

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи

Гусев Сергей Валентинович

## РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ МОНОИДОВ

1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная  
математика

Диссертация на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук

Научный консультант:  
доктор физ.-мат. наук, доцент  
Б. М. Верников

Екатеринбург  
2026

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
Актуальность и степень разработанности темы исследования . . . . .	4
Цель диссертации, постановка задач и обсуждение результатов диссертации . . . . .	7
Теоретическая и практическая значимость, научная новизна . . . . .	15
Методология и методы исследования. Степень достоверности . . . . .	15
Положения, выносимые на защиту . . . . .	16
Апробация и публикации . . . . .	16
Структура диссертации . . . . .	17
<b>1 Предварительные сведения</b>	<b>18</b>
1.1 Слова, тождества, теорема Биркгофа о полноте эквациональной логики . . . . .	18
1.2 Фактор-моноиды Риса свободного моноида . . . . .	19
1.3 Конструкция О.Б.Сапир . . . . .	20
1.4 Базовые сведения и известные результаты . . . . .	22
1.5 Вспомогательные утверждения . . . . .	25
<b>2 Отсутствие нетривиальных тождеств</b>	<b>30</b>
2.1 Надкоммутативные многообразия . . . . .	30
2.2 Периодические многообразия . . . . .	35
<b>3 Многообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий</b>	<b>39</b>
3.1 Формулировка основного результата . . . . .	39
3.2 Несколько конкретных конгруэнций на свободном моноиде . . . . .	41
3.3 Исключающие тождества для многообразий . . . . .	44
3.4 Некоторые многообразия с недистрибутивной решеткой подмногообразий . . . . .	76
3.5 Тождества, задающие многообразия . . . . .	125
3.6 Доказательство основного результата . . . . .	138
<b>4 Специальные элементы</b>	<b>169</b>
4.1 Нейтральные, стандартные, дистрибутивные и нижнемодулярные элементы . . . . .	169
4.2 Костандартные элементы . . . . .	174
4.3 Сократимые элементы . . . . .	179

<b>5</b>	<b>Минимальные моноиды, порождающие многообразия со сложной решеткой подмногообразий</b>	<b>187</b>
5.1	Минимальные моноиды, порождающие многообразия с континуумом подмногообразий . . . . .	187
5.2	Минимальные моноиды, порождающие конечно универсальные многообразия . . . . .	210
<b>6</b>	<b>Два маленьких многообразия с большим объединением</b>	<b>228</b>
6.1	Формулировки основных результатов . . . . .	228
6.2	Предварительные результаты . . . . .	230
6.3	Доказательство основных результатов . . . . .	235
<b>7</b>	<b>Предельные и кроссовы многообразия</b>	<b>239</b>
7.1	Предельные многообразия . . . . .	240
7.2	Кроссовы многообразия . . . . .	253
	<b>Заключение</b>	<b>268</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>269</b>

# Введение

## Актуальность и степень разработанности темы исследования

*Многообразием* называют непустой класс универсальных алгебр одной сигнатуры, замкнутый относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. В силу классической теоремы Г.Биркгофа [31], многообразия — это в точности классы алгебр, задаваемые тождествами.

Теория многообразий является одним из основных направлений современной общей алгебры. Этому направлению посвящено большое количество монографий и обзорных статей. Не претендуя на полноту, отметим здесь, например, монографии [3, 14, 15, 22, 56, 71]. При этом значительное внимание уделяется как исследованию многообразий универсальных алгебр, так и рассмотрению многообразий различных конкретных типов алгебр — групп, полугрупп, колец, решеток и др. Совокупность всех многообразий алгебр одного и того же типа образует решетку относительно включения. Исследование этой решетки относится к числу важнейших направлений изучения многообразий.

Многообразия полугрупп активно исследуются с первой половины 1960-х годов, хотя отдельные результаты появлялись и до этого. На сегодняшний день в этом направлении получена богатая и разнообразная информация, систематизации которой посвящены, в частности, монография Э.Ли [71] и обзорные статьи [1, 24–26, 30, 38, 103, 109]. Значительное внимание многообразиям полугрупп уделяется также в монографиях Ж.Алмейды [29], Дж.Хауи [47], Дж.Роудза и Б.Стейнберга [87] и М.В.Сапира [90], а также в обзорах [7, 58, 95]. Можно упомянуть еще монографию М.Петрича [81], в которой большое внимание уделено многообразиям инверсных полугрупп, и монографию М.Петрича и Н.Райли [83], посвященную многообразиям вполне регулярных полугрупп. С самого начала исследования многообразий полугрупп одним из основных направлений становится изучение решетки многообразий полугрупп, которую мы будем обозначать через  $\mathbb{S}_{EM}$ <sup>1</sup>. Этому направлению посвящены обзорные статьи [1, 24, 38, 103]. При этом статьи [1, 38] написаны на начальном этапе развития теории многообразий полугрупп и сейчас представляют в основном лишь исторический интерес, обзор [24] отражает состояние развития обсуждаемой области, близкое к современному, а написанный позднее обзор [103] посвящен не всей решетке  $\mathbb{S}_{EM}$ , а только специальным элементам этой решетки и некоторым ее подрешеткам.

---

<sup>1</sup>Отметим, что первая в мировой литературе статья, в которой изучаются многообразия полугрупп, а именно, статья Я.Калицкого и Д.Скотта 1955 года [57], посвящена именно решеточной тематике: в ней описываются атомы решетки  $\mathbb{S}_{EM}$ .

На этом фоне резким контрастом выглядит весьма незначительное число работ, в которых изучается решетка всех многообразий моноидов, которую мы будем обозначать через  $\text{Mon}$  (говоря о многообразиях моноидов, мы имеем в виду, что 0-арная операция, выделяющая единицу, входит в сигнатуру). Прежде чем приступить к перечислению этих работ следует сказать, что, поскольку решетка  $\text{Sem}$  изучена достаточно хорошо по сравнению с  $\text{Mon}$ , в процессе изложения мы будем постоянно оглядываться на решетку  $\text{Sem}$ , сравнивая моноидные результаты с их полугрупповыми аналогами. Мы увидим, что несмотря на близость двух алгебр — полугрупп и моноидов, а также тот легко проверяемый факт, что  $\text{Mon}$  изоморфно вкладывается в  $\text{Sem}$  (см. предложение 1.9 ниже), уже с самых первых работ, посвященных решетке  $\text{Mon}$ , начинает прослеживаться существенная разница между свойствами этой решетки и решетки  $\text{Sem}$ . В данной диссертации мы еще не раз убедимся в том, что одна и та же постановка задачи для решеток  $\text{Sem}$  и  $\text{Mon}$  зачастую приводит к совершенно различным результатам. Чтобы сделать картину более полной, отметим, что встречаются и противоположные ситуации, когда свойства решеток  $\text{Sem}$  и  $\text{Mon}$  оказываются аналогичными. Одна из причин таких аналогий указана в § 1.4 диссертации после предложения 1.9.

Сильная мотивация для изучения решетки  $\text{Mon}$  произрастает также из компьютерных наук, а точнее из теории формальных языков. Мы кратко обрисуем эту важную связь, отсылая заинтересованного читателя к монографиям Ж.Алмейды [29] и Дж.Ррудза и Б.Стейнберга [87].

*Языком* над алфавитом  $X$  называют произвольное подмножество свободного моноида  $X^*$ . Каждому языку  $L \subseteq X^*$  сопоставляется его *синтаксический моноид*  $M_L$ , определяемый как фактор-моноид свободного моноида  $X^*$  по наибольшей конгруэнции  $\rho$ , для которой  $L$  является объединением  $\rho$ -классов. Синтаксический моноид отражает некоторые важные свойства языка  $L$ ; в частности, язык над конечным алфавитом является регулярным тогда и только тогда, когда его синтаксический моноид конечен.

Соответствие  $L \mapsto M_L$  не является ни инъективным, ни сюръективным, даже если его область определения ограничить регулярными языками. Именно С.Эйленберг [37] понял, что это соответствие становится биективным, если поднять его область определения и область значений до уровня определенных классов регулярных языков и конечных моноидов соответственно. Классы со стороны языков, обычно называемые *многообразиями регулярных языков*, замкнуты относительно определенных естественных операций теории языков; классы со стороны моноидов — это в точности *псевдомногообразия* — классы конечных моноидов, замкнутые относительно взятия подмоноидов, гомоморфных образов и конечных прямых произведений. Для любого многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  класс  $\mathbf{V}_{\text{fin}}$  всех конечных моноидов из  $\mathbf{V}$  является псевдомногообразием, но не все псевдомногообразия возникают таким образом.

Как многообразия регулярных языков, так и псевдомногообразия конечных моноидов образуют полные решетки относительно включения, а соответствие Эйленберга является изоморфизмом между этими двумя решетками. Поэтому результаты, касающиеся решеток псевдомногообразий, могут быть переосмыслены в терминах регулярных языков. Напротив,

теория языков выделяет определенные многообразия регулярных языков по их комбинаторным или логическим свойствам и, таким образом, мотивирует изучение алгебраических аналогов этих многообразий.

Хотя диссертация посвящена многообразиям моноидов, многие из результатов будут применимы и к псевдомногообразиям благодаря следующему результату Т.Холла и К.Джонстона [45]: если  $\mathbf{V}$  — локально конечное многообразие, то отображение  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}_{\text{fin}}$  является изоморфизмом между решеткой подмногообразий многообразия  $\mathbf{V}$  и решеткой подпсевдомногообразий псевдомногообразия  $\mathbf{V}_{\text{fin}}$ . Далее, если  $\mathbf{P}$  — псевдомногообразие, а  $\mathbf{K}_{\mathbf{P}}$  — класс решеток подмногообразий многообразий, порожденных моноидами из  $\mathbf{P}$ , то решетка всех подпсевдомногообразий псевдомногообразия  $\mathbf{P}$  является гомоморфным образом подрешетки ультрапроизведения решеток из  $\mathbf{K}_{\mathbf{P}}$  (П.Альяно и Дж.Нейшен [27]). В частности, любое тождество, которое выполняется в решетке подмногообразий многообразия  $\mathbf{V}$ , выполняется также в решетке подпсевдомногообразий псевдомногообразия  $\mathbf{V}_{\text{fin}}$ .

Перейдем к обзору результатов о решетке  $\text{Mon}$ , предшествующих диссертации. По-видимому, первой статьей о решетке  $\text{Mon}$  является работа Т.Хида [46]. В ней дается полное описание решетки коммутативных многообразий моноидов. В частности, доказываем, что эта решетка является счетной и дистрибутивной. Для сравнения, заметим, что решетка многообразий коммутативных полугрупп также счетна (П.Перкинс [80]), но не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству (С.Баррис и Э.Нельсон [32]).

В работе Д.Поллака [84] изучается свойство покрываемости в решетках многообразий алгебр различных типов. В частности, в ней указан пример многообразия моноидов, не имеющего покрытий в решетке  $\text{Mon}$ . Этот факт контрастирует с доказанным А.Н.Трахтманом в [21] результатом о том, что всякое *собственное* многообразие полугрупп (т.е. многообразие, отличное от многообразия всех полугрупп) имеет покрытие в решетке  $\text{Sem}$ .

Третьей работой, в существенной степени посвященной решетке  $\text{Mon}$ , является статья Ш.Висмат [110]. В ней дано полное описание решеток многообразий и псевдомногообразий идемпотентных моноидов. Отметим, что решетка многообразий идемпотентных полугрупп полностью описана намного раньше независимо А.П.Бирюковым [5], Ч.Фенмором [39] и Дж.Герхардом [40].

Статьи [46, 84, 110], по-видимому, исчерпывают список работ, полностью или в существенной степени посвященных решетке  $\text{Mon}$ , опубликованных в прошлом веке. Для полноты картины отметим только еще статьи [100, 111], посвященные не решетке  $\text{Mon}$ , а решеткам многообразий моноидов с некоторыми дополнительными унарными операциями.

С начала 2000-х годов ситуация начала постепенно меняться. В работах ряда авторов, посвященных в основном изучению тождеств в моноидах, появляются и промежуточные результаты, относящиеся к решеткам многообразий (см., например, статьи [28, 50, 54, 63, 65–67, 69, 70, 72, 93, 113], а также часть III недавней монографии [71]). В основном они представляют собой описание решеток подмногообразий некоторых конкретных многообразий моноидов. В частности, в [66] построен первый, насколько нам известно, пример многообразия моноидов с немодулярной решеткой подмногообразий.

Первая попытка систематического изучения решетки  $\mathcal{M}_{\text{ON}}$  была предпринята в 2019 году в кандидатской диссертации автора [11], где был получен ряд результатов, связанных с тождествами этой решетки. Другое направление в изучении решеток многообразий моноидов открывает статья М.Джексона и Э.Ли [51], посвященная многообразиям моноидов со сложной решеткой подмногообразий. Дальнейшие результаты на эту тему были получены в недавних статьях Д.Глассона [41] и М.Джексона и В.Жанг [54]. Работы [11, 51] служат отправной точкой настоящей диссертации. Более подробно о результатах этих работ мы поговорим в следующем разделе при обсуждении постановок задач.

## Цель диссертации, постановка задач и обсуждение результатов диссертации

Диссертация направлена на систематическое изучение решетки многообразий моноидов. Для достижения этой цели намечены конкретные задачи по ряду направлений.

**Отсутствие нетривиальных тождеств.** При изучении решетки многообразий полугрупп большое внимание уделялось рассмотрению ограничений, формулирующихся в терминах тождеств (см. [24, § 11]). Поэтому изучение решетки  $\mathcal{M}_{\text{ON}}$  естественно начать с рассмотрения такого типа ограничений.

Как мы уже упоминали выше, решетка  $\mathcal{M}_{\text{ON}}$  не является модулярной. В действительности эта решетка не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. Это первый основной результат кандидатской диссертации [11].

Обсудим этот результат подробнее. Многообразие моноидов называется *надкоммутативным*, если оно содержит многообразие  $\mathbf{Com}$  всех коммутативных моноидов. Ясно, что совокупность всех надкоммутативных многообразий моноидов образует подрешетку в решетке всех многообразий моноидов, которую будем обозначать через  $\mathcal{OC}$ . Как и в случае полугрупп, решетка  $\mathcal{M}_{\text{ON}}$  является дизъюнктивным объединением решетки  $\mathcal{OC}$  и решетки  $\mathcal{PER}$  многообразий *периодических* моноидов (т.е. моноидов, в которых некоторая степень любого элемента является идемпотентом). В диссертации [11] показано, что решетка  $\mathcal{Eq}(\{1, 2, \dots, n\})$  отношений эквивалентности на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  является гомоморфным образом некоторой подрешетки решетки  $\mathcal{OC}$ . Но, как хорошо известно (Д.Сакс [88]), класс всех решеток отношений эквивалентности на конечных множествах не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Поэтому в решетке  $\mathcal{OC}$ , а значит, и в решетке  $\mathcal{M}_{\text{ON}}$  не выполнено никакое такое тождество.

В настоящей диссертации этот результат существенно усилен. Нами установлено, что не только решетка  $\mathcal{OC}$ , но и решетка  $\mathcal{PER}$  (и, более того, решетка  $\mathcal{APER}$  всех многообразий *апериодических* моноидов, т.е. моноидов, все подгруппы которых тривиальны) содержит изоморфную копию любой конечной решетки (теоремы 2.1 и 2.7). В частности, это дает положительный ответ на вопрос поставленный М.Джексоном и Э.Ли [51, вопрос 6.3] о существовании *конечно универсальных* многообразий моноидов, т.е. многообразий, в решетку подмногообразий которых вкладывается любая конечная решетка. Таким образом, решетки

$A_{PER}$ ,  $P_{ER}$  и  $OC$  и потому решетка  $Mon$  не удовлетворяют никакому нетривиальному тождеству, и, более того, в силу результата В.И.Будкина и В.А.Горбунова [6, следствие 1 из теоремы 3], никакому нетривиальному квазитожеству.

Для сравнения заметим, что отсутствие нетривиальных тождеств в решетках многообразий полугрупп было доказано еще в 1971 году в двух работах С.Барриса и Э.Нельсона [32, 33]. Более того, из результата статьи [33] следует, что нетривиальные тождества не выполнены и в решетке многообразий апериодических полугрупп. Что касается решетки надкоммутативных многообразий полугрупп, то в статье [107] М.В.Волковым было дано описание этой решетки в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр некоторого специального типа. В качестве следствия из указанного результата, в этой статье было доказано, что решетка всех надкоммутативных многообразий полугрупп не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.

**Многообразия моноидов с дистрибутивной решеткой подмногообразий.** После доказательства отсутствия нетривиальных тождеств в решетке  $Mon$  естественно начать изучение многообразий моноидов с дистрибутивной или модулярной решеткой подмногообразий. Для краткости будем называть такие многообразия *дистрибутивными* и *модулярными* соответственно.

Хорошо известно, что решетка многообразий групп модулярна, однако она не является дистрибутивной. Первый пример недистрибутивного многообразия групп был построен Г.Хигмэном в середине 1960-х (см. [14, раздел 54.24]). На рубеже 1960-х и 1970-х годов к задаче описания дистрибутивных многообразий групп был неподдельный интерес (см., например, [16, 35, 59]). Однако со временем активность постепенно угасла. Отсутствие ощутимого прогресса в решении обсуждаемой задачи, по-видимому, объясняется тем, что она оказалась трансцендентно сложной. Это вытекает из результатов П.А.Кожевникова [60], согласно которым существует континуум периодических не локально конечных многообразий групп, решетка подмногообразий которых является 3-элементной цепью.

Для решетки  $\mathbb{S}_{EM}$  проблемы описания модулярных и дистрибутивных многообразий сформулированы Т.Эвансом в 1971 году [38] и Л.Н.Шевриным в 1979 году [19, задача 2.60a] соответственно. Для решения первой из этих проблем потребовалось более двадцати лет усилий ряда математиков. Окончательно она была решена М.В.Волковым в докторской диссертации [10] (см. также [9] и [24, раздел 11.1]). Параллельно с решением проблемы Т.Эванса, М.В.Волков в диссертации [10] продвинулся и в решении проблемы Л.Н.Шеврина, дойдя, по-видимому, до некоего объективного предела, и описал многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в очень широком частном случае. В частности, полностью были классифицированы дистрибутивные многообразия апериодических полугрупп. На решение проблемы Л.Н.Шеврина в общем случае, вероятно, вряд ли стоит надеяться ввиду упомянутого выше результата П.А.Кожевникова [60] (более подробные комментарии см. в [24, раздел 11.3]).

Вернемся к решетке  $Mon$ . Отдельные нетривиальные примеры [не]дистрибутивных и [не]модулярных многообразий моноидов появлялись в некоторых работах в процессе дока-

зательств основных результатов (см., в частности, [46, 50, 51, 63, 66, 70, 72, 110, 113]). Однако систематически такие многообразия до последнего времени не изучались.

В диссертации мы рассматриваем первую из обсуждаемых задач, задачу описания дистрибутивных многообразий. Отправной точкой в этом исследовании можно считать описание *цепных* многообразий апериодических моноидов, т.е. многообразий, решетка подмногообразий является цепью, полученное в кандидатской диссертации [11], поскольку свойство быть цепью — предельное усиление тождества дистрибутивности<sup>2</sup>. Как и в полугрупповом случае, на описание дистрибутивных многообразий моноидов в общем случае вряд ли стоит рассчитывать в силу результата П.А.Кожевникова [60]. Поэтому в первую очередь логично сфокусироваться именно на классе апериодических моноидов, как на случае, в котором хотя бы гипотетически можно надеяться получить исчерпывающее описание. Одним из ключевых результатов диссертации является полное описание дистрибутивных многообразий апериодических моноидов.

Обсудим этот результат подробнее. Нами получено описание дистрибутивных многообразий на языке тождеств. А именно, доказано, что многообразие апериодических моноидов дистрибутивно тогда и только тогда, когда оно содержится в многообразии из некоего списка, состоящего из 5 счетных серий и 29 «спорадических» многообразий (теорема 3.1). Отметим, что из доказательства этого результата следует счетность числа дистрибутивных многообразий апериодических моноидов (следствие 3.89). Из обсуждаемого доказательства также вытекает, что существуют бесконечно убывающие цепи недистрибутивных многообразий, пересечение элементов которых является дистрибутивным многообразием (предложение 3.90). Поэтому в случае моноидов описание дистрибутивных многообразий на языке минимальных запрещенных подмногообразий невозможно. Это резко контрастирует с полугрупповым случаем, поскольку любое недистрибутивное многообразие апериодических полугрупп содержит минимальное недистрибутивное многообразие.

Отметим также, что для доказательства обсуждаемого результата потребовалось применение и развитие новой техники. Ключевую роль в нем играет конструкция, совсем недавно предложенная О.Б.Сапир [93] для построения моноидов некоего специального вида (см. § 1.3). Кроме того, как уже упоминалось выше, составной частью (и первым шагом) описания дистрибутивных многообразий является описание цепных многообразий, полученное в кандидатской диссертации [11]. Для этого там разработан метод, основанный на целом ряде понятий, связанных с комбинаторикой слов ( $k$ -разложение слова,  $k$ -блоки и  $k$ -разделители слова, глубина буквы в слове и др.). Данный метод нашел применение в данной диссертации и за пределами обсуждаемой сейчас задачи, а именно, при изучении минимальных моноидов порождающих многообразия с континуумом подмногообразий (см. § 5.1). Также с его помощью удалось построить новые примеры *наследственно конечно базлируемых* многообразий, т.е. многообразий, все подмногообразия которых могут быть заданы конечным числом тож-

---

<sup>2</sup>Отметим, что для большинства классических типов алгебр задача описания цепных многообразий была решена более 40 лет назад. В частности, цепные многообразия апериодических полугрупп описаны Е.В.Сухановым [20] в 1982 году, локально конечные цепные многообразия групп — В.А.Артамоновым [2] в 1978 году, а цепные многообразия альтернативных колец — Б.М.Верниковым и М.В.Волковым [8] в 1979 году.

деств.

**Специальные элементы.** В данной диссертации мы рассматриваем еще несколько ограничений, связанных с тождествами. Речь идет о специальных элементах в решетке  $\text{Mon}$ . Напомним определения тех типов специальных элементов, которые будут возникать в данной работе. Элемент  $x$  решетки  $L$  называют

<i>нейтральным</i> , если	$\forall y, z \in L: (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$
<i>стандартным</i> , если	$\forall y, z \in L: (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$
<i>дистрибутивным</i> , если	$\forall y, z \in L: x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$
<i>сократимым</i> , если	$\forall y, z \in L: x \vee y = x \vee z \ \& \ x \wedge y = x \wedge z \longrightarrow y = z;$
<i>модулярным</i> , если	$\forall y, z \in L: y \leq z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$
<i>нижнемодулярным</i> , если	$\forall y, z \in L: x \leq y \longrightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$

*Костандартные*, *кодистрибутивные* и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к стандартным, дистрибутивным и нижнемодулярным соответственно. Нейтральный элемент можно также определить как элемент, который вместе с любыми двумя элементами решетки порождает дистрибутивную подрешетку (см., например, [42, теорема 254]). Очевидно, что всякий нейтральный элемент стандартен и костандартен одновременно; всякий [ко]стандартный сократим; всякий сократимый модулярен; всякий [ко]дистрибутивный [верхне-]нижнемодулярен. Хорошо известно также, что всякий [ко]стандартный элемент [ко]кодистрибутивен (см. [42, теорема 253]). Указанные взаимосвязи между типами специальных элементов изображены на рис. 1.

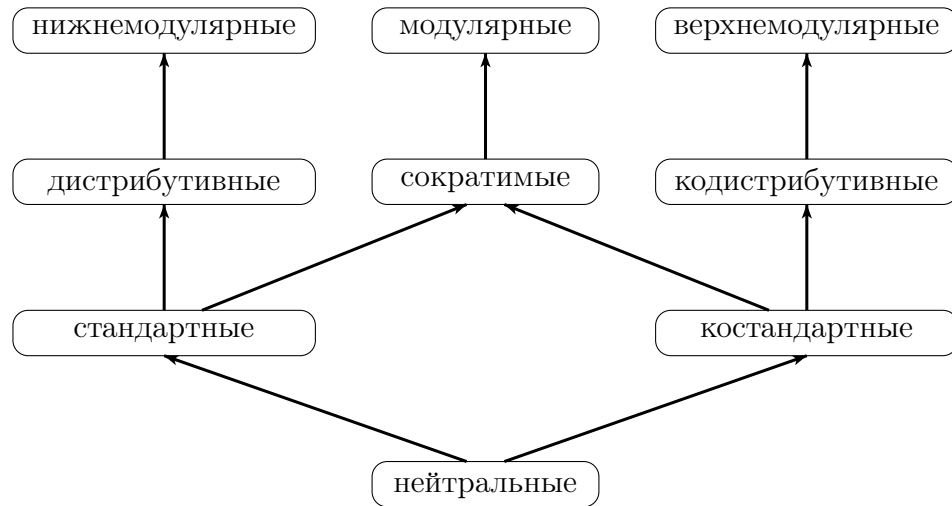


Рис. 1: специальные элементы в абстрактных решетках

Знание того, как устроены специальные элементы решетки, дает существенную информацию о строении этой решетки в целом. Так, элемент  $x$  решетки  $L$  нейтрален тогда и только тогда, когда  $L$  разложима в подпрямое произведение главного идеала  $(x) := \{y \in L \mid y \leq x\}$  и

главного фильтра  $[x] := \{y \in L \mid x \leq y\}$ , порожденных элементом  $x$  (см., например, [42, теорема 254]). Иными словами, элемент  $x$  решетки  $L$  нейтрален тогда и только тогда отображение  $a \mapsto (a \wedge x, a \vee x)$  из  $L$  в  $[x] \times [x]$  является вложением решеток. Очевидно, что элемент  $x$  решетки  $L$  сократим тогда и только тогда, когда указанное отображение инъективно. Дистрибутивные и кодистрибутивные элементы связаны с гомоморфизмами решетки на свои интервалы: элемент  $x$  дистрибутивен в  $L$  тогда и только тогда, когда отображение  $a \mapsto a \vee x$  из  $L$  в  $[x]$  является гомоморфизмом (см. [42, теорема 252]); для кодистрибутивных элементов верно двойственное утверждение. Информацию о специальных элементах в произвольных решетках можно найти, например, в [42, раздел III.2] и [99, разделы 2.1 и 2.2].

К настоящему времени получено много интересных и глубоких результатов о специальных элементах решетки  $\mathbb{S}_{EM}$  и некоторых ее важных подрешеток (см. обзоры [24, § 14] и [103], а также более свежие работы [44, 96–98, 104]).

Систематическое изучение специальных элементов решетки  $\mathbb{M}_{ON}$  было начато в кандидатской диссертации [11], в которой были описаны ее нейтральные и костандартные элементы. Эти результаты являются составной частью основных результатов данной диссертации, в которой мы существенно расширяем знания о специальных элементах решетки  $\mathbb{M}_{ON}$ . А именно, в данной диссертации мы даем полное описание нейтральных, стандартных, костандартных, дистрибутивных, нижнемодулярных и сократимых элементов решетки  $\mathbb{M}_{ON}$  (теоремы 4.1, 4.3 и 4.8).

Обсуждаемые результаты резко контрастируют с полученными ранее результатами о специальных элементах решетки  $\mathbb{S}_{EM}$ . Число нижнемодулярных элементов в решетке  $\mathbb{S}_{EM}$  континуально (это нетрудно вывести из теоремы 3.2 в [103]), стандартных и дистрибутивных — счетно (см. [103, теорема 3.3]), а нейтральных — конечно (см. [103, теорема 3.4]). При этом свойства быть дистрибутивным и стандартным элементом в решетке  $\mathbb{S}_{EM}$  эквивалентны (см. [103, теорема 3.3]). В решетке  $\mathbb{M}_{ON}$ , оказалось, что свойства принадлежать одному из четырех обсуждаемых типов элементов равносильны и число таких элементов конечно. При этом, в решетке  $\mathbb{S}_{EM}$  нейтральность и костандартность эквивалентны, а в решетке  $\mathbb{M}_{ON}$  — нет. Наконец, в решетке  $\mathbb{M}_{ON}$  всякий нижнемодулярный (и, следовательно, дистрибутивный) элемент является костандартным (и, следовательно, сократимым, кодистрибутивным, модулярным и верхнемодулярным) элементом. В решетке же  $\mathbb{S}_{EM}$  всякий нижнемодулярный элемент модулярен (см. [103, следствие 3.9]), а всякий дистрибутивный сократим (ср. теорему 1.1 в [96] и теорему 3.3 в [103]), однако костандартность не следует из дистрибутивности (ср. теоремы 3.3 и 3.4 в [103]), а сократимость из нижней модулярности (ср. теорему 1.1 в [96] и теорему 3.2 в [103]).

Число специальных элементов решетки можно рассматривать как своего рода меру ее сложности. Скажем, в дистрибутивной решетке любой элемент является нейтральным. С учетом сказанного в предыдущем абзаце, решетка  $\mathbb{M}_{ON}$  в этом смысле оказывается устроена даже сложнее решетки  $\mathbb{S}_{EM}$ .

**Минимальные моноиды, порождающие многообразия со сложной решеткой подмногообразий.** Многообразия называют *малым*, если решетка его подмногообразий конеч-

на; *конечно порожденным*, если оно порождается конечной алгеброй; *конечно базлируемым*, если его можно задать конечным числом тождеств; и *бесконечно базлируемым*, если конечным числом тождеств его задать нельзя. Многообразия, являющиеся одновременно конечно порожденными, конечно базлируемыми и малыми принято называть *кроссовыми*. Конечные группы (Ш.Оутс, М.Пауэлл [77]), ассоциативные кольца (И.В.Львов [13], Р.Круз [61]), кольца Ли (Ю.А.Бахтурин, А.Ю.Ольшанский [4]) и решетки (Р.Маккензи [75]) порождают кроссовы многообразия.

Полугруппы и моноиды, пожалуй, единственные «классические» типы универсальных алгебр, для которых аналогичное утверждение не верно. В частности, существуют конечные полугруппы и моноиды, порождающие бесконечно базлируемые многообразия (см. обзор [109]). Конечно порожденное многообразие может не быть кроссовым также за счет бесконечности решетки подмногообразий (см., например, недавний обзор [30]). При этом конечные полугруппы и моноиды могут порождать многообразия с чрезвычайно сложной решеткой подмногообразий. Представляет интерес задача нахождения минимальных таких примеров. Двумя наиболее экстремальными условиями сложности являются континуальность решетки подмногообразий и конечная универсальность. Обсудим по отдельности каждое из этих двух условий.

Первые примеры конечных моноидов, порождающих многообразия с континуумом подмногообразий были найдены еще в работе М.Джексона и Р.Маккензи [52] в 2006 году. Однако наиболее экстремальные примеры были построены М.Джексоном и Э.Ли [51] в 2018 году. А именно, они среди прочего показали, что 6-элементный моноид *Брандта*

$$\mathbf{B}_2^1 := \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = b^2 = 0 \rangle \cup \{1\} = \{a, b, ab, ba, 0, 1\}$$

порождает многообразие  $\mathbf{B}_2^1$ , имеющее континуальную решетку подмногообразий (иным способом этот факт был доказан М.Джексоном и В.Жанг в [54]). Хорошо известно, что моноид Брандта  $\mathbf{B}_2^1$  содержится в многообразии  $\mathbf{A}_2^1$ , порожденным другим знаменитым 6-элементным моноидом

$$\mathbf{A}_2^1 := \langle a, b \mid a^2 = 0, aba = a, bab = b^2 = b \rangle \cup \{1\} = \{a, b, ab, ba, 0, 1\}.$$

Поэтому многообразие  $\mathbf{A}_2^1$  также имеет континуальную решетку подмногообразий.

Что касается не более чем 5-элементных моноидов, то, как показали Э.Ли и В.Жанг в работе [74], с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма, каждый из них, за исключением 5-элементного моноида

$$\mathbf{P}_2^1 := \langle a, b \mid a^2 = ab = a, b^2a = b^2 \rangle \cup \{1\} = \{a, b, ba, b^2, 1\},$$

порождает кроссово многообразие; многообразие  $\mathbf{P}_2^1$ , порожденное моноидом  $\mathbf{P}_2^1$  не является малым. Однако до недавнего времени следующий вопрос, поставленный М.Джексоном и Э.Ли [51, вопрос 6.1], был открыт: континуальна ли решетка подмногообразий многообразия  $\mathbf{P}_2^1$ ? В данной диссертации мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. Отсюда следует,

что наименьший порядок моноида, порождающего многообразие с континуумом подмногообразиям равен 6 (теорема 5.1). Удивительно, но вопрос о том, каков наименьший порядок полугруппы, порождающей многообразие с континуумом подмногообразий открыт до сих пор (более подробные комментарии см. в [68]).

Что касается конечной универсальности, то в 2007 году Э.Ли [62] показал, что любое многообразие, порожденное не более чем 3-элементной полугруппой конечно универсальным не является, при этом существуют 4-элементные полугруппы, порождающие конечно универсальные многообразия. Для многообразий моноидов вопрос о том, каков наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие, оставался открытым. В силу упомянутых выше результатов Э.Ли и В.Жанг [74], конечно универсальное многообразие не может порождаться никаким не более чем 5-элементным моноидом, за исключением моноида  $P_2^1$ . В данной диссертации мы показываем, что многообразие  $P_2^1$  не является конечно универсальным, в то время как многообразие  $B_2^1$ , напротив, конечно универсально. Тем самым, мы устанавливаем, что наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие, как и в случае с континуальностью, оказывается равным 6 (теорема 5.28).

**Два маленьких многообразия с большим объединением.** Решетку подмногообразий многообразия  $\mathbf{V}$ , как обычно, будем обозначать через  $\mathfrak{L}(\mathbf{V})$ . В статье [51] М.Джексоном и Э.Ли был построен еще один экстремальный пример. Они указали два многообразия моноидов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  таких, что

- 1) многообразия  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  являются кроссовыми;
- 2) решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})$  континуальна и не удовлетворяет ни условию минимальности, ни условию максимальности.

В данной диссертации построен другой пример с еще более экстремальными свойствами (теорема 6.1). А именно, найдены два многообразия моноидов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , удовлетворяющих условиям 1) и 2) выше, такие, что

- 3) многообразие  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  конечно универсально;
- 4) многообразие  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  покрывает одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

Более того, решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{X})$  и  $\mathfrak{L}(\mathbf{Y})$  являются 6-элементной и 7-элементной цепями соответственно. Несмотря на контринтуитивность этого примера, в диссертации также показано, что существует бесконечно много примеров двух кроссовых многообразий моноидов, объединение которых является конечно универсальным многообразием с континуумом подмногообразий (следствие 6.2).

Из обсуждаемого результата, в частности, вытекает, что в классе решеток подмногообразий многообразий моноидов конечность решетки, условие максимальности и условие минимальности не замкнуты относительно объединения многообразий и перехода к покрытиям. Интересно, что для многообразий полугрупп ответы на вопросы, аналогичные обсуждаемым

сейчас, относительно конечности и условия минимальности отрицательны (М.В.Сапир [89]), а относительно условия максимальности неизвестны (соответствующий вопрос сформулирован в [24, вопрос 10.2]). Более того, в контексте многообразий полугрупп следующие три вопроса также являются открытыми. Существуют ли два малых многообразия, решетка подмногообразий объединения которых континуальна? Существует ли малое многообразие, покрытие которого имеет континуум подмногообразий? Существуют ли два малых многообразия с конечно универсальным объединением? Первый из этих вопросов в явном виде был сформулирован в [49, вопрос 3.15] (см. также [30, проблема 5.3]), второй — в [30, проблема 5.4], а третий — в [30, проблема 5.10].

**Предельные и кроссовы многообразия.** Накопленная информация о решетке  $\mathcal{Mon}$ , а также наработанная техника позволили существенно продвинуться и в решении нескольких вопросов близких решеткам многообразия. В диссертации рассматриваются две такие родственные темы: предельные и кроссовы многообразия.

Обсудим сначала первую из них. *Предельными* принято называть минимальные бесконечно базлируемые многообразия. Легко видеть, что решетка подмногообразий любого предельного многообразия не более чем счетна и удовлетворяет условию минимальности. По лемме Цорна, каждое бесконечно базлируемое многообразие содержит некоторое предельное многообразие. Следовательно, многообразие является наследственно конечно базлируемым тогда и только тогда, когда оно не содержит предельных многообразий. Этим объясняется интерес к предельным многообразиям.

Опыт, однако, показывает, что нахождение явных примеров предельных многообразий оказывается весьма нетривиальной задачей. Например, до сих пор не известен явный пример предельного многообразия групп, хотя их число континуально [60]. Построение такого примера остается одной из интригующих открытых проблем в теории многообразий групп (см. [12, задача 4.46], а также обзор [43, § 3]). Тем не менее, известны явные примеры предельных многообразий полугрупп и моноидов.

Первые два примера предельных многообразий моноидов были построены М.Джексоном [50] в 2005 году<sup>3</sup>. С тех пор эта тематика привлекла значительное внимание исследователей (см. статьи [64, 65, 93, 94, 112, 113], а также часть III недавней монографии [71]). В частности, было найдено еще несколько явных примеров. А в работе Э.Ли [65] удалось даже показать, что два предельных многообразия М.Джексона являются единственными предельными многообразиями апериодических моноидов с *центральными идемпотентами* (т.е. моноидов, в которых идемпотенты перестановочны со всеми остальными элементами). Этот результат выступает резким контрастом на фоне многообразий не только групп, но и полугрупп, для которых описания предельных многообразий в сколько-нибудь широких классах неизвестны. В диссертации обсуждаемый результат Э.Ли обобщается на следующие два класса:

---

<sup>3</sup>Для сравнения отметим, что первое предельное многообразие полугрупп найдено М.В.Волковым [105] намного раньше, еще в 1982 году.

- класс многообразий аperiodических моноидов с *коммутирующими идемпотентами* (т.е. моноидов, в которых идемпотенты перестановочны друг с другом);
- класс многообразий  *$\mathcal{F}$ -тривиальных* моноидов (т.е. моноидов, в которых отношение Грина  $\mathcal{F}$  совпадает с отношением равенства<sup>4</sup>).

Показано, что имеется в точности 4 предельных многообразия аperiodических моноидов с коммутирующими идемпотентами (теорема 7.1) и 7 предельных многообразия  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов (теорема 7.2).

