omega$-разрешимых группах (задача (A3.3)).

**Определение 3.4.1.** [14] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $K$-$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальной* подгруппой в $G$, если существует $(G-H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq ... \supseteq H_k = H$ такая, что для любого $i \in \{1, ..., k\}$ либо $H_i \lhd H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

**Замечание 3.4.1.** Всякая $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы $G$ является ее $K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппой. Всякая $K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная подгруппа группы является ее $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой. В случае, когда $\pi(G) \subseteq \omega$, понятие $K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной подгруппы группы $G$ совпадает с понятием $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы группы $G$.

В работе[35] для локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ была установлена эквивалентность проблемы Л.А. Шеметкова о нахождении условий, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует решетку, и аналогичной задачи О. Кегеля[36] о $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах для случая, когда $\mathfrak{F}$ является локальной наследственной формацией. Развивая данный результат, в теореме 3.5.2 для $\omega$-локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между решеточными свойствами $K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп и $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных подгрупп в $\omega$-разрешимых группах.

**Теорема 3.5.2.** [14] *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* $\omega$*-локальная наследственная формация,* $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *В любой* $\omega$*-разрешимой группе множество всех* $\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальных подгрупп образует решетку*;

(2) *В любой* $\omega$*-разрешимой группе множество всех* $K$*-*$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальных подгрупп образует решетку.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс групп. Следуя терминологии[8], будем говорить, что класс групп $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных ($K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных) подгрупп $\mathfrak{X}$-групп, если в любой $\mathfrak{X}$-группе множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных ($K$-$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальных) подгрупп образует решетку.

**Следствие 3.5.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$*, где* $\mathfrak{F}_i$ *–* $\omega$*-локальная наследственная формация, обладающая решеточным свойством для* $K$*-*$\mathfrak{F}_i^\omega$*-субнормальных подгрупп* $\omega\mathfrak{S}$*-групп,* $i = 1, 2$*. Если* $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$*, то формация* $\mathfrak{F}$ *обладает решеточным свойством для* $K$*-*$\mathfrak{F}^\omega$*-субнормальных подгрупп* $\omega\mathfrak{S}$*-групп.*

# Заключение

**Выводы.** В диссертации проведено исследование $\omega$-веерных формаций в рамках решения проблемы **(A)** В.А. Ведерникова о разработке теории $\omega$-веерных формаций конечных групп. При этом, в диссертации решены следующие задачи:

**1.** Получено решение задачи (A1) исследования методов конструирования $\omega$-веерных формаций конечных групп: построены $\omega$-веерные формации, определяемые значениями функций-направлений; построены $\omega$-веерные формации с помощью описания функций-спутников; получены результаты, характеризующие внутреннюю структуру $\omega$-веерных формаций; исследованы $\omega$-веерные формации, построенные посредством применения решеточных операций.

**2.** Получено решение задачи (A2) исследования свойств решеток $\omega$-веерных формаций конечных групп: доказана модулярность решетки всех $\omega$-веерных формаций; установлены условия, при которых решетки $\omega$-веерных формаций обладают свойствами дистрибутивности, дополняемости, алгебраичности, стоуновости.

**3.** Получено решение задачи (A3) применения $\omega$-веерных формаций к изучению подгрупп конечных групп: для $\omega$-локальной ($\omega$-веерной с направлением $\delta_1$) формации $\mathfrak{F}$ получено описание строения конечной группы, все $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальные максимальные подгруппы которой являются нормальными; установлены условия, при которых в любой конечной группе множество всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует решетку; установлена взаимосвязь между решеточными свойствами $K$-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных и $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп в $\omega$-разрешимых группах.

Доказанные в диссертации теоремы развивают известные результаты о локальных и $\omega$-локальных формациях Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы, С.Ф. Каморникова, А.Ф. Васильева, В.Н. Семенчука, Т. Хоукса и других авторов.

Я выражаю признательность своему научному руководителю — д.ф.-м.н. М.М. Сорокиной за идеи, реализованные в диссертации, и постоянное внимание к моей работе. Я благодарен всем участникам научно-исследовательского семинара кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского за полезные обсуждения, ценные замечания и рекомендации.

## Работы автора по теме диссертации

### Публикации в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ


1. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О нормальности $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных максимальных подгрупп конечных групп // Матем. заметки. 2020. Т. 108, № 3. – С. 428–440.