Перейдем к кроссовым многообразиям. Одним из методов описания таких многообразий является нахождение всех *почти кроссовых* многообразий (т.е. минимальных некроссовых многообразий), поскольку стандартным применением леммы Цорна можно показать, что любое некроссово многообразие содержит некоторое почти кроссово. Параллельно с изучением предельных многообразий, Э.Ли [67] существенно продвинулся в изучении кроссовых многообразий, показав, что имеется в точности 3 почти кроссовых многообразия аperiodических моноидов с центральными идемпотентами. В качестве следующего шага, он предложил задачу описания почти кроссовых многообразий аperiodических моноидов с коммутирующими идемпотентами, получив определенное промежуточное продвижение в этом направлении в работе [70]. В данной диссертации обсуждаемая задача решена полностью. А именно, показано, что имеется в точности 9 почти кроссовых многообразий аperiodических моноидов с коммутирующими идемпотентами (теорема 7.14).

## **Теоретическая и практическая значимость, научная новизна**

Все результаты диссертации являются новыми. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории полугрупп и теории многообразий. Результаты, полученные в диссертации, значительно расширяют круг наших знаний о строении решетки многообразий моноидов.

## **Методология и методы исследования. Степень достоверности**

В работе применяются методы теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

Достоверность результатов исследования обеспечивается использованием научно обоснованных методов с опорой на основополагающие теоретические положения в области математики, на фундаментальные работы по теории полугрупп, теории решеток и теории многообразий, использованием общеалгебраических и специальных методов исследований в области теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток.

---

<sup>4</sup>Напомним, что два элемента полугруппы  $S$  находятся в отношении Грина  $\mathcal{F}$ , если они порождают один и тот же главный идеал в  $S$ .

## Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся:

- 1) утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке многообразий моноидов; первые примеры конечно универсальных многообразий моноидов; опубликовано в статье [128];
- 2) описание дистрибутивных многообразий апериодических моноидов; опубликовано в статьях [117, 127];
- 3) описание нейтральных, стандартных, костандартных, дистрибутивных, нижнемодулярных и сократимых элементов решетки всех многообразий моноидов; опубликовано в статьях [115, 116, 118, 129];
- 4) утверждение о том, что наименьший порядок моноида, порождающего многообразие с континуальной решеткой подмногообразий равен 6; опубликовано в статье [131];
- 5) утверждение о том, что наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие равен 6; опубликовано в статье [123];
- 6) пример двух кроссовых многообразий моноидов, объединение которых является конечно универсальным многообразием с континуумом подмногообразий; опубликовано в статьях [119, 123];
- 7) описание предельных многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами и предельных многообразий  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов; опубликовано в статьях [121, 132];
- 8) описание кроссовых многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами; опубликовано в статье [124].

Некоторые промежуточные результаты диссертации опубликованы в статьях [114, 120, 122, 125, 126, 133, 134].

## Апробация и публикации

Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 2015), Международной конференции «Группы и графы, метрики и многообразия» (Екатеринбург, 2017), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2017–2022, 2024, 2025), Международной молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2018), 56-й летней школе по алгебре и упорядоченным множествам (Шпиндлерув Млын, Чехия, 2018), Международной конференции, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 2019), Международной летней школе-конференции «Пограничные вопросы универсальной алгебры и теории моделей» (Эрлагол, 2021), Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2021), Международной конференции «Алгебра и динамические системы» (Нальчик,

2022), 3-й конференции Математических центров России (Майкоп, 2023), Международной конференции по группам, полугруппам, алгебраической комбинаторике и смежным темам (Хайкоу, Китай, 2023), Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2024), Международной конференции «Алгебра и ее роль в компьютерных науках» (Лиссабон, Португалия, 2025), Международной конференции по теоретической и вычислительной алгебре (Эвора, Португалия, 2025), 5-й конференции Математических центров России (Красноярск, 2025).

Результаты диссертации также докладывались на семинаре «Алгебра и логика» (Новосибирск, 2019), алгебраическом семинаре ОмГПУ (Омск, 2019), онлайн-семинаре «Полугруппы, автоматы и языки» (Порту, Португалия, 2021), семинаре в Сианьском университете электронных наук и технологий (Сиань, Китай, 2023), семинаре в Университете Ланьчжоу (Ланьчжоу, Китай, 2023), семинаре в Технологическом университете Ланьчжоу (Ланьчжоу, Китай, 2023), семинаре в Северо-восточном педагогическом университете (Ланьчжоу, Китай, 2023). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на семинаре «Алгебра и фундаментальная информатика» (Екатеринбург, 2016–2025).

По теме диссертации опубликована 21 работа [114–134] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Работы [114–127] написаны без соавторов. Из работы [128] в диссертацию включены лишь результаты, принадлежащие диссертанту. В работах [133, 134] Б.М.Верникову принадлежат постановка задачи и усовершенствование первоначального варианта изложения, а сами доказательства найдены диссертантом. Результаты работ [129, 131, 132] получены в нераздельном соавторстве. Наконец, работа [130] носит обзорный характер, хотя и содержит несколько новых результатов, приводимых с доказательствами. Все упомянутые в этом обзоре результаты, включенные в диссертацию, доказаны в одной из статей [114–116, 118–120, 122, 124, 128, 129, 131–134].

## Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. В главе 1 собраны необходимые для дальнейшего определения, обозначения и вспомогательные результаты. В главе 2 доказываются отсутствие нетривиальных тождеств в решетке многообразий апериодических моноидов и в решетке надкоммутативных многообразий моноидов путем построения первых примеров конечно универсальных многообразий моноидов. Описанию дистрибутивных многообразий апериодических моноидов посвящена глава 3. В главе 4 рассматриваются специальные элементы решетки многообразий моноидов. Минимальные моноиды, порождающие многообразия со сложной решеткой подмногообразий изучаются в главе 5. В главе 6 строится пример двух маленьких многообразий моноидов с большим объединением. Наконец, предельным и кроссовым многообразиям посвящена глава 7.

# Глава 1

## Предварительные сведения

В данной главе собраны все основные понятия и обозначения, а также некоторые базовые результаты.

### § 1.1. Слова, тождества, теорема Биркгофа о полноте эквациональной логики

Зафиксируем некоторый счетный алфавит  $X$ . Как обычно, через  $X^+$  и  $X^*$  мы будем обозначать свободную полугруппу и свободный моноид над алфавитом  $X$  соответственно. Элементы полугруппы  $X^+$  и моноида  $X^*$  называют *словами*, а элементы алфавита — *буквами* или *переменными*. Пустое слово будем обозначать символом 1.

*Алфавит* слова  $\mathbf{w}$ , т.е. множество всех букв, входящих в запись этого слова, будем обозначать через  $\text{alph}(\mathbf{w})$ . Буква называется *простой* [*кратной*] *в слове*  $\mathbf{w}$ , если она входит в  $\mathbf{w}$  один [не менее двух] раз. Множество всех простых [кратных] букв слова  $\mathbf{w}$  обозначается через  $\text{sim}(\mathbf{w})$  [соответственно  $\text{mul}(\mathbf{w})$ ]. Через  $|\mathbf{w}|$  будем обозначать длину слова  $\mathbf{w}$ .

Слово, все буквы которого являются простыми, принято называть *линейным*. Если слово содержит не более одной кратной буквы, то его будем называть *почти линейным*.

Если  $\mathbf{w} \in X^+$  и  $x \in \text{alph}(\mathbf{w})$ , то через  $\text{occ}_x(\mathbf{w})$  обозначим число вхождений буквы  $x$  в слово  $\mathbf{w}$ . Слово  $\mathbf{w}$  называется  *$k$ -ограниченным*, если  $\text{occ}_x(\mathbf{w}) \leq k$  для любой буквы  $x \in \text{alph}(\mathbf{w})$ .

Как обычно, через  $h(\mathbf{w})$  [соответственно  $t(\mathbf{w})$ ] обозначается первая [последняя] буква слова  $\mathbf{w}$ . Через  ${}_i\mathbf{w}x$  будем обозначать  $i$ -е вхождение буквы  $x$  в слово  $\mathbf{w}$ . Последнее вхождение  $x$  в  $\mathbf{w}$  обозначаем через  ${}_{\ell}\mathbf{w}x$ . Если  $i$ -е вхождение  $x$  в  $\mathbf{w}$  предшествует  $j$ -му вхождению  $y$  в  $\mathbf{w}$ , то для краткости будем писать  $({}_i\mathbf{w}x) < ({}_j\mathbf{w}y)$ .

Если  $\mathbf{w} \in X^+$  и  $Z \subseteq \text{alph}(\mathbf{w})$ , то через  $\mathbf{w}_Z$  обозначается слово, полученное из  $\mathbf{w}$  вычеркиванием всех вхождений букв, содержащихся в  $Z$ , а через  $\mathbf{w}(Z)$  — слово, получающееся из  $\mathbf{w}$  удалением всех букв, кроме букв из  $Z$ . Для краткости договоримся писать  $\mathbf{w}_x$  вместо  $\mathbf{w}_{\{x\}}$  и  $\mathbf{w}(x_1, x_2, \dots, x_k, Z)$  вместо  $\mathbf{w}(\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cup Z)$ .

Если  $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$  и  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \in X^*$ , то для краткости будем говорить, что  $\varphi: X \rightarrow X^*$  есть подстановка

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k),$$

если  $\varphi(x_i) = \mathbf{w}_i$  для любого  $i = 1, 2, \dots, k$  и  $\varphi(v) = v$  в противном случае.

*Тождеством* над алфавитом  $X$  называют формальное равенство  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^+$ . Моноид  $M$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  (или тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в моноиде  $M$ ), если для любой подстановки  $\varphi: X \rightarrow M$ , справедливо равенство  $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$ . Многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , если любой моноид из  $\mathbf{V}$  удовлетворяет этому тождеству. Через  $\text{var } \Sigma$  обозначается многообразие, заданное системой тождеств  $\Sigma$ , а через  $\text{var } M$  — многообразие, порожденное моноидом  $M$ . Говорят, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ , если найдутся слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \{\mathbf{a}\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{t})\mathbf{b}\}$ . Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из системы тождеств  $\Sigma$ , если существует конечная последовательность слов  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\Sigma$ .

**Предложение 1.1** (Теорема Биркгофа о полноте эквациональной логики; см. [34, теорема II.14.19]). *Многообразие  $\text{var } \Sigma$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  тогда и только тогда, когда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из  $\Sigma$ .*  $\square$

Системы тождеств  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  эквивалентны (по модулю системы тождеств  $\Sigma$ ; внутри многообразия  $\text{var } \Sigma$ ), если они задают одно и то же многообразие (внутри  $\text{var } \Sigma$ ). Если  $\mathbf{V}$  — многообразие, а  $\Sigma$  — множество тождеств, то через  $\mathbf{V}\Sigma$  будем обозначать подмногообразие многообразия  $\mathbf{V}$ , задаваемой множеством  $\Sigma$ .

Следующие понятия, по сути, возникли в статье [92] для описания метода вывода тождеств путем перестановки местами соседних вхождений букв; этот метод восходит еще к работам [53, 91]. Тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  называется *1-инвертируемым*, если  $\mathbf{w} = \mathbf{a}x\mathbf{u}\mathbf{b}$  и  $\mathbf{w}' = \mathbf{a}u\mathbf{x}\mathbf{b}$  для некоторых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и  $x, u \in \text{alph}(\mathbf{a}\mathbf{b})$ . Пусть  $k > 1$ . Тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  называется *k-инвертируемым*, если существует последовательность слов  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k = \mathbf{w}'$  такая, что каждое из тождеств  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  является 1-инвертируемым,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , и  $k$  — наименьшее число с таким свойством. Для удобства тривиальное тождество будем считать *0-инвертируемым*.

Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  называют *сбалансированным*, если  $\text{occ}_x(\mathbf{u}) = \text{occ}_x(\mathbf{v})$  для любого  $x \in X$ . Следующее утверждение очевидно.

**Лемма 1.2.** *Любое сбалансированное тождество является k-инвертируемым для некоторого  $k \geq 0$ .*  $\square$

## § 1.2. Фактор-моноиды Риса свободного моноида

Следующая конструкция появилась в работе М.Морса и Г.Хедлунда [76], которые приписывают ее идею Р.Дилуорсу. В статье П.Перкинса [80] эта конструкция используется для построения первого примера конечной полугруппы, порождающей бесконечно базированное многообразие. Позднее она многократно возникала в работах по многообразиям полугрупп и моноидов (см., например, монографии [71, 90] и ссылки в них). Пусть  $W$  — множество слов над алфавитом  $X$ . Через  $W^\leq$  будем обозначать замыкание множества  $W$  относительно взя-

тия подслов. Через  $M(W)$  обозначим фактор-моноид Риса свободного моноида  $X^*$  по идеалу  $X^* \setminus W^{\leq}$ , состоящему из всех слов, не являющихся подсловами слов из  $W$ .

Слово  $\mathbf{w}$  называется *изотермом* для данного класса полугрупп, если из того, что все полугруппы из этого класса удовлетворяют тождеству  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$ , следует, что  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ .

**Лемма 1.3** ([50, лемма 3.3]). *Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, а  $W$  — множество слов. Моноид  $M(W)$  принадлежит  $\mathbf{V}$  тогда и только тогда, когда каждое слово из  $W$  является изотермом для  $\mathbf{V}$ .*  $\square$

Для краткости через  $\mathbf{M}(W)$  будем обозначать многообразие моноидов, порожденное моноидом  $M(W)$ . Если  $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ , то будем писать  $M(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$  [соответственно  $\mathbf{M}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ ] вместо  $M(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\})$  [соответственно  $\mathbf{M}(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\})$ ].

### § 1.3. Конструкция О.Б.Сапир

В недавней статье [93] О.Б.Сапир предложила некое обобщение конструкции  $M(W)$ , где использовала ее для изучения предельных многообразий моноидов. Эта конструкция О.Б.Сапир оказывается, по-видимому, весьма адекватным инструментом для изучения именно многообразий моноидов (в том числе и для чисто решеточных постановок задач). В настоящей диссертации она играет ключевую роль, в частности, при рассмотрении дистрибутивных многообразий.

**Определение.** Пусть  $\alpha$  — конгруэнция на свободном моноиде  $X^*$ . Элементы фактор-моноида  $X^*/\alpha$  называются  *$\alpha$ -классами*. Через  $[\mathbf{u}]^\alpha$  будем обозначать  $\alpha$ -класс слова  $\mathbf{u}$ . Отношение быть подсловом можно естественным образом расширить на  $\alpha$ -классы: два  $\alpha$ -класса  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^*/\alpha$  находятся в отношении  $\mathbf{v} \leq_\alpha \mathbf{u}$ , если  $\mathbf{u} = \mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{s}$  для некоторых  $\mathbf{p}, \mathbf{s} \in X^*/\alpha$ . Легко видеть, что отношение  $\leq_\alpha$  является квазипорядком на множестве  $X^*/\alpha$ . Через  $W^{\leq_\alpha}$  будем обозначать замыкание множества  $\alpha$ -классов  $W$  относительно квазипорядка  $\leq_\alpha$ . Если  $W$  — множество  $\alpha$ -классов, то через  $M_\alpha(W)$  будем обозначать фактор-моноид Риса моноида  $X^*/\alpha$  по идеалу  $(X^*/\alpha) \setminus W^{\leq_\alpha}$ . Очевидно, что если  $\alpha$  — тривиальная конгруэнция на  $X^*$ , то моноид  $M_\alpha(W)$  является ничем иным как моноидом  $M(W)$ .

Рассмотрим пример. Пусть  $\alpha$  — конгруэнция на  $X^*$  определяемая следующим образом: для  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^*$ ,  $\mathbf{u} \alpha \mathbf{v}$  тогда и только тогда, когда слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  получаются друг из друга изменением показателей степеней букв. Рассмотрим моноид  $M_\alpha(\{[xy]^\alpha\})$ . Его элементами являются

$$[x]^\alpha = \{x^k \mid k \geq 1\}, [y]^\alpha = \{y^m \mid m \geq 1\}, [xy]^\alpha = \{x^k y^m \mid k, m \geq 1\}, 0 \text{ и } 1.$$

Нетрудно видеть, что отображение  $[x]^\alpha \mapsto a$ ,  $[y]^\alpha \mapsto b$  индуцирует изоморфизм между моноидом  $M_\alpha(\{[xy]^\alpha\})$  и хорошо известным в теории полугрупп 5-элементным моноидом

$$A_0^1 := \langle a, b \mid a^2 = a, b^2 = b, ba = 0 \rangle \cup \{1\} = \{a, b, ab, 0, 1\}.$$

Следующее утверждение показывает, как вычислить отношение  $\leq_\alpha$ .

**Лемма 1.4** ([93, лемма 2.1]). *Для  $\alpha$ -классов  $u, v \in X^*/\alpha$  следующие условия эквивалентны:*

- (i)  $v \leq_\alpha u$ ;
- (ii) *каждое слово  $v \in v$  является подсловом слова  $u \in u$ ;*
- (iii) *некоторое слово  $v \in v$  является подсловом слова  $u \in u$ .* □

Как обычно, через  $\text{FIC}(\mathbf{V})$  будем обозначать вполне инвариантную конгруэнцию на свободном моноиде  $X^*$ , отвечающую многообразию  $\mathbf{V}$ . Множество слов  $W$  называется *стабильным* относительно многообразия  $\mathbf{V}$ , если  $W$  есть объединение  $\text{FIC}(\mathbf{V})$ -классов. Иными словами, множество  $W$  стабильно относительно многообразия  $\mathbf{V}$ , если для любого тождества  $u \approx v$ , выполненного в  $\mathbf{V}$ , из того что  $u \in W$  следует, что  $v \in W$ . Отметим, что слово  $w$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{V}$  тогда и только тогда, когда множество  $\{w\}$  стабильно относительно  $\mathbf{V}$ .

Следующая лемма обобщает лемму 1.3.

**Лемма 1.5** ([93, предложение 2.3]). *Пусть  $\alpha$  — конгруэнция на свободном моноиде  $X^*$  такая, что пустое слово 1 образует одноэлементный  $\alpha$ -класс,  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, а  $W$  — множество  $\alpha$ -классов. Моноид  $M_\alpha(W)$  принадлежит  $\mathbf{V}$  тогда и только тогда, когда каждый  $\alpha$ -класс из  $W^{\leq \alpha}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ .* □

Через  $M_\alpha(W)$  будем обозначать многообразие, порожденное моноидом  $M_\alpha(W)$ . Если  $w_1, w_2, \dots, w_k \in X^*/\alpha$ , то, для краткости, будем писать  $M_\alpha(w_1, w_2, \dots, w_k)$  [соответственно  $M_\alpha(w_1, w_2, \dots, w_k)$ ] вместо  $M_\alpha(\{w_1, w_2, \dots, w_k\})$  [соответственно  $M_\alpha(\{w_1, w_2, \dots, w_k\})$ ].

**Лемма 1.6** ([93, следствие 2.5]). *Пусть  $\alpha$  — конгруэнция на свободном моноиде  $X^*$  такая, что пустое слово 1 образует одноэлементный  $\alpha$ -класс, а  $W_1$  и  $W_2$  — множества  $\alpha$ -классов. Тогда  $M_\alpha(W_1) \vee M_\alpha(W_2) = M_\alpha(W_1 \cup W_2)$ .* □

**Две конкретные конгруэнции на свободном моноиде  $X^*$ .** В статье [93] были введены несколько конкретных конгруэнций на свободном моноиде  $X^*$ . Две из них, конгруэнции  $\gamma$  и  $\lambda$ , играют ключевую роль в настоящей диссертации. Они определяются следующим образом: для  $u, v \in X^*$ ,

- $u \gamma v$  тогда и только тогда, когда  $\text{sim}(u) = \text{sim}(v)$  и слова  $u$  и  $v$  можно получить друг из друга изменением показателей степеней букв;
- $u \lambda v$  тогда и только тогда, когда  $u \gamma v$  и первые два вхождения любой кратной буквы смежны в слове  $u$  тогда и только тогда, когда первые два вхождения этой буквы смежны в слове  $v$ .

Следуя О.Б.Сапир [93], максимальное подслово слова  $w$ , являющееся степенью буквы  $x$ , будем называть *островом* слова  $w$ , образованным буквой  $x$ . Слово  $w$  будем называть *2-островным*, если каждая буква образует в  $w$  не более двух островов. Множество слов  $W$  называется *2-островным*, если каждое слово из  $W$  является 2-островным.

**Лемма 1.7** ([93, следствие 3.5 и лемма 6.3]). Пусть  $\alpha$  — конгруэнция на свободном моноиде  $X^*$ ,  $u$  —  $\alpha$ -класс, а  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов. Предположим, что  $\alpha$ -класс  $u$  стабилен относительно многообразия  $\mathbf{V}$  и справедливо одно из следующих утверждений:

- (i)  $\alpha = \gamma$ ;
- (ii)  $\alpha = \lambda$  и  $\alpha$ -класс  $u$  является 2-островным.

Тогда любой  $\alpha$ -класс  $v \in \{u\}^{\leq \alpha}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из лемм 1.5 и 3.2.

**Следствие 1.8** ([93, следствия 3.6 и 6.4]). Пусть  $\alpha$  — конгруэнция на свободном моноиде  $X^*$ ,  $W$  — множество  $\alpha$ -классов,  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов. Предположим, что имеет место одно из следующих условий:

- (i)  $\alpha = \gamma$ ;
- (ii)  $\alpha = \lambda$  и любой  $\alpha$ -класс из  $W$  является 2-островным.

Моноид  $M_\alpha(W)$  принадлежит  $\mathbf{V}$  тогда и только тогда, когда каждый  $\alpha$ -класс из  $W$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . □

**Задание классов конгруэнций с помощью регулярных выражений.** Как обычно, через  $\mathbb{N}$  будем обозначать множество всех натуральных чисел. Положим  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Мы будем использовать регулярные выражения для задания наборов слов и, в частности, классов конгруэнций. Для любой буквы  $x \in X^*$ , положим  $x^+ := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  и  $x^* := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ . Используя эти обозначения, удобно представлять многие конкретные классы конгруэнций как слова над алфавитом  $\{x, x^+, x^* \mid x \in X^*\}$ . Например,  $\lambda$ -класс  $[xux]^\lambda = \{xux^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  можно выразить следующим образом:  $[xux]^\lambda = xux^+$ .

## § 1.4. Базовые сведения и известные результаты

В данном параграфе собраны базовые сведения о многообразиях моноидов, а также несколько ключевых известных результатов.

Мы начнем со следующего фольклорного факта (в явном виде он отмечается, например, в монографии Ж.Алмейды [29, раздел 7.1]).

**Предложение 1.9.** *Отображение из  $\mathbf{MON}$  в  $\mathbf{SEM}$ , сопоставляющее многообразию моноидов, порожденному моноидом  $M$ , многообразию полугрупп, порожденное этим моноидом  $M$ , является вложением решетки  $\mathbf{MON}$  в решетку  $\mathbf{SEM}$ .* □

Как и в полугрупповом случае, многообразие моноидов называют *вполне регулярным*, если оно состоит из *вполне регулярных* моноидов (объединений групп). Отметим, что из предложения 1.9 вытекает, что многие «позитивные» решеточные свойства, прежде всего —

свойства наследуемые подрешетками, переносятся с «составных частей» решетки  $\mathbb{S}_{\text{EM}}$  на соответствующие части решетки  $\mathbb{M}_{\text{ON}}$ . Так, например, из дезарговости решетки вполне регулярных многообразий полугрупп, доказанной тремя различными способами Ф.Пастейном в [78, 79] и М.Петричем и Н.Райли в [82], вытекает дезарговость решетки вполне регулярных многообразий моноидов, а из финитной аппроксимируемости решетки надкоммутативных многообразий полугрупп, доказанной М.В.Волковым в [107], следует финитная аппроксимируемость решетки надкоммутативных многообразий моноидов.

**Лемма 1.10** ([11, лемма 1.3]). *Для многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  следующие условия эквивалентны:*

- а)  $\mathbf{V}$  является многообразием групп;
- б)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , для которого  $\text{alph}(\mathbf{u}) \neq \text{alph}(\mathbf{v})$ ;
- в)  $\mathbf{M}(1) \notin \mathbf{V}$ . □

Эквивалентность условий а) и б) следующей леммы хорошо известна и легко проверяется, а условий а) и в) — установлена в [11, следствие 1.10].

**Лемма 1.11.** *Для многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  следующие условия эквивалентны:*

- а)  $\mathbf{V}$  — вполне регулярное многообразие;
- б)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x \approx x^{1+n}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ ;
- в)  $\mathbf{M}(x) \notin \mathbf{V}$ . □

Следующее утверждение хорошо известно и легко проверяется.

**Лемма 1.12.** *Многообразие моноидов  $\mathbf{V}$  является аperiodическим тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .* □

Тривиальное многообразие моноидов обозначим через  $\mathbf{T}$ . Многообразие абелевых групп экспоненты  $n$  обозначается через  $\mathbf{A}_n$ .

**Предложение 1.13** ([46]). *Если  $\mathbf{V}$  — периодическое коммутативное многообразие моноидов, то  $\mathbf{V} = \mathbf{A}_n \vee \mathbf{X}$ , где  $n$  — некоторое натуральное число, а  $\mathbf{X}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$  или  $\mathbf{M}(x^m)$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ .* □

Многообразие всех идемпотентных моноидов будем обозначать через  $\mathbf{B}$ , а через  $\mathbf{LRB}$  [соответственно  $\mathbf{RRB}$ ] обозначим многообразие, порожденное 2-элементной полугруппой левых [правых] нулей с внешнеприсоединенной единицей. Хорошо известно и легко проверяется (см., например, [29, упражнение 6.5.2]), что

$$\mathbf{LRB} = \text{var}\{xy \approx xyx\} \quad \text{и} \quad \mathbf{RRB} = \text{var}\{yx \approx xyx\}.$$

Далее, для любого  $n \geq 3$ , положим

$$\mathbf{B}_n := \text{var}\{x \approx x^2, \mathbf{r}_n \approx \mathbf{r}'_n\},$$

где

$$\mathbf{r}_n := \begin{cases} x_1 x_2 x_3 & \text{для } n = 3, \\ \mathbf{r}_{n-1} x_n & \text{для четного } n \geq 4, \\ x_n \mathbf{r}_{n-1} & \text{для нечетного } n \geq 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}'_n := \begin{cases} x_1 x_2 x_3 x_1 x_3 x_2 x_3 & \text{для } n = 3, \\ \mathbf{r}'_{n-1} x_n \mathbf{r}_n & \text{для четного } n \geq 4, \\ \mathbf{r}_n x_n \mathbf{r}'_{n-1} & \text{для нечетного } n \geq 5. \end{cases}$$

Через  $\mathbf{V}^\delta$  обозначается многообразие моноидов, двойственное к многообразию  $\mathbf{V}$  (т.е. состоящее из моноидов, антиизоморфных моноидам из  $\mathbf{V}$ ). Отметим, что двойственное к  $\mathbf{V}$  многообразие задается тождествами, зеркальными к тождествам  $\mathbf{V}$ .

**Предложение 1.14** ([110, предложение 4.7]). *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{B})$  имеет вид, изображенный на рис. 1.1.* □

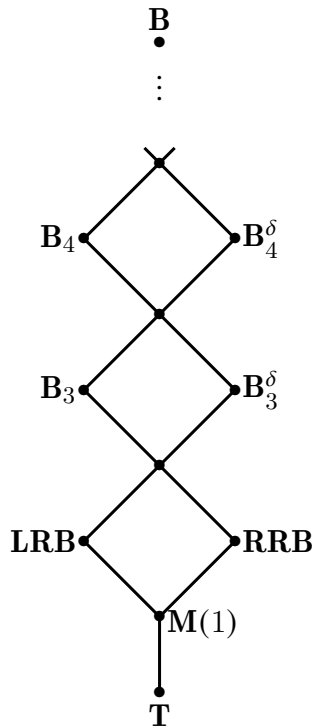


Рис. 1.1: решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{B})$

Введем обозначения для следующих трех конкретных тождеств:

$$\sigma_1 : x y z x t y \approx u x z x t y, \quad \sigma_2 : x z y t x y \approx x z y t y x, \quad \sigma_3 : x z x y t y \approx x z y x t y.$$

Заметим, что тождества  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  являются двойственными друг другу. Положим

$$\mathbf{O} := \text{var}\{\sigma_2, \sigma_3\}.$$

Следуя Э.Ли [71], тождество вида

$$\mathbf{u}_0 \left( \prod_{i=1}^r t_i \mathbf{u}_i \right) \approx \mathbf{v}_0 \left( \prod_{i=1}^r t_i \mathbf{v}_i \right),$$

где  $\{t_1, t_2, \dots, t_r\} = \text{sim}(\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_r \mathbf{u}_r) = \text{sim}(\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_r \mathbf{v}_r)$ , будем называть *эффективным*, если  $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i \neq 1$  для любого  $i = 0, 1, \dots, r$ .

**Предложение 1.15** ([71, лемма 12.1 и замечание 12.3]). *Любое некоммутативное подмно-гообразии многообразия  $\mathbf{O}$  можно задать тождествами  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  вместе с некоторыми из следующих тождеств:*

$$x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} \right) \approx x^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{f_i} \right), \quad (1.1)$$

где  $r, e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ ; и

$$x^{e_0} y^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) \approx y^{f_0} x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right), \quad (1.2)$$

где  $r \in \mathbb{N}_0, e_0, f_0 \in \mathbb{N}, e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0, \sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . При этом тождества (1.1) и (1.2) можно выбрать *эффективными*.  $\square$

## § 1.5. Вспомогательные утверждения

В данном разделе собран ряд вспомогательных фактов, которые будут многократно использоваться на протяжении всей диссертации.

Мы начнем с первого, насколько нам известно, опубликованного в литературе примера многообразия моноидов с немодулярной решеткой подмногообразий.

**Лемма 1.16** ([66, предложение 4.1(i)]). *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{M}(x))$  имеет вид, изображенный на рис. 1.2.*  $\square$

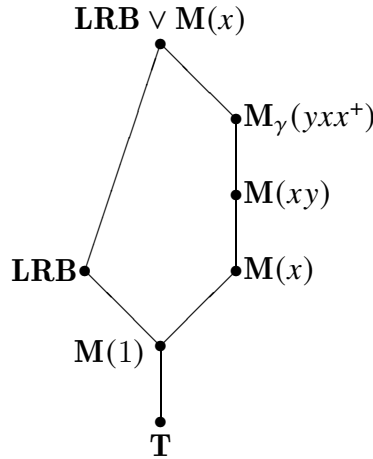


Рис. 1.2: решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{M}(x))$

**Лемма 1.17** ([113, рис. 1], [93, рис. 1]). *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\gamma(x^+ t y u^+ x^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x^+ y u^+ t x^+))$  имеет вид, изображенный на рис. 1.3.*  $\square$

Для любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $1 \leq m \leq k$  положим

$$\mathbf{b}_{k,m} := x_{k-1} x_k x_{k-2} x_{k-1} \cdots x_{m-1} x_m$$

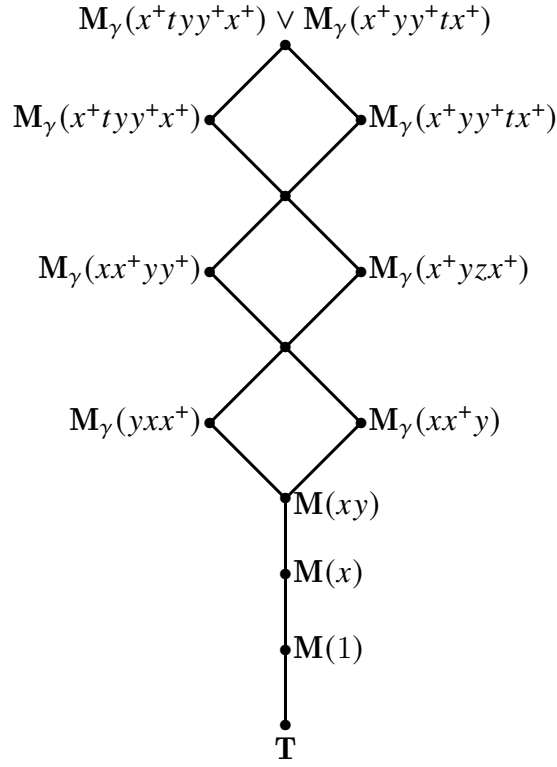


Рис. 1.3: решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\gamma(x^+tyy^+x^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x^+yy^+tx^+))$

и  $\mathbf{b}_k := \mathbf{b}_{k,1}$ ; будем полагать также, что  $\mathbf{b}_0 := 1$ . Введем обозначения для следующих пяти многообразий моноидов:

$$\mathbf{D}_1 := \text{var}\{xux \approx xux^2, x^2y \approx x^2yx, x^2y^2 \approx y^2x^2\},$$

$$\mathbf{F}_k := \mathbf{D}_1\{x_k y_k x_{k-1} x_k y_k \mathbf{b}_{k-1} \approx y_k x_k x_{k-1} x_k y_k \mathbf{b}_{k-1}\},$$

$$\mathbf{H}_k := \mathbf{D}_1\{x x_k x \mathbf{b}_k \approx x_k x^2 \mathbf{b}_k\},$$

$$\mathbf{I}_k := \mathbf{D}_1\{y_1 y_0 x_k y_1 \mathbf{b}_k \approx y_1 y_0 y_1 x_k \mathbf{b}_k\},$$

$$\mathbf{J}_k^m := \mathbf{D}_1\{y_{m+1} y_m x_k y_{m+1} \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1} \approx y_{m+1} y_m y_{m+1} x_k \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1}\}.$$

Отметим, что, как показано в [93, теорема 7.2(i)], многообразие  $\mathbf{F}_1$  есть не что иное как многообразие  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ .

**Лемма 1.18** ([11, предложение 3.15]). *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_1)$  является цепью*

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \subset \mathbf{M}(1) \subset \mathbf{M}(x) \subset \mathbf{M}(xy) \subset \mathbf{M}_\gamma(yxx^+) \subset \mathbf{F}_1 \subset \mathbf{H}_1 \subset \mathbf{I}_1 \subset \mathbf{J}_1^1 \\ \subset \mathbf{F}_2 \subset \mathbf{H}_2 \subset \mathbf{I}_2 \subset \mathbf{J}_2^1 \subset \mathbf{J}_2^2 \\ \vdots \\ \subset \mathbf{F}_k \subset \mathbf{H}_k \subset \mathbf{I}_k \subset \mathbf{J}_k^1 \subset \mathbf{J}_k^2 \subset \dots \subset \mathbf{J}_k^k \\ \vdots \\ \subset \mathbf{D}_1. \end{aligned} \quad \square$$

Словом *первых вхождений* слова  $\mathbf{w}$  называют слово, которое получается из  $\mathbf{w}$  удале-

нием всех, кроме первого, вхождений всех букв. Это слово обозначается через  $\text{ini}(\mathbf{w})$ . Следующее утверждение хорошо известно и легко проверяется.

**Лемма 1.19.** *Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии **LRB** тогда и только тогда, когда  $\text{ini}(\mathbf{u}) = \text{ini}(\mathbf{v})$ .*  $\square$

Блоком слова  $\mathbf{w}$  будем называть максимальное подслово этого слова, не содержащее простых в слове  $\mathbf{w}$  букв. Представление слова  $\mathbf{w}$  в виде произведения чередующихся простых букв и блоков будем называть *разложением* слова  $\mathbf{w}$ .

**Лемма 1.20** ([11, лемма 1.11 и предложение 1.17]). *Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в  $M(xy)$ , а  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  — разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда  $\text{alph}(\mathbf{u}) = \text{alph}(\mathbf{v})$  и разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$ .*  $\square$

Слово  $\mathbf{w}$  назовем *блочко-линейным*, если все его блоки являются линейными словами. Пусть  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — слова, а  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  — их разложения соответственно. В таком случае блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  будем называть *соответствующими*. Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  назовем *линейно-сбалансированным*, если для любого  $i = 0, 1, \dots, m$  соответствующие блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  являются линейными словами, зависящими от одних и тех же букв.

**Лемма 1.21.** *Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в  $M(xt_1x \cdots t_kx)$ . Если слово  $\mathbf{u}$  является блочно-линейным и  $\text{occ}_x(\mathbf{u}) \leq k + 1$  для любой буквы  $x \in \text{alph}(\mathbf{u})$ , то тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является линейно-сбалансированным.*

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  — разложение слова  $\mathbf{u}$ . Поскольку моноид  $M(xy)$  является фактором моноида  $M(xt_1x \cdots t_kx)$ , из леммы 1.20 следует, что разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  и  $\text{mul}(\mathbf{u}) = \text{mul}(\mathbf{v})$ . Возьмем  $x \in \text{mul}(\mathbf{u})$  и положим  $r := \text{occ}_x(\mathbf{u})$ . Буква  $x$  входит в точности в  $r$  блоков слова  $\mathbf{u}$ , скажем, в блоки  $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_r}$ , где  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ . Положим  $T := \{t_{i_1+1}, t_{i_2+1}, \dots, t_{i_r+1}\}$ . Ясно, что  $\mathbf{u}(x, T) = xt_{i_1+1}x \cdots t_{i_r+1}x$ . Поскольку  $r \leq k + 1$  и слово  $xt_1x \cdots t_kx$  является изотермом для многообразия **V** по лемме 1.3, слово  $\mathbf{u}(x, T)$  также будет изотермом для этого многообразия. Следовательно,  $\mathbf{u}(x, T) = \mathbf{v}(x, T)$ . Отсюда вытекает, что  $\text{occ}_x(\mathbf{v}) = r$  и буква  $x$  входит не более одного раза в каждый из блоков слова  $\mathbf{v}$ . Пусть  $x$  входит в блоки  $\mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \dots, \mathbf{v}_{j_r}$ , где  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ . Если  $i_1 < j_1$ , то  $\mathbf{u}(x, T) \neq \mathbf{v}(x, T)$ , поскольку первое вхождение буквы  $x$  предшествует букве  $t_{i_1+1}$  в слове  $\mathbf{v}$ , чего быть не может. Следовательно,  $j_1 \leq i_1$ . В силу симметрии,  $i_1 \leq j_1$ , откуда получаем, что  $i_1 = j_1$ . Аналогичным образом можно показать, что  $i_s = j_s$  для всех  $s = 2, 3, \dots, r$ . Это означает, что  $\text{occ}_x(\mathbf{u}_i) = \text{occ}_x(\mathbf{v}_i)$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Поскольку буква  $x$  выбрана произвольной, получаем, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является линейно-сбалансированным.  $\square$

Следующее утверждение является комбинацией [70, лемма 5.1] и [93, теорема 4.3(iv)].

**Лемма 1.22.** *Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в  $M_\gamma(x^+yzx^+)$ , а  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  — разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  и  $\text{alph}(\mathbf{u}_i) = \text{alph}(\mathbf{v}_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ .*  $\square$

Следующая лемма непосредственно вытекает из лемм 1.3 и 1.21.

**Лемма 1.23.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие такое, что  $M(xt_1x \cdots t_nx) \in \mathbf{V}$ . Предположим, что  $\mathbf{p} := a_1t_1a_2t_2 \cdots a_kt_k$  и  $\mathbf{q} := t_{k+1}a_{k+1}t_{k+2}a_{k+2} \cdots t_{k+\ell}a_{k+\ell}$  для некоторых  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in X$  таких, что  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell}\} = \{x, y\}$  и  $\text{occ}_x(\mathbf{p}\mathbf{q}), \text{occ}_y(\mathbf{p}\mathbf{q}) \leq n$ . Если  $M(\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q}) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q} \approx \mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q}$ .  $\square$

**Лемма 1.24** ([11, лемма 1.9]). Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов. Если  $M(x^n) \notin \mathbf{V}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+m}$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Лемма 1.25** ([11, лемма 1.18]). Пусть  $\mathbf{V}$  — некоммутативное многообразие моноидов. Если  $M(xy) \notin \mathbf{V}$ , то многообразие  $\mathbf{V}$  вполне регулярно. Если, кроме того,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , то многообразие  $\mathbf{V}$  идемпотентно.  $\square$

Для любых  $0 \leq m \leq n$  зафиксируем обозначение для следующего тождества:

$$\iota_{n,m} : xt_1x \cdots t_nx \approx xt_1x \cdots xt_mx^2t_{m+1}x \cdots t_nx.$$

**Лемма 1.26** ([69, лемма 4.4]). Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $M(xt_1x \cdots t_kx) \notin \mathbf{V}$  для некоторого  $k \geq n$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\iota_{k,m}$  для некоторого  $m \in \{0, 1, \dots, k\}$ .  $\square$

**Лемма 1.27.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\gamma(uxx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $ux^n \approx xux^n$ .

*Доказательство.* В силу следствия 1.8(i),  $\gamma$ -класс  $uxx^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in uxx^+$  и  $\mathbf{v} \notin uxx^+$ . Поскольку  $M(xy) \in \mathbf{V}$ , из леммы 1.20 вытекает, что  $\mathbf{v} \in x^+ux^*$  и  $\text{occ}_x(\mathbf{v}) \geq 2$ . Тогда тождество  $\mathbf{u}x^n \approx \mathbf{v}x^n$  эквивалентно по модулю  $x^n \approx x^{n+1}$  тождеству  $ux^n \approx xux^n$ .  $\square$

**Лемма 1.28.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xux^n \approx x^nux^n. \quad (1.3)$$

*Доказательство.* В силу следствия 1.8(ii),  $\lambda$ -класс  $xux^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xux^+$  и  $\mathbf{v} \notin xux^+$ . Поскольку  $M(xy) \in \mathbf{V}$ , из леммы 1.20 вытекает, что  $\mathbf{v} \in uxx^+ \cup xx^+ux^*$ . Если  $\mathbf{v} \in uxx^+$ , то тождество  $xux^n \approx xv^n$  эквивалентно по модулю  $x^n \approx x^{n+1}$  тождеству (1.3). Если  $\mathbf{v} \in xx^+ux^*$ , то тождество  $\mathbf{u}x^n \approx \mathbf{v}x^n$  эквивалентно по модулю  $x^n \approx x^{n+1}$  тождеству (1.3).  $\square$

**Лемма 1.29.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству

$$xux \approx xux^2, \quad (1.4)$$

такое, что  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ . Если  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xzyxty \approx xzxyxty. \quad (1.5)$$

*Доказательство.* В силу следствия 1.8(ii),  $\lambda$ -класс  $xzyx^+ty^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xzyx^+ty^+$ , но  $\mathbf{v} \notin xzyx^+ty^+$ . Поскольку  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in xzxx^+t$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = zty^+$ . Откуда  $\mathbf{v} \in xzx^+yx^*ty^+$ , так как  $\mathbf{v} \notin xzyx^+ty^+$ . Отсюда вытекает, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с (1.4) влечет тождество (1.5).  $\square$

Следующий факт следует из утверждения, двойственного к предложению 10.10.2с) в [29], и его доказательства.

**Лемма 1.30.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $\mathbf{LRB} \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $(y^n x^n)^n \approx x^n (y^n x^n)^n$ .  $\square$

## Глава 2

# Отсутствие нетривиальных тождеств

Данная глава посвящена доказательству отсутствия нетривиальных тождеств в решетке  $\mathbb{M}_{\text{ON}}$  и нескольких ее важных подрешеток. Она состоит из двух параграфов. В § 2.1 рассматривается решетка  $\mathbb{O}\mathbb{C}$  надкоммутативных многообразий, а в § 2.2 — решетка  $\mathbb{P}_{\text{ER}}$  периодических многообразий и ее подрешетка  $\mathbb{A}_{\text{PER}}$ , состоящая из аperiodических многообразий.

### § 2.1. Надкоммутативные многообразия

Основным результатом данного параграфа является следующая

**Теорема 2.1.** *Интервал  $[\text{Сом}, \mathbf{O} \wedge \mathbf{O}^\delta]$  решетки  $\mathbb{O}\mathbb{C}$  содержит изоморфную копию любой конечной решетки. Следовательно, решетка  $\mathbb{O}\mathbb{C}$ , а потому и вся решетка  $\mathbb{M}_{\text{ON}}$ , не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству, а многообразие  $\mathbf{O} \wedge \mathbf{O}^\delta$  конечно универсально.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется ряд обозначений и вспомогательных результатов. Ключевым инструментом является следующий хорошо известный результат П.Пудлака и И.Тумы [86], который сводит наши рассуждения к рассмотрению решеток отношений эквивалентности.

**Предложение 2.2** ([86]). *Любая конечная решетка может быть вложена в конечную решетку отношений эквивалентности.*

Напомним, что через  $\mathfrak{Eq}(A)$  мы обозначаем решетку отношений эквивалентности на множестве  $A$ . Универсальное отношение [отношение равенства] на множестве  $A$  будем обозначать через  $\nu_A$  [соответственно  $\varepsilon_A$ ]. Для данного множества слов  $W \subseteq X^*$  и отношения эквивалентности  $\pi \in \mathfrak{Eq}(W)$  положим

$$\text{Id}(\pi) := \{\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W\}.$$

Для любого  $n \geq 3$ , положим:

$$O_n := \{x^{n-1}t, x^{n-2}tx, x^{n-3}tx^2, \dots, xtx^{n-2}, tx^{n-1}\}.$$

Через  $\mathbf{O}_n$  обозначим подмногообразие многообразия  $\mathbf{O} \wedge \mathbf{O}^\delta$ , заданное тождеством

$$\omega_n : x^n \left( \prod_{i=1}^n t_i \right) \approx \left( \prod_{i=1}^n t_i x \right).$$

Основным техническим результатом данного параграфа является

**Предложение 2.3.** *Для каждого  $n \geq 3$  решетка  $\mathfrak{Eq}(\mathbf{O}_n)$  антиизоморфна интервалу  $[\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\nu_{\mathbf{O}_n})\}, \mathbf{O}_n]$  в решетке  $[\text{Сом}, \mathbf{O} \wedge \mathbf{O}^\delta]$ .*

Теорема 2.1 непосредственно вытекает из этого предложения и предложения 2.2. Таким образом, остается доказать предложение 2.3. Для этого нам потребуется еще несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.4.** *Для любых  $W \subseteq X^*$  и  $\Sigma \subseteq \{\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W\}$ , найдется  $\pi \in \mathfrak{Eq}(W)$  такое, что множества тождеств  $\Sigma$  и  $\text{ld}(\pi)$  эквивалентны.*

*Доказательство.* Пусть  $\widehat{\Sigma}$  — наименьшее множество тождеств, содержащее  $\Sigma$  такое, что

- $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \widehat{\Sigma}$  для всех  $\mathbf{u} \in W$ ;
- если  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \widehat{\Sigma}$ , то  $\mathbf{v} \approx \mathbf{u} \in \widehat{\Sigma}$ ; и
- если  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}, \mathbf{v} \approx \mathbf{w} \in \widehat{\Sigma}$ , то  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w} \in \widehat{\Sigma}$ .

Тогда системы тождеств  $\Sigma$  и  $\widehat{\Sigma}$  эквивалентны, и  $\widehat{\Sigma} = \text{ld}(\pi)$ , где  $\pi = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \widehat{\Sigma}\} \in \mathfrak{Eq}(W)$ . □

**Лемма 2.5.** *Пусть  $n \geq 3$ .*

- (i) *Любое  $(n-1)$ -ограниченное почти линейное слово является изотермом для многообразия  $\mathbf{O}_n$ . В частности, любое слово из  $\mathbf{O}_n$  является изотермом для  $\mathbf{O}_n$ .*
- (ii) *Любое  $(n-2)$ -ограниченное почти линейное слово является изотермом для многообразия  $\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\nu_{\mathbf{O}_n})\}$ .*

*Доказательство.* (i) Если  $\mathbf{w}$  есть  $(n-1)$ -ограниченное почти линейное слово, то оно имеет вид

$$x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} \right) = x^{e_0} t_1 x^{e_1} t_2 x^{e_2} \cdots t_r x^{e_r} \quad (2.1)$$

для некоторых  $r \in \mathbb{N}_0$  и  $e_0, e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}_0$  таких, что  $\sum_{i=0}^n e_i < n$ . Легко видеть, что в таком случае моноид  $M(\mathbf{w})$  удовлетворяет тождествам  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \omega_n\}$  и потому  $M(\mathbf{w}) \in \mathbf{O}_n$ . Нам остается только применить лемму 1.3.

(ii) Легко видеть, что если  $\mathbf{w}$  есть  $(n-2)$ -ограниченное слово вида (2.1), то моноид  $M(\mathbf{w})$  удовлетворяет не только тождествам  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \omega_n\}$ , но и тождествам  $\text{ld}(\nu_{\mathbf{O}_n})$  и потому  $M(\mathbf{w}) \in \mathbf{O}_n\{\text{ld}(\nu_{\mathbf{O}_n})\}$ . Снова применяем лемму 1.3. □

**Лемма 2.6.** *Пусть  $\pi \in \mathfrak{Eq}(\mathbf{O}_n)$ . Предположим, что многообразие  $\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\pi)\}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{O}_n$ . Тогда  $\mathbf{v} \in \mathbf{O}_n$  и  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$ .*

*Доказательство.* Мы можем считать, что  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ . В силу предложения 1.1, найдется последовательность попарно различных слов  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = \mathbf{v}$  такая, что тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  непосредственно вытекает из некоторого тождества из множества  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \omega_n, \text{ld}(\pi)\}$ . В силу леммы 2.5(i), слово  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{u} \in O_n$  является изотермом для многообразия  $O_n$ . Это означает, что тождество  $\mathbf{w}_0 \approx \mathbf{w}_1$  не является следствием системы тождеств  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \omega_n\}$ . Отсюда вытекает, что тождество  $\mathbf{w}_0 \approx \mathbf{w}_1$  непосредственно следует из некоторого тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t} \in \text{ld}(\pi)$ . Поскольку  $\mathbf{w}_0, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in O_n$ , легко видеть, что  $\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1\} = \{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ . Отсюда  $\mathbf{w}_1 \in O_n$  и  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1) \in \pi$ .

Приведенное выше рассуждение можно повторить по индукции, заключая, что  $\mathbf{w}_{i+1} \in O_n$  и  $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_{i+1}) \in \pi$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Следовательно,  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_m \in O_n$  и, поскольку  $\pi$  есть отношение эквивалентности,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_m) \in \pi$ .  $\square$

В оставшейся части этого параграфа мы показываем, что отображение  $\varphi: \mathfrak{Cq}(O_n) \rightarrow [\mathbf{O}_n\{\text{ld}(v_{O_n})\}, \mathbf{O}_n]$ , определяемое формулой

$$\varphi(\pi) := \mathbf{O}_n\{\text{ld}(\pi)\},$$

является антиизоморфизмом. Это завершает доказательство предложения 2.3 (и теоремы 2.1).

**Отображение  $\varphi$  инъективно.** Предположим, что  $\varphi(\pi) = \varphi(\rho)$  для некоторых  $\pi, \rho \in \mathfrak{Cq}(O_n)$ , т.е.  $\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\pi)\} = \mathbf{O}_n\{\text{ld}(\rho)\}$ . Если  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \rho$ , то многообразию  $\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\pi)\}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , откуда, в силу леммы 2.6, следует, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$ . Таким образом,  $\rho \subseteq \pi$ ; аналогично,  $\rho \supseteq \pi$  и потому  $\pi = \rho$ .

**Отображение  $\varphi$  сюръективно.** Достаточно показать, что для любого многообразия  $\mathbf{V} \in [\mathbf{O}_n\{\text{ld}(v_{O_n})\}, \mathbf{O}_n]$  найдется отношение эквивалентности  $\pi \in \mathfrak{Cq}(O_n)$  такое, что  $\varphi(\pi) = \mathbf{V}$ . Поскольку  $\varphi(\varepsilon_{O_n}) = \mathbf{O}_n\{\text{ld}(\varepsilon_{O_n})\} = \mathbf{O}_n$ , будем считать, что  $\mathbf{V} \neq \mathbf{O}_n$ . Тогда, в силу предложения 1.15, найдется такое конечное множество  $\Sigma$  эффективных тождеств вида (1.1), что  $\mathbf{V} = \mathbf{O}_n\Sigma$ ; поскольку  $\mathbf{V} \neq \mathbf{O}_n$ , можно считать, что все тождества системы  $\Sigma$  не выполнены в  $\mathbf{O}_n$ . Ниже показано, что любое тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Sigma$  эквивалентно некоторому подмножеству множества  $\text{ld}(v_{O_n})$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{V} = \mathbf{O}_n\Sigma'$  для некоторого  $\Sigma' \subseteq \text{ld}(v_{O_n})$ . В силу леммы 2.4, найдется отношение эквивалентности  $\pi \in \mathfrak{Cq}(O_n)$  такое, что  $\mathbf{V} = \mathbf{O}_n\{\text{ld}(\pi)\}$ . Иными словами,  $\varphi(\pi) = \mathbf{V}$ , что и требовалось показать.

Поскольку  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество вида (1.1), можно считать, что

$$\mathbf{u} = x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = x^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{f_i} \right). \quad (2.2)$$

Пусть  $e := \sum_{i=0}^r e_i$  и  $f := \sum_{i=0}^r f_i$ . Тогда  $e = f$ , так как тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии всех коммутативных моноидов. Если  $e = f \geq n$ , то, используя тождество  $\omega_n$ , можно преобразовать оба слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  в одно и то же слово  $x^e t_1 t_2 \cdots t_r$ , что невозможно, поскольку

многообразии  $\mathbf{O}_n$  не удовлетворяет  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Следовательно,  $e = f \leq n - 1$ . Однако, поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\varepsilon_{O_n})\}$ , из леммы 2.5(ii) вытекает, что слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  не могут быть  $(n - 2)$ -ограниченными. Поэтому  $e = f = n - 1$ .

Далее, некоторое тождество из системы  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \omega_n, \text{ld}(\varepsilon_{O_n})\}$  должно конвертировать слово  $\mathbf{u}$  в какое-нибудь другое слово. В силу леммы 2.5(i),  $(n - 1)$ -ограниченное почти линейное слово  $\mathbf{u}$  является изотермом для  $\mathbf{O}_n$ , так что ни одно из тождеств  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \omega_n\}$  не может преобразовать слово  $\mathbf{u}$  в какое-нибудь другое слово. Поэтому только тождества из  $\text{ld}(\varepsilon_{O_n})$  можно использовать для преобразования слова  $\mathbf{u}$  в другое слово; в этом случае легко видеть, что не более двух чисел  $e_0, e_1, \dots, e_r$  могут быть отличными от нуля. Аналогичным образом можно показать, что не более двух чисел  $f_0, f_1, \dots, f_r$  могут быть отличными от нуля. Из эффективности тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует, что  $r \leq 3$ , а из того, что  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$  вытекает, что  $r \geq 1$ . Таким образом,  $r \in \{1, 2, 3\}$ . Ниже для краткости будем писать  $h, k, t$  вместо  $t_1, t_2, t_3$  соответственно.

**Случай 1:**  $r = 1$ . С точностью до симметрии тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с одним из следующих:

- (i)  $x^{n-1}h \approx hx^{n-1}$ ,
- (ii)  $x^p hx^q \approx x^{n-1}h$ ,
- (iii)  $x^p hx^q \approx x^{p'} hx^{q'}$ ,

где  $p, q, p', q' \geq 1$  и  $p + q = p' + q' = n - 1$ . В этом случае, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , очевидно, принадлежит множеству  $\text{ld}(\varepsilon_{O_n})$ .

**Случай 2:**  $r = 2$ . С точностью до симметрии тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с одним из следующих:

- (iv)  $x^p hx^q k \approx x^{p'} h k x^{q'}$ ,
- (v)  $x^p hx^q k \approx h x^{p'} k x^{q'}$ ,
- (vi)  $x^p hx^q k \approx h k x^{n-1}$ ,

где  $p, q, p', q' \geq 1$  и  $p + q = p' + q' = n - 1$ .

Из тождества (iv) выводятся следующие тождества:

$$(a_{iv}) : x^p hx^q \approx x^{p'} hx^{q'}, \quad (b_{iv}) : x^{n-1} k \approx x^{p'} k x^{q'};$$

и наоборот, тождество (iv) вытекает из системы  $\{(a_{iv}), (b_{iv})\}$ , поскольку

$$x^p hx^q k \stackrel{(a_{iv})}{\approx} x^{p'} hx^{q'} k \stackrel{(b_{iv})}{\approx} x^{n-1} h k \stackrel{(b_{iv})}{\approx} x^{p'} h k x^{q'}.$$

Следовательно, (iv) и  $\{(a_{iv}), (b_{iv})\}$  эквивалентны.

Из тождества (v) выводятся следующие тождества:

$$(a_v) : x^p hx^q \approx hx^{n-1}, \quad (b_v) : x^{n-1} k \approx x^{p'} k x^{q'};$$

и наоборот, тождество (v) вытекает из системы  $\{(a_v), (b_v)\}$ , поскольку

$$x^p hx^q k \stackrel{(a_v)}{\approx} hx^{n-1} k \stackrel{(b_v)}{\approx} hx^{p'} kx^{q'}.$$

Следовательно, (v) и  $\{(a_v), (b_v)\}$  эквивалентны.

Наконец, из тождества (vi) выводятся следующие тождества:

$$(a_{vi}) : x^p hx^q \approx hx^{n-1}, \quad (b_{vi}) : x^{n-1} k \approx kx^{n-1};$$

и наоборот, тождество (vi) вытекает из системы  $\{(a_{vi}), (b_{vi})\}$ , поскольку

$$x^p hx^q k \stackrel{(a_{vi})}{\approx} hx^{n-1} k \stackrel{(b_{vi})}{\approx} hkx^{n-1}.$$

Следовательно, (vi) и  $\{(a_{vi}), (b_{vi})\}$  эквивалентны.

**Случай 3:**  $r = 3$ . С точностью до симметрии тождеств  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с одним из следующих:

- (vii)  $x^p hx^q kt \approx h kx^{p'} tx^{q'}$ ,
- (viii)  $x^p h kx^q t \approx hx^{p'} ktx^{q'}$ ,
- (ix)  $x^p h ktx^q \approx hx^{p'} kx^{q'} t$ ,

где  $p, q, p', q' \geq 1$  и  $p + q = p' + q' = n - 1$ .

Из тождества (vii) выводятся следующие тождества:

$$(a_{vii}) : x^p hx^q \approx hx^{n-1}, \quad (b_{vii}) : x^{n-1} k \approx kx^{n-1}, \quad (c_{vii}) : x^{n-1} t \approx x^{p'} tx^{q'};$$

и наоборот, тождество (vii) вытекает из системы  $\{(a_{vii}), (b_{vii}), (c_{vii})\}$ , поскольку

$$x^p hx^q kt \stackrel{(a_{vii})}{\approx} hx^{n-1} kt \stackrel{(b)}{\approx} h kx^{n-1} t \stackrel{(c_{vii})}{\approx} h kx^{p'} tx^{q'}.$$

Следовательно, (vii) и  $\{(a_{vii}), (b_{vii}), (c_{vii})\}$  эквивалентны.

Из тождества (viii) выводятся следующие тождества:

$$(a_{viii}) : x^p hx^q \approx hx^{n-1}, \quad (b_{viii}) : x^p kx^q \approx x^{p'} kx^{q'}, \quad (c_{viii}) : x^{n-1} t \approx x^{p'} tx^{q'};$$

и наоборот, тождество (viii) вытекает из системы  $\{(a_{viii}), (b_{viii}), (c_{viii})\}$ , поскольку

$$x^p h kx^q t \stackrel{(a_{viii})}{\approx} h kx^{n-1} t \stackrel{(a_{viii})}{\approx} hx^p kx^q t \stackrel{(b_{viii})}{\approx} hx^{p'} kx^{q'} t \stackrel{(c_{viii})}{\approx} hx^{n-1} kt \stackrel{(c_{viii})}{\approx} hx^{p'} ktx^{q'}.$$

Следовательно, (viii) и  $\{(a_{viii}), (b_{viii}), (c_{viii})\}$  эквивалентны.

Наконец, из тождества (ix) выводятся следующие тождества:

$$(a_{ix}) : x^p hx^q \approx hx^{n-1}, \quad (b_{ix}) : x^p kx^q \approx x^{p'} kx^{q'}, \quad (c_{ix}) : x^p tx^q \approx x^{n-1} t;$$

и наоборот, тождество (ix) вытекает из системы  $\{(a_{ix}), (b_{ix}), (c_{ix})\}$ , поскольку

$$x^p h k t x^q \stackrel{(c_{ix})}{\approx} x^{n-1} h k t \stackrel{(c_{ix})}{\approx} x^p h k x^q t \stackrel{(a_{ix})}{\approx} h k x^{n-1} t \stackrel{(a_{ix})}{\approx} h x^p k x^q t \stackrel{(b_{ix})}{\approx} h x^{p'} k x^{q'} t.$$

Следовательно, (ix) и  $\{(a_{ix}), (b_{ix}), (c_{ix})\}$  эквивалентны.

Итак, мы показали, что в любом случае, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно некоторому подмножеству множества  $\text{ld}(\varepsilon_{O_n})$ .

**Отображение  $\varphi$  является антиизоморфизмом.** Пусть  $\pi, \rho \in \mathfrak{Cq}(O_n)$ . Если  $\pi \subseteq \rho$ , то  $\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\rho)\} \subseteq \mathbf{O}_n\{\text{ld}(\pi)\}$ , т.е.  $\varphi(\rho) \subseteq \varphi(\pi)$ . Обратно, предположим, что  $\varphi(\rho) \subseteq \varphi(\pi)$ , т.е.  $\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\rho)\} \subseteq \mathbf{O}_n\{\text{ld}(\pi)\}$ . Тогда для любой пары  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$ , тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполняется в многообразии  $\mathbf{O}_n\{\text{ld}(\rho)\}$ , откуда, в силу леммы 2.6,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \rho$ . Следовательно,  $\pi \subseteq \rho$ .

## § 2.2. Периодические многообразия

Положим

$$\mathbf{O}' := (\mathbf{O} \wedge \mathbf{O}^\delta)\{x^3 \approx x^4, x^3 y \approx y x^3\}.$$

Основным результатом данного параграфа является следующая

**Теорема 2.7.** *Многообразию  $\mathbf{O}'$  конечно универсально. Следовательно, решетка  $\mathbb{A}_{\text{PER}}$ , а потому и решетка  $\mathbb{P}_{\text{ER}}$ , не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству.*

Для любого  $n \geq 2$ , положим:

$$\mathbf{O}'_n := \left\{ \begin{array}{l} x t_1 x^2 t_2 x^2 \cdots t_{n-2} x^2 t_{n-1} x^2, x^2 t_1 x t_2 x^2 \cdots t_{n-2} x^2 t_{n-1} x^2, \dots \\ \dots, x^2 t_1 x^2 t_2 x^2 \cdots t_{n-2} x^2 t_{n-1} x \end{array} \right\},$$

а также  $\mathbf{O}'_n := \mathbf{O}'\{\omega_{2n}\}$ . Интересно отметить, что для каждого  $n \geq 2$ , многообразию  $\mathbf{O}'_n$  содержит лишь конечное число подмногообразий [67, теорема 4]. Основным техническим результатом данного параграфа является

**Предложение 2.8.** *Для каждого  $n \geq 2$ , решетка  $\mathfrak{Cq}(\mathbf{O}'_n)$  антиизоморфна интервалу  $[\mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\nu_{O'_n})\}, \mathbf{O}'_n]$  в решетке  $\mathfrak{L}(\mathbf{O}'_n)$ . Следовательно, многообразию  $\mathbf{C}$  конечно универсально.*

Аналогично теореме 2.1, теорема 2.7 является прямым следствием предложений 2.2 и 2.8. Нам остается только доказать последнее из этих предложений. Для этого нам потребуется несколько промежуточных результатов.

**Лемма 2.9.** *Пусть  $n \geq 2$ .*

- (i) *Любое  $(2n-1)$ -ограниченное почти линейное бескубное слово является изотермом для многообразия  $\mathbf{O}'_n$ . В частности, любое слово из  $\mathbf{O}'_n$  является изотермом для  $\mathbf{O}'_n$ .*
- (ii) *Любое  $(2n-2)$ -ограниченное почти линейное бескубное слово является изотермом для многообразия  $\mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\nu_{O'_n})\}$ .*

*Доказательство.* (i) Легко видеть, что если  $\mathbf{w}$  есть  $(2n - 1)$ -ограниченное бескубное слово вида (2.1), то моноид  $M(\mathbf{w})$  удовлетворяет тождествам

$$x^3 \approx x^4, x^3y \approx ux^3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \omega_{2n}, \quad (2.3)$$

и потому  $M(\mathbf{w}) \in \mathbf{O}'_n$ . Нам остается только применить лемму 1.3

(ii) Легко видеть, что если  $\mathbf{w}$  есть  $(n - 2)$ -ограниченное слово вида (2.1), то моноид  $M(\mathbf{w})$  удовлетворяет не только тождествам (2.3), но и всем тождествам из  $\text{ld}(\nu_{O'_n})$  и потому  $M(\mathbf{w}) \in \mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\nu_{O'_n})\}$ . Нам снова остается только применить лемму 1.3.  $\square$

**Лемма 2.10.** Пусть  $\pi \in \mathfrak{Cq}(O'_n)$ , а  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\pi)\}$ .

- (i) Предположим, что  $\mathbf{u}$  есть  $(2n - 1)$ -ограниченное почти линейное бескубное слово. Тогда  $\mathbf{v}$  также является  $(2n - 1)$ -ограниченным почти линейным бескубным словом.
- (ii) Предположим, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{O}'_n$ . Тогда  $\mathbf{v} \in \mathbf{O}'_n$  и  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$ .

*Доказательство.* Мы можем считать, что  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ . В силу предложения 1.1, найдется последовательность попарно различных слов  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  непосредственно вытекает из некоторого тождества из множества  $\{(2.3), \text{ld}(\pi)\}$ .

(i) Предположим, что  $\mathbf{u}$  есть  $(2n - 1)$ -ограниченное почти линейное бескубное слово. Тогда, в силу леммы 2.9(i), слово  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{u}$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{O}'_n$ . Следовательно,  $\mathbf{w}_0 \approx \mathbf{w}_1$  непосредственно следует из некоторого тождества  $\text{ld}(\pi)$ . Поскольку любое тождество из  $\text{ld}(\pi)$  образовано парой слов из  $\mathbf{O}'_n$ , легко видеть, что  $\mathbf{w}_1$  есть  $(2n - 1)$ -ограниченное почти линейное бескубное слово.

Приведенное выше рассуждение можно повторить по индукции, заключая, что тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  может быть непосредственно выведено только из некоторого тождества из  $\text{ld}(\pi)$ , а  $\mathbf{w}_{i+1}$  есть  $(2n - 1)$ -ограниченное почти линейное бескубное слово для всех  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ ; в частности,  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_m$  таково.

(ii) В силу п. (i), каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  непосредственно вытекает из некоторого тождества из множества  $\text{ld}(\pi)$ . Следовательно, если  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{u} \in \mathbf{O}'_n$ , то, легко видеть, что  $\mathbf{w}_{i+1} \in \mathbf{O}'_n$  и  $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_{i+1}) \in \pi$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ . Откуда  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_m \in \mathbf{O}'_n$  и, поскольку  $\pi$  — отношение эквивалентности,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_m) \in \pi$ .  $\square$

В оставшейся части этого параграфа мы покажем, что отображение  $\psi: \mathfrak{Cq}(O'_n) \rightarrow [\mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\nu_{O'_n})\}, \mathbf{O}'_n]$ , определяемое формулой

$$\psi(\pi) = \mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\pi)\},$$

является антиизоморфизмом, что завершает доказательство предложения 2.8 (и теоремы 2.7).

**Отображение  $\psi$  инъективно.** Предположим, что  $\psi(\pi) = \psi(\rho)$  для некоторых  $\pi, \rho \in \mathfrak{Cq}(O'_n)$ , т.е.  $O'_n\{\text{ld}(\pi)\} = O'_n\{\text{ld}(\rho)\}$ . Если  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \rho$ , то многообразию  $O'_n\{\text{ld}(\pi)\}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , откуда, в силу леммы 2.10, следует, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$ . Таким образом,  $\rho \subseteq \pi$ ; аналогично,  $\rho \supseteq \pi$  и потому  $\pi = \rho$ .

**Отображение  $\psi$  сюръективно.** Достаточно показать, что для любого многообразия  $\mathbf{V} \in [O'_n\{\text{ld}(v_{O'_n})\}, O'_n]$ , найдется отношение эквивалентности  $\pi \in \mathfrak{Cq}(O'_n)$  такое, что  $\psi(\pi) = \mathbf{V}$ . Поскольку  $\psi(\varepsilon_{O'_n}) = O'_n\{\text{ld}(\varepsilon_{O'_n})\} = O'_n$ , будем считать, что  $\mathbf{V} \neq O'_n$ . Тогда, в силу предложения 1.15 и двойственного к нему утверждения, найдется такое конечное множество  $\Sigma$  эффективных тождеств вида (1.1), что  $\mathbf{V} = O'_n\Sigma$ ; поскольку  $\mathbf{V} \neq O'_n$ , можно считать, что все тождества системы  $\Sigma$  не выполнены в  $O'_n$ . Ниже показано, что любое тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Sigma$  эквивалентно некоторому подмножеству множества  $\text{ld}(v_{O'_n})$ . В силу леммы 2.4, найдется отношение эквивалентности  $\pi \in \mathfrak{Cq}(O'_n)$  такое, что  $\mathbf{V} = O'_n\{\text{ld}(\pi)\}$ . Иными словами,  $\psi(\pi) = \mathbf{V}$ , что и требовалось показать.

Поскольку  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество вида (1.1), можно считать, что имеют место равенства (2.2). Пусть  $e := \sum_{i=0}^r e_i$  и  $f := \sum_{i=0}^r f_i$ . Если  $e \geq 2n$ , либо слово  $\mathbf{u}$  не является бескубным, то из леммы 2.10(i) следует, что либо  $f \geq 2n$ , либо слово  $\mathbf{v}$  не является бескубным. Отсюда вытекает, что  $O'_n$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \approx x^3 t_1 t_2 \cdots t_r \approx \mathbf{v}$ , что противоречит выбору тождеств в  $\Sigma$ . Следовательно, в силу леммы 2.10(i),

- (a)  $e, f \leq 2n - 1$  и
- (b) оба слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются бескубными.

Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является нетривиальным и выполнено в  $O'_n\{\text{ld}(v_{O'_n})\}$ , слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  не могут быть изотермами для  $O'_n\{\text{ld}(v_{O'_n})\}$ . Следовательно, в силу условия (a) и леммы 2.9(ii), получаем, что

- (c)  $e = f = 2n - 1$ .

Предположим, что  $e_j = 0$  для некоторого  $j$ . Тогда, поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является эффективным и справедливо условие (b), имеем  $f_j \in \{1, 2\}$ . Однако легко видеть, что тождества из  $\{(2.3), \text{ld}(v_{O'_n})\}$  могут только преобразовать слово  $\mathbf{v}$  в почти линейное бескубное слово вида  $x^{d_0} t_1 x^{d_1} \cdots t_r x^{d_r}$ , где  $\sum_{i=1}^r d_i = 2n - 1$  и  $d_j \neq 0$ ; в частности, обсуждаемые тождества не могут преобразовать  $\mathbf{u}$  в  $\mathbf{v}$ . Отсюда следует, что в многообразии  $O'_n\{\text{ld}(v_{O'_n})\}$  тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  обязано нарушаться, что противоречит его выбору. Аналогичным образом можно получить противоречие, если  $f_j = 0$  для некоторого  $j$ . Следовательно, с учетом условия (b), имеем

- (d)  $e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \{1, 2\}$ .

Далее, поскольку многообразию  $O'_n\{\text{ld}(v_{O'_n})\}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , во множестве  $\{(2.3), \text{ld}(v_{O'_n})\}$  должно найтись такое тождество, применив которое к слову  $\mathbf{u}$ , можно преобразовать это слово в какое-нибудь другое слово, отличное от  $\mathbf{u}$ . В силу условий (c), (d) и леммы 2.9(i), почти линейное слово  $\mathbf{u}$  является изотермом для многообразия  $O'_n$ , поэтому никакое тождество из (2.3) не может преобразовать слово  $\mathbf{u}$  в какое-нибудь

другое слово. Следовательно, только тождества из  $\text{ld}(\nu_{O'_n})$  можно использовать для преобразования  $\mathbf{u}$  в другое слово; в этом случае, учитывая условия (c) и (d), легко видеть, что  $\mathbf{u} \in O'_n$ . Тогда, в силу леммы 2.10(ii),  $\mathbf{v} \in O'_n$ . Таким образом,  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \text{ld}(\nu_{O'_n})$ .

**Отображение  $\psi$  является антиизоморфизмом.** Пусть  $\pi, \rho \in \mathfrak{Cq}(O'_n)$ . Если  $\pi \subseteq \rho$ , то  $\mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\rho)\} \subseteq \mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\pi)\}$ , т.е.  $\psi(\rho) \subseteq \psi(\pi)$ . Обратно, предположим, что  $\psi(\rho) \subseteq \psi(\pi)$ , т.е.  $\mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\rho)\} \subseteq \mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\pi)\}$ . Тогда для любой пары  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$  тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполняется в многообразии  $\mathbf{O}'_n\{\text{ld}(\rho)\}$ , откуда, в силу леммы 2.10(ii),  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \rho$ . Следовательно,  $\pi \subseteq \rho$ .

## Глава 3

# Многообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий

Данная глава посвящена описанию дистрибутивных многообразий аperiodических моноидов.

### § 3.1. Формулировка основного результата

Чтобы сформулировать наш результат, введем ряд обозначений. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $S_n$  симметрическую группу на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Для удобства положим  $S_0 := S_1$ . Для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\rho \in S_{n+m}$  и  $\tau \in S_{n+m+k}$  определим слова

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n,m}[\rho] &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{n+m-1} z_i \rho y_i^2 \right) z_{(n+m)\rho} x \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right), \\ \mathbf{a}'_{n,m}[\rho] &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{n+m-1} z_i \rho y_i^2 \right) z_{(n+m)\rho} x^2 \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right), \\ \bar{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{n+m-1} z_i \rho y_i^2 x \right) z_{(n+m)\rho} x \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right), \\ \mathbf{c}_{n,m,k}[\tau] &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x y t \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{n+m+k-1} z_i \tau y_i^2 \right) z_{(n+m+k)\tau} y \left( \prod_{i=n+m+1}^{n+m+k} t_i z_i \right). \end{aligned}$$

Через  $\mathbf{c}'_{n,m,k}[\tau]$  будем обозначать слово, получающееся из слова  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\tau]$  перестановкой местами первых вхождений букв  $x$  и  $y$ . Обозначим также через  $\mathbf{d}_{n,m,k}[\tau]$  и  $\mathbf{d}'_{n,m,k}[\tau]$  слова, получающиеся из слов  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\tau]$  и  $\mathbf{c}'_{n,m,k}[\tau]$  соответственно, если читать их справа налево. Положим

$$\begin{aligned} \Phi &:= \{x^2 \approx x^3, x^2 y^2 \approx y^2 x^2\}, \\ \Phi_1 &:= \{\mathbf{c}_{k,\ell,m}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{k,\ell,m}[\rho], \mathbf{d}_{k,\ell,m}[\rho] \approx \mathbf{d}'_{k,\ell,m}[\rho] \mid k, \ell, m \in \mathbb{N}, \rho \in S_{k+\ell+m}\}, \\ \Phi_2 &:= \{\mathbf{a}_{k,\ell}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{k,\ell}[\rho] \mid k, \ell \in \mathbb{N}, \rho \in S_{k+\ell}\}, \\ \Phi_3 &:= \{\mathbf{a}_{k,\ell}[\rho] \approx \mathbf{a}'_{k,\ell}[\rho] \mid k, \ell \in \mathbb{N}, \rho \in S_{k+\ell}\}. \end{aligned}$$

Основным результатом данной главы является следующая

**Теорема 3.1.** *Многообразие апериодических моноидов дистрибутивно тогда и только тогда, когда оно содержится в одном из многообразий*

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &:= \text{var} \{x \approx x^2\}, \\
\mathbf{D}_1 &:= \text{var} \{\Phi, xyx \approx xyx^2, x^2y \approx x^2yx\}, \\
\mathbf{D}_2 &:= \text{var} \{\Phi, \Phi_1, \Phi_2, xyx \approx xyx^2\}, \\
\mathbf{D}_3 &:= \text{var} \{\Phi, \sigma_2, \sigma_3, x^2y \approx x^2yx \approx xyx^2, xyxzx \approx xyxzx^2\}, \\
\mathbf{D}_4 &:= \text{var} \left\{ \Phi, \sigma_2, \sigma_3, x^2y \approx x^2yx, x^2yty \approx yx^2ty, \right. \\
&\quad \left. xyzx^2ty^2 \approx yxzx^2ty^2, xyxzx \approx xyx^2zx \right\}, \\
\mathbf{D}_5 &:= \text{var} \{\Phi, \sigma_2, \sigma_3, xyx^2 \approx x^2yx, xyzx^2y \approx yxzx^2y, xyxzx \approx xyxzx^2\}, \\
\mathbf{D}_6 &:= \text{var} \left\{ \Phi, \sigma_2, \sigma_3, x^2yx \approx x^2yx^2, x^2yty \approx yx^2ty, \right. \\
&\quad \left. xyzx^2ty \approx yxzx^2ty, xyzytix^2 \approx yxzytix^2 \right\}, \\
\mathbf{D}_7 &:= \text{var} \left\{ \Phi, \sigma_2, \sigma_3, x^2yx \approx x^2yx^2, x^2yty \approx yx^2ty, xyzx^2ty^2 \approx yxzx^2ty^2, \right. \\
&\quad \left. xyzx^2y \approx yxzx^2y, xyxzx \approx xyx^2zx \right\}, \\
\mathbf{D}_8 &:= \text{var} \left\{ \Phi, \sigma_2, \sigma_3, x^2yx \approx x^2yx^2, x^2yty \approx yx^2ty, xyzx^2ty^2 \approx yxzx^2ty^2, \right. \\
&\quad \left. xyzx^2y \approx yxzx^2y, xyzx^2tysx \approx yxzx^2tysx, xyxzx \approx xyxzx^2 \right\}, \\
\mathbf{D}_9 &:= \text{var} \{\Phi, \sigma_1, \sigma_3, x^2yx \approx x^2yx^2, ytx^2y \approx ytx^2\}, \\
\mathbf{D}_{10} &:= \text{var} \{\Phi, \sigma_1, \sigma_3, x^2yx \approx x^2yx^2, xyxzx \approx xyxzx^2, x^2zytxy \approx x^2zytyx\}, \\
\mathbf{D}_{11} &:= \text{var} \{\Phi, \Phi_1, \Phi_2, xyx^2 \approx x^2yx, xyxzx \approx xyxzx^2\}, \\
\mathbf{D}_{12} &:= \text{var} \left\{ \Phi, \Phi_1, \Phi_2, x^2yx \approx x^2yx^2, ytx^2y \approx ytyx^2, x^2yty \approx yx^2ty, \right. \\
&\quad \left. xyzx^2ty \approx yxzx^2ty, xyzytix^2 \approx yxzytix^2, zyxtix^2 \approx yzxytix^2 \right\}, \\
\mathbf{D}_{13} &:= \text{var} \left\{ \Phi, \Phi_1, \Phi_2, x^2yx \approx x^2yx^2, yx^2ty \approx xyx^2ty, ytyx^2 \approx ytxyx^2, \right. \\
&\quad \left. xyxzx \approx xyx^2zx, x^2yty^2 \approx yx^2ty^2, x^2zytix \approx yx^2zytix, \right. \\
&\quad \left. x^2yzxtiy \approx yx^2zxtiy, x^2zytixy \approx x^2zytyx, \right. \\
&\quad \left. yzx^2ytx \approx yzyx^2ytx, xyzx^2ty^2 \approx yxzx^2ty^2 \right\}, \\
\mathbf{D}_{14} &:= \text{var} \left\{ \Phi, \Phi_1, \Phi_2, x^2yx \approx x^2yx^2, yx^2ty \approx xyx^2ty, ytyx^2 \approx ytxyx^2, \right. \\
&\quad \left. xyxzx \approx xyxzx^2, x^2yty^2 \approx yx^2ty^2, x^2zytix \approx yx^2zytix, \right. \\
&\quad \left. x^2yzxtiy \approx yx^2zxtiy, x^2zytixy \approx x^2zytyx, yzx^2ytx \approx yzyx^2ytx, \right. \\
&\quad \left. xyzx^2ty^2 \approx yxzx^2ty^2, xyzx^2tysx \approx yxzx^2tysx \right\}, \\
\mathbf{D}_{15} &:= \text{var} \{\Phi_1, xyx \approx x^2yx \approx xyx^2, (xy)^2 \approx (yx)^2\}, \\
\mathbf{P}_n &:= \text{var} \{\Phi_1, \Phi_3, x^n \approx x^{n+1}, x^2y \approx yx^2\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\
\mathbf{Q}_n &:= \text{var} \{x^n \approx x^{n+1}, x^n y \approx yx^n, x^2y \approx xyx\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\
\mathbf{R}_n &:= \text{var} \{\sigma_1, \sigma_3, x^n \approx x^{n+1}, x^2y \approx yx^2\}, \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

или в одном из многообразий, двойственных к указанным.