2. *Sorokina M.M., Maksakov S.P.* On the directions of $\omega$-fibered and $\Omega$-foliated formations and Fitting classes of finite groups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41, № 2. – P. 273–279.

3. *Maksakov S.P.* On the lattices of the $\omega$-fibered formations of finite groups // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. – С. 258–267.

4. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О максимальных подформациях $n$-кратно $\Omega$-расслоенных формаций конечных групп // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: «Математика. Механика. Информатика». 2021. Т. 21, № 1. – С. 15–25.

5. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* Об алгебраичности решеток $\omega$-веерных формаций конечных групп // Дискрет. матем. 2022. Т. 34, № 1. – С. 23–35.

6. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О брауэровых и стоуновых решетках $\omega$-веерных формаций конечных групп // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 2. Принята к печати.


### Статьи в других рецензируемых научных изданиях


7. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О строении $\omega$-веерных и $\Omega$-расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2018. № 3 (11). — С. 11–18.

8. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* Об $\Omega$-расслоенных формациях конечных групп // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2019. № 3 (15). — С. 7–13.

9. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О минимальных спутниках $\Omega$-расслоенных формаций конечных групп // Ежегодник НИИ фунд. и прикл. исследований за 2019 год, № 1 (11). – Брянск: РИО БГУ, 2020. – С. 61–65.

10. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* Свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных подгрупп конечных групп // Ежегодник НИИ фунд. и прикл. исследований за 2020 год, № 1 (12). – Брянск: РИО БГУ, 2021. – С. 36–38.

11. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О максимальных подформациях $n$-кратно $\omega$-веерных формаций конечных групп // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2021. № 4 (24). — С. 10–17.

12. *Maksakov S.P., Sorokina M.M.* The Arithmetic Properties of Lattices of $\omega$-Fibered formations of Finite Groups // American Scientific Journal. 2021. V. 1, N 48. – P. 45–49.

13. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2022. № 3 (27). — С. 7–17.

14. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* $K$-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальные подгруппы конечных групп // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2023. № 1 (29). — С. 11–19.

**Материалы конференций**

15. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О направлениях расслоенных и веерных формаций и классов Фиттинга конечных групп // Материалы конф. «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», Казань, 24 – 28 июня 2019 г. – Казань: КФУ, 2019. – С. 165–167.

16. *Maksakov S.P.* On the lattice of $\omega$-fibered formations of finite groups // 2020 Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics: abstracts / IMM UB RAS. – Yekaterinburg, 2020. – P. 54.

17. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О прямо разложимых $\omega$-веерных формациях конечных групп // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: совр. пробл., прил. и пробл. истории: Материалы XVIII Межд. конф., посв. столетию со дня рожд. проф. Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина, Тула, 23 – 26 сентября 2020 г. – Тула: ТГПУ, 2020. — С. 87–89.

18. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-абнормальных подгруппах конечных групп // Межд. конф. «Мальцевские чтения», Новосибирск, 16 – 20 ноября 2020 г.: тез. докл. / ИМ СО РАН, НГУ. – Новосибирск, 2020. – С. 169.

19. *Сорокина М.М., Максаков С.П.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Межд. конф. «Мальцевские чтения», Новосибирск, 20 – 24 сентября 2021 г.: тез. докл. / ИМ СО РАН, НГУ. – Новосибирск, 2021. – С. 106.

20. *Максаков С.П.* О подформациях $\omega$-веерных формаций конечных групп // Межд. науч. конф. «Ломоносов-2022», Москва, 11 – 22 апреля 2022 г.: тез. докл. / МГУ. – Москва, 2022. Режим доступа: `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2022/data/25627/139672_uid334088_report.pdf`

21. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных и $K$-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Межд. конф. «Мальцевские чтения», Новосибирск, 14 – 18 ноября 2022 г.: тез. докл. / ИМ СО РАН, НГУ. – Новосибирск, 2022. – С. 104.

22. *Максаков С.П., Сорокина М.М.* О стоуновых решетках $\omega$-веерных формаций конечных групп // Международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 70-летию А.А. Махнева, Нальчик, 9 –15 июля 2023 г.: тез. докл. / Изд-во «Принт-центр». – Нальчик, 2023. – С. 88–89.