Многообразие  $\mathbf{V}$  называют *самодвойственным*, если  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^\delta$ . Отметим, что среди пере-

численных в теореме 3.1 многообразий, самодвойственными являются многообразия  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}_{11}$ ,  $\mathbf{D}_{15}$  и все многообразия из серии  $\mathbf{P}_n$ . Таким образом, теорема 3.1 утверждает, что многообразия аperiodических моноидов дистрибутивно тогда и только тогда, когда оно содержится в многообразии из списка, состоящего из 5 счетных серий и 29 «спорадических» многообразий.

Докажем теорему 3.1 в соответствии со следующим планом. Непосредственному доказательству посвятим §3.6, а в §3.2–§3.5 мы предварительно подготовим необходимые для этого ингредиенты. А именно, в §3.2 введем несколько новых конгруэнций на свободном моноиде  $X^*$  с целью их дальнейшего использования для построения моноидов с применением конструкции  $M_\alpha(\mathbf{W})$ . Затем, в §3.3, для целого ряда конкретных многообразий моноидов приведем исключаяющие тождества, отделяющие данные многообразия от тех, которые их не содержат. В §3.4 собраны явные примеры недистрибутивных многообразий моноидов. Комбинируя эти примеры с результатами об исключаяющих тождествах из §3.3, мы покажем в §3.6, что любое многообразие аperiodических моноидов, не содержащее недистрибутивных многообразия из §3.4, содержится в одном из многообразий, перечисленных в теореме 3.1. Дистрибутивность каждого из этих многообразий также устанавливается в §3.6. Для этого мы проводим подготовительную работу в §3.5, в частности, находим короткие списки тождеств, которыми могут быть заданы подмногообразия многообразий из формулировки теоремы 3.1.

### § 3.2. Несколько конкретных конгруэнций на свободном моноиде

В данном параграфе мы введем ряд новых конгруэнций на моноиде  $X^*$ . Начнем со следующих конгруэнций:

- $\gamma' := \gamma \wedge \text{FIC}(\mathbf{M}(xux))$ ;
- $\lambda' := \lambda \wedge \text{FIC}(\mathbf{M}(xux))$ .

**Лемма 3.2.** Пусть  $\alpha$  — конгруэнция на свободном моноиде  $X^*$ , а  $\mathbf{u}$  —  $\alpha$ -класс. Предположим, что  $\alpha$ -класс  $\mathbf{u}$  стабилен относительно многообразия  $\mathbf{V}$  и справедливо одно из следующих утверждений:

$$(i) \quad \alpha = \text{FIC}(\mathbf{M}(xux)) \text{ и}$$

$$\text{существуют } \mathbf{u} \in \mathbf{u} \text{ и } x, y \in X \text{ такие, что } \mathbf{u}(x, y) = xux; \quad (3.1)$$

$$(ii) \quad \alpha = \gamma' \text{ и выполнено условие (3.1);}$$

$$(iii) \quad \alpha = \lambda', \alpha\text{-класс } \mathbf{u} \text{ является 2-островным и выполнено условие (3.1).}$$

Тогда любой  $\alpha$ -класс  $\mathbf{v} \in \{\mathbf{u}\}^{\leq \alpha}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ .

*Доказательство.* (i) Пусть  $\mathbf{v} \in \{\mathbf{u}\}^{\leq \text{FIC}(\mathbf{M}(xux))}$ . Если  $\text{FIC}(\mathbf{M}(xux))$ -класс  $\mathbf{v}$  нестабилен относительно многообразия  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{M}(xux) \notin \mathbf{V}$ . В силу леммы 1.3,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $xux \approx \mathbf{w}$  для некоторого  $\mathbf{w} \in X^*$ . Из условия (3.1) следует, что найдутся  $\mathbf{u} \in \mathbf{u}$  и

$a, b \in X$  такие, что  $\mathbf{u}(a, b) = aba$ . Легко видеть, что тождество  $xux \approx \mathbf{w}$  влечет некоторое тождество вида  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , где  $\mathbf{u}'(a, b) \neq aba$ . Следовательно,  $\mathbf{u}' \notin \mathbf{u}$ , что противоречит предположению, что  $\text{FIC}(\mathbf{M}(xux))$ -класс  $\mathbf{u}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Таким образом,  $\text{FIC}(\mathbf{M}(xux))$ -класс  $\mathbf{v}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . П. (i) доказан.

Пп. (ii) и (iii) вытекают из п. (i) и леммы 1.7.  $\square$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из лемм 1.5 и 3.2.

**Следствие 3.3.** Пусть  $\alpha$  — конгруэнция на свободном моноиде  $X^*$ ,  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, а  $\mathbb{W}$  — множество  $\alpha$ -классов. Предположим, что имеет место одно из следующих условий:

- (i)  $\alpha = \text{FIC}(\mathbf{M}(xux))$  и, для каждого  $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$ , выполнено условие (3.1);
- (ii)  $\alpha = \gamma'$  и, для каждого  $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$ , выполнено условие (3.1);
- (iii)  $\alpha = \lambda'$ , любой  $\alpha$ -класс из  $\mathbb{W}$  является 2-островным и, для каждого  $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$ , выполнено условие (3.1).

Моноид  $M_\alpha(\mathbb{W})$  принадлежит  $\mathbf{V}$  тогда и только тогда, когда каждый  $\alpha$ -класс из  $\mathbb{W}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ .  $\square$

Определим еще одно отношение на свободном моноиде  $X^*$ , родственное конгруэнции  $\lambda$ : для  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^*$ ,

- $\mathbf{u} \beta \mathbf{v}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{u} \gamma \mathbf{v}$ , и для любой буквы  $x \in \text{mul}(\mathbf{u}) = \text{mul}(\mathbf{v})$  первые два вхождения  $x$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}$  тогда и только тогда, когда первые два вхождения  $x$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{v}$ .

Легко видеть, что отношение  $\beta$  является конгруэнцией на  $X^*$ . Действительно, поскольку два слова, лежащие в одном  $\gamma$ -классе, начинаются на одну и ту же букву и оканчиваются на одну и ту же букву, несложно проверить, что отношение  $\beta$  устойчиво относительно умножения в  $X^*$ .

Если  $\alpha$  — отношение эквивалентности на свободном моноиде  $X^*$ , то, следуя О.Б.Сапир [93], слово  $\mathbf{u}$  будем называть  $\alpha$ -термом для многообразия  $\mathbf{V}$ , если из того, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует, что  $\mathbf{u} \alpha \mathbf{v}$ .

**Лемма 3.4.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, а  $\mathbb{W}$  — множество  $\beta$ -классов такое, что для каждого  $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$  найдутся  $\mathbf{u} \in \mathbf{u}$  и  $x, y \in X$  такие, что  $\mathbf{u}(x, y) \in xux^+$ . Моноид  $M_\beta(\mathbb{W})$  принадлежит  $\mathbf{V}$  тогда и только тогда, когда каждый  $\beta$ -класс из  $\mathbb{W}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ .

*Доказательство.* В силу леммы 1.5, остается проверить, что если  $\beta$ -класс  $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v} \in \{\mathbf{u}\}^{\leq \beta}$ , то  $\beta$ -класс  $\mathbf{v}$  также стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Возьмем произвольное слово  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}$ . Тогда, по лемме 1.4, слово  $\mathbf{v}$  является подсловом некоторого слова  $\mathbf{u} \in \mathbf{u}$ . В силу [93, наблюдение 2.4], слово  $\mathbf{u}$  является  $\gamma$ -термом для многообразия  $\mathbf{V}$ . Тогда

из [93, лемма 3.3 и факт 3.4] вытекает, что слово  $\mathbf{v}$  является  $\gamma$ -термом для этого многообразия. Если слово  $\mathbf{v}$  не есть  $\beta$ -терм для  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}'$  такому, что  $\mathbf{v} \gamma \mathbf{v}'$ , но  $\mathbf{v}' \notin \mathbf{v}$ . В этом случае существуют  $x, y \in X$  и  $p, r \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 2$  такие, что слово  $\mathbf{v}(x, y)$  совпадает с одним из слов  $xux^p$  или  $xx^qyx^r$ , а слово  $\mathbf{v}'(x, y)$  совпадает с другим из слов. Отсюда вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $xux^p \approx x^qyx^r$ . Согласно условию, найдутся  $\mathbf{u}' \in \mathbf{u}$  и  $z \in \text{alph}(\mathbf{u}')$  такие, что  $\mathbf{u}' = \mathbf{p}z\mathbf{q}z^p\mathbf{r}$ ,  $z \notin \text{alph}(\mathbf{p}\mathbf{q})$  и  $\text{alph}(\mathbf{q}) \cap \text{sim}(\mathbf{u}') \neq \emptyset$ . Ясно, что тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{p}z^q\mathbf{q}z^r\mathbf{r}$  непосредственно следует из тождества  $xux^p \approx x^qyx^r$  и потому выполнено в  $\mathbf{V}$ . Однако  $\mathbf{p}x^q\mathbf{q}x^r \notin \mathbf{u}$ , что противоречит предположению о стабильности  $\beta$ -класса  $\mathbf{u}$  относительно многообразия  $\mathbf{V}$ .  $\square$

Положим

$$\gamma'' := \gamma \wedge \text{FIC}(\mathbf{M}(xuxty, ytxux)).$$

Будем называть 2-островное слово  $\mathbf{w}$  *сильно 2-островным*, если  $\text{осс}_x(\mathbf{w}) = 2$  для каждой буквы  $x$ , образующей два острова в  $\mathbf{w}$ . Множество слов  $W$  будем называть *сильно 2-островным*, если каждое слово из  $W$  является сильно 2-островным.

**Лемма 3.5.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, а  $W$  — множество сильно 2-островных  $\gamma''$ -классов. Моноид  $M_{\gamma''}(W)$  принадлежит  $\mathbf{V}$  тогда и только тогда, когда каждый  $\gamma''$ -класс из  $W$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ .*

*Доказательство.* В силу леммы 1.5, остается проверить, что если  $\gamma''$ -класс  $\mathbf{u} \in W$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v} \in \{\mathbf{u}\}^{\leq \gamma''}$ , то  $\gamma''$ -класс  $\mathbf{v}$  также стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Возьмем произвольное слово  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}$ . Тогда, по лемме 1.4, слово  $\mathbf{v}$  является подсловом некоторого слова  $\mathbf{u} \in \mathbf{u}$ . Иными словами,  $\mathbf{u} = \mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{q}$  для некоторых  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in X^*$ . В силу [93, наблюдение 2.4], слово  $\mathbf{u}$  является  $\gamma$ -термом для многообразия  $\mathbf{V}$ . Тогда из [93, лемма 3.3 и факт 3.4] вытекает, что слово  $\mathbf{v}$  является  $\gamma$ -термом для этого многообразия. Если слово  $\mathbf{v}$  не есть  $\gamma''$ -терм для  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}'$  такому, что  $\mathbf{v} \gamma \mathbf{v}'$ , но  $M(xuxty, ytxux)$  не удовлетворяет  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}'$ . В этом случае, мы можем без ограничения общности считать, что существуют  $x, y, t \in X$  и  $Z \subseteq \{x, y, t\}$  такие, что одно из слов  $\mathbf{v}(Z)$  или  $\mathbf{v}'(Z)$  является подсловом слова  $xuxty$ , а другое — нет. Поскольку слово  $\mathbf{v}$  является сильно 2-островным и  $\mathbf{v} \gamma \mathbf{v}'$ , это возможно лишь в том случае, когда  $\mathbf{v}(X) \in \{xux, xuxt, uxtu, xuxty\}$  и либо  $\text{осс}_x(\mathbf{v}'(X)) > 2$ , либо  $\text{осс}_y(\mathbf{v}'(X)) > 2$ . Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{p}\mathbf{v}'\mathbf{q}$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Однако  $\gamma''$ -класс  $\mathbf{u}$  является сильно 2-островным. Поэтому  $\mathbf{p}\mathbf{v}'\mathbf{r} \notin \mathbf{u}$ , что противоречит предположению о стабильности  $\gamma''$ -класса  $\mathbf{u}$  относительно  $\mathbf{V}$ .  $\square$

Определим еще четыре конгруэнции на  $X^*$ , которые будут использоваться в настоящей диссертации:

- $\alpha_1 := \text{FIC}(\text{var}\{xux^2 \approx x^2yx, x^2y^2 \approx y^2x^2, \sigma_3\});$
- $\eta := \text{FIC}(\text{var}\{xuxz \approx xuxzx, \sigma_2\} \vee \mathbf{M}(xux));$
- $\mu := \text{FIC}(\text{var}\{x^2 \approx x^3, xuxzx \approx xuxzx^2\});$
- $\nu := \text{FIC}(\text{var}\{xy \approx yux\} \vee \mathbf{M}(xux)).$

### § 3.3. Исключающие тождества для многообразий

В данном параграфе мы приводим исключающие тождества, отделяющие данные многообразия от тех, которые их не содержат.

#### 3.3.1. Ряд конкретных тождеств

**Лемма 3.6.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству  $x^2 \approx x^3$ , такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ .

(i) Если  $M_\nu([yx^2ty]^\nu) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$yx^2tx^2yx^2 \approx x^2yx^2tx^2yx^2. \quad (3.2)$$

(ii) Если  $M_{\nu'}(xx^+yty) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2yty \approx x^2yxtu. \quad (3.3)$$

*Доказательство.* (i) Если  $M_\nu(yxx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$yx^2 \approx xux^2 \quad (3.4)$$

по лемме 1.27. Очевидно, из последнего тождества следует тождество (3.2). Таким образом, мы можем далее предположить, что  $M_\nu(yxx^+) \in \mathbf{V}$ . Используя лемму 1.4, рутинными вычислениями можно проверить, что

$$\begin{aligned} \{[yx^2ty]^\nu\}^{\leq \nu} &= \{1, x, y, t, [x^2]^\nu, \\ &xy, xt, yx, tx, ty, [x^2y]^\nu, [x^2t]^\nu, [yx^2]^\nu, [tx^2]^\nu, \\ &xux, xtx, xty, yxt, txy, tyx, [x^2ty]^\nu, [yx^2t]^\nu, [tx^2y]^\nu, [tyx^2]^\nu, \\ &xtxy, xtux, yxtx, yxtu, txux, yxtu, yxtux, [yx^2ty]^\nu\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $M(xux) \in \mathbf{V}$ , из леммы 1.3 вытекает, что все одноэлементные  $\nu$ -классы из множества  $\{[yx^2ty]^\nu\}^{\leq \nu}$ , а также  $\nu$ -класс  $[x^2]^\nu$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Далее, рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$ , выполненное в  $\mathbf{V}$  такое, что  $\mathbf{w} \in [x^2y]^\nu = xx^+yx^* \cup xuxx^+$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\nu(yxx^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\text{sim}(\mathbf{w}') = \{y\}$  и  $\text{mul}(\mathbf{w}') = \{x\}$ , но  $\mathbf{w}' \notin yxx^+ \cup \{xux\}$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{w}' \in [x^2y]^\nu$  и потому  $\nu$ -класс  $[x^2y]^\nu$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Аналогичным образом мы можем показать, что другие неодноэлементные  $\nu$ -классы из  $\{[yx^2ty]^\nu\}^{\leq \nu}$ , кроме  $[yx^2ty]^\nu$ , стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Отсюда и из леммы 1.5 вытекает, что  $\nu$ -класс  $[yx^2ty]^\nu$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [yx^2ty]^\nu$  и  $\mathbf{v} \notin [yx^2ty]^\nu$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\nu(yxx^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(y, t) = ytu$ ,  $\mathbf{v}(x, t) \neq xtx$  и  $(1_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}t)$ . Следовательно  $\mathbf{v} \in x^+yx^*tx^*yx^*$ , так как  $\mathbf{v} \notin [yx^2ty]^\nu$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с  $x^2 \approx x^3$  влечет (3.2).

(ii) Если  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2y \approx x^2yx \quad (3.5)$$

в силу утверждения, двойственного к лемме 1.27. Очевидно, из последнего тождества следует тождество (3.3). Таким образом, мы можем далее считать, что  $M_\gamma(xx^+y) \in \mathbf{V}$ . В силу следствия 1.8(ii),  $\gamma'$ -класс  $xx^+yu$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это значит, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xx^+yu$  и  $\mathbf{v} \notin xx^+yu$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, t) \in xx^+t$  и  $\mathbf{v}(y, t) = yu$ . Следовательно,  $(1_{\mathbf{v}x}) < (1_{\mathbf{v}y})$  поскольку  $\mathbf{v} \notin xx^+yu$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с  $x^2 \approx x^3$  влечет (3.3).  $\square$

**Лемма 3.7.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству  $x^2 \approx x^3$  такое, что  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ . Если  $M_{\gamma'}(uxx^+ty) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$ux^2ty \approx xux^2ty. \quad (3.6)$$

*Доказательство.* В силу следствия 3.3(ii),  $\gamma'$ -класс  $uxx^+ty$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in uxx^+ty$  и  $\mathbf{v} \notin uxx^+ty$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, t) \in xx^+t$  и  $\mathbf{v}(y, t) = yu$ . Откуда  $(1_{\mathbf{v}x}) < (1_{\mathbf{v}y})$ , так как  $\mathbf{v} \notin uxx^+ty$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с  $x^2 \approx x^3$  влечет (3.6).  $\square$

**Следствие 3.8.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам  $x^2 \approx x^3$  и

$$x^2ytxy \approx ux^2txy \quad (3.7)$$

такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_{\gamma'}(uxx^+ty) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.6).

*Доказательство.* Если  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.5) согласно утверждению, двойственному к лемме 1.27. В этом случае тождество (3.6) также выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку

$$yx^2ty \stackrel{(3.5)}{\approx} yx^2txy \stackrel{(3.7)}{\approx} x^2ytxy \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} x^3ytxy \stackrel{(3.7)}{\approx} xux^2txy \stackrel{(3.5)}{\approx} xux^2ty.$$

Если  $M_\gamma(xx^+y) \in \mathbf{V}$ , то требуемое утверждение вытекает из леммы 3.7.  $\square$

Через  $\mathbf{A}$  будем обозначать многообразие, заданное тождествами  $x^2 \approx x^3$ ,

$$x^2yx \approx x^2yx^2. \quad (3.8)$$

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  зафиксируем обозначение для следующего тождества:

$$\iota_n : xt_1x \cdots t_nx \approx xt_1x \cdots xt_nx^2.$$

Отметим, что тождество  $\iota_n$  есть не что иное как тождество  $\iota_{n,n}$ , введенное в главе 1 перед леммой 1.26. Следующее утверждение уточняет указанную лемму для подмногообразий многообразия  $\mathbf{A}$ ; мы формулируем его для удобства ссылок.

**Следствие 3.9.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие в  $\mathbf{A}$ . Если  $M(xt_1x \cdots t_nx) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\iota_n$ .  $\square$

**Лемма 3.10.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{A}$  такое, что  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\gamma(x^+uzx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2yzx \approx x^2yxzx. \quad (3.9)$$

*Доказательство.* В силу следствия 1.8(i),  $\gamma$ -класс  $x^+uzx^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in x^+uzx^+$  и  $\mathbf{v} \notin x^+uzx^+$ . Поскольку  $M(xy) \in \mathbf{V}$ , из леммы 1.20 вытекает, что  $\mathbf{v}(y, z) = yz$  и  $\text{mul}(\mathbf{v}) = \{x\}$ . Тогда рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $(1_{\mathbf{v}}y) < (1_{\mathbf{v}}x)$ , то тождество  $x^2\mathbf{su}(x, y)x \approx x^2\mathbf{sv}(x, y)x$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.8)\}$  тождеству (3.9);
- если  $(\ell_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}z)$ , то тождество  $x^2\mathbf{u}(x, z)sx \approx x^2\mathbf{v}(x, z)sx$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.8)\}$  тождеству (3.9);
- если  $(1_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}y) < (j_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}z) < (\ell_{\mathbf{v}}x)$  для некоторого  $1 < j < \text{occ}_x(\mathbf{v})$ , то тождество  $x\mathbf{u} \approx x\mathbf{v}$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.8)\}$  тождеству (3.9).

Отсюда вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.9) в любом случае.  $\square$

**Лемма 3.11.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющее тождеству (3.6) такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ .

- (i) Если  $M_{\gamma'}([x^2zytx^2]^{\gamma'}) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2zytx \approx yx^2zytx. \quad (3.10)$$

- (ii) Если  $M_{\gamma'}([x^2yzx^2ty]^{\gamma'}) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2yzxt \approx yx^2zxt. \quad (3.11)$$

*Доказательство.* (i) Если  $M_\gamma(x^+uzx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.9) по лемме 3.10. Очевидно, что последнее тождество вместе с тождеством (3.6) влечет (3.10). Поэтому далее мы можем считать, что  $M_\gamma(x^+uzx^+) \in \mathbf{V}$ . В силу следствия 1.8(ii),  $\gamma'$ -класс  $[x^2zytx^2]^{\gamma'}$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [x^2zytx^2]^{\gamma'}$ , но  $\mathbf{v} \notin [x^2zytx^2]^{\gamma'}$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\gamma(x^+uzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in x^+ztx^+$ ,  $\text{occ}_x(\mathbf{v}) \geq 3$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = yzxt$ . Откуда следует, что существует вхождение  $x$  между  $1_{\mathbf{v}}y$  и  $1_{\mathbf{v}}z$  в  $\mathbf{v}$ , так как  $\mathbf{v} \notin [x^2zytx^2]^{\gamma'}$ . Отсюда вытекает, что тождество  $x^2\mathbf{u} \approx x^2\mathbf{v}$  эквивалентно по модулю  $\{(3.6), (3.8)\}$  тождеству (3.10).

- (ii) Доказательство аналогично п. (i).  $\square$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству леммы 3.11 и мы его опускаем.

**Лемма 3.12.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющее тождеству

$$ytx^2 \approx ytxyx^2 \quad (3.12)$$

такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_{\gamma'}([yzx^2ytx^2]^{\gamma'}) \notin \mathbf{V}$ , то тождество

$$yzx^2ytx \approx yzux^2tx \quad (3.13)$$

выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ . □

**Лемма 3.13.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющее тождествам (3.12) и

$$x^2ytxy \approx x^2ytxy \quad (3.14)$$

такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'}) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2zytxy \approx x^2zytxy. \quad (3.15)$$

*Доказательство.* Если  $M_{\gamma}(x^+uzx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.9) по лемме 3.10. В этом случае, тождество (3.15) выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку

$$x^2zytxy \stackrel{(3.9)}{\approx} x^2zx^2ytxy \stackrel{(3.14)}{\approx} x^2zx^2ytxy \stackrel{(3.9)}{\approx} x^2zytxy.$$

Поэтому можно далее считать, что  $M_{\gamma}(x^+uzx^+) \in \mathbf{V}$ . В силу следствия 1.8(ii), множество  $[x^2zytx^2y]^{\gamma'}$  нестабильно относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [x^2zytx^2y]^{\gamma'}$ , но  $\mathbf{v} \notin [x^2zytx^2y]^{\gamma'}$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_{\lambda}(x^+uzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in x^+ztx^+$ ,  $\text{occ}_x(\mathbf{v}) \geq 3$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = zyty$ . Откуда вытекает, что  $(\ell_{\mathbf{v}}y) < (\ell_{\mathbf{v}}x)$ , так как  $\mathbf{v} \notin [x^2zytx^2y]^{\gamma'}$ . Отсюда следует, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе  $\{x^2 \approx x^3, (3.8), (3.12)\}$  влечет тождество (3.15). □

**Лемма 3.14.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{A}$  такое, что  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \subseteq \mathbf{V}$ .

(i) Если  $M_{\eta}([xuzx^2ty]^{\eta}) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xuzx^2txyx \approx uxzx^2txyx. \quad (3.16)$$

(ii) Если  $M_{\lambda}(xuzyttx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xuzyttx^2 \approx uxzyttx^2. \quad (3.17)$$

(iii) Если  $M_{\lambda'}(yzyxtxx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$yzxytx^2 \approx zyxtx^2. \quad (3.18)$$

*Доказательство.* (i) Если  $M(xyzxtu) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\sigma_1$  по лемме 1.23. Очевидно, из последнего тождества следует тождество (3.16). Поэтому далее мы можем считать, что  $M(xyzxtu) \in \mathbf{V}$ . Используя лемму 1.4, можно легко проверить, что

$$\begin{aligned} & \{[xyzx^2ty]^n\}^{\leq n} = \\ & \{1, x, y, z, t, [x^2]^n, \\ & xy, xt, ux, yz, zx, tx, ty, [x^2y]^n, [x^2t]^n, [yx^2]^n, [zx^2]^n, [tx^2]^n, \\ & xyx, xuz, xtx, xty, yzx, zxt, txy, tyx, \\ & [xyx^2]^n, [xtx^2]^n, [x^2ty]^n, [yzx^2]^n, [zx^2t]^n, [tx^2y]^n, [tyx^2]^n, \\ & xyzx, xtxy, xtyx, yzxt, zxtx, zxtu, txyx, \\ & [xyzx^2]^n, [xtx^2y]^n, [xtyx^2]^n, [yzx^2t]^n, [zxtx^2]^n, [zx^2ty]^n, \\ & xyzxt, yzxtx, yzxtu, zxtxy, zxtyx, \\ & [xyzx^2t]^n, [yzxtx^2]^n, [yzx^2ty]^n, [zxtx^2y]^n, [zxtyx^2]^n, [txyx^2]^n, \\ & xyzxtu, \{yzxtxy, yzxtyx\}, [xyzx^2ty]^n, [yzxtx^2y]^n\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $M(xyzxtu) \in \mathbf{V}$ , из леммы 1.3 следует, что все одноэлементные  $\eta$ -классы  $\{[xyzx^2ty]^n\}^{\leq n}$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Далее, рассмотрим тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$ , выполненное в  $\mathbf{V}$  такое, что  $\mathbf{w} \in [yzxtx^2y]^n = [yzxtyx^2]^n$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_{\gamma}(xux^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{w}'(x, z, t) \in zxtxx^+$  и  $\mathbf{w}'(y, z, t) \in yzty$ . Откуда следует, что  $\mathbf{w}' \in [yzxtx^2y]^n$  и потому  $\eta$ -класс  $[yzxtx^2y]^n$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Аналогичным образом мы можем показать, что другие неодноэлементные  $\eta$ -классы из  $\{[xyzx^2ty]^n\}^{\leq n}$ , кроме  $[xyzx^2ty]^n$ , стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Из этого факта и леммы 1.5 следует нестабильность  $\eta$ -класса  $[xyzx^2ty]^n$  относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [xyzx^2ty]^n$  и  $\mathbf{v} \notin [xyzx^2ty]^n$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z) \in xzx^+$ ,  $\mathbf{v}(y, z, t) = yzty$  и  $\mathbf{v}(x, t) \in xx^+tx^*$ . Тогда  $\mathbf{v} \in uxzx^+tx^*ux^*$ , поскольку  $\mathbf{v} \notin [xyzx^2ty]^n$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с  $\{x^2 \approx x^3, (3.8)\}$  влечет (3.16).

(ii) Согласно следствию 3.3(iii),  $\lambda'$ -класс  $xzyttxx^+$  нестабилен относительно многообразия  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xzyttxx^+$ , но  $\mathbf{v} \notin xzyttxx^+$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in xztxx^+$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = yzty$ . Тогда  $\mathbf{v} \in uxzyttxx^+$ , так как  $\mathbf{v} \notin xzyttxx^+$ . Отсюда следует, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству (3.17).

(iii) Согласно следствию 3.3(iii),  $\lambda'$ -класс  $zyxttxx^+$  нестабилен относительно многообразия  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in zyxttxx^+$ , но  $\mathbf{v} \notin zyxttxx^+$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in zxtxx^+$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = yzty$ . Тогда  $\mathbf{v} \in yzxyttxx^+$ , так как  $\mathbf{v} \notin zyxttxx^+$ . Отсюда следует, что тождество

$\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству (3.18).  $\square$

**Лемма 3.15.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее системе тождеств  $\Phi$  такое, что  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Если  $\mathbf{H}_1 \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xuzx^2y^2 \approx uxzx^2y^2. \quad (3.19)$$

*Доказательство.* Из предложений 3.23(i) и 3.26 в [11] легко вывести, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $xuz\mathbf{a} \approx uxz\mathbf{b}$ , где  $\text{alph}(\mathbf{a}) = \text{alph}(\mathbf{b}) = \{x, y\}$ . Ясно, что тождество  $xuzax^2y^2 \approx uxzbx^2y^2$  эквивалентно по модулю  $\Phi$  тождеству (3.19), что и требовалось доказать.  $\square$

**Лемма 3.16.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству  $x^2 \approx x^3$  такое, что  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\lambda(xx^+uty^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2uty^2 \approx x^2yxt^2. \quad (3.20)$$

*Доказательство.* Если  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.5) в силу утверждения, двойственного к лемме 1.27. Ясно, что это тождество влечет (3.20). Поэтому далее мы можем считать, что  $M_\gamma(xx^+y) \in \mathbf{V}$ . В силу следствия 1.8(ii),  $\lambda$ -класс  $xx^+uty^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xx^+uty^+$ , но  $\mathbf{v} \notin xx^+uty^+$ . Поскольку  $M_\lambda(xux^+) \vee M_\lambda(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ , из леммы 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, t) \in xx^+t$  и  $\mathbf{v}(y, t) \in uty^+$ . Тогда  $(\mathbf{1}_\mathbf{v}y) < (\mathbf{1}_\mathbf{v}x)$ , так как  $\mathbf{v} \notin xx^+uty^+$ . Отсюда следует, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с  $x^2 \approx x^3$  влечет тождество (3.20).  $\square$

**Следствие 3.17.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам  $x^2 \approx x^3$  и (3.6) такое, что  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\lambda(xx^+uty^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2uty^2 \approx ux^2ty^2. \quad (3.21)$$

*Доказательство.* В силу леммы 3.16,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.20). Тогда тождества  $x^2uty^2 \stackrel{(3.20)}{\approx} x^2yx^2ty^2 \stackrel{(3.6)}{\approx} ux^2ty^2$  выполнены в  $\mathbf{V}$ .  $\square$

**Лемма 3.18.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству  $x^2 \approx x^3$  такое, что  $M_\lambda(xux^+) \vee M_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ . Если  $M_\lambda(xuzx^+ty^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xuzx^2ty^2 \approx uxzx^2ty^2. \quad (3.22)$$

*Доказательство.* В силу следствия 1.8(ii),  $\lambda$ -класс  $xuzx^+ty^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xuzx^+ty^+$ , но  $\mathbf{v} \notin xuzx^+ty^+$ . Поскольку  $M_\lambda(xux^+) \vee M_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ , из леммы 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, z) \in xzx^+$ ,  $\mathbf{v}(x, t) \in xx^+t$ ,  $\mathbf{v}(y, z) \in yzy^+$  и  $\mathbf{v}(y, t) \in uty^+$ . Откуда  $\mathbf{v} \in uxzx^+ty^+$ , так как  $\mathbf{v} \notin xuzx^+ty^+$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с  $x^2 \approx x^3$  влечет (3.22).  $\square$

**Следствие 3.19.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам  $x^2 \approx x^3$  и

$$x y z x^2 y \approx y x z x^2 y \quad (3.23)$$

такое, что  $M_\lambda(x y x^+) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\lambda(x y z x^+ t y^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.22).

*Доказательство.* Если  $M_\gamma(x x^+ y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.5) в силу утверждения, двойственного к лемме 1.27. В этом случае тождество (3.22) выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку

$$x y z x^2 t y^2 \stackrel{(3.5)}{\approx} x y z x^2 t y^2 x \stackrel{(3.23)}{\approx} y x z x^2 t y^2 x \stackrel{(3.5)}{\approx} y x z x^2 t y^2.$$

Если  $M_\gamma(x x^+ y) \in \mathbf{V}$ , требуемое утверждение следует из леммы 3.18.  $\square$

**Лемма 3.20.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождеству  $x^2 \approx x^3$  такое, что  $\mathbf{M}(x y x) \vee \mathbf{M}_\lambda(x y x^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x x^+ y) \subseteq \mathbf{V}$ . Если  $M_{\lambda'}(x y z x x^+ t y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x y z x^2 t y \approx y x z x^2 t y. \quad (3.24)$$

*Доказательство.* В силу следствия 3.3(iii),  $\mathcal{L}$ -класс  $x y z x x^+ t y$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in x y z x x^+ t y$ , но  $\mathbf{v} \notin x y z x x^+ t y$ . Поскольку  $\mathbf{M}(x y x) \vee \mathbf{M}_\lambda(x y x^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x x^+ y) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z) \in x z x x^+$ ,  $\mathbf{v}(x, t) \in x x^+ t$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = y z y t$ . Откуда  $\mathbf{v} \in y x z x x^+ t y$ , так как  $\mathbf{v} \notin x y z x x^+ t y$ . Отсюда вытекает, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству (3.24).  $\square$

**Следствие 3.21.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам  $x^2 \approx x^3$  и (3.23) такое, что  $\mathbf{M}(x y x) \vee \mathbf{M}_\lambda(x y x^+) \subseteq \mathbf{V}$ . Если  $M_{\lambda'}(x y z x x^+ t y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.24).

*Доказательство.* Если  $M_\gamma(x x^+ y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.5) в силу утверждения двойственного к лемме 1.27. В этом случае тождество (3.24) выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку

$$x y z x^2 t y \stackrel{(3.5)}{\approx} x y z x^2 t x^2 y \stackrel{(3.23)}{\approx} y x z x^2 t x^2 y \stackrel{(3.5)}{\approx} y x z x^2 t y.$$

Если  $M_\gamma(x x^+ y) \in \mathbf{V}$ , то требуемое утверждение следует из леммы 3.20.  $\square$

**Лемма 3.22.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющее тождеству (3.23) такое, что  $\mathbf{M}(x y x) \vee \mathbf{M}_\lambda(x y x^+) \subseteq \mathbf{V}$ . Если  $M_{\lambda'}(x y z x^+ t y s x^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x y z x^2 t y s x \approx y x z x^2 t y s x. \quad (3.25)$$

*Доказательство.* Если  $M_\gamma(x^+ y z x^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.9) в силу леммы 3.10. В этом случае тождество (3.25) выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку

$$x y z x^2 t y s x \stackrel{(3.9)}{\approx} x y z x^2 t x^2 y s x \stackrel{(3.23)}{\approx} y x z x^2 t x^2 y s x \stackrel{(3.9)}{\approx} y x z x^2 t y s x.$$

Если  $M_{\lambda'}(xyzxx^+ty) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.24) по лемме 3.20. Ясно, что тождество (3.24) влечет тождество (3.25). Поэтому далее можно считать, что  $M_{\lambda'}(xyzxx^+ty) \vee M_{\gamma}(x^+yzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ . Используя лемму 1.4, можно проверить, что

$$\begin{aligned} & \{xyzx^+tysx^+\}^{\leq \lambda'} = \\ & \{1, x, xx^+, y, z, t, s, \\ & \quad xy, yz, zx, zxx^+, xt, xx^+t, ty, ys, sx, sxx^+, \\ & \quad xyz, yzx, yzxx^+, zxt, zxx^+t, xty, xx^+ty, tys, ysx, ysxx^+ \\ & \quad xyzx, xyzxx^+, yzxt, yzxx^+t, zxt, zxx^+t, xtys, xx^+tys, tysx, tysxx^+, \\ & \quad xyzxt, xyzxx^+t, yzxt, yzxx^+t, zxtys, zxx^+tys, xtysx, xtysxx^+, xx^+tysx^+, \\ & \quad xyzxty, xyzxx^+ty, yzxtys, yzxx^+tys, zxtysx, zxtysxx^+, zxx^+tysx^+, \\ & \quad xyzxtys, xyzxx^+tys, yzxtysx, yzxtysxx^+, yzxx^+tysx^+, \\ & \quad xyzx^+tysx^+\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $M(xyzxty) \subset M_{\lambda'}(xyzxx^+ty) \subseteq \mathbf{V}$ , из леммы 1.3 следует, что все одноэлементные  $\lambda'$ -классы из  $\{xyzx^+tysx^+\}^{\leq \lambda'}$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Поскольку  $M_{\lambda'}(xyzxx^+ty) \vee M_{\gamma}(x^+yzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из леммы 1.5 можно вывести, что все неодноэлементные  $\lambda'$ -классы из  $\{xyzx^+tysx^+\}^{\leq \lambda'}$ , кроме  $xyzx^+tysx^+$ , также стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Из этого факта и леммы 1.5 следует, что  $\lambda'$ -класс  $xyzx^+tysx^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xyzx^+tysx^+$ , но  $\mathbf{v} \notin xyzx^+tysx^+$ . Поскольку  $M(xyx) \vee M_{\lambda}(xyx^+) \vee M_{\gamma}(x^+yzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, z) \in xzxx^+$ ,  $\mathbf{v}(x, t, s) \in x^+tsx^+$  и  $\mathbf{v}(y, z, t, s) = yztys$ . Откуда  $\mathbf{v} \in yxzx^+tysx^+$ , так как  $\mathbf{v} \notin xyzx^+tysx^+$ . Отсюда следует, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с  $\{x^2 \approx x^3, (3.8)\}$  влечет (3.25).  $\square$

**Лемма 3.23.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $M_{\gamma}(xx^+yy^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^n y^n \approx (x^n y^n)^n$ .

*Доказательство.* В силу следствия 1.8(i),  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^p y^q \approx \mathbf{w}$ , где  $p, q \geq 2$  и  $\mathbf{w} \notin xx^+yy^+$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $\text{alph}(\mathbf{w}) = \{x, y\}$ . Тогда  $\mathbf{w}$  содержит подслово  $yx$ . Подставим  $x^n$  вместо  $x$  и  $y^n$  вместо  $y$  в тождество  $x^p y^q \approx \mathbf{w}$  и затем домножим получившееся тождество на  $x^n$  слева и на  $y^n$  справа. В результате получим тождество, эквивалентное по модулю  $x^n \approx x^{n+1}$  тождеству  $x^n y^n \approx (x^n y^n)^m$  для некоторого  $m \geq 2$ . Ясно, что последнее тождество вместе с  $x^n \approx x^{n+1}$  влечет  $x^n y^n \approx (x^n y^n)^n$ .  $\square$

Для краткости через  $\overline{x^+y^+}$  будем обозначать множество всех слов в алфавите  $\{x, y\}$ , не лежащих в  $x^+y^+$ . Иными словами,  $\overline{x^+y^+} := \{\mathbf{w} \in X^* \mid \text{alph}(\mathbf{w}) = \{x, y\}, \mathbf{w} \notin x^+y^+\}$ .

**Лемма 3.24.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам (1.4) и

$$xux \approx x^2ux. \quad (3.26)$$

Если  $M_\gamma(x^+tuy^+x^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xy^2x \approx xt(yx)^2. \quad (3.27)$$

*Доказательство.* Если  $M(xy) \notin \mathbf{V}$ , то из леммы 1.25 следует, что многообразие  $\mathbf{V}$  либо коммутативно, либо идемпотентно. В любом из этих двух случаев легко видеть, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.27). Предположим теперь, что  $M(xy) \in \mathbf{V}$ .

Если  $\mathbf{V}$  не содержит  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\gamma(uxx^+)$ , то из леммы 1.27 или двойственного к ней утверждения вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств (3.4) или (3.5). Каждое из этих тождеств вместе с  $\{(1.4), (3.26)\}$ , очевидно, влечет (3.27).

Таким образом, далее можно считать, что  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\gamma(uxx^+) \subseteq \mathbf{V}$ . В силу следствия 1.8(i),  $\gamma$ -класс  $x^+tuy^+x^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Поскольку  $\gamma$ -классы  $xx^+y$  и  $uxx^+$  являются стабильными относительно  $\mathbf{V}$ , многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $xy^2x \approx x\mathbf{a}$  для некоторого слова  $\mathbf{a} \in \overline{y^+x^+}$ . Легко видеть, что это тождество вместе с  $\{(1.4), (3.26)\}$  влечет (3.27).  $\square$

**Следствие 3.25.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождествам (1.4), (3.26)

$$(xy)^2 \approx (yx)^2. \quad (3.28)$$

Если  $M_\gamma(x^+tuy^+x^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xy^2x \approx xtxy^2x. \quad (3.29)$$

*Доказательство.* В силу леммы 3.24,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.27). Тогда, поскольку

$$xy^2x \stackrel{(3.27)}{\approx} xt(yx)^2 \stackrel{(3.28)}{\approx} xt(xy)^2 \stackrel{(1.4)}{\approx} xtx(xy)^2 \stackrel{(3.28)}{\approx} xtx(yx)^2 \stackrel{(3.27)}{\approx} xtxy^2x,$$

получаем, что тождество (3.29) выполнено в  $\mathbf{V}$ .  $\square$

### 3.3.2. Тождества из $\Phi_1$

Для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ , обозначим через

$$\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho], \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,k}[\rho], \hat{\mathbf{d}}_{n,m,k}[\rho] \text{ и } \hat{\mathbf{d}}'_{n,m,k}[\rho]$$

слова, получающиеся из слов

$$\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho], \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho], \mathbf{d}_{n,m,k}[\rho] \text{ и } \mathbf{d}'_{n,m,k}[\rho]$$

соответственно удалением всех вхождений букв  $y_1, y_2, \dots, y_{n+m+k-1}$ .

**Лемма 3.26.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов такое, что  $M(xzytxy) \in \mathbf{V}$  и  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\rho]) \notin \mathbf{V}$  для некоторых  $n, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m}$ . Тогда в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\rho] \approx \hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\rho]$ .

*Доказательство.* В силу леммы 1.3, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\rho] \approx \mathbf{c}$ , а слово  $xzytxu$  есть изотерм для  $\mathbf{V}$ . Учитывая лемму 1.21, легко убедиться, что

$$\mathbf{c} = \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \mathbf{c}' t \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_i \rho \right) y,$$

где  $\mathbf{c}' \in \{xy, yx\}$ . Из нетривиальности тождества  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\rho] \approx \mathbf{c}$  вытекает, что  $\mathbf{c}' = yx$ . Следовательно,  $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,0}[\rho]$ , что и требовалось показать.  $\square$

Положим

$$\mathbf{N} := \text{var}\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx yx^2, xuxzx \approx x^2yz, \sigma_2, \sigma_3\}.$$

**Лемма 3.27.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{N} \not\subseteq \mathbf{V}$  и  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\rho]) \notin \mathbf{V}$  для некоторых  $n, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m}$ . Тогда в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\rho] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,0}[\rho]$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, не выполненное в  $\mathbf{N}$ . Обозначим через  $Z$  множество всех букв  $z$  таких, что либо  $\text{occ}_z(\mathbf{u}) > 2$ , либо  $z$  входит более одного раза в некоторый блок слова  $\mathbf{u}$ . По лемме 1.3, слово  $xux$  есть изотерм для  $\mathbf{V}$ . Предположим, что найдется буква  $z \in Z$  такая, что  $\text{occ}_z(\mathbf{v}) = 2$  и  $z$  входит в два различных блока слова  $\mathbf{v}$ . Пусть  $t$  — простая буква в  $\mathbf{v}$ , лежащая между первым и вторым вхождением  $z$  в  $\mathbf{v}$ . Тогда  $\mathbf{v}(z, t) = ztz$  и потому  $\mathbf{u}(z, t) = ztz$ , что противоречит выбору буквы  $z$ . Следовательно, множество  $Z$  совпадает со множеством всех букв  $z$  таких, что, либо  $\text{occ}_z(\mathbf{v}) > 2$ , либо  $z$  входит более одного раза в некоторый блок слова  $\mathbf{v}$ .

Пусть множество  $Z$  состоит из букв  $z_1, z_2, \dots, z_s$ . Ясно, что  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \approx z_1^2 z_2^2 \dots z_s^2 \mathbf{u}_Z$  и  $\mathbf{v} \approx z_1^2 z_2^2 \dots z_s^2 \mathbf{v}_Z$ . Это означает, что тождество  $\mathbf{u}_Z \approx \mathbf{v}_Z$  нарушается в  $\mathbf{N}$ . Пусть  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \dots t_m \mathbf{u}_m$  — разложение слова  $\mathbf{u}_Z$ . По лемме 1.20, разложение слова  $\mathbf{v}_Z$  имеет вид  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \dots t_m \mathbf{v}_m$ . Поскольку многообразие  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождеству  $\sigma_3$ , это многообразие удовлетворяет также тождествам

$$\mathbf{u}_Z \approx \mathbf{p}_0 \mathbf{q}_0 \left( \prod_{i=1}^m t_i \mathbf{p}_i \mathbf{q}_i \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_Z \approx \mathbf{p}'_0 \mathbf{q}'_0 \left( \prod_{i=1}^m t_i \mathbf{p}'_i \mathbf{q}'_i \right),$$

где слова  $\mathbf{p}_i$  и  $\mathbf{p}'_i$  состоят из первых вхождений букв в слова  $\mathbf{u}_Z$  и  $\mathbf{v}_Z$  соответственно, а слова  $\mathbf{q}_i$  и  $\mathbf{q}'_i$  состоят из вторых вхождений букв в слова  $\mathbf{u}_Z$  и  $\mathbf{v}_Z$  соответственно. Предположим, что  $\text{alph}(\mathbf{p}_i) \neq \text{alph}(\mathbf{p}'_i)$  для некоторого  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Мы можем без ограничения общности считать, что существует  $z \in \text{alph}(\mathbf{p}_i) \setminus \text{alph}(\mathbf{p}'_i)$ . Тогда первое вхождение буквы  $z$  в  $\mathbf{v}_Z$  лежит в  $\mathbf{p}'_j$  для некоторого  $j \neq i$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $i < j$ . Тогда  $\mathbf{u}(z, t_{i+1}) = z t_{i+1} z$ , но  $\mathbf{v}(z, t_{i+1}) \neq z t_{i+1} z$ , что противоречит предположению, что слово  $xux$  является изотермом для  $\mathbf{V}$ . Таким образом,  $\text{alph}(\mathbf{p}_i) = \text{alph}(\mathbf{p}'_i)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\text{alph}(\mathbf{q}_i) = \text{alph}(\mathbf{q}'_i)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m$ . Следовательно, тождество  $\mathbf{u}_Z \approx \mathbf{v}_Z$  является линейно-сбалансированным.

Если  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}'_i$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m$ , то

$$\mathbf{u}_Z \stackrel{\sigma_3}{\approx} \mathbf{p}_0 \mathbf{q}_0 \left( \prod_{i=1}^m t_i \mathbf{p}_i \mathbf{q}_i \right) \stackrel{\sigma_2}{\approx} \mathbf{p}_0 \mathbf{q}'_0 \left( \prod_{i=1}^m t_i \mathbf{p}_i \mathbf{q}'_i \right) \stackrel{\sigma_3}{\approx} \mathbf{v}_Z,$$

что противоречит предположению, что тождество  $\mathbf{u}_Z \approx \mathbf{v}_Z$  нарушается в  $\mathbf{N}$ . Таким образом, найдется  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  такое, что  $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}'_i$ . Слова  $\mathbf{u}_Z$  и  $\mathbf{v}_Z$  являются блочно-линейными. Поэтому найдутся  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  и  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{p}_i)$  такие, что  $x$  предшествует  $y$  в  $\mathbf{p}_i$ , но  $y$  предшествует  $x$  в  $\mathbf{p}'_i$ . Тогда тождество  $\mathbf{u}(x, y, t_{i+1}) \approx \mathbf{v}(x, y, t_{i+1})$  совпадает с точностью до переименования букв с одним из тождеств

$$\begin{aligned} xuzxu &\approx uxzux, \\ xuzyx &\approx yxzxy, \\ xuzxy &\approx yxzxy. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  взято произвольным, это означает, что любое многообразие, не содержащее  $\mathbf{N}$ , удовлетворяет одному из этих трех тождеств. В частности, это касается многообразия  $\mathbf{V}$ .

В силу леммы 3.26, мы можем считать, что  $M(xzytx) \notin \mathbf{V}$ . Тогда можно применить лемму 1.23, заключая, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\sigma_2$ . Следовательно, если  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств  $xuzxu \approx uxzux$  или  $xuzyx \approx yxzxy$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет также и тождеству (3.30). Поэтому тождество (3.30) выполнено в  $\mathbf{V}$  в любом случае. Откуда вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\rho] &\stackrel{\sigma_2}{\approx} \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) xyt \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_i t_i \right) xy \\ &\stackrel{(3.30)}{\approx} \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) yxt \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_i t_i \right) xy \stackrel{\sigma_2}{\approx} \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,0}[\rho], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

**Лемма 3.28.** *Множества  $xx^+y$ ,  $xux^+$ ,  $xuzx^+ty^+$  и  $uxx^+ty^+$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$ .*

*Доказательство.* Заметим сначала, что в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$  выполнено тождество (1.4) и, в силу леммы 1.25,  $\mathbf{M}(xy) \subset \mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$ . Тогда, поскольку

$$xux^2 \approx x^2ux^2 \tag{3.31}$$

влечет  $xzyx^2ty \approx x^2zyx^2ty$ , а (3.5) влечет  $xzyx^2ty \approx xzyx^2txy$ , из лемм 1.3 и 1.28, а также утверждения, двойственного к лемме 1.27 вытекает стабильность множеств  $xx^+$  и  $xux^+$  относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$ . Далее, из лемм 1.3 и 3.18 следует стабильность множества  $xuzx^+ty^+$  относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$ , так как  $xzyx^3ty^2 \stackrel{(3.22)}{\approx} xzxyx^2ty^2$ .

Наконец, рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$  такое, что  $\mathbf{u} \in ux^+ty^+$ , но  $\mathbf{v} \notin ux^+ty^+$ . Из стабильности  $x^+y$  и  $xux^+$  относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$  следует, что  $\mathbf{v} \in x^+yx^*ty^+$ . Тогда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно по модулю (1.4) тождеству  $yx^2ty \approx xux^2ty$ . Но это невозможно, поскольку последнее тождество влечет  $xzyx^2ty \approx xzxux^2ty$ . Следовательно,  $\lambda$ -класс  $ux^+ty^+$  стабилен относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$ .  $\square$

Пусть  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Положим

$$\hat{\mathbb{N}}_0^2 := \{(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid |n - m| \leq 1\}.$$

Перестановку  $\rho \in S_{n+m}$  будем называть  $(n, m)$ -перестановкой, если для всех  $i = 1, 2, \dots, n + m - 1$  выполнено одно из следующих двух условий:

- $1 \leq i\rho \leq n$  и  $n < (i+1)\rho \leq n+m$ ;
- $1 \leq (i+1)\rho \leq n$  и  $n < i\rho \leq n+m$ .

Очевидно, что если  $\rho$  есть  $(n, m)$ -перестановка, то  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$ . Множество всех  $(n, m)$ -перестановок будем обозначать через  $S_{n,m}$ .

**Лемма 3.29.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$  и  $\mathbf{N} \notin \mathbf{V}$ . Предположим, что  $\mathbf{V}$  не содержит моноиды  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau])$  и  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,n+m+1}[\pi])$  для всех  $n, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\tau \in S_{n+m}$  и  $\pi \in S_{n+m,n+m+1}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\hat{\mathbf{c}}_{p,q,r}[\rho] \approx \hat{\mathbf{c}}_{p,q,r}[\rho]$  для всех  $p, q, r \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{p+q+r}$ .

*Доказательство.* Рутинными вычислениями можно установить, что для любых  $p, q, r \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{p+q+r}$ , можно найти  $n, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\pi \in S_{n+m,n+m+1}$  такие, что тождество  $\hat{\mathbf{c}}_{p,q,r}[\rho] \approx \hat{\mathbf{c}}_{p,q,r}[\rho]$  является следствием тождества

$$\hat{\mathbf{c}}_{n,m,n+m+1}[\pi] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,n+m+1}[\pi]. \quad (3.32)$$

В силу этого факта, достаточно показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.32) для любых  $n, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\pi \in S_{n+m,n+m+1}$ .

Зафиксируем  $n, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\pi \in S_{n+m,n+m+1}$ . Положим  $k := n + m$ . Предположим, что слово  $xzxyty$  есть изотерм для многообразия  $\mathbf{V}$ . Тогда легко видеть, что если тождество  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+1}[\pi] \approx \mathbf{c}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{c} \in \{\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+1}[\pi], \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,k+1}[\pi]\}$ . Поскольку  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+1}[\pi]) \notin \mathbf{V}$ , из этого факта и леммы 1.3 вытекает, что тождество (3.32) выполнено в  $\mathbf{V}$ . Таким образом, далее мы можем считать, что слово  $xzxyty$  не является изотермом для  $\mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\sigma_3$  по лемме 1.23. Отсюда вытекает, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+1}[\pi] &\stackrel{\sigma_3}{\approx} \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x y t \left( \prod_{i=n+1}^k z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{2k+1} z_i \pi \right)_{Z_1} y \left( \prod_{i=1}^{2k+1} z_i \pi \right)_{Z_2} \left( \prod_{i=k+1}^{2k+1} t_i z_i \right), \\ \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,k+1}[\pi] &\stackrel{\sigma_3}{\approx} \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) y x t \left( \prod_{i=n+1}^k z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{2k+1} z_i \pi \right)_{Z_1} y \left( \prod_{i=1}^{2k+1} z_i \pi \right)_{Z_2} \left( \prod_{i=k+1}^{2k+1} t_i z_i \right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где  $Z_1 := \{z_i \mid k+1 \leq i \leq 2k+1\}$  и  $Z_2 := \{z_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ . Очевидно, что найдется  $\tau \in S_k$  такое, что

$$\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\pi](Z) = \mathbf{c}_{n,m,0}[\tau] \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,k}[\pi](Z) = \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,0}[\tau],$$

где  $Z := \{x, y, z_i, t_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ . Поскольку  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau]) \notin \mathbf{V}$ , из леммы 3.27 следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет также тождеству  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,0}[\tau]$ . Тогда тождество (3.32) выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку оно является следствием тождеств  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,0}[\tau]$  и (3.33).  $\square$

**Лемма 3.30.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождествам (1.4), (3.30)

$$x^2 y^2 \approx y^2 x^2 \tag{3.34}$$

такое, что  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ . Предположим, что многообразие  $\mathbf{V}$  не содержит моноид  $M_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,p}[\pi]]^\lambda)$  для любых  $p \in \mathbb{N}$  и  $\pi \in S_p$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольные  $n, m, k \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ . Для краткости положим

$$\mathbf{h} := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right), \quad \mathbf{s} := t \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right), \quad \mathbf{t} := \left( \prod_{i=n+m+1}^{n+m+k} t_i z_i \right).$$

Можно найти достаточно большое  $r$  (скажем, взять  $r := 2(n+m+k)$ ) и  $\rho' \in S_r$  такие, что тождество  $\mathbf{c}_{0,0,r}[\rho'] \approx \mathbf{c}'_{0,0,r}[\rho']$  влечет тождество

$$\mathbf{h} x y s x \left( \prod_{i=1}^{n+m+k-1} z_{i\rho}^{g_i} y_i^2 \right) z_{(n+m+k)\rho}^{g(n+m+k)} y \mathbf{t} \approx \mathbf{h} y x s x \left( \prod_{i=1}^{n+m+k-1} z_{i\rho}^{g_i} y_i^2 \right) z_{(n+m+k)\rho}^{g(n+m+k)} y \mathbf{t},$$

где

$$g_i := \begin{cases} 2, & \text{если } 1 \leq i\rho \leq n+m, \\ 1, & \text{если } n+m < i\rho \leq n+m+k. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] &\stackrel{(1.4)}{\approx} \mathbf{h} x y s x \left( \prod_{i=1}^{n+m+k-1} z_{i\rho}^{g_i} y_i^2 \right) z_{(n+m+k)\rho}^{g(n+m+k)} y \mathbf{t}, \\ \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho] &\stackrel{(1.4)}{\approx} \mathbf{h} y x s x \left( \prod_{i=1}^{n+m+k-1} z_{i\rho}^{g_i} y_i^2 \right) z_{(n+m+k)\rho}^{g(n+m+k)} y \mathbf{t}, \end{aligned}$$

остается проверить, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{c}_{0,0,p}[\pi] \approx \mathbf{c}'_{0,0,p}[\pi]$  для любых  $p \in \mathbb{N}$  и  $\pi \in S_p$ .

Если  $M_\lambda(xzux^+ty^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (1.5) по лемме 1.29. В этом

случае многообразии  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{0,0,p}[\pi] &\stackrel{\{(3.34), (1.5)\}}{\approx} xytxy \left( \prod_{i=1}^p z_i \pi y_i^2 \right) z_{n\pi} y \left( \prod_{i=1}^n t_i z_i \right) \\ &\stackrel{\{(3.34), (1.5)\}}{\approx} yxtxy \left( \prod_{i=1}^p z_i \pi y_i^2 \right) z_{n\pi} y \left( \prod_{i=1}^n t_i z_i \right) \stackrel{(1.5)}{\approx} \mathbf{c}'_{0,0,p}[\pi] \end{aligned}$$

для всех  $p \in \mathbb{N}$  и  $\pi \in S_p$ , что и требовалось показать. Если  $M_\lambda(xx^+uty^+) \notin \mathbf{V}$ , то, используя лемму 3.16 вместо леммы 1.29, можно показать, что тождество  $\mathbf{c}_{0,0,p}[\pi] \approx \mathbf{c}'_{0,0,p}[\pi]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Поэтому мы можем далее считать, что  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+) \vee \mathbf{M}_\lambda(xx^+uty^+) \subseteq \mathbf{V}$  и потому, с учетом леммы 3.28,  $\lambda$ -классы  $xx^+uty^+$ ,  $xzyx^+ty^+$ ,  $xuzx^+ty^+$  и  $uxx^+ty^+$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{V}$ . Поскольку  $M_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,p}[\pi]]^\lambda) \notin \mathbf{V}$ , из следствия 1.8(ii) вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [\mathbf{c}_{0,0,p}[\pi]]^\lambda$ , но  $\mathbf{v} \notin [\mathbf{c}_{0,0,p}[\pi]]^\lambda$ . Из того, что  $\lambda$ -классы  $xx^+uty^+$ ,  $xuzx^+ty^+$  и  $uxx^+ty^+$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$  следует, что

$$\mathbf{v} \in yxtx^+ \left( \prod_{i=1}^n z_i \pi y_i y_i^+ \right) z_{k\pi} y^+ \left( \prod_{i=1}^n t_i z_i^+ \right) = [\mathbf{c}'_{0,0,p}[\pi]]^\lambda.$$

Тогда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно по модулю (1.4) тождеству  $\mathbf{c}_{0,0,p}[\pi] \approx \mathbf{c}'_{0,0,p}[\pi]$ .  $\square$

**Лемма 3.31.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее системе тождеств  $\{(3.6), (3.12)\}$  такое, что  $\mathbf{M}(xux) \in \mathbf{V}$ .

- (i) Если  $\mathbf{N}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{p,q,0}[\pi_1]), \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{p,q,p+q+1}[\pi_2]) \notin \mathbf{V}$  для всех  $p, q \in \mathbb{N}_0$ ,  $\pi_1 \in S_{p+q}$  и  $\pi_2 \in S_{p+q,p+q+1}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ .
- (ii) Если  $\mathbf{N}^\delta, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{d}}_{p,q,0}[\pi_1]), \mathbf{M}(\hat{\mathbf{d}}_{p,q,p+q+1}[\pi_2]) \notin \mathbf{V}$  для всех  $p, q \in \mathbb{N}_0$ ,  $\pi_1 \in S_{p+q}$  и  $\pi_2 \in S_{p+q,p+q+1}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{d}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{d}'_{n,m,k}[\rho]$  для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ .

*Доказательство.* (i) Возьмем произвольные  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ . Для краткости положим  $r := n+m+k$ . Легко видеть, что найдется такое  $\tau \in S_{3r-2}$ , что тождество  $\hat{\mathbf{c}}_{n,2(r-1)+m,k}[\tau] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,2(r-1)+m,k}[\tau]$  влечет тождество  $\mathbf{h}xy\mathbf{t} \approx \mathbf{h}yx\mathbf{t}$ , где

$$\mathbf{h} := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right), \quad \mathbf{t} := t \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{r-1} y_i^2 \right) x \left( \prod_{i=1}^{r-1} z_i \rho y_i^2 \right) z_{r\rho} y \left( \prod_{i=n+m+1}^r t_i z_i \right).$$

В силу леммы 3.29, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\hat{\mathbf{c}}_{n,2(r-1)+m,k}[\tau] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,2(r-1)+m,k}[\tau].$$

Поскольку  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \stackrel{\{(3.6), (3.12)\}}{\approx} \mathbf{h}xy\mathbf{t}$  и  $\mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho] \stackrel{\{(3.6), (3.12)\}}{\approx} \mathbf{h}yx\mathbf{t}$ , отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$ .

- (ii) Доказательство вполне аналогично доказательству п. (i).  $\square$

**Лемма 3.32.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее системе тождеств  $\{x^2 \approx x^3, \sigma_3\}$  такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Если

$$\mathbf{N}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{p,q,0}[\pi_1]), \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{p,q,p+q+1}[\pi_2]) \notin \mathbf{V}$$

для всех  $p, q \in \mathbb{N}_0$ ,  $\pi_1 \in S_{p+q}$  и  $\pi_2 \in S_{p+q,p+q+1}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ .

*Доказательство.* Заметим сначала, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет системе тождеств

$$\Sigma := \{\hat{\mathbf{c}}_{p,q,r}[\pi] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{p,q,r}[\pi] \mid p, q, r \in \mathbb{N}_0, \pi \in S_{p+q+r}\}$$

по лемме 3.29. Далее, для всех  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$  положим

$$\mathbf{h}_{n,m,k}[\rho] := (\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho])_{\{y_i \mid i\rho > n+m\}} \text{ и } \mathbf{h}'_{n,m,k}[\rho] := (\mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho])_{\{y_i \mid i\rho > n+m\}}.$$

Легко видеть, что если  $\mathbf{V}$  удовлетворяет

$$\{\mathbf{h}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{h}'_{n,m,k}[\rho] \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0, \rho \in S_{n+m+k}\},$$

то  $\mathbf{V}$  также удовлетворяет

$$\{\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho] \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0, \rho \in S_{n+m+k}\}.$$

Следовательно, достаточно показать, что тождество  $\mathbf{h}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{h}'_{n,m,k}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$  для всех  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ . Мы будем использовать индукцию по  $k$ . Для краткости положим

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right), \mathbf{q} := t \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right), \mathbf{r} := x \left( \prod_{i=1}^{n+m+k-1} z_i \rho y_i^2 \right) z_{(n+m+k)\rho} y, \mathbf{s} := \left( \prod_{i=n+m+1}^{n+m+k} t_i z_i \right).$$

**База индукции:**  $k = 0$ . В этом случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{n,m,k}[\rho] &\stackrel{\{x^2 \approx x^3, \sigma_3\}}{\approx} \mathbf{p} x y \mathbf{q} y_1^2 y_2^2 \cdots y_{n+m-1}^2 \mathbf{r} \mathbf{s} \\ &\stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{p} x \mathbf{q} y_1^2 y_2^2 \cdots y_{n+m-1}^2 \mathbf{r} \mathbf{s} \stackrel{\{x^2 \approx x^3, \sigma_3\}}{\approx} \mathbf{h}'_{n,m,k}[\rho], \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

**Шаг индукции:**  $k > 0$ . В этом случае найдется наименьшее  $j$  такое, что  $j\rho > n + m$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{n,m,k}[\rho] &\stackrel{\{x^2 \approx x^3, \sigma_3\}}{\approx} \mathbf{p} x y \mathbf{q} y_1 y_2 \cdots y_{j-1} z_{j\rho} \mathbf{r}' \mathbf{s}, \\ \mathbf{h}'_{n,m,k}[\rho] &\stackrel{\{x^2 \approx x^3, \sigma_3\}}{\approx} \mathbf{p} x \mathbf{q} y_1 y_2 \cdots y_{j-1} z_{j\rho} \mathbf{r}' \mathbf{s}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}' := \mathbf{r}_{\{z_{j\rho}, y_i | i\rho > n+m\}}$ . В силу предположения индукции, тождество

$$\mathbf{p}x\mathbf{y}q\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_{j-1}z_{j\rho}\mathbf{r}'\mathbf{s} \approx \mathbf{p}x\mathbf{q}\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_{j-1}z_{j\rho}\mathbf{r}'\mathbf{s}$$

выполнено в  $\mathbf{V}$ . Откуда следует, что  $\mathbf{h}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{h}'_{n,m,k}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ .  $\square$

Для любых  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\pi_1 \in S_{4n+1}$ ,  $\pi_2 \in S_{n+1}$ ,  $\pi_3, \pi_4 \in S_{2n+1}$  и  $\tau \in S_{2n}$  положим

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n^{(1)}[\pi_1, \tau] &:= \left( \prod_{i=1}^n z'_i t'_i \right) xyt \left( \prod_{i=n+1}^{2n} z'_i t'_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{2n} z_{(2i-1)\pi_1} y_i^2 z_{(2i)\pi_1} z'_{i\tau} \right) z_{(4n+1)\pi_1} y \left( \prod_{i=1}^{4n+1} t_i z_i \right), \\ \mathbf{c}_n^{(2)}[\pi_2, \tau] &:= \left( \prod_{i=1}^n z'_i t'_i \right) xyt \left( \prod_{i=n+1}^{2n} z'_i t'_i \right) x \left( \prod_{i=1}^n z_{i\pi_2} z'_{(2i-1)\tau} y_i^2 z'_{(2i)\tau} \right) z_{(n+1)\pi_2} y \left( \prod_{i=1}^{n+1} t_i z_i \right), \\ \mathbf{c}_n^{(3)}[\pi_3, \tau] &:= \left( \prod_{i=1}^n z'_i t'_i \right) xyt \left( \prod_{i=n+1}^{2n} z'_i t'_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{2n} z_{i\pi_3} z'_{i\tau} y_i^2 \right) z_{(2n+1)\pi_3} y \left( \prod_{i=1}^{2n+1} t_i z_i \right), \\ \mathbf{c}_n^{(4)}[\pi_4, \tau] &:= \left( \prod_{i=1}^n z'_i t'_i \right) xyt \left( \prod_{i=n+1}^{2n} z'_i t'_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{2n} z_{i\pi_4} y_i^2 z'_{i\tau} \right) z_{(2n+1)\pi_4} y \left( \prod_{i=1}^{2n+1} t_i z_i \right). \end{aligned}$$

Через  $\bar{\mathbf{c}}_n^{(i)}[\pi, \tau]$  обозначим слово, получающееся из слова  $\mathbf{c}_n^{(i)}[\pi, \tau]$  перестановкой местам первых вхождений букв  $x$  и  $y$ .

**Лемма 3.33.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее системе тождеств  $\Phi$  такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$  и  $\mathbf{N} \notin \mathbf{V}$ . Предположим, что следующие моноиды не лежат в многообразии  $\mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned} &M(\hat{\mathbf{c}}_{p,q,0}[\rho_1]), M(\hat{\mathbf{c}}_{p,q,p+q+1}[\rho_2]), \\ &M_{\gamma'}([\mathbf{c}_r^{(1)}[\pi_1, \tau]]^{\gamma'}), M_{\gamma'}([\mathbf{c}_r^{(2)}[\pi_2, \tau]]^{\gamma'}), M_{\gamma'}([\mathbf{c}_r^{(3)}[\pi_3, \tau]]^{\gamma'}), M_{\gamma'}([\mathbf{c}_r^{(4)}[\pi_4, \tau]]^{\gamma'}) \end{aligned}$$

для всех  $p, q \in \mathbb{N}_0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\rho_1 \in S_{p+q}$ ,  $\rho_2 \in S_{p+q,p+q+1}$ ,  $\pi_1 \in S_{4r+1}$ ,  $\pi_2 \in S_{r+1}$ ,  $\pi_3, \pi_4 \in S_{2r+1}$  и  $\tau \in S_{2r}$ . Тогда многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольные  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ . Если  $M_\gamma(uxx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.4) по лемме 1.27. В этом случае из леммы 3.31(i) вытекает, что тождество  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку  $ux^2ty \stackrel{(3.4)}{\approx} xux^2ty$  и  $ytux^2 \stackrel{(3.4)}{\approx} ytuxx^2$ . С помощью двойственных рассуждений можно показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$ , если  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ . Если  $M(xzxyty) \notin \mathbf{V}$ , то требуемое утверждение следует из лемм 1.23 и 3.32. Поэтому далее мы можем считать, что  $M(xzxyty) \vee M_\gamma(xx^+y) \vee M_\gamma(uxx^+) \subseteq \mathbf{V}$ .

Если  $M_{\gamma'}(uxx^+ty), M_{\gamma'}(ytuxx^+) \notin \mathbf{V}$ , то, согласно лемме 3.7 и утверждению, двойственному к лемме 3.6(ii), многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам (3.6) и (3.12). В этом случае применим лемму 3.31(i) и получим, что тождество  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Аналогичными рассуждениями можно показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$ , если  $M_{\gamma'}(xx^+ty), M_{\gamma'}(ytuxx^+) \notin \mathbf{V}$ . Таким образом, мы можем далее считать, что справедливы следующие два утверждения:

- либо  $M_{\gamma'}(uxx^+ty) \in \mathbf{V}$ , либо  $M_{\gamma'}(ytuxx^+) \in \mathbf{V}$ ;

- либо  $M_{\gamma'}(xx^+yt) \in \mathbf{V}$ , либо  $M_{\gamma'}(ytxx^+y) \in \mathbf{V}$ .

Иными словами, возможны четыре случая:

- $M_{\gamma'}(yxx^+ty), M_{\gamma'}(xx^+yt) \in \mathbf{V}$ ;
- $M_{\gamma'}(ytyxx^+), M_{\gamma'}(ytxx^+y) \in \mathbf{V}$ ;
- $M_{\gamma'}(ytyxx^+), M_{\gamma'}(xx^+yt) \in \mathbf{V}$ ;
- $M_{\gamma'}(ytxx^+y), M_{\gamma'}(yxx^+ty) \in \mathbf{V}$ .

Рассмотрим только первый из этих случаев, предполагая, что  $M_{\gamma'}(yxx^+ty), M_{\gamma'}(xx^+yt) \in \mathbf{V}$ , поскольку оставшиеся три случая рассматриваются вполне аналогично.

Легко видеть, что можно найти достаточно большое  $r \in \mathbb{N}$ , а также  $\pi \in \mathcal{S}_{4r+1}$  и  $\tau \in \mathcal{S}_{2r}$  такие, что тождество  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  является следствием тождества  $\mathbf{c}_r^{(1)}[\pi, \tau] \approx \bar{\mathbf{c}}_r^{(1)}[\pi, \tau]$ . Согласно условию,  $M_{\gamma'}([\mathbf{c}_r^{(1)}[\pi, \tau]]^{\gamma'}) \notin \mathbf{V}$ . В силу следствия 1.8(ii),  $\gamma'$ -класс  $[\mathbf{c}_r^{(1)}[\pi, \tau]]^{\gamma'}$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [\mathbf{c}_r^{(1)}[\pi, \tau]]^{\gamma'}$ , но  $\mathbf{v} \notin [\mathbf{c}_r^{(1)}[\pi, \tau]]^{\gamma'}$ . В виду леммы 1.21,

$$\mathbf{v}_{\{y_1, y_2, \dots, y_{2r}\}} = \left( \prod_{i=1}^r z'_i t'_i \right) \mathbf{a} \left( \prod_{i=r+1}^{2r} z'_i t'_i \right) \mathbf{b} \left( \prod_{i=1}^{4r+1} t_i z_i \right),$$

где  $\mathbf{a} \in \{xy, ux\}$ , а  $\mathbf{b}$  — линейное слово зависящее от букв  $x, y, z_1, z_2, \dots, z_{4r+1}, z'_1, z'_2, \dots, z'_{2r}$ . Тогда, поскольку  $\mathbf{M}(xzxuty) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(xx^+yt) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, t, z_{1\pi}, t_{1\pi}) &= xtXz_{1\pi}t_{1\pi}z_{1\pi}, \\ \mathbf{v}(z_{(2i)\pi}, t_{(2i)\pi}, y_i) &\in y_i y_i^+ z_{(2i)\pi} t_{(2i)\pi} z_{(2i)\pi}, \\ \mathbf{v}(z_{(2i-1)\pi}, t_{(2i-1)\pi}, y_i) &\in z_{(2i-1)\pi} y_i y_i^+ t_{(2i-1)\pi} z_{(2i-1)\pi}, \\ \mathbf{v}(z_{(2i)\pi}, t_{(2i)\pi}, z'_{i\tau}, t'_{i\tau}) &= z'_{i\tau} t'_{i\tau} z_{(2i)\pi} z'_{i\tau} t_{(2i)\pi} z_{(2i)\pi}, \\ \mathbf{v}(z_{(2i+1)\pi}, t_{(2i+1)\pi}, z'_{i\tau}, t'_{i\tau}) &= z'_{i\tau} t'_{i\tau} z'_{i\tau} z_{(2i+1)\pi} t_{(2i+1)\pi} z_{(2i+1)\pi}, \\ \mathbf{v}(z_{(4r+1)\pi}, t_{(4r+1)\pi}, y, t) &= ytZ_{(4r+1)\pi} y t_{(4r+1)\pi} z_{(4r+1)\pi}, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, 2r$ . Откуда

$$\mathbf{b} \in x \left( \prod_{i=1}^{2r} z_{(2i-1)\pi} y_i y_i^+ z_{(2i)\pi} z'_{i\tau} \right) z_{(4r+1)\pi} y.$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{v} \in [\bar{\mathbf{c}}_r^{(1)}[\pi, \tau]]^{\gamma'}$ . Тогда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству  $\mathbf{c}_r^{(1)}[\pi, \tau] \approx \bar{\mathbf{c}}_r^{(1)}[\pi, \tau]$ . Поэтому  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ , что и требовалось показать.  $\square$

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  положим

$$\mathbf{c}_n := xytxy_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2 y \quad \text{и} \quad \mathbf{c}'_n := yxtxy_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2 y.$$

Для краткости положим

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n &:= [\mathbf{c}_n]^\gamma = x^+ y^+ t x^+ y_1 y_1^+ y_2 y_2^+ \cdots y_n y_n^+ y^+, \\ \mathbf{c}'_n &:= [\mathbf{c}'_n]^\gamma = y^+ x^+ t x^+ y_1 y_1^+ y_2 y_2^+ \cdots y_n y_n^+ y^+. \end{aligned}$$

**Лемма 3.34.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождествам (1.4), (3.26) и (3.28). Предположим, что  $\mathbf{V}$  не содержит моноиды  $M_\gamma(\mathbf{c}_p)$  и  $M_\gamma(\mathbf{c}'_p)$  для всех  $p \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$  для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ .

*Доказательство.* Положим  $r := 2(n + m + k - 1) + 1$ . Поскольку

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \\ &\{(1.4), (3.26)\} \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x y t \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{n+m+k-1} z_{i\rho}^2 y_i^2 \right) z_{(n+m+k)\rho}^2 y \left( \prod_{i=n+m+1}^{n+m+k} t_i z_i \right) \\ &\mathbf{c}_r \approx \mathbf{c}'_r \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) y x t \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{n+m+k-1} z_{i\rho}^2 y_i^2 \right) z_{(n+m+k)\rho}^2 y \left( \prod_{i=n+m+1}^{n+m+k} t_i z_i \right) \\ &\{(1.4), (3.26)\} \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho], \end{aligned}$$

достаточно показать, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{c}_r \approx \mathbf{c}'_r$ .

Предположим сначала, что  $M_\gamma(x^+ t y y^+ x^+) \notin \mathbf{V}$ . Тогда тождество (3.29) выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$  по следствию 3.25. В этом случае,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x y t x y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y \approx (x y)^2 t x y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y, \quad (3.35)$$

так как

$$x y t x y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y \stackrel{(3.29)}{\approx} x y t x y y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y \stackrel{(3.26)}{\approx} (x y)^2 t x y y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y.$$

Аналогичным образом можно показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет

$$y x t x y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y \approx (y x)^2 t x y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y. \quad (3.36)$$

Тогда в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$\mathbf{c}_r \stackrel{(3.35)}{\approx} (x y)^2 t x y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y \stackrel{(3.28)}{\approx} (y x)^2 t x y_1^2 y_2^2 \cdots y_r^2 y \stackrel{(3.36)}{\approx} \mathbf{c}'_r, \quad (3.37)$$

что и требовалось показать.

Предположим теперь, что  $M_\gamma(x^+ y y^+ t x^+) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, в силу утверждения двойственного к следствию 3.25, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x y^2 t x \approx x y^2 t x, \quad (3.38)$$

которое, очевидно, влечет оба тождества (3.35) и (3.36), откуда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.37).

Предположим наконец, что  $\mathbf{M}_\gamma(x^+yu^+tx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x^+tyu^+x^+) \subseteq \mathbf{V}$ . Тогда, согласно условию,  $\mathbf{M}_\gamma(c_r) \notin \mathbf{V}$ . Из следствия 1.8(i) вытекает, что  $\gamma$ -класс  $c_r$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in c_r$ , но  $\mathbf{v} \notin c_r$ . Поскольку  $\mathbf{M}_\gamma(x^+tyu^+x^+) \in \mathbf{V}$ , из следствия 1.8(i) и леммы 1.17 вытекает, что  $\gamma$ -классы  $x^+tyu^+x^+$ ,  $xx^+yu^+$  и  $x^+yzx^+$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, t) &\in x^+tx^+, \mathbf{v}(x, y_1) \in xx^+y_1y_1^+, \\ \mathbf{v}(y_i, y_{i+1}) &\in y_iy_i^+y_{i+1}y_{i+1}^+, \mathbf{v}(y, t, y_r) \in y^+ty_ry_r^+y^+, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, r-1$ . Следовательно,  $\mathbf{v} \in \overline{x^+y^+tx^+y_1y_1^+y_2y_2^+\cdots y_ry_r^+y^+}$ . Тогда, подставляя  $yt$  вместо  $t$  в тождество  $x\mathbf{u} \approx x\mathbf{v}$ , мы получим некое тождество, эквивалентное по модулю  $\{(1.4), (3.26)\}$  тождеству (3.35). Аналогичным образом из условия  $\mathbf{M}_\gamma(c'_r) \notin \mathbf{V}$  можно вывести, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.36). Таким образом, тождество (3.37) выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ , что и требовалось доказать.  $\square$

### 3.3.3. Тождества из $\Phi_2$

Для любых  $n, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m}$  положим

$$\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] := (\mathbf{a}_{n,m}[\rho])_{\{y_1, y_2, \dots, y_{n+m-1}\}} \quad \text{и} \quad \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{n,m}[\rho] := (\bar{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho])_{\{y_1, y_2, \dots, y_{n+m-1}\}}.$$

**Лемма 3.35.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам (1.4) и (3.34) такое, что  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{V}$ . Предположим, что  $\mathbf{V}$  не содержит моноиды

$$M_\lambda([\hat{\mathbf{a}}_{0,k}[\pi]]^\lambda), M_\lambda([\mathbf{a}_{0,k}[\pi]]^\lambda) \quad \text{и} \quad M_\beta([\mathbf{a}_{0,k}[\pi]]^\beta)$$

для всех  $k \geq 2$  и  $\pi \in S_k$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$ .

*Доказательство.* Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в первом абзаце доказательства леммы 3.30 можно показать, что если  $n, m \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_{n+m}$ , то можно взять достаточно большое  $r$ , скажем, положив  $r := 2(n+m)$ , и  $\rho' \in S_r$  такие, что тождество  $\mathbf{a}_{n,m}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho]$  следует из системы тождеств  $\{(1.4), (3.34), \mathbf{a}_{0,r}[\rho'] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,r}[\rho']\}$ . Поэтому достаточно показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{a}_{0,n}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]$  для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_n$ .

Предположим, что  $M_\lambda(xzux^+ty^+) \notin \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (1.5) по лемме 1.29. Ясно, что из последнего тождества и тождества (3.34) вытекает тождество  $\mathbf{a}_{0,n}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]$  для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_n$ . Поэтому мы далее можем считать, что  $M_\lambda(xzux^+ty^+) \in \mathbf{V}$ . Тогда, в силу лемм 1.5 и 3.28,  $\lambda$ -классы  $xzux^+ty^+$ ,  $uxx^+ty^+$  и  $xuzx^+ty^+$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ .

Возможны два случая.

**Случай 1:**  $M_\lambda(xx^+ty^+) \in \mathbf{V}$ . В этом случае из леммы 1.5 следует стабильность  $\lambda$ -класса  $xx^+ty^+$  относительно  $\mathbf{V}$ . Мы будем вести доказательство индукцией по  $n$ . Обозначим через  $\varepsilon$  тривиальную перестановку из  $S_1$ . Если  $n = 1$ , то  $\mathbf{a}_{0,1}[\varepsilon] = \bar{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon]$  и доказывать нечего. Пусть

теперь  $n > 1$ . Возьмем произвольную перестановку  $\rho \in S_n$ . Поскольку  $M_\lambda([\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\lambda) \notin \mathbf{V}$ , из следствия 1.8(ii) вытекает нестабильность  $\lambda$ -класса  $[\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\lambda$  относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\lambda$ , но  $\mathbf{v} \notin [\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\lambda$ . Поскольку множества  $xx^+ty^+$  и  $uxx^+ty^+$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, z_{1\rho}, t_{1\rho}) &\in x^+z_{1\rho}x^+t_{1\rho}z_{1\rho}^+, \\ \mathbf{v}(x, z_{n\rho}, t_{n\rho}) &\in x^+z_{n\rho}x^+t_{n\rho}z_{n\rho}^+, \\ \mathbf{v}_x &\in z_{1\rho}y_1y_1^+z_{2\rho}y_2y_2^+\cdots z_{n\rho}t_1z_1^+t_2z_2^+\cdots t_nz_n^+. \end{aligned}$$

Это возможно лишь тогда, когда  $(2_{\mathbf{v}x}) < (1_{\mathbf{v}z_{n\rho}})$ , так как  $\mathbf{v} \notin [\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\lambda$ . В силу предположения индукции,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет системе тождеств

$$\Sigma_n := \{\mathbf{a}_{0,i}[\tau] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,i}[\tau] \mid 1 \leq i < n, \tau \in S_i\}.$$

Ясно, что если найдется вхождение буквы  $x$  между  $1_{\mathbf{v}z_{1\rho}}$  и  $1_{\mathbf{v}z_{n\rho}}$  в  $\mathbf{v}$ , то можно выбрать тождества в  $\Sigma_n$ , которые совместно с  $\{(1.4), (3.34)\}$  будут влечь тождество  $\mathbf{v} \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]$ . Поскольку  $\mathbf{a}_{0,n}[\rho] \stackrel{(1.4)}{\approx} \mathbf{u}$ , отсюда вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{a}_{0,n}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]$ . Поэтому остается рассмотреть случай, когда нет вхождений буквы  $x$  между  $1_{\mathbf{v}z_{1\rho}}$  и  $1_{\mathbf{v}z_{n\rho}}$  в  $\mathbf{v}$ . Поскольку  $(2_{\mathbf{v}x}) < (1_{\mathbf{v}z_{n\rho}})$ , имеем, что  $\mathbf{v} \in xx^+z_{1\rho}z_{2\rho}\cdots z_{n\rho}x^+t_1z_1^+t_2z_2^+\cdots t_nz_n^+$ . В частности, из тождеств  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  и (1.4) вытекает тождество

$$x^2yxtu \approx xyxtu. \quad (3.39)$$

Далее, поскольку  $M_\beta([\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\beta) \notin \mathbf{V}$ , из леммы 3.4 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  такому, что  $\mathbf{u}' \in [\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\beta$ , но  $\mathbf{v}' \notin [\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\beta$ . Из стабильности множеств  $xx^+ty^+$  и  $uxx^+ty^+$  относительно  $\mathbf{V}$  следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, z_{1\rho}, t_{1\rho}) &\in x^+z_{1\rho}x^+t_{1\rho}z_{1\rho}^+, \\ \mathbf{v}'(x, z_{n\rho}, t_{n\rho}) &\in x^+z_{n\rho}x^+t_{n\rho}z_{n\rho}^+, \\ \mathbf{v}'_x &\in z_{1\rho}y_1y_1^+z_{2\rho}y_2y_2^+\cdots z_{n\rho}t_1z_1^+t_2z_2^+\cdots t_nz_n^+. \end{aligned}$$

Это возможно лишь в том случае, когда есть вхождение  $x$  между  $1_{\mathbf{v}'z_{1\rho}}$  и  $1_{\mathbf{v}'z_{n\rho}}$  в  $\mathbf{v}'$ , так как  $\mathbf{v}' \notin [\mathbf{a}_{0,n}[\rho]]^\beta$ . Откуда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{a}_{0,n}[\rho] \stackrel{(1.4)}{\approx} \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \stackrel{(1.4)}{\approx} x\mathbf{u}' \approx x\mathbf{v}' \stackrel{\{\Sigma_n, (1.4), (3.34), (3.39)\}}{\approx} \bar{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho],$$

что и требовалось показать.

**Случай 2:**  $M_\lambda(xx^+ty^+) \notin \mathbf{V}$ . Из леммы 3.16 вытекает, что многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет

тождеству (3.20). Последнее тождество вместе с (1.4) влечет (3.3). Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{0,n}[\rho] &\stackrel{\{(3.3), (1.4), (3.34)\}}{\approx} x \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{i\rho} y_i^2 \right) z_{n\rho} x \left( \prod_{i=1}^{n-1} y_i^2 \right) \left( \prod_{i=1}^n t_{iz_i} \right), \\ \bar{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho] &\stackrel{\{(3.3), (1.4), (3.34)\}}{\approx} x \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{i\rho} x (y_i x)^2 \right) z_{n\rho} x \left( \prod_{i=1}^{n-1} y_i^2 \right) \left( \prod_{i=1}^n t_{iz_i} \right), \end{aligned}$$

найдется  $\rho' \in S_{3n-2}$  такое, что  $\mathbf{a}_{0,n}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]$  вытекает из

$$\{(3.3), (1.4), (3.34), \hat{\mathbf{a}}_{0,3n-2}[\rho'] \approx \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{0,3n-2}[\rho']\}.$$

Поэтому достаточно показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho] \approx \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{0,n}[\rho]$  для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_n$ .

Мы будем вести доказательство индукцией по  $n$ . Если  $n = 1$ , то  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] = \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{0,1}[\varepsilon]$  и доказывать нечего (как и в случае 1, через  $\varepsilon$  мы обозначаем тривиальную перестановку из  $S_1$ ). Пусть теперь  $n > 1$ . Возьмем произвольную перестановку  $\rho \in S_n$ . Поскольку  $M_\lambda([\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]]^\lambda) \notin \mathbf{V}$ , из следствия 1.8(ii) вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]]^\lambda$  и  $\mathbf{v} \notin [\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]]^\lambda$ . Из стабильности  $\lambda$ -класса  $xuzx^+ty^+$  относительно  $\mathbf{V}$  следует, что  $\mathbf{v}(x, t_1) \in xx^+t_1$  и  $\mathbf{v}_x \in z_{1\rho}z_{2\rho} \cdots z_{n\rho}t_1z_1^+t_2z_2^+ \cdots t_nz_n^+$ . Далее,  $\mathbf{v}(x, z_{1\rho}, t_{1\rho}) \notin z_{1\rho}xx^+t_{1\rho}z_{1\rho}^+$ , так как  $\lambda$ -класс  $uxx^+ty^+$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ , откуда  $(1_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}z_{1\rho})$ . Поскольку  $\mathbf{v} \notin [\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]]^\lambda$ , это возможно лишь в том случае, когда  $(2_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}z_{n\rho})$ . Тогда тождество  $\mathbf{u}(x, z_{n\rho}, t_{n\rho}) \approx \mathbf{v}(x, z_{n\rho}, t_{n\rho})$  эквивалентно по модулю  $\{(3.3), (1.4)\}$  тождеству

$$x^2yty \approx xuxty. \quad (3.40)$$

В силу предположения индукции,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет системе тождеств  $\hat{\Sigma}_n := \{\hat{\mathbf{a}}_{0,i}[\tau] \approx \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{0,i}[\tau] \mid 1 \leq i < n, \tau \in S_i\}$ . Ясно, что если существует вхождение буквы  $x$  между  $1_{\mathbf{v}}z_{1\rho}$  и  $1_{\mathbf{v}}z_{n\rho}$  в  $\mathbf{v}$ , то можно подобрать такие тождества в  $\hat{\Sigma}_n$ , которые вместе с  $\{(1.4), (3.40)\}$  будут влечь тождество  $\mathbf{v} \approx \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{0,n}[\rho]$ . Поскольку  $\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho] \stackrel{(1.4)}{\approx} \mathbf{u}$ , отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho] \approx \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{0,n}[\rho]$ . Предположим теперь, что не существует вхождений  $x$  между  $1_{\mathbf{v}}z_{1\rho}$  и  $1_{\mathbf{v}}z_{n\rho}$  в  $\mathbf{v}$ . В этом случае, учитывая, что  $(2_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}z_{n\rho})$ , имеем, что  $\mathbf{v} \in xx^+z_{1\rho}z_{2\rho} \cdots z_{n\rho}x^*t_1z_1^+t_2z_2^+ \cdots t_nz_n^+$ . Тогда тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho] \approx \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{0,n}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ , так как  $\mathbf{v} \stackrel{\{(1.4), (3.40)\}}{\approx} \hat{\bar{\mathbf{a}}}_{0,n}[\rho]$  и  $\mathbf{u} \stackrel{(1.4)}{\approx} \hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho]$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Через  $\mathbf{K}$  будем обозначать класс всех моноидов  $M$  таких, что

- $M$  удовлетворяет тождествам (3.6), (3.8), (3.12), (3.30) и

$$xuzxu \approx xuzux; \quad (3.41)$$

- в  $M$  не выполнено тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\pi] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\pi]$  для некоторых  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\pi \in S_{n,m}$ .

Если  $\mathbf{w} := a_1 \cdots a_k$ , то положим  $\chi(\mathbf{w}) := a_1xa_2x \cdots xa_k$ .

**Лемма 3.36.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам (3.6), (3.8), (3.12), (3.30) и (3.41). Если  $\mathbf{V}$  не содержит ни одного моноида из класса  $\mathbf{K}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольные  $p, q \in \mathbb{N}$  и  $\pi \in S_{p+q}$ . Тогда можно найти перестановку  $\tau \in S_{3(p+q)-2}$  такую, что

$$\mathbf{a}_{p,q}[\pi] \stackrel{\{(3.6), (3.12)\}}{\approx} \mathbf{h} \mathbf{x} \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{t} \stackrel{\hat{\mathbf{a}}_{3p+2q-2,q}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{3p+2q-2,q}[\tau]}{\approx} \mathbf{h} \mathbf{x} \chi(\mathbf{p}) \mathbf{x} \mathbf{t} \stackrel{\{(3.6), (3.12)\}}{\approx} \bar{\mathbf{a}}_{p,q}[\pi],$$

где

$$\mathbf{h} := \left( \prod_{i=1}^p z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{p+q-1} y_i^2 \right), \quad \mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^{p+q-1} z_i \pi y_i^2 \right) z_{(p+q)\pi}, \quad \mathbf{t} := \left( \prod_{i=p+1}^{p+q} z_i t_i \right).$$

Далее, легко видеть, что существуют  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{n,m}$  такие, что  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  влечет  $\hat{\mathbf{a}}_{3p+2q-2,q}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{3p+2q-2,q}[\tau]$ . Поскольку  $\mathbf{V}$  не содержит ни одного моноида из класса  $\mathbf{K}$  и удовлетворяет системе тождеств  $\{(3.6), (3.8), (3.12), (3.30), (3.41)\}$ , тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Откуда следует, что тождество  $\mathbf{a}_{p,q}[\pi] \approx \bar{\mathbf{a}}_{p,q}[\pi]$  также выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ .  $\square$

Для всех  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{n,m}$  положим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho] &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \mathbf{x} \left( \prod_{i=1}^{n+m} \mathbf{z}_{i\rho}^{(1)} \right) \mathbf{x} \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i' z_i' \right), \\ \mathbf{a}_{n,m}^{(2)}[\rho] &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i z_i' t_i' \right) \mathbf{x} \left( \prod_{i=1}^{n+m} \mathbf{z}_{i\rho}^{(2)} \right) \mathbf{x} \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right), \\ \mathbf{a}_{n,m}^{(3)}[\rho] &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \mathbf{x} \left( \prod_{i=1}^{n+m-1} \mathbf{z}_{i\rho}^{(3)} \right) (\mathbf{z}_{(n+m)\rho}^{(3)})^{y_{(n+m)\rho}} \mathbf{x} \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right), \\ \mathbf{a}_{n,m}^{(4)}[\rho] &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \mathbf{x} \left( \prod_{i=1}^{n+m-1} \mathbf{z}_{i\rho}^{(4)} \right) (\mathbf{z}_{(n+m)\rho}^{(4)})^{y_{(n+m)\rho}} \mathbf{x} \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{z}_i^{(1)} := \begin{cases} z_i, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \\ z_i y_i^2 z_i', & \text{если } n+1 \leq i \leq n+m, \end{cases} \quad \mathbf{z}_i^{(3)} := \begin{cases} z_i y_i^2, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \\ z_i, & \text{если } n+1 \leq i \leq n+m, \end{cases}$$

$$\mathbf{z}_i^{(2)} := \begin{cases} z_i y_i^2 z_i', & \text{если } 1 \leq i \leq n, \\ z_i, & \text{если } n+1 \leq i \leq n+m, \end{cases} \quad \mathbf{z}_i^{(4)} := \begin{cases} z_i, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \\ z_i y_i^2, & \text{если } n+1 \leq i \leq n+m. \end{cases}$$

Через  $\bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(i)}[\rho]$  будем обозначать слово, получающееся из слова  $\mathbf{a}_{n,m}^{(i)}[\rho]$  заменой подслова, лежащего между первым и вторым вхождением буквы  $x$  на его образ относительно  $\chi$ . Для любого  $k \in \mathbb{N}$  положим

$$S_{2k}^\# := \{ \pi \in S_{2k} \mid k+1 \leq 1\pi, 2\pi, \dots, k\pi \leq 2k, 1 \leq (k+1)\pi, (k+2)\pi, \dots, (2k)\pi \leq k \}.$$

**Лемма 3.37.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам  $x^2 \approx x^3$ , (3.30), (3.34), (3.41) и

$$xux^2 \approx x^2ux \quad (3.42)$$

такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Предположим, что  $\mathbf{V}$  не содержит ни одного моноида из классов  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}^\delta$ , а также моноиды

$$\begin{aligned} & M_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{k,k}[\tau]]^{\alpha_1}), \\ & M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\pi]]^{\gamma'}), M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,m}^{(2)}[\pi]]^{\gamma'}), M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,m}^{(3)}[\pi]]^{\gamma'}), M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,m}^{(4)}[\pi]]^{\gamma'}), \\ & M_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\pi]]^{\gamma''}), M_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,m}^{(2)}[\pi]]^{\gamma''}), M_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,m}^{(3)}[\pi]]^{\gamma''}), M_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,m}^{(4)}[\pi]]^{\gamma''}) \end{aligned}$$

для любых  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$ ,  $\pi \in S_{n,m}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и  $\tau \in S_{2k}^\#$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$ .

Для доказательства леммы 3.37, нам потребуется следующий вспомогательный результат.

**Лемма 3.38.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов,  $n \in \mathbb{N}$ , а  $\tau \in S_{2n}^\#$ . Предположим, что  $\alpha_1$ -класс  $[\mathbf{a}_{n,n}[\tau]]^{\alpha_1}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Тогда каждый  $\alpha_1$ -класс из  $\{[\mathbf{a}_{n,n}[\tau]]^{\alpha_1}\}^{\leq \alpha_1}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольные  $\mathbf{v} \in \{[\mathbf{a}_{n,n}[\tau]]^{\alpha_1}\}^{\leq \alpha_1}$  и  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}$  и рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}'$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{V}$ . В силу леммы 1.4, слово  $\mathbf{v}$  является подсловом некоторого слова  $\mathbf{u} \in [\mathbf{a}_{n,n}[\tau]]^{\alpha_1}$ , т.е. существуют  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in X^*$  такие, что  $\mathbf{u} = \mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{q}$ . Ясно, что

$$\mathbf{u} = \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{2n-1} z_i \tau \mathbf{y}_i \right) z_{(2n)\tau} x \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right),$$

где  $\text{occ}_{y_j}(\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_{2n-1}) \geq 2$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n-1$ , и

$$\begin{aligned} \{y_i\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}_i) \subseteq \{y_1, y_2, \dots, y_i\}, \\ \{y_{n+i}\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}_{n+i}) \subseteq \{y_{n+i}, y_{n+i+1}, \dots, y_{2n-1}\}, \\ \{y_n\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}_n) \subseteq \{y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}\}, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ . Поскольку  $\alpha_1$ -класс  $[\mathbf{a}_{n,n}[\tau]]^{\alpha_1}$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ , получаем, что

$$\mathbf{p}\mathbf{v}'\mathbf{q} = \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{2n-1} z_i \tau \mathbf{y}'_i \right) z_{(2n)\tau} x \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right),$$

где  $\text{occ}_{y_j}(\mathbf{y}'_1 \mathbf{y}'_2 \cdots \mathbf{y}'_{2n-1}) \geq 2$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n-1$ , и

$$\begin{aligned} \{y_i\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}'_i) \subseteq \{y_1, y_2, \dots, y_i\}, \\ \{y_{n+i}\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}'_{n+i}) \subseteq \{y_{n+i}, y_{n+i+1}, \dots, y_{2n-1}\}, \\ \{y_n\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}'_n) \subseteq \{y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}\}, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ . Множества  $uxx^+ty$  и  $ytxx^+u$  также стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Из этих фактов

легко извлечь, что слова  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  лежат в одном  $\alpha_1$ -классе. Поскольку тождество  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}'$  взято произвольным, отсюда вытекает стабильность  $\alpha_1$ -класса  $\mathbf{v}$  относительно  $\mathbf{V}$ .  $\square$

*Доказательство леммы 3.37.* Если  $M_{\gamma'}(uxx^+) \notin \mathbf{V}$ , то, по лемме 1.27,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.4). В этом случае из леммы 3.36 следует, что система тождеств  $\Phi_2$  выполнена в  $\mathbf{V}$ , так как  $ux^2ty \stackrel{(3.4)}{\approx} xux^2ty$  и  $ytux^2 \stackrel{(3.4)}{\approx} ytxux^2$ . Поскольку  $xux^2 \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} xux^3 \stackrel{(3.42)}{\approx} x^2ux^2$ , двойственными рассуждениями можно показать, что если  $M_{\gamma'}(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$ .

Если  $M_{\gamma'}(uxx^+ty), M_{\gamma'}(ytuxx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам (3.6) и (3.12) по лемме 3.7 и утверждению, двойственному к лемме 3.6(ii). Еще раз применим лемму 3.36, заключая, что система тождеств  $\Phi_2$  выполнена в  $\mathbf{V}$ . Аналогичным образом можно показать, что если  $\mathbf{V}$  не содержит  $M_{\gamma'}(xx^+ty), M_{\gamma'}(ytxx^+y)$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$ . Таким образом, мы можем далее предположить, что справедливы следующие два утверждения:

- либо  $M_{\gamma'}(uxx^+ty) \in \mathbf{V}$ , либо  $M_{\gamma'}(ytuxx^+) \in \mathbf{V}$ ;
- либо  $M_{\gamma'}(xx^+ty) \in \mathbf{V}$ , либо  $M_{\gamma'}(ytxx^+y) \in \mathbf{V}$ .

Возможны четыре случая.

**Случай 1:**  $M_{\gamma'}(uxx^+ty), M_{\gamma'}(xx^+ty) \in \mathbf{V}$ . Легко видеть, что каждое тождество из  $\Phi_2$  следует из тождества вида  $\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\rho]$  для некоторых  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{n,m}$ . Поэтому достаточно показать, что тождество  $\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$  для всех  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{n,m}$ . Чтобы сделать это, покажем индукцией по  $n + m$ , что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет

$$\Sigma_{n+m}^{(1)} := \{\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\pi] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\pi] \mid \pi \in S_{n,m}\}.$$

**База индукции:**  $n + m = 1$ . Тождество  $\mathbf{a}_{1,0}^{(1)}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{1,0}^{(1)}[\rho]$  тривиально и потому выполнено в  $\mathbf{V}$ . Предположим, что  $n = 0$  и  $m = 1$ . Очевидно, что в этом случае перестановка  $\rho$  есть тривиальная перестановка  $\varepsilon$ . Согласно условию,  $M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma''}) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, в силу леммы 3.5,  $\gamma''$ -класс  $[\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma''} = xz_1y_1y_1^+z_1'xt_1z_1t_1'z_1'$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma''}$  и  $\mathbf{v} \notin [\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma''}$ . Поскольку  $M_{\gamma'}(uxx^+ty) \vee M_{\gamma'}(xx^+ty) \subseteq \mathbf{V}$ , из леммы 1.5 следует, что  $\mathbf{v} \in x^+z_1x^*y_1x^*y_1\{x, y_1\}^*z_1'x^+t_1z_1t_1'z_1'$ . Если найдется вхождение  $x$  между  ${}_{1v}z_1$  и  ${}_{1v}z_1'$  в  $\mathbf{v}$ , то легко видеть, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с  $\Phi$  влечет  $\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]$ . Итак, остается рассмотреть случай, когда нет вхождений  $x$  между  ${}_{1v}z_1$  и  ${}_{1v}z_1'$  в  $\mathbf{v}$ . Тогда

$$\mathbf{v} \in x^+z_1y_1y_1^+z_1'x^+t_1z_1t_1'z_1' \cup x^+z_1y_1y_1^+z_1'xx^+t_1z_1t_1'z_1' = [\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma'} \setminus [\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma''}.$$

Далее, поскольку  $M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma'}) \notin \mathbf{V}$ , из следствия 3.3(ii) вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  такому, что  $\mathbf{u}' \in [\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma'}$  и  $\mathbf{v}' \notin [\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma'}$ . Тогда в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon] \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \stackrel{(3.42)}{\approx} \mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ . Поскольку  $M_{\gamma'}(uxx^+ty) \vee M_{\gamma'}(xx^+ty) \subseteq \mathbf{V}$ , из леммы 1.5 следует, что  $\mathbf{v}' \in x^+z_1x^*y_1x^*y_1\{x, y_1\}^*z_1'x^+t_1z_1t_1'z_1'$ . Тогда из того факта, что  $\mathbf{v}' \notin [\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]]^{\gamma'}$  вытекает, что существует вхождение  $x$  между  ${}_{1v'}z_1$  и  ${}_{1v'}z_1'$  в  $\mathbf{v}'$ . В этом случае

$\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon] \approx \mathbf{v}'$  вместе с  $\Phi$  влечет  $\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]$ . Таким образом, тождество  $\mathbf{a}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon] \approx \bar{\mathbf{a}}_{0,1}^{(1)}[\varepsilon]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ .

**Шаг индукции:**  $n + m > 1$  и  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Sigma_k^{(1)}$  для всех  $k < n + m$ . Согласно условию,  $M_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}) \notin \mathbf{V}$ . Тогда  $\gamma''$ -класс  $[\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$  по лемме 3.5. Отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}$  и  $\mathbf{v} \notin [\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}$ . Ясно, что  $[\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''} = \mathbf{h}xZ_{1\rho}^{(1)}Z_{2\rho}^{(1)} \cdots Z_{(n+m)\rho}^{(1)}x\mathbf{t}$ , где

$$\mathbf{h} := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right), \quad \mathbf{t} := \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i t'_i z'_i \right), \quad Z_i^{(1)} := \begin{cases} \{z_i\}, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \\ z_i y_i y_i^+ z'_i, & \text{если } n+1 \leq i \leq n+m. \end{cases}$$

В силу леммы 1.21,  $\mathbf{v}_{\{x, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}\}} = \mathbf{h}\mathbf{a}\mathbf{t}$ , где  $\mathbf{a}$  — линейное слово, зависящее от букв  $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, z'_{n+1}, z_{n+2}, z'_{n+2}, \dots, z_{n+m}, z'_{n+m}$ . Легко видеть, что  $\mathbf{M}(xzxyty) \subseteq \mathbf{M}_{\gamma'}(xx^+yty)$ . Тогда, поскольку  $\mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(xx^+yty) \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует стабильность множеств  $yxx^+ty$ ,  $xx^+yty$  и  $\{xzxyty\}$  относительно  $\mathbf{V}$ . Откуда  $\mathbf{v} = \mathbf{h}z_{1\rho}z_{2\rho} \cdots z_{(n+m)\rho}\mathbf{t}$ , где  $\hat{\mathbf{z}}_{i\rho} := (\mathbf{z}_{i\rho})_x \in Z_{i\rho}^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n + m$ . Более того, поскольку  $\rho \in S_{n,m}$ , либо  $1\rho \leq n$ , либо  $2\rho \leq n$  и либо  $(n + m - 1)\rho \leq n$ , либо  $(n + m)\rho \leq n$ , откуда либо  $x \in \text{alph}(\mathbf{z}_{1\rho})$ , либо  $\mathbf{h}(\mathbf{z}_{2\rho}) = x$  и либо  $x \in \text{alph}(\mathbf{z}_{(n+m)\rho})$ , либо  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_{(n+m-1)\rho}) = x$ .

Пусть выполняется одно из трех условий:  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_{1\rho}) = x$ , либо  $\mathbf{h}(\mathbf{z}_{(n+m)\rho}) = x$ , либо  $x \in \text{alph}(\mathbf{z}_{2\rho}z_{3\rho} \cdots z_{(n+m-1)\rho})$ . Тогда, используя тождества из  $\Sigma_{n+m-1}^{(1)}$ , мы можем вставить вхождение буквы  $x$  в подслово

$$\mathbf{t}(\mathbf{z}_{1\rho})z_{2\rho}z_{3\rho} \cdots z_{(n+m-1)\rho} \mathbf{h}(\mathbf{z}_{(n+m)\rho})$$

слова  $\mathbf{v}$ . Иными словами,

$$\mathbf{v} \stackrel{\Sigma_{n+m-1}^{(1)}}{\approx} \mathbf{h}z_{1\rho}x\chi(\hat{\mathbf{z}}_{2\rho}\hat{\mathbf{z}}_{3\rho} \cdots \hat{\mathbf{z}}_{(n+m-1)\rho})x\mathbf{z}_{(n+m)\rho}\mathbf{t} := \hat{\mathbf{v}}.$$

Если  $\mathbf{h}(\mathbf{z}_{1\rho}) \neq x$ , то  $1\rho \leq n$  и  $\hat{\mathbf{z}}_{1\rho} = z_{1\rho}$ , так как множества  $yxx^+ty$  и  $xx^+yty$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{V}$ . В этом случае  $\mathbf{z}_{1\rho} \in z_{1\rho}x^*$  и тождество  $\mathbf{u}(x, t_{1\rho}, z_{1\rho}) \approx \mathbf{v}(x, t_{1\rho}, z_{1\rho})$  эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству

$$ytx^2 \approx ytxx. \quad (3.43)$$

Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &\stackrel{\Sigma_{n+m-1}^{(1)}}{\approx} \mathbf{h}z_{1\rho}x^2\chi(\hat{\mathbf{z}}_{2\rho}\hat{\mathbf{z}}_{3\rho} \cdots \hat{\mathbf{z}}_{(n+m-1)\rho})x\mathbf{z}_{(n+m)\rho}\mathbf{t} \\ &\stackrel{(3.43)}{\approx} \mathbf{h}x\chi(\hat{\mathbf{z}}_{1\rho}\hat{\mathbf{z}}_{2\rho} \cdots \hat{\mathbf{z}}_{(n+m-1)\rho})x\mathbf{z}_{(n+m)\rho}\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Таким образом, без ограничения общности мы можем считать, что  $\mathbf{h}(\mathbf{z}_{1\rho}) = x$  и, двойственно,  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_{(n+m)\rho}) = x$ . В этом случае  $\hat{\mathbf{v}} \stackrel{\Sigma_{n+m-1}^{(1)}}{\approx} \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\rho]$  и, следовательно,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\rho]$ .

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда

$$x \notin \text{alph}(\mathbf{t}(\mathbf{z}_{1\rho})\mathbf{z}_{2\rho}\mathbf{z}_{3\rho} \cdots \mathbf{z}_{(n+m-1)\rho} \mathbf{h}(\mathbf{z}_{(n+m)\rho})).$$

Тогда  $x \in \text{alph}(\mathbf{z}_{1\rho}) \cap \text{alph}(\mathbf{z}_{(n+m)\rho})$ . Если  $\mathbf{h}(\mathbf{z}_{1\rho}) \neq x$ , то  $1\rho \leq n$  и  $\hat{\mathbf{z}}_{1\rho} = \mathbf{z}_{1\rho}$ , так как множества  $uxx^+ty$  и  $xx^+yty$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . В этом случае  $\mathbf{z}_{1\rho} \in \mathbf{z}_{1\rho}x^+$ , что противоречит предположению, что  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_{1\rho}) \neq x$ . Следовательно,  $\mathbf{h}(\mathbf{z}_{1\rho}) = x$ . Аналогично,  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_{(n+m)\rho}) = x$ .

Если существует вхождение буквы  $x$ , следующее за  $\mathbf{z}_{1\rho}$  в  $\mathbf{z}_{1\rho}$ , то  $1\rho > n$ , и это вхождение буквы  $x$  лежит между  $\mathbf{z}_{1\rho}$  и  $\mathbf{z}'_{1\rho}$  в  $\mathbf{z}_{1\rho}$ , так как  $\mathbf{t}(\mathbf{z}_{1\rho}) \neq x$ . В этом случае, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\{y_{1\rho}, \mathbf{z}'_{1\rho}\}} &\stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} \mathbf{h}x\mathbf{z}_{1\rho}\hat{\mathbf{z}}_{2\rho}\hat{\mathbf{z}}_{3\rho} \cdots \hat{\mathbf{z}}_{(n+m)\rho}x\mathbf{t}, \\ \mathbf{v}_{\{y_{1\rho}, \mathbf{z}'_{1\rho}\}} &\stackrel{\Sigma_{n+m-1}^{(1)}}{\approx} \mathbf{h}x\mathbf{z}_{1\rho}x\mathbf{z}_{2\rho}\mathbf{z}_{3\rho} \cdots \mathbf{z}_{(n+m)\rho}x\mathbf{t}, \end{aligned}$$

в  $\mathbf{V}$  многообразии выполнены тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho] &\stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \stackrel{\{\Phi, \Sigma_{n+m-1}^{(1)}, \mathbf{u} \approx \mathbf{v}\}}{\approx} \mathbf{h}x\mathbf{z}_{1\rho}(xy_{1\rho})^2xz'_{1\rho}xz_{2\rho}\mathbf{z}_{3\rho} \cdots \mathbf{z}_{(n+m)\rho}\mathbf{t} \\ &\stackrel{\Sigma_{n+m-1}^{(1)}}{\approx} \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\rho]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно показать, что если  $(n+m)\rho > n$  и существует вхождение  $x$  между  $\mathbf{z}_{(n+m)\rho}$  и  $\mathbf{z}'_{(n+m)\rho}$  в  $\mathbf{z}_{(n+m)\rho}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\rho]$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда

$$\mathbf{v} \in \mathbf{h}xx^+Z_{1\rho}^{(1)}Z_{2\rho}^{(1)} \cdots Z_{(n+m)\rho}^{(1)}x^+\mathbf{t} \cup \mathbf{h}x^+Z_{1\rho}^{(1)}Z_{2\rho}^{(1)} \cdots Z_{(n+m)\rho}^{(1)}xx^+\mathbf{t}.$$

Далее, поскольку  $M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}) \notin \mathbf{V}$ , из следствия 3.3(ii) вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  такому, что  $\mathbf{u}' \in [\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$  и  $\mathbf{v}' \notin [\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho] \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \stackrel{(3.42)}{\approx} \mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ . Поскольку множества  $uxx^+ty$  и  $xx^+yty$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ , имеем, что  $\mathbf{v}' = \mathbf{h}x^p\mathbf{z}'_{1\rho}\mathbf{z}'_{2\rho} \cdots \mathbf{z}'_{(n+m)\rho}x^q\mathbf{t}$ , где  $p, q \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{z}'_{1\rho}) \neq x$ ,  $\mathbf{t}(\mathbf{z}'_{(n+m)\rho}) \neq x$  и  $(\mathbf{z}'_{i\rho})_x \in Z_{i\rho}^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+m$ . Далее,  $x \in \text{alph}(\mathbf{z}'_{1\rho}\mathbf{z}'_{2\rho} \cdots \mathbf{z}'_{(n+m)\rho})$ , так как  $\mathbf{v}' \notin [\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$ . Тогда из рассуждений, аналогичных приведенным выше, следует, что  $\mathbf{v}' \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\rho]$  выполняется в  $\mathbf{V}$ . Откуда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{a}_{n,m}^{(1)}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,m}^{(1)}[\rho]$ , что и требовалось показать.

**Случай 2:**  $M_{\gamma'}(ytxx^+), M_{\gamma'}(ytxx^+y) \in \mathbf{V}$ . Этот случай является двойственным к случаю 1, и мы опускаем соответствующие рассуждения.

**Случай 3:**  $M_{\gamma'}(ytxx^+), M_{\gamma'}(xx^+yty) \in \mathbf{V}$ . Этот случай рассматривается аналогично случаю 1, и мы опускаем соответствующие рассуждения.

**Случай 4:**  $M_{\gamma'}(ytxx^+y), M_{\gamma'}(ytxx^+ty) \in \mathbf{V}$ . Если  $M(xzxyty) \in \mathbf{V}$ , то, рассуждая как в случае 1, можно показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $M(xzxyty) \notin \mathbf{V}$ . Тогда тождество  $\sigma_3$  выполнено в  $\mathbf{V}$  по лемме 1.23. Легко видеть, что каждое

тождество из  $\Phi_2$  следует из тождества  $\mathbf{a}_{n,n}[\pi] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,n}[\pi]$  для некоторых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\pi \in S_{n,n}$  таких, что

$$n+1 \leq 1\pi, 3\pi, \dots, (2n-1)\pi \leq 2n, \quad 1 \leq 2\pi, 4\pi, \dots, (2n)\pi \leq n.$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n,n}[\pi] &\stackrel{\{\Phi, \sigma_3\}}{\approx} \mathbf{p}x \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{(2i-1)\pi} (y_{2i-1}^2 y_{2i}^2)^2 \right) z_{(2n-1)\pi} \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{(2i)\pi} (y_{2i}^2 y_{2i+1}^2)^2 \right) z_{(2n)\pi} x \mathbf{q}, \\ \bar{\mathbf{a}}_{n,n}[\pi] &\stackrel{\{\Phi, \sigma_3\}}{\approx} \mathbf{p}x \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{(2i-1)\pi} (y_{2i-1}^2 y_{2i}^2)^2 x \right) z_{(2n-1)\pi} x \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{(2i)\pi} (y_{2i}^2 y_{2i+1}^2)^2 x \right) z_{(2n)\pi} x \mathbf{q}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{q} := \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right),$$

тождество  $\mathbf{a}_{n,n}[\pi] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,n}[\pi]$  следует из  $\{\Phi, \sigma_3, \mathbf{a}_{n,n}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]\}$  для некоторого  $\rho \in S_{2n}^\sharp$ . Поэтому достаточно показать, что тождество  $\mathbf{a}_{n,n}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ .

Согласно условию,  $M_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}) \notin \mathbf{V}$ . В силу лемм 1.5 и 3.38,  $\alpha_1$ -класс  $[\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in [\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}$  и  $\mathbf{v} \notin [\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}$ . В силу леммы 1.21,

$$\mathbf{v}_{\{x, y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}\}} = \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \mathbf{a} \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right),$$

где  $\mathbf{a}$  есть линейное слово, зависящее от букв  $z_1, z_2, \dots, z_{2n}$ . Тогда, поскольку  $\mathbf{M}_{\gamma'}(ytxx^+y) \in \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty) \subseteq \mathbf{V}$ , из леммы 1.5 вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, z_{1\rho}, t_{1\rho}, z_{(2n)\rho}, t_{(2n)\rho}) &\in z_{(2n)\rho} t_{(2n)\rho} x^+ z_{1\rho} x^* z_{(2n)\rho} x^+ t_{1\rho} z_{1\rho}, \\ \mathbf{v}(y_i, z_{i\rho}, t_{i\rho}) &\in z_{i\rho} y_i y_i^+ t_{i\rho} z_{i\rho}, \\ \mathbf{v}(y_j, z_{(j+1)\rho}, t_{(j+1)\rho}) &\in y_j^+ z_{(j+1)\rho} y_j^* t_{(j+1)\rho} z_{(j+1)\rho}, \\ \mathbf{v}(y_{n+i-1}, z_{(n+i)\rho}, t_{(n+i)\rho}) &\in z_{(n+i)\rho} t_{(n+i)\rho} y_{n+i-1} y_{n+i-1}^+ z_{(n+i)\rho}, \\ \mathbf{v}(y_{n+j}, z_{(n+j)\rho}, t_{(n+j)\rho}) &\in z_{(n+j)\rho} t_{(n+j)\rho} y_{n+j}^* z_{(n+j)\rho} y_{n+j}^+, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Тогда

$$\mathbf{v} \in \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x^+ \left( \prod_{i=1}^{2n-1} z_{i\rho} y_i \right) z_{(2n)\rho} x^+ \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right),$$

где

$$\begin{aligned} \{y_i\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}_i) \subseteq \{x, y_1, y_2, \dots, y_i\}, \\ \{y_{n+i}\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}_{n+i}) \subseteq \{x, y_{n+i}, y_{n+i+1}, \dots, y_{2n-1}\}, \\ \{y_n\} &\subseteq \text{alph}(\mathbf{y}_n) \subseteq \{x, y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}\}, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ . Далее,  $\text{occ}_x(\mathbf{v}) \geq 3$ , поскольку  $\mathbf{v} \notin [\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}$ . В этом случае тождество

$\mathbf{a}_{n,n}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]$  выполняется в  $\mathbf{V}$ , так как  $\mathbf{u} \stackrel{\{\Phi, \sigma_3\}}{\approx} \mathbf{a}_{n,n}[\rho]$  и  $\mathbf{v} \stackrel{\{\Phi, \sigma_3\}}{\approx} \bar{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]$ .  $\square$

**Лемма 3.39.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождествам (3.30), (3.41) и

$$x^2y \approx yx^2 \quad (3.44)$$

такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Если для любых  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{n,m}$ , моноид  $M(\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho])$  не лежит в многообразии  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$ .

Чтобы доказать лемму 3.39, нам потребуются несколько вспомогательных утверждений и обозначений. Для любых  $n, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\rho \in S_{n+m}$  и  $0 \leq p \leq q \leq n+m$ , положим

$$\hat{\mathbf{a}}_{n,m}^{p,q}[\rho] := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^p z_i \rho \right) x \left( \prod_{i=p+1}^q z_i \rho \right) x \left( \prod_{i=q+1}^{n+m} z_i \rho \right) \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right).$$

Через  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}^j[\rho]$  будем обозначать слово, получающееся из слова  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho]$  заменой блока  $z_j$  на слово  $x^2z_j$ .

**Лемма 3.40.** Пусть  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$ ,  $\rho \in S_{n,m}$  и  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющее тождествам (3.6), (3.12), (3.30) и (3.41) такое, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Предположим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству вида  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \mathbf{a}$  такому, что  $\mathbf{a}_x = (\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho])_x$ . Предположим также, что выполнено одно из следующих условий:

- (i)  $x^2$  — подслово слова  $\mathbf{a}$ ;
- (ii)  $\text{occ}_x(\mathbf{a}) > 2$ .

Тогда в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено либо тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ , либо тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}^j_{n,m}[\rho]$  для некоторого  $n+1 \leq j \leq n+m$ .

*Доказательство.* Ясно, что  $\mathbf{a} = \mathbf{pqr}$ , где

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^n x^{e_i} z_i x^{f_i} t_i \right), \quad \mathbf{q} := x^{g_0} \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_i \rho x^{g_i} \right), \quad \mathbf{r} := \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i x^{e_i} z_i x^{f_i} \right)$$

и  $g_0, e_1, f_1, g_1, e_2, f_2, g_2, \dots, e_{n+m}, f_{n+m}, g_{n+m} \in \mathbb{N}_0$ . Тогда многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\left( \prod_{i=1}^n t_i \right) x^2 \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i \right) \approx \left( \prod_{i=1}^n x^{e_i+f_i} t_i \right) x^{\sum_{i=0}^{n+m} g_i} \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i x^{e_i+f_i} \right). \quad (3.45)$$

(i) Предположим, что  $g_q > 1$  для некоторого  $q \in \{0, 1, \dots, n+m\}$ . Поскольку в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (3.8), мы можем без ограничения общности считать, что  $g_i = 0$  для любого  $i = q+1, q+2, \dots, n+m$ . Если  $q = n+m$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет

$$\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \mathbf{a} \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} \mathbf{pqr} \hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \mathbf{a} \stackrel{\{(3.6), (3.12)\}}{\approx} \mathbf{p}_x x \mathbf{q}_x x^2 \mathbf{r}_x \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho].$$

Если  $q < n + m$ , то, применяя тождества из множества

$$\{\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho](x, z_{i\rho}, t_n, t_{n+1}) \approx \mathbf{a}(x, z_{i\rho}, t_n, t_{n+1}) \mid i \in \{q + 1, q + 2, \dots, n + m\}\},$$

мы можем вставить  $x$  непосредственно перед  $t_{n+1}$  в слове  $\mathbf{a}$ . Тогда рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ .

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $g_0, g_1, \dots, g_{n+m} \leq 1$ . Тогда либо  $e_p > 1$ , либо  $f_p > 1$  для некоторого  $p \in \{0, 1, \dots, n + m\}$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $e_p > 1$ . В этом случае рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем параграфе, показывают, что  $\{x^2 \approx x^3, \hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \mathbf{a}\}$  влечет  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}^p_{n,m}[\rho]$ . Если  $p \leq n$ , то, используя тождество (3.8), вставим букву  $x$  непосредственно перед  $t_{n+1}$  в  $\hat{\mathbf{a}}^p_{n,m}[\rho]$  и затем применим те же рассуждения что и в предыдущем абзаце. Если  $p > n$ , требуемое утверждение доказано.

(ii) В силу п. (i), мы можем без ограничения общности считать, что слово  $x^2$  не является подсловом слова  $\mathbf{a}$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $n + m = 1$ . Если  $n = 1$  и  $m = 0$ , то  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \mathbf{a}$  есть не что иное как  $z_1 t_1 x z_1 x \approx x^{e_1} z_1 x^{f_1} t_1 x^{g_0} z_1 x^{g_1}$ . Поскольку слово  $x^2$  не является подсловом слова  $\mathbf{a}$  и  $\text{occ}_x(\mathbf{a}) > 2$ , по крайней мере трое из чисел  $e_1, f_1, g_0, g_1$  равны 1. Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет

$$\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\rho] \approx x^{e_1} z_1 x^{f_1} t_1 x^{g_0} z_1 x^{g_1} \stackrel{\{(3.30), (3.41)\}}{\approx} x^{e_1+f_1} z_1 t_1 x^{g_0+g_1} z_1 \stackrel{(3.45)}{\approx} z_1 t_1 x^2 z_1 = \hat{\mathbf{a}}'_{1,0}[\rho],$$

что и требовалось доказать. Аналогичным образом можно показать, что если  $n = 0$  и  $m = 1$ , то тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Таким образом, далее мы можем считать, что  $n, m \geq 1$ .

Предположим, что каждый блок слова  $\mathbf{a}$  содержит не более одного вхождения буквы  $x$ . Тогда тождество (3.45) влечет тождество  $\mathbf{a} \approx \hat{\mathbf{a}}_{n,m}^{q,q}[\rho]$  для некоторого  $0 \leq q \leq n + m$ . В этом случае можно применить п. (i). Таким образом, остается только рассмотреть случай, когда буква  $x$  является кратной в некотором блоке слова  $\mathbf{a}$ .

Предположим, что  $e_j + f_j > 1$  для некоторого  $j \in \{1, 2, \dots, n + m\}$ . Тогда  $e_j = f_j = 1$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $j \leq n$ . Ясно, что слово  $x^2$  является подсловом слова  $\mathbf{a}(x, z_{n+1}, t_{n+1})$  и слово  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho](x, z_{n+1}, t_{n+1})$  совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon]$ . Тогда из п. (i) вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств

$$yx^2ty \approx xuxty, \tag{3.46}$$

$$xuxtx^2y \approx xuxty. \tag{3.47}$$

Поскольку

$$xuxty \stackrel{(3.47)}{\approx} xuxtx^2y \stackrel{(3.30)}{\approx} yx^2tx^2y \stackrel{(3.6)}{\approx} xux^2tx^2y \stackrel{(3.47)}{\approx} xux^2ty \stackrel{(3.6)}{\approx} yx^2ty,$$

тождество (3.46) выполняется в  $\mathbf{V}$  в любом случае. Очевидно, что

$$\mathbf{a} \stackrel{(3.46)}{\approx} \left( \prod_{i=1}^{j-1} x^{e_i} z_i x^{f_i} t_i \right) \cdot (z_j x^{e_j+f_j} t_j) \cdot \left( \prod_{i=j+1}^n x^{e_i} z_i x^{f_i} t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_{i\rho} x^{g_i} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i x^{e_i} z_i x^{f_i} \right).$$

Снова применим п. (i) и получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет либо  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ , либо  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}_{n,m}^p[\rho]$  для некоторых  $n+1 \leq p \leq n+m$ .

Предположим, что  $e_i + f_i \leq 1$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n+m$ . Тогда  $\sum_{i=0}^{n+m} g_i \geq 2$ . В этом случае найдутся такие числа  $1 \leq s \leq r \leq n+m$ , что слово  $x z_{s\rho} z_{(s+1)\rho} \cdots z_{r\rho} x$  будет подсловом слова  $\mathbf{a}$ . Положим

$$Z := \{x, t_1, t_2, \dots, t_{n+m}, z_{s\rho}, z_{(s+1)\rho}, \dots, z_{r\rho}\}.$$

Легко видеть, что из тождества  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho](Z) \approx \mathbf{a}(Z)$  вытекает тождество

$$\mathbf{a} \approx \left( \prod_{i=1}^n \mathbf{p}_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{s-1} x^{g_{i-1}} z_{i\rho} \right) x^{\sum_{i=0}^{s-1} g_i} \left( \prod_{i=s}^r z_{i\rho} \right) x^{\sum_{i=r}^{n+m} g_i} \left( \prod_{i=r+1}^{n+m} z_{i\rho} x^{g_i} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{p}_i t_i \right), \quad (3.48)$$

где

$$\mathbf{p}_i = \begin{cases} x^{2e_i} z_i x^{2f_i}, & \text{если } s \leq i\rho \leq r; \\ x^{2e_i+f_i} z_i x^{f_i}, & \text{если } e_i = 1 \text{ и либо } i\rho < s, \text{ либо } r < i\rho; \\ x^{e_i} z_i x^{e_i+2f_i}, & \text{если } e_i = 0 \text{ и либо } i\rho < s, \text{ либо } r < i\rho. \end{cases}$$

Очевидно, что если  $e_j = 1$  или  $f_j = 1$  для некоторых  $1 \leq j \leq n+m$ , то слово  $x^2$  входит в качестве подслова в левую часть тождества (3.48). Если  $e_i = f_i = 0$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n+m$ , то либо  $\sum_{i=0}^{s-1} g_i > 1$ , либо  $\sum_{i=r}^{n+m} g_i > 1$ , поскольку  $\text{occ}_x(\mathbf{a}) > 2$  и, следовательно,  $x^2$  снова является подсловом левой части тождества (3.48). Мы видим, что левая часть тождества (3.48) содержит  $x^2$  в качестве подслова в любом случае. В силу п. (i), многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет либо тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ , либо тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}_{n,m}^p[\rho]$  для некоторого  $n+1 \leq p \leq n+m$ .  $\square$

**Следствие 3.41.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождествам (3.30), (3.41) и (3.44),  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in \mathcal{S}_{n,m}$ . Предположим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}$  для некоторого слова  $\hat{\mathbf{a}} \in X^*$  такого, что  $\hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho]$ . Предположим, что выполняется одно из условий:

- (i)  $x^2$  является подсловом слова  $\hat{\mathbf{a}}$ ;
- (ii)  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) > 2$ .

Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ .

*Доказательство.* (i) Как и в доказательстве леммы 3.40 можно заметить, что для некоторых  $g_0, e_1, f_1, g_1, e_2, f_2, g_2, \dots, e_{n+m}, f_{n+m}, g_{n+m} \in \mathbb{N}_0$  в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (3.45). В этом случае в  $\mathbf{V}$  выполнены также тождества

$$\hat{\mathbf{a}} \stackrel{\{(3.30), (3.41), (3.44)\}}{\approx} \left( \prod_{i=1}^n x^{e_i+f_i} z_i t_i \right) x^{\sum_{i=0}^{n+m} g_i} \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_{i\rho} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i x^{e_i+f_i} z_i \right) \stackrel{(3.45)}{\approx} \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho],$$

что и требовалось показать.

(ii) Поскольку  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) > 2$ , из тождества  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}$  вытекает тождество  $x^2 \approx x^3$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned} x^2yx &\stackrel{(3.44)}{\approx} yx^3 \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} yx^4 \stackrel{(3.44)}{\approx} x^2yx^2, \\ yx^2ty &\stackrel{(3.44)}{\approx} x^2yty \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} x^3yty \stackrel{(3.44)}{\approx} xyx^2ty, \\ ytyx^2 &\stackrel{(3.44)}{\approx} ytx^2y \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} ytx^3y \stackrel{(3.44)}{\approx} ytxyx^2, \end{aligned}$$

мы можем, применив лемму 3.40, получить, что в  $\mathbf{V}$  выполнено либо тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ , либо тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  для некоторого  $n+1 \leq j \leq n+m$ . Остается заметить, что  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  вместе с (3.44) влечет  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ .  $\square$

*Доказательство леммы 3.39.* Если  $M(xzxyty) \notin \mathbf{V}$ , то, по лемме 1.23, в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\sigma_3$ . В этом случае,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \stackrel{\sigma_3}{\approx} \mathbf{h}_1 x \mathbf{h}_3 \mathbf{h}_4 x \mathbf{h}_3 \stackrel{\sigma_3}{\approx} \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_3 x^2 \mathbf{h}_4 \mathbf{h}_3 \stackrel{(3.44)}{\approx} \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_3 \mathbf{h}_4 x^2 \mathbf{h}_2 \stackrel{\sigma_3}{\approx} \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho],$$

где

$$\mathbf{h}_1 := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right), \quad \mathbf{h}_2 := \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right), \quad \mathbf{h}_3 := \left( \prod_{1 \leq i \rho \leq n} z_{i\rho} \right), \quad \mathbf{h}_4 := \left( \prod_{n < i \rho \leq n+m} z_{i\rho} \right).$$

Поэтому далее мы можем считать, что  $M(xzxyty) \in \mathbf{V}$ . Заметим, что

( $\star$ ) для любых  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{n,m}$  слово  $(\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho])_x$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(xzxyty)$ .

Обозначим через  $\varepsilon$  тривиальную перестановку из  $S_1$ . Поскольку  $M(\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon]) \notin \mathbf{V}$ , из леммы 1.3 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}$  для некоторого  $\hat{\mathbf{a}} \in X^*$ . В силу условия ( $\star$ ),  $\hat{\mathbf{a}}_x = (\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon])_x$ . Если  $x^2$  является подсловом слова  $\hat{\mathbf{a}}$  или  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) > 2$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,0}[\varepsilon]$  по следствию 3.41. Если слово  $x^2$  не является подсловом слова  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) \leq 2$ , то, поскольку  $xux$  — изотерм для  $\mathbf{V}$ , тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}$  совпадает (с точностью до переименования букв) с тождеством

$$ztxzx \approx xzxtz. \tag{3.49}$$

Аналогичным образом можно показать, что если  $M(\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon]) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon]$  или (3.49).

Пусть  $\tau \in S_2 = S_{1,1}$ . Поскольку  $M(\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau]) \notin \mathbf{V}$ , из леммы 1.3 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}$  для некоторого слова  $\hat{\mathbf{a}} \in X^*$ . Из условия ( $\star$ ) следует, что  $\hat{\mathbf{a}}_x = (\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau])_x$ . Если слово  $x^2$  является подсловом слова  $\hat{\mathbf{a}}$  или  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) > 2$ , то тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,1}[\tau]$  выполнено в  $\mathbf{V}$  по следствию 3.41. Предположим теперь, что  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) \leq 2$  и слово  $x^2$  не является подсловом слова  $\hat{\mathbf{a}}$ . Поскольку  $xux$  есть изотерм для  $\mathbf{V}$ ,  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) = 2$ . Предположим, что некоторое вхождение буквы  $x$  лежит между буквами  $t_1$  и  $t_2$  в  $\hat{\mathbf{a}}$ . Поскольку слово  $x^2$  не является подсловом слова  $\hat{\mathbf{a}}$  и тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}$  нетривиально,

без ограничения общности мы можем считать, что  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{1,1}^{1,2}[\tau]$ . Тогда либо  $\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,0}[\varepsilon]$ , либо  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon]$  вытекает из системы  $\{(\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau])_{\{z_{2\tau}, t_{2\tau}, x\}} \approx \hat{\mathbf{a}}_{\{z_{2\tau}, t_{2\tau}, x\}}, (3.44)\}$ . В этом случае оба тождества  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon]$  и  $\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,0}[\varepsilon]$  выполнены в  $\mathbf{V}$ , так как

$$\text{var}\{\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,0}[\varepsilon], (3.49), (3.44)\} = \text{var}\{\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon], (3.49), (3.44)\}.$$

Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,1}[\tau]$ , так как  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{1,1}^{1,2}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,1}[\tau]$  вытекает из

$$\{\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,0}[\varepsilon], \hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon], x^2y \approx yx^2\}.$$

Предположим, что между  $t_1$  и  $t_2$  в  $\hat{\mathbf{a}}$  нет вхождений буквы  $x$ . Тогда без ограничения общности мы можем считать, что некоторое вхождение буквы  $x$  предшествует букве  $t_1$  в  $\hat{\mathbf{a}}$ . Поскольку слово  $xux$  является изотермом для  $\mathbf{V}$  и  $\hat{\mathbf{a}}$  не содержит  $x^2$  в качестве подслова, получаем, что  $\hat{\mathbf{a}} = xz_1xt_1z_1\tau z_2t_2z_2$ . Напомним, что одно из тождеств (3.49) или  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Если тождество (3.49) выполняется в  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\hat{\mathbf{a}} \stackrel{(3.49)}{\approx} \hat{\mathbf{a}}_{1,1}^{\ell_1, \ell_2}[\tau]$  для некоторых  $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq 2$ . В этом случае рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,1}[\tau]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Если тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\hat{\mathbf{a}} \stackrel{\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon]}{\approx} x^2z_1t_1z_1\tau z_2t_2z_2 \stackrel{(3.44)}{\approx} \hat{\mathbf{a}}'_{1,1}[\tau]$ . Мы видим, что тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,1}[\tau]$  в любом случае выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет также обоим тождествам  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon]$  и  $\hat{\mathbf{a}}_{1,0}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,0}[\varepsilon]$ , так как эти тождества вытекают из тождества  $\hat{\mathbf{a}}_{1,1}[\tau] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{1,1}[\tau]$ .

Итак, мы доказали, что существует такое  $r$ , что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{r_1, r_2}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{r_1, r_2}[\rho]$  для всех таких  $(r_1, r_2) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{r_1, r_2}$ , для которых  $r_1 + r_2 \leq r$  (например,  $r = 1$ ). Проверим, что любое  $r$  обладает этим свойством. Рассуждая от противного, предположим, что обсуждаемое свойство выполнено при  $r = 1, 2, \dots, k - 1$ , но не выполнено при  $r = k$ . Это означает, что в  $\mathbf{V}$  нарушается тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n, m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n, m}[\rho]$  для некоторых  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{n, m}$  таких, что  $n + m = k$ . В силу леммы 1.3,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n, m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}$ . Согласно условию  $(\star)$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_{n, m}[\rho]$ . Тогда, в силу следствия 3.41,  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) \leq 2$  и  $\hat{\mathbf{a}}$  не содержит  $x^2$  в качестве подслова. Из того факта, что  $x$  является изотермом для  $\mathbf{V}$  вытекает, что  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) = 2$ .

Предположим теперь, что между  $t_n$  и  $t_{n+1}$  в  $\hat{\mathbf{a}}$  есть вхождение буквы  $x$ . Поскольку  $\hat{\mathbf{a}}$  не содержит  $x^2$  в качестве подслова и тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n, m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}$  нетривиально, мы можем без ограничения общности считать, что  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{n, m}^{p, q}[\rho]$  для некоторых  $0 < p < q \leq n + m$ . Ясно, что слово  $(\hat{\mathbf{a}}_{n, m}[\rho])_Z$ , где

$$Z := \{z_{1\rho}, t_{1\rho}, z_{2\rho}, t_{2\rho}, \dots, z_{p\rho}, t_{p\rho}, z_{(q+1)\rho}, t_{(q+1)\rho}, z_{(q+2)\rho}, t_{(q+2)\rho}, \dots, z_{k\rho}, t_{k\rho}\},$$

совпадает (с точностью до переименования переменных) со словом  $\hat{\mathbf{a}}_{c, d}[\pi]$  для некоторых  $(c, d) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\pi \in S_{c, d}$  таких, что  $c + d = q - p$ . Поскольку тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{c, d}[\pi] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{c, d}[\pi]$  выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ , это многообразие также должно удовлетворять тождествам  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{n, m}^{p, q}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}_{n, m}^{p, p}[\rho] \stackrel{(3.44)}{\approx} \hat{\mathbf{a}}'_{n, m}[\rho]$ . Но это противоречит выбору  $n, m$  и  $\rho$ .

Предположим теперь, что между  $t_n$  и  $t_{n+1}$  в  $\hat{\mathbf{a}}$  нет вхождений буквы  $x$ . Тогда мы можем без ограничения общности считать, что некоторое вхождение буквы  $x$  предшествует первому вхождению буквы  $t_n$  в  $\hat{\mathbf{a}}$ . Поскольку слово  $xux$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{V}$ , а слово  $x^2$  не является подсловом слова  $\hat{\mathbf{a}}$ , получаем, что

$$\hat{\mathbf{a}} = \left( \prod_{i=1}^{j-1} z_i t_i \right) \cdot (x z_j x t_j) \cdot \left( \prod_{i=j+1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_i \rho \right) \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right)$$

для некоторого  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Учитывая, что в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\hat{\mathbf{a}}_{0,1}[\varepsilon] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{0,1}[\varepsilon]$  и (3.44), получаем, что в этом многообразии также должны быть выполнены тождества  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}_{n,m}^{j-1,j-1}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ , что снова противоречит выбору  $n, m$  и  $\rho$ .  $\square$

### § 3.4. Некоторые многообразия с недистрибутивной решеткой подмногообразий

В соответствии с намеченным планом приступим к формированию списка многообразий моноидов с недистрибутивной решеткой подмногообразий.

#### 3.4.1. «Спорадические» многообразия

**Предложение 3.42.** *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(x^2y, yx^2))$  имеет вид, изображенный на рис. 3.1.*

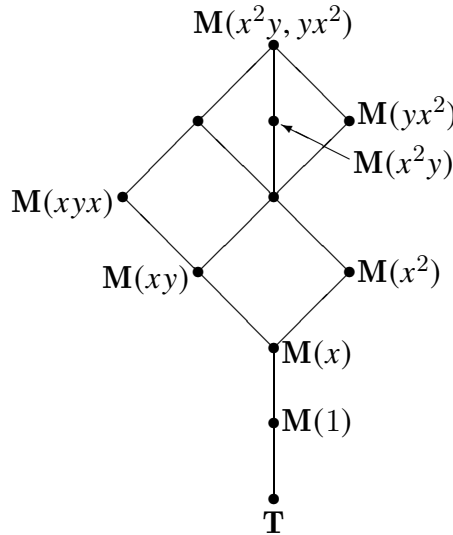


Рис. 3.1: решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(x^2y, yx^2))$

*Доказательство.* В [48, леммы 2.2.8 и 2.2.9] доказано, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(xyx) &= \text{var}\{x^2 \approx x^3, x^3 yzt \approx yxzxtx, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \\ \mathbf{M}(x^2y) \vee \mathbf{M}(yx^2) &= \text{var}\{x^3 \approx x^4, x^3 yzt \approx yxzxtx, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $\mathbf{M}(xux) = (\mathbf{M}(x^2y) \vee \mathbf{M}(yx^2)) \wedge \text{var}\{x^2 \approx x^3\}$ . По лемме 1.6,  $\mathbf{M}(x^2y) \vee \mathbf{M}(yx^2) = \mathbf{M}(x^2y, yx^2)$ . Далее, очевидно, что  $\mathbf{M}(x^2) \subseteq \mathbf{M}(x^2y, yx^2)$ . В силу леммы 1.24, любое подмножество многообразия  $\mathbf{M}(x^2y, yx^2)$ , не содержащее  $\mathbf{M}(x^2)$  удовлетворяет тождеству  $x^2 \approx x^3$  и потому содержится в  $\mathbf{M}(xux)$ . Следовательно, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(x^2y, yx^2))$  является дизъюнктивным объединением решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xux))$  и интервала  $[\mathbf{M}(x^2), \mathbf{M}(x^2y, yx^2)]$ . В [50, леммы 4.4 и 4.5] доказано, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xux))$  есть 5-элементная цепь, изображенная на рис. 3.1. Таким образом, остается описать интервал  $[\mathbf{M}(x^2), \mathbf{M}(x^2y, yx^2)]$ . Из предложения 1.15 и двойственного к нему утверждения следует, что любое некоммутативное многообразие из этого интервала может быть задано внутри многообразия  $\mathbf{M}(x^2y, yx^2)$  тождествами (3.44),

$$x^2y \approx xux, \quad (3.50)$$

$$yx^2 \approx xux. \quad (3.51)$$

Учитывая это, рутинными вычислениями проверяется, что интервал  $[\mathbf{M}(x^2), \mathbf{M}(x^2y, yx^2)]$  имеет вид, изображенный на рис. 3.1, где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(x^2y) &= \mathbf{M}(x^2y, yx^2) \wedge \text{var}\{(3.51)\}, \\ \mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}(x^2) &= \mathbf{M}(x^2y, yx^2) \wedge \text{var}\{(3.44)\}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство предложения 3.42.  $\square$

**Предложение 3.43.** *Решетки подмногообразий следующих многообразий не являются модулярными:*

- (i)  $\mathbf{M}(x^2) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y)$ ;
- (ii)  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)$ ;
- (iii)  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)$ .

*Доказательство.* (i) Рассмотрим произвольное нетривиальное тождество  $x^2y \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(x^2) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y)$ . В силу леммы 1.3,  $\mathbf{v}_x = y$  и  $\mathbf{v}_y = x^2$ , а, по лемме 1.5,  $\mathbf{v} \in xx^+y$ . Из сказанного следует, что слово  $x^2y$  есть изотерм для  $\mathbf{M}(x^2) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y)$ . Тогда, по лемме 1.3,

$$\left( \mathbf{M}(x^2) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \right) \wedge \mathbf{M}(x^2y) = \mathbf{M}(x^2y).$$

Далее,  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \wedge \mathbf{M}(x^2y)$  удовлетворяет тождествам

$$x^2y \stackrel{\mathbf{M}_\gamma(xx^+y)}{\approx} x^3y \stackrel{\mathbf{M}(x^2y)}{\approx} xux^2 \stackrel{\mathbf{M}_\gamma(xx^+y)}{\approx} xux.$$

Очевидно, тождество (3.50) выполнено также в многообразии  $\mathbf{M}(x^2)$ . Поскольку  $\mathbf{M}(x^2) \subset \mathbf{M}(x^2y)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}(x^2) \vee \left( \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \wedge \mathbf{M}(x^2y) \right) \subset \mathbf{M}(x^2y).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(x^2) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+y))$  не является модулярной.

(ii) В силу леммы 1.21, множество  $\{xzxyty, xzxyty\}$  есть FIC ( $\mathbf{M}(xux)$ )-класс. Легко видеть, что в многообразии  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)$  нарушается тождество  $\sigma_3$ . Отсюда следует, что слово  $xzxyty$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)$ . По лемме 1.3,

$$(\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)) \wedge \mathbf{M}(xzxyty) = \mathbf{M}(xzxyty).$$

Далее, в силу [50, леммы 4.4 и 5.10] и леммы 1.17,

$$\mathbf{M}(xux) \vee (\mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+) \wedge \mathbf{M}(xzxyty)) = \mathbf{M}(xux) \subset \mathbf{M}(xzxyty).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+))$  не является модулярной.

(iii) Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)$  такое, что  $\mathbf{u} \in xx^+yy^+$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, t) \in xx^+t$ ,  $\mathbf{u}(y, t) = ty^+$  и  $\mathbf{u}(x, y) \in xx^+yy^+$ , из леммы 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, t) \in xx^+t$ ,  $\mathbf{v}(y, t) = ty^+$  и  $\mathbf{v}(x, y) \in xx^+yy^+$ . Откуда  $\mathbf{v} \in xx^+yy^+$ . Таким образом,  $\lambda$ -класс  $xx^+yy^+$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)$ . Тогда, согласно следствию 1.8(ii),

$$(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)) \wedge \mathbf{M}_\lambda(xx^+yy^+) = \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+) \wedge \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)$  удовлетворяет тождествам

$$xyzxy \stackrel{\mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)}{\approx} x^2y^2zxy \stackrel{\mathbf{M}_\lambda(xx^+yy^+)}{\approx} y^2x^2zxy \stackrel{\mathbf{M}_\lambda(xx^+yy^+)}{\approx} yxzxy.$$

Ясно, что тождество  $\sigma_1$  выполняется также в моноиде  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ . Поскольку  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \subset \mathbf{M}_\lambda(xx^+yy^+)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee (\mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+) \wedge \mathbf{M}_\lambda(xx^+yy^+)) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xyzxy).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+))$  не является модулярной.  $\square$

Конгруэнцию, двойственную к конгруэнции  $\alpha$  будем обозначать через  $\bar{\alpha}$ .

**Предложение 3.44.** *Решетки подмногообразий следующих многообразий не являются модулярными:*

- (i)  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{H}_1$ ;
- (ii)  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu)$ ;
- (iii)  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta)$ ;
- (iv)  $\mathbf{M}_\lambda(xyx^+) \vee \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+yx)$ ;
- (v)  $\mathbf{M}_\lambda(xyx^+) \vee \mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu)$ ;
- (vi)  $\mathbf{M}_\lambda(xyx^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty)$ ;
- (vii)  $\mathbf{M}_\lambda(xyx^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(ytyxx^+)$ ;

- (viii)  $\mathbf{M}_\lambda(xy x^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2 y z y t x^2]^{\gamma'})$ ;
- (ix)  $\mathbf{M}_\lambda(xy x^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2 y z x^2 t y]^{\gamma'})$ ;
- (x)  $\mathbf{M}_\lambda(xy x^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([y z x^2 y t x^2]^{\gamma'})$ ;
- (xi)  $\mathbf{M}_\lambda(xy x^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2 z y t x^2 y]^{\gamma'})$ ;
- (xii)  $\mathbf{M}(x y x) \vee \mathbf{H}_1$ ;
- (xiii)  $\mathbf{M}(x y x) \vee \mathbf{M}_\lambda(x y z x^+ t y^+)$ ;
- (xiv)  $\mathbf{M}(x y x) \vee \mathbf{M}_\lambda(x x^+ y t y^+)$ ;
- (xv)  $\mathbf{M}(x y x z x) \vee \mathbf{M}_\nu([y x^2 t y]^\nu)$ ;
- (xvi)  $\mathbf{M}(x y x z x) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(y x x^+ t y)$ ;
- (xvii)  $\mathbf{M}(x y x z x) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(x x^+ y t y)$ ;
- (xviii)  $\mathbf{M}(x y x z x) \vee \mathbf{M}_{\lambda'}(x y z x x^+ t y)$ ;
- (xix)  $\mathbf{M}(x y x z x) \vee \mathbf{M}_{\lambda'}(x y z y t x x^+)$ ;
- (xx)  $\mathbf{M}(x y x z x) \vee \mathbf{M}_{\lambda'}(y z y x t x x^+)$ ;
- (xxi)  $\mathbf{M}_\mu(x y x z x^+) \vee \mathbf{M}_{\lambda'}(x y z x^+ t y s x^+)$ ;
- (xxii)  $\mathbf{M}_\mu(x y x z x^+) \vee \mathbf{M}_\eta([x y z x^2 t y]^\eta)$ ;
- (xxiii)  $\mathbf{M}(x z x y t y) \vee \mathbf{N}$ ;
- (xxiv)  $\mathbf{M}(x z y t x y) \vee \mathbf{N}$ .

*Доказательство.* (i) Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\gamma(x x^+ y) \vee \mathbf{H}_1$  такое, что  $\mathbf{u} \in x y z x^+ t y^+$ . Нетрудно видеть, что  $\mathbf{M}_\lambda(x u x^+) \subset \mathbf{H}_1$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, z) \in x z x^+$ ,  $\mathbf{u}(x, t) \in x x^+ t$  и  $\mathbf{u}(y, z, t) \in y z t y^+$ , из леммы 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z) \in x z x^+$ ,  $\mathbf{v}(x, t) \in x x^+ t$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) \in y z t y^+$ . Тогда  $\mathbf{v} \in x y z x^+ t y^+ \cup y x z x^+ t y^+$ . Из [11, предложение 3.26] вытекает, что  $\mathbf{H}_1$  не удовлетворяет  $\sigma_1$ , откуда  $\mathbf{v} \in x y z x^+ t y^+$ . Из сказанного следует, что  $\lambda$ -класс  $x y z x^+ t y^+$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\gamma(x x^+ y) \vee \mathbf{H}_1$ . Тогда, согласно следствию 1.8(ii),

$$(\mathbf{M}_\gamma(x x^+ y) \vee \mathbf{H}_1) \wedge \mathbf{M}_\lambda(x y z x^+ t y^+) = \mathbf{M}_\lambda(x y z x^+ t y^+).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{M}_\lambda(x y z x^+ t y^+)$  удовлетворяет тождествам

$$x y z x t y \stackrel{\mathbf{H}_1}{\approx} x y z x t y \stackrel{\mathbf{M}_\lambda(x y z x^+ t y^+)}{\approx} y x z x t y \stackrel{\mathbf{H}_1}{\approx} y x z x t y.$$

Очевидно, тождество  $\sigma_1$  выполнено также в  $\mathbf{M}_\gamma(x x^+ y)$ . Поскольку  $\mathbf{M}_\gamma(x x^+ y) \subset \mathbf{M}_\lambda(x y z x^+ t y^+)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_\gamma(x x^+ y) \vee (\mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{M}_\lambda(x y z x^+ t y^+)) \subset \mathbf{M}_\lambda(x y z x^+ t y^+).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\gamma(x x^+ y) \vee \mathbf{H}_1)$  не является модулярной.

(ii) Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\nu([yx^2zy]^\nu)$  такое, что  $\mathbf{u} \in uxx^+ty$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, t) \in xx^+t$ ,  $\mathbf{v}(y, t) = ytu$  и  $(1_{\mathbf{u}y}) < (1_{\mathbf{u}x}) < (1_{\mathbf{u}t})$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, t) \in xx^+t$ ,  $\mathbf{v}(y, t) = ytu$  и  $(1_{\mathbf{v}y}) < (1_{\mathbf{v}x}) < (1_{\mathbf{v}t})$ . Откуда  $\mathbf{v} \in uxx^+ty$ . Таким образом,  $\gamma'$ -класс  $uxx^+ty$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu)$ . В силу следствия 3.3(ii),

$$\left( \mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu) \right) \wedge \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty) = \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu) \wedge \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty)$  удовлетворяет тождествам

$$yx^2ty \stackrel{\mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu)}{\approx} yx^2txy \stackrel{\mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty)}{\approx} x^2ytxy \stackrel{\mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu)}{\approx} x^2yty.$$

Очевидно, что тождество

$$x^2yty \approx yx^2ty \tag{3.52}$$

выполнено и в многообразии  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y)$ . Поскольку  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subset \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \left( \mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu) \wedge \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty) \right) \subset \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu))$  не является модулярной.

(iii) Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta)$  такое, что  $\mathbf{u} \in xyzx^+ty$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, z, t) \in xzxx^+t$  и  $\mathbf{u}(y, z, t) = yzty$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in xzxx^+t$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = yzty$ . Откуда  $\mathbf{v} \in xyzx^+ty \cup yxzxx^+ty$ . Однако в многообразии  $\mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta)$  не выполнено тождество (3.24). Следовательно,  $\mathbf{v} \in xyzx^+ty$ . Итак,  $\eta'$ -класс  $xyzx^+ty$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta)$ . В силу следствия 3.3(iii),

$$\left( \mathbf{M}_\lambda(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta) \right) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xyzx^+ty) = \mathbf{M}_{\lambda'}(xyzx^+ty).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xyzx^+ty)$  удовлетворяет тождествам

$$xyzx^2ty \stackrel{\mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta)}{\approx} xyzx^2txy \stackrel{\mathbf{M}_{\lambda'}(xyzx^+ty)}{\approx} yxzx^2txy \stackrel{\mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta)}{\approx} yxzx^2ty.$$

Ясно, что тождество (3.24) выполнено также в моноиде  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y)$ . Поскольку  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xyzx^+ty)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \left( \mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xyzx^+ty) \right) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xyzx^+ty).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\gamma(xx^+y) \vee \mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta))$  не является модулярной.

(iv) Рассмотрим произвольное тождество вида  $xux \approx \mathbf{w}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux)$ . В силу леммы 1.20 и очевидного включения  $\mathbf{M}(xy) \subseteq \mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux)$ , имеем, что  $\mathbf{w} = x^sux^t$  для некоторых  $s, t \in \mathbb{N}_0$ . По лемме 1.5, это возможно лишь в том случае, когда  $s = t = 1$ . Таким образом, слово  $xux$  — изотерм для многообра-

зия  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux)$ . Положим  $\mathbf{V} := \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux) \vee \mathbf{M}(xux)$ . Тогда, в силу леммы 1.3,

$$(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux)) \wedge \mathbf{V} = \mathbf{V}.$$

Далее, многообразие  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \wedge \mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$xux \stackrel{\mathbf{M}_\lambda(xux^+)}{\approx} xux^2 \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} x^2ux.$$

Ясно, что тождество (3.26) выполнено также в моноиде  $\mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux)$ . Поскольку  $\mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux) \subset \mathbf{V}$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux) \vee (\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \wedge \mathbf{V}) \subset (\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux)) \wedge \mathbf{V} = \mathbf{V}.$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+ux))$  не является модулярной.

(v),(viii) Пусть  $\mathbf{V} \in \{\mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu), \mathbf{M}_{\nu'}([x^2yzytx^2]^{\nu'})\}$ . Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}$  такое, что  $\mathbf{u} \in xuzytxx^+$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, z, t) \in xztxx^+$  и  $\mathbf{u}(y, z, t) = yzty$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in xztxx^+$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = yzty$ . Откуда  $\mathbf{v} \in xuzytxx^+ \cup uxzyttx^+$ . Однако в многообразии  $\mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu)$  не выполнено тождество (3.17), поскольку это тождество вместе с (3.5) влечет (3.52). Очевидно, что многообразие  $\mathbf{M}_{\nu'}([x^2yzytx^2]^{\nu'})$  также не удовлетворяет тождеству (3.17). Следовательно, в любом случае  $\mathbf{v} \in xuzyttxx^+$ . Таким образом,  $\lambda'$ -класс  $xuzyttxx^+$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}$ . Тогда, в силу следствия 3.3(iii),

$$(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzyttxx^+) = \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzyttxx^+).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzyttxx^+)$  удовлетворяет тождествам

$$xuzyttx^2 \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} x^2yzytx \stackrel{\mathbf{M}_{\lambda'}(xuzyttxx^+)}{\approx} ux^2zytx \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} uxzytx^2.$$

Ясно, что тождество (3.17) выполнено также и в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ . Поскольку

$$\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzxttx^+ty),$$

отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzyttxx^+)) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzyttxx^+).$$

Таким образом, решетки

$$\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\nu([yx^2zy]^\nu)) \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\nu'}([x^2yzytx^2]^{\nu'}))$$

не являются модулярными.

(vi),(ix) Пусть  $\mathbf{V} \in \{\mathbf{M}_{\nu'}(yxx^+ty), \mathbf{M}_{\nu'}([x^2yzyx^2ty]^{\nu'})\}$ . Рассмотрим произвольное тожде-

ство  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}$  такое, что  $\mathbf{u} \in xuzxx^+ty$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, z, t) \in xzxx^+t$  и  $\mathbf{u}(y, z, t) = yzty$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in xzxx^+t$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = yzty$ . Откуда  $\mathbf{v} \in xuzxx^+ty \cup yxzxx^+ty$ . Однако в многообразии  $\mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty)$  не нарушается тождество (3.24), поскольку это тождество вместе с  $x^2 \approx x^3$  влечет тождество (3.6). Очевидно, что многообразие  $\mathbf{M}_{\gamma'}([x^2yuzx^2ty]^{\gamma'})$  также не удовлетворяет тождеству (3.24). Следовательно, в любом случае  $\mathbf{v} \in xuzxx^+ty$ . Таким образом,  $\lambda'$ -класс  $xuzxx^+ty$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}$ . Тогда, согласно следствию 3.3(iii),

$$(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzxx^+ty) = \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzxx^+ty).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzxx^+ty)$  удовлетворяет тождествам

$$xuzx^2ty \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} x^2yuzty \stackrel{\mathbf{M}_{\lambda'}(xuzxx^+ty)}{\approx} yx^2zxtu \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} yxzx^2ty.$$

Ясно, что тождество (3.24) выполняется также в моноиде  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ . Поскольку  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzxx^+ty)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzxx^+ty)) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xuzxx^+ty).$$

Таким образом, решетки

$$\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(yxx^+ty)) \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2yuzx^2ty]^{\gamma'}))$$

не являются модулярными.

(vii),(x) Пусть  $\mathbf{V} \in \{\mathbf{M}_{\gamma'}(ytyxx^+), \mathbf{M}_{\gamma'}([yuzx^2ytx^2]^{\gamma'})\}$ . Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}$  такое, что  $\mathbf{u} \in yzuxtxx^+$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, z, t) \in zxtxx^+$  и  $\mathbf{u}(y, z, t) = yzty$ , из лемм 1.3 и 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in zxtxx^+$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = yzty$ . Откуда  $\mathbf{v} \in yzuxtxx^+ \cup yzxyttx^+$ . Однако в многообразии  $\mathbf{M}_{\gamma'}(ytyxx^+)$  не выполнено тождество (3.18), поскольку это тождество вместе с  $x^2 \approx x^3$  влечет тождество (3.12). Очевидно, что многообразие  $\mathbf{M}_{\gamma'}([yuzx^2ytx^2]^{\gamma'})$  также нарушается тождество (3.18). Следовательно, в любом случае  $\mathbf{v} \in yzuxtxx^+$ . Таким образом,  $\lambda'$ -класс  $yzuxtxx^+$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}$ . Согласно следствию 3.3(iii),

$$(\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{V}) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(yzuxtxx^+) = \mathbf{M}_{\lambda'}(yzuxtxx^+).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(yzuxtxx^+)$  удовлетворяет тождествам

$$yzuxttx^2 \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} yzuxttx^2 \stackrel{\mathbf{M}_{\lambda'}(yzuxttx^+)}{\approx} yzuxttx^2 \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} yzuxttx^2.$$

Ясно, что тождество (3.18) выполнено также в моноиде  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ . Поскольку  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(yzuxttx^+)$ ,

$\mathbf{M}_{\lambda'}(yzyxtxx^+)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(yzyxtxx^+)) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(yzyxtxx^+).$$

Таким образом, решетки

$$\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}(ytyxx^+)) \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([yzx^2ytx^2]^{\gamma'}))$$

не являются модулярными.

(xi) Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'})$  такое, что  $\mathbf{u} \in xzyttx^+y$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, z, t) \in xzttx^+$  и  $\mathbf{u}(y, z, t) = zyty$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z, t) \in xzttx^+$  и  $\mathbf{v}(y, z, t) = zyty$ . Откуда  $\mathbf{v} \in xzyttx^+y \cup xzytyxx^+ \cup xzytx^+yx^+$ . Однако в многообразии  $\mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'})$  не выполнены тождества

$$xzytx^2y \approx xzytyx^2, \quad (3.53)$$

$$xzytx^2y \approx xzytxyx. \quad (3.54)$$

Следовательно,  $\mathbf{v} \in xzyttx^+y$ . Таким образом,  $\lambda'$ -класс  $xzyttx^+y$  стабилен относительно многообразия  $\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'})$ . Согласно следствию 3.3(iii),

$$(\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'})) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xzyttx^+y) = \mathbf{M}_{\lambda'}(xzyttx^+y).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'}) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xzyttx^+y)$  удовлетворяет тождествам

$$xzytx^2y \underset{\mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'})}{\approx} x^2zytx^2y \underset{\mathbf{M}_{\lambda'}(xzyttx^+y)}{\approx} x^2zytyx^2 \underset{\mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'})}{\approx} xzytyx^2.$$

Ясно, что тождество (3.53) выполнено также в моноиде  $\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+)$ . Поскольку  $\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xzyttx^+y)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \vee (\mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'}) \wedge \mathbf{M}_{\lambda'}(xzyttx^+y)) \subset \mathbf{M}_{\lambda'}(xzyttx^+y).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\lambda}(xux^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'}))$  не является модулярной.

(xii),(xiii) Пусть  $\mathbf{V} \in \{\mathbf{H}_1, \mathbf{M}_{\lambda}(xyzx^+ty^+)\}$ . В силу леммы 1.21, множество  $\{xuzxty, uxzxy\}$  образует FIC ( $\mathbf{M}(xux)$ )-класс. Из [11, предложение 3.26] вытекает, что  $\mathbf{H}_1$  не удовлетворяет тождеству  $\sigma_1$ . Ясно, что в многообразии  $\mathbf{M}_{\lambda}(xyzx^+ty^+)$  это тождество также нарушается. Откуда следует, что в любом случае слово  $xuzxty$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{V}$ . По лемме 1.3,

$$(\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{V}) \wedge \mathbf{M}(xyzxty) = \mathbf{M}(xuzxty).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}(xyzxtu)$  удовлетворяет тождествам

$$xyzxtu \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} xyzx^2tu \stackrel{\mathbf{M}(xyzxtu)}{\approx} yxzx^2tu \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} yxzxtu.$$

Ясно, что тождество  $\sigma_1$  выполнено также в многообразии  $\mathbf{M}(xux)$ . Поскольку  $\mathbf{M}(xux) \subset \mathbf{M}(xyzxtu)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}(xux) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}(xyzxtu)) \subset \mathbf{M}(xyzxtu) = (\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{V}) \wedge \mathbf{M}(xyzxtu).$$

Таким образом, решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{H})$  и  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xux) \vee \mathbf{M}_\lambda(xyzx^+ty^+))$  не являются модулярными.

(xiv) Доказательство вполне аналогично пп. (xii) и (xiii).

(xv),(xvi),(xviii) Пусть

$$\mathbf{V} \in \{\mathbf{M}_\nu([yx^2ty]^\nu), \mathbf{M}_{\nu'}(yxx^+ty), \mathbf{M}_{\nu''}(xyzxx^+ty)\}.$$

В силу леммы 1.21, множество  $\{xyzxtxsy, yxzxtxsy\}$  образует FIC ( $\mathbf{M}(xuxzx)$ )-класс. Ясно, что в многообразии  $\mathbf{V}$  нарушается тождество

$$xyzxtxsy \approx yxzxtxsy. \quad (3.55)$$

Поэтому слово  $xyzxtxsy$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(xuxzx) \vee \mathbf{V}$ . По лемме 1.3,

$$(\mathbf{M}(xuxzx) \vee \mathbf{V}) \wedge \mathbf{M}(xyzxtxsy) = \mathbf{M}(xyzxtxsy).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}(xyzxtxsy)$  удовлетворяет тождествам

$$xyzxtxsy \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} xyzxtx^2sy \stackrel{\mathbf{M}(xyzxtxsy)}{\approx} yxzxtx^2sy \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} yxzxtxsy.$$

Очевидно, что тождество (3.55) также выполнено в многообразии  $\mathbf{M}(xuxzx)$ . Поскольку

$$\mathbf{M}(xuxzx) \subset \mathbf{M}(xyzxtxsy),$$

отсюда следует, что

$$\mathbf{M}(xuxzx) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}(xyzxtxsy)) \subset \mathbf{M}(xyzxtxsy).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xuxzx) \vee \mathbf{V})$  не является модулярной.

(xvii),(xix),(xx) Доказательство аналогично пп. (xv), (xvi) и (xviii).

(xxi),(xxii) Пусть  $\mathbf{V} \in \{\mathbf{M}_{\lambda'}(xyzx^+tysx^+), \mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta)\}$ ,  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\mu(xuxzx^+) \vee \mathbf{V}$  такое, что  $\mathbf{u} \in xyzxtysx^+$ . Поскольку  $\mathbf{u}(x, z, t, s) \in xzxtsx^+$  и  $\mathbf{u}(y, z, t, s) = yztys$ , из лемм 1.3 и 1.5 следует, что  $\mathbf{v}(x, z, t, s) \in xzxtsx^+$  и  $\mathbf{v}(y, z, t, s) = yztys$ . Откуда  $\mathbf{v} \in xyzxtysx^+ \cup yxzxtysx^+$ . Однако в многообразии  $\mathbf{V}$  нарушается

тождество

$$xyzxtysx \approx yxzxtysx. \quad (3.56)$$

Следовательно,  $\mathbf{v} \in xyzxtysx^+$ . Таким образом  $\mu$ -класс  $xyzxtysx^+$  стабилен относительно многообразия  $\mathbf{M}_\mu(xyxzx^+) \vee \mathbf{V}$ . Используя лемму 1.4, рутинными вычислениями можно проверить, что

$$\begin{aligned} \{xyzxtysx^+\}^{\leq \mu} = \{ & 1, x, xx^+, y, z, t, s, \\ & xy, yz, zx, xt, ty, ys, sx, sxx^+, \\ & xyz, yzx, zxt, xty, tys, ysx, ysxx^+, \\ & xyzx, yzxt, zxt, xtys, tsys, tsysxx^+, \\ & xyzxt, yzxt, zxtys, xtysx, xtysxx^+, \\ & xyzxt, yzxtys, zxtysx, zxtysxx^+, \\ & xyzxtys, yzxtysx, yzxtysxx^+, \\ & xyzxtysx^+\}. \end{aligned}$$

Отсюда легко следует, что любой  $\mu$ -класс из  $\{xyzxtysx^+\}^{\leq \mu}$  также стабилен относительно  $\mathbf{M}_\mu(xyxzx^+) \vee \mathbf{V}$ . По лемме 1.5,

$$(\mathbf{M}_\mu(xyxzx^+) \vee \mathbf{V}) \wedge \mathbf{M}_\mu(xyzxtysx^+) = \mathbf{M}_\mu(xyzxtysx^+).$$

Далее, многообразие  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}_\mu(xyzxtysx^+)$  удовлетворяет тождествам

$$xyzxtysx \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} xyzx^2tysx \stackrel{\mathbf{M}_\mu(xyzxtysx^+)}{\approx} yxzx^2tysx \stackrel{\mathbf{V}}{\approx} yxzxtysx.$$

Очевидно, что тождество (3.56) выполнено и в многообразии  $\mathbf{M}_\mu(xyxzx^+)$ . Тогда, поскольку  $\mathbf{M}_\mu(xyxzx^+) \subset \mathbf{M}_\mu(xyzxtysx^+)$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_\mu(xyxzx^+) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}_\mu(xyzxtysx^+)) \subset \mathbf{M}_\mu(xyzxtysx^+).$$

Таким образом, решетки

$$\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\mu(xyxzx^+) \vee \mathbf{M}_{\mu'}(xyzx^+tysx^+)) \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}(\mathbf{M}_\mu(xyxzx^+) \vee \mathbf{M}_\eta([xyzx^2ty]^\eta))$$

не являются модулярными.

(xxiii) Рассмотрим произвольное тождество вида  $xysxzytz \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(xzxyty) \vee \mathbf{N}$ . В силу леммы 1.3,  $\mathbf{v}(x, z, s, t) = xsxztz$  и  $\mathbf{v}(y, z, s, t) = ysztyz$ . Тогда  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'sxzytz$ , где  $\mathbf{v}' \in \{xy, yx\}$ . Поскольку в многообразии  $\mathbf{N}$  тождество (3.30) нарушается,  $\mathbf{v}' \neq yx$  и, следовательно,  $\mathbf{v} = xysxzytz$ . Таким образом, слово  $xysxzytz$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(xzxyty) \vee \mathbf{N}$ . Тогда

$$(\mathbf{M}(xzxyty) \vee \mathbf{N}) \wedge \mathbf{M}(xysxzytz) = \mathbf{M}(xysxzytz)$$

по лемме 1.3. Легко видеть, что тождество (3.30) выполнено в  $M(xysxzytz)$ . Тогда многообразие  $\mathbf{N} \wedge \mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$xysxzytz \stackrel{\sigma_3}{\approx} xysxyztz \stackrel{(3.30)}{\approx} yxsxzytz \stackrel{\sigma_3}{\approx} yxsxzytz.$$

Ясно, что тождество  $xysxzytz \approx yxsxzytz$  выполняется и в многообразии  $\mathbf{M}(xzxyty)$ . Поскольку подмножество в  $M(xysxzytz)$ , порожденный элементами  $\{x, z, ys, yt, 1\}$ , изоморфен моноиду  $M(xzxyty)$ , имеет место включение

$$\mathbf{M}(xzxyty) \vee (\mathbf{N} \wedge \mathbf{M}(xysxzytz)) \subset (\mathbf{M}(xzxyty) \vee \mathbf{N}) \wedge \mathbf{M}(xysxzytz) = \mathbf{M}(xysxzytz).$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xzxyty) \vee \mathbf{N})$  не является модулярной.

(xxiv) Доказательство аналогично п. (xxiii). □

### 3.4.2. Многообразия, индуцированные словами вида $\mathbf{a}_{n,m}[\rho]$

**Предложение 3.45.** *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda([\hat{\mathbf{a}}_{0,k}[\pi]]^\lambda))$  не дистрибутивна для любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $\pi \in S_k$ .*

Чтобы доказать предложение 3.45, нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.46.** *Если  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi \in S_k$  и  $\rho \in S_n$ , то  $\lambda$ -класс  $xzux^+ty^+$  и потому  $\lambda$ -классы  $xux^+$ ,  $xx^+y$ ,  $uxx^+ty^+$ ,  $[(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho])_x]^\lambda$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda([\hat{\mathbf{a}}_{0,k}[\pi]]^\lambda)$ .*

*Доказательство.* Для краткости положим  $\mathbf{a}_r[\tau] := [\hat{\mathbf{a}}_{0,r}[\tau]]^\lambda$  для любых  $r \in \mathbb{N}$  и  $\tau \in S_r$ . Очевидно, что слово  $xu$  есть изотерм для многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ . Заметим также, что  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$  удовлетворяет тождеству (1.4). Если множество  $xux^+$  нестабильно относительно некоторого многообразия, удовлетворяющего тождеству (1.4), то из лемм 1.5 и 1.28 следует, что в этом многообразии выполнено тождество (3.26). Поскольку

$$\hat{\mathbf{a}}_{0,k}[\pi] \stackrel{(3.26)}{\approx} x^2z_1\pi z_2\pi \cdots z_k\pi x t_1 z_1 t_2 z_2 \cdots t_n z_k,$$

мы видим, что  $\lambda$ -класс  $xux^+$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ . Аналогичным образом можно показать стабильность  $\lambda$ -класса  $xx^+y$  относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ .

Теперь рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в моноиде  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$  такое, что  $\mathbf{u} \in xzux^+ty^+$ . Поскольку  $\lambda$ -классы  $xux^+$  и  $xx^+y$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ , получаем, что  $\mathbf{v} \in xzux^+ty^+ \cup xzx^+ux^*ty^+$ . Если  $\mathbf{v} \in xzx^+ux^*ty^+$ , то тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вместе с (1.4) влечет (1.5). Поскольку

$$\hat{\mathbf{a}}_{0,k}[\pi] \stackrel{(1.5)}{\approx} xz_1\pi z_2\pi \cdots xz_k\pi x t_1 z_1 t_2 z_2 \cdots t_n z_k,$$

мы видим, что, по лемме 1.5,  $\lambda$ -класс  $xzux^+ty^+$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ . Тогда из леммы 3.28 вытекает стабильность  $\lambda$ -классов  $xuzx^+ty^+$  и  $uxx^+ty^+$  относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ .

Наконец, возьмем произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$  такое, что  $\mathbf{u} \in [(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho])_x]^\lambda$ . Поскольку  $\lambda$ -класс  $xuzx^+ty^+$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ , имеем, что  $\mathbf{v}(z_i, z_j, t_i, z_j) \in z_{i\rho}z_{j\rho}t_i z_i^+ t_j z_j^+$  для всех  $1 \leq i < j \leq n$ . Откуда  $\mathbf{v} \in [(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho])_x]^\lambda$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  мы взяли произвольным,  $\lambda$ -класс  $[(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho])_x]^\lambda$  также является стабильным относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ .  $\square$

Для любого слова  $\mathbf{w}$  длины  $\ell$ ,  $0 \leq k \leq \ell$  и  $0 \leq m \leq \ell - k$ , через  $\mathbf{w}[k; m]$  обозначим подслово слова  $\mathbf{w}$  длины  $m$ , следующее за префиксом этого слова длины  $k$ . Для любого слова  $\mathbf{w}$  через  $\text{ini}_2(\mathbf{w})$  обозначим слово, получающееся из  $\mathbf{w}$  оставлением только первых и вторых вхождений каждой из букв, входящих в  $\mathbf{w}$ .

*Доказательство предложения 3.45.* Положим  $\mathbf{a}_r[\tau] := [\hat{\mathbf{a}}_{0,r}[\tau]]^\lambda$  для любых  $r \in \mathbb{N}$  и  $\tau \in S_r$ . Для краткости также положим  $n := k + 1$ . Определим перестановку  $\rho \in S_n$  следующим образом:

$$i\rho := \begin{cases} n, & \text{если } i = 1, \\ (i-1)\pi, & \text{если } 1 < i \leq n. \end{cases} \quad (3.57)$$

Пусть  $\mathbf{a} \approx \mathbf{a}'$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$  такое, что  $\mathbf{a} \in \mathbf{a}_n[\rho]$ . В силу леммы 3.46,  $\lambda$ -классы  $[(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho])_x]^\lambda$ ,  $xx^+u$  и  $uxx^+ty^+$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ . Из того, что  $\lambda$ -класс  $[(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho])_x]^\lambda$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$  следует, что  $\mathbf{a}'_x \in [(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\rho])_x]^\lambda$ . Из стабильности множества  $xx^+u$  относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$  следует, что  $(\ell_{\mathbf{a}'x}) < (\ell_{\mathbf{a}'t_1})$ . Далее, если  $(1_{\mathbf{a}'z_n}) < (1_{\mathbf{a}'x})$ , то  $\mathbf{a}'(x, z_n, t_n) \in z_nxx^+t_nz_n^+$ , в то время как  $\mathbf{a}(x, z_n, t_n) \in xz_nx^+t_nz_n^+$ , что противоречит стабильности множества  $uxx^+ty^+$  относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ . Следовательно,  $(1_{\mathbf{a}'x}) < (1_{\mathbf{a}'z_n})$ . Наконец, поскольку  $\mathbf{a}_{\{z_n, t_n\}} \in \mathbf{a}_k[\pi]$ , из леммы 1.5 вытекает, что  $\mathbf{a}'_{\{z_n, t_n\}} \in \mathbf{a}_k[\pi]$ . Откуда  $\mathbf{a}' \in \mathbf{a}_n[\rho]$ . Мы видим, что  $\lambda$ -класс  $\mathbf{a}_n[\rho]$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$  и, следовательно,  $M_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]) \in \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$  по следствию 1.8(ii). Таким образом, достаточно доказать, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$  не является дистрибутивной.

Определим отношение  $\delta$  на свободном моноиде  $X^*$  следующим образом: если  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^*$ , то  $\mathbf{u} \delta \mathbf{v}$  тогда и только тогда, когда

- $\mathbf{u}(\text{sim}(\mathbf{u})) = \mathbf{v}(\text{sim}(\mathbf{v}))$ ;
- если  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  суть разложения слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно, то  $\text{alph}(\mathbf{u}_i) = \text{alph}(\mathbf{v}_i)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m$ ;
- $\text{ini}_2(\mathbf{u}) = \text{ini}_2(\mathbf{v})$ .

Нетрудно проверить, что отношение  $\delta$  есть конгруэнция на моноиде  $X^*$ . Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &:= x \mathbf{q}[0; 3n-3] y \mathbf{q}[3n-3; 2] x \mathbf{q}[3n-1; 3n+1] y \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_1 &:= x \mathbf{q}[0; 3n-3] y \mathbf{q}[3n-3; 1] x \mathbf{q}[3n-2; 3n+2] y \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_2 &:= x \mathbf{q}[0; 3n-3] y \mathbf{q}[3n-3; 2] x \mathbf{q}[3n-1; 3n] y \mathbf{q}[6n-1; 1] \mathbf{r}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{q} := \left( \prod_{i=1}^n z_{i\rho}^{(1)} z_{i\rho}^{(2)} z_{i\rho}^{(3)} \right) \left( \prod_{i=1}^n z_{i\rho}^{(4)} z_{i\rho}^{(5)} z_{i\rho}^{(6)} \right), \mathbf{r} := \left( \prod_{j=1}^3 \left( \prod_{i=1}^n t_i^{(j)} z_i^{(j)} \right) \right) \left( \prod_{j=6}^4 \left( \prod_{i=1}^n t_i^{(j)} z_i^{(j)} \right) \right).$$

Положим также  $\mathbf{v}_j := [\mathbf{v}_j]^\delta$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Поскольку многообразию  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho])$  удовлетворяют тождествам (3.3) и (1.4), множество  $\mathbf{v}_j$  целиком содержится в одном  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классе.

Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho])$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0$ . Из леммы 3.46 вытекает стабильность  $\lambda$ -класса  $[\mathbf{qr}]^\lambda$  относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho])$ . Откуда  $\mathbf{v}_{\{x,y\}} \in [\mathbf{qr}]^\lambda$ . Поскольку, по лемме 3.46, множество  $uxx^+ty^+$  стабильно относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho])$ , имеем  $(1_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}z_{1\rho}^{(1)})$  и  $(1_{\mathbf{v}}z_{(n-1)\rho}^{(3)}) < (1_{\mathbf{v}}y) < (1_{\mathbf{v}}z_{n\rho}^{(1)})$ . Далее, если  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, определяемая формулой

$$\varphi(v) := \begin{cases} x, & \text{если } v = x, \\ z_i, & \text{если } v = z_i^{(2)}, i = 1, \dots, n, \\ t_i, & \text{если } v = t_i^{(2)}, i = 1, \dots, n, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то  $\varphi(\mathbf{u}) \in \mathbf{a}_n[\rho]$ . Тогда  $\varphi(\mathbf{v}) \in \mathbf{a}_n[\rho]$  по лемме 1.5. Откуда  $(1_{\mathbf{v}}z_{n\rho}^{(2)}) < (2_{\mathbf{v}}x)$ . Аналогичным образом можно показать, что  $(2_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}z_{n\rho}^{(3)})$  и  $(1_{\mathbf{v}}z_{n\rho}^{(6)}) < (2_{\mathbf{v}}y)$ . Наконец,  $(\ell_{\mathbf{v}}x) < (1_{\mathbf{v}}t_1^{(1)})$  и  $(\ell_{\mathbf{v}}y) < (1_{\mathbf{v}}t_1^{(1)})$ , так как множество  $xx^+y$  стабильно относительно  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho])$  по лемме 3.46. Мы видим, что  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0$  и потому  $\delta$ -класс  $\mathbf{v}_0$  является  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классом. Аналогичным образом можно показать, что  $\delta$ -классы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  являются  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классами.

Положим

$$\mathbf{X} := \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1\},$$

$$\mathbf{Y} := \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2\},$$

$$\mathbf{Z} := \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3\},$$

где

$$\mathbf{v}_3 := x^2 \mathbf{q}[0; 3n - 3] y^2 \mathbf{q}[3n - 3; 3n + 3] \mathbf{r}.$$

Нетрудно видеть, что можно взять достаточно большое  $r$ , скажем  $r > 10n$ , такое, что тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3$  выполнены в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_r[\theta])$  для любого  $\theta \in S_r$ . Рассуждения, аналогичные приведенным в первом абзаце этого доказательства, показывают, что существует подстановка  $\theta' \in S_r$  такая, что  $M_\lambda(\mathbf{a}_r[\theta']) \in \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho])$ . Откуда  $M_\lambda(\mathbf{a}_r[\theta']) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}$ .

**1. Множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -класс.** Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Требуется показать, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Поскольку  $M_\lambda(\mathbf{a}_r[\theta']) \in \mathbf{X}$ , из леммы 3.46 вытекает, что  $\mathbf{u}'_{\{x,y\}} \in [\mathbf{qr}]^\lambda$ . В силу предложения 1.1, мы можем без ограничения общности считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho])$ , либо  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ . Ввиду сказанного выше, множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  есть объединение двух  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классов. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ , т.е. существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_s)\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_t)\mathbf{b})$ , где  $\{s, t\} = \{0, 1\}$ .

Заметим сначала, что если  $a$  и  $b$  — различные буквы такие, что  $\{a, b\} \neq \{x, y\}$ , то  $ab$  входит в  $\mathbf{u}$  в качестве под слова не более одного раза. Отсюда вытекает, что

(\*) для любой буквы  $v \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ , если  $\text{alph}(\varphi(v)) \neq \{x, y\}$ , то  $\varphi(v)$  является либо пустым словом, либо степенью какой-то буквы.

Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_s) = \varphi(\mathbf{v}_t)$  и потому  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , откуда  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(x) \neq 1$ . Ясно, что никакая буква из  $\{t_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 6\}$  не входит в  $\varphi(x)$ , поскольку все эти буквы являются простыми в  $\mathbf{u}$ , в то время как  $x \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ . Если слово  $\varphi(x)$  не является степенью буквы, то  $\text{alph}(\varphi(x)) = \{x, y\}$  в силу (\*) и, следовательно, любое подслово слова  $\mathbf{u}$  вида  $\varphi(x)$  следует за буквой  $1_{\mathbf{u}}z_{nr}^{(6)}$ . В этом случае применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  к слову  $\mathbf{u}$  не изменит его подслово  $\mathbf{u}$ , предшествующее букве  $1_{\mathbf{u}}z_{nr}^{(6)}$ , откуда  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Остается рассмотреть случай, когда слово  $\varphi(x)$  является степенью какой-то буквы. Если  $\varphi(x)$  является степенью некоторой буквы из множества  $\{z_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 6\}$ , то любое подслово слова  $\mathbf{u}$  вида  $\varphi(x)$  следует за буквой  $t_1^{(1)}$ . В этом случае применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  к слову  $\mathbf{u}$  не меняет подслово слова  $\mathbf{u}$ , предшествующее букве  $t_1^{(1)}$ . Откуда  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Следовательно, далее мы можем считать, что слово  $\varphi(x)$  является степенью одной из букв  $x$  или  $y$ . Для удобства обозначим эту букву через  $c$ . Если образ буквы  $2_{\mathbf{v}_s}x$  относительно  $\varphi$  не содержит букву  $2_{\mathbf{u}}c$ , то применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  к слову  $\mathbf{u}$  не может изменить положение второго вхождения буквы  $c$  в слово  $\mathbf{u}$  и, следовательно,  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Таким образом,  $\varphi(2_{\mathbf{v}_s}x)$  содержит  $2_{\mathbf{u}}c$  в  $\mathbf{u}$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $\varphi(x) = c$  и, более того,  $\varphi(1_{\mathbf{v}_s}x) = 1_{\mathbf{u}}c$  и  $\varphi(2_{\mathbf{v}_s}x) = 2_{\mathbf{u}}c$ .

Алфавит подслова слова  $\mathbf{u}$ , лежащего между  $1_{\mathbf{u}}y$  и  $2_{\mathbf{u}}y$ , состоит из  $3n + 4$  различных букв. Однако алфавит подслова слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащего между  $1_{\mathbf{v}_s}x$  и  $2_{\mathbf{v}_s}x$ , содержит только  $3n$  различных букв. Из этих фактов и условия (\*) следует, что слово  $\varphi(x)$  не может совпадать с  $y$ . Следовательно,  $\varphi(1_{\mathbf{v}_s}x) = 1_{\mathbf{u}}x$  и  $\varphi(2_{\mathbf{v}_s}x) = 2_{\mathbf{u}}x$ . Тогда подслово слова  $\mathbf{u}$ , лежащее между  $1_{\mathbf{u}}x$  и  $2_{\mathbf{u}}x$  должно быть образом подслова слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащего между  $1_{\mathbf{v}_s}x$  и  $2_{\mathbf{v}_s}x$ . Иными словами,

$$\mathbf{q}[0; 3n - 3] y \mathbf{q}[3n - 3; 2 - p] = \varphi(\mathbf{q}[0; 3n - 3] y \mathbf{q}[3n - 3; 2 - s]),$$

где

$$p := \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{u} \in \mathbf{v}_0, \\ 1, & \text{если } \mathbf{u} \in \mathbf{v}_1. \end{cases}$$

Возможны четыре случая.

**Случай 1.1:**  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0$  и  $(s, t) = (0, 1)$ . В этом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ , так как, в силу (\*), образ буквы  $z_{nr}^{(2)}$  относительно  $\varphi$  является либо пустым словом, либо степенью буквы.

**Случай 1.2:**  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0$  и  $(s, t) = (1, 0)$ . В этом случае алфавит подслова слова  $\mathbf{u}$ , лежащего между  $1_{\mathbf{u}}x$  и  $2_{\mathbf{u}}x$ , состоит из  $3n$  различных букв, в то время как алфавит подслова слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащего между  $1_{\mathbf{v}_s}x$  и  $2_{\mathbf{v}_s}x$ , состоит из  $3n - 1$  различных букв. Следовательно, образ некоторой буквы относительно  $\varphi$  в последнем подслове должен содержать не менее двух различных букв, что противоречит (\*). Следовательно, этот случай невозможен.

**Случай 1.3:**  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_1$  и  $(s, t) = (0, 1)$ . Если  $\varphi(z_{nr}^{(2)}) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_s) = \varphi(\mathbf{v}_t)$  и потому  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ . Остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(z_{nr}^{(2)}) \neq 1$ . Тогда  $\varphi(z_{nr}^{(2)}) = z_{nr}^{(1)}$  в силу (\*). Далее, легко видеть, что либо  $\varphi(y) = y$ , либо  $\varphi(y) = 1$  и, следовательно,  $\varphi(d) = d$  для каждой буквы

$d \in \text{alph}(\mathbf{q}[0; 3n - 3])$ . В частности, поскольку  $n\rho < n$ , имеем  $\varphi(z_n^{(1)}) = z_n^{(1)}$ , что противоречит тому, что

$$\begin{aligned} (2\mathbf{u}z_{n\rho}^{(1)}) &< (\ell\mathbf{u}z_{n\rho}^{(1)}) < (2\mathbf{u}z_n^{(1)}) < (\ell\mathbf{u}z_n^{(1)}), \\ (2\mathbf{v}_s z_n^{(1)}) &< (\ell\mathbf{v}_s z_n^{(1)}) < (2\mathbf{v}_s z_{n\rho}^{(2)}) < (\ell\mathbf{v}_s z_{n\rho}^{(2)}). \end{aligned}$$

Следовательно, этот случай также невозможен.

**Случай 1.4:**  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_1$  и  $(s, t) = (1, 0)$ . В этом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ , так как, в силу условия (\*), образ буквы  $z_{n\rho}^{(2)}$  относительно  $\varphi$  является либо пустым словом, либо буквой.

Мы видим, что в любом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Это означает, что множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  образует FIC( $\mathbf{X}$ )-класс.

**2. Множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$  образует FIC( $\mathbf{Y}$ )-класс.** Рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве того факта, что множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  образует FIC( $\mathbf{X}$ )-класс, показывают, что достаточно установить, что если некоторое тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , где  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$ , непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2$ , т.е. существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_s)\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_t)\mathbf{b})$ , где  $\{s, t\} = \{0, 2\}$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$ .

Далее, рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства того факта, что множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  образует FIC( $\mathbf{X}$ )-класс, показывают, что справедливо условие (\*), а также, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$ , если нарушается следующее условие:

$$(a) \quad \varphi(1_{\mathbf{v}_s}y) = 1_{\mathbf{u}}c \text{ b } \varphi(2_{\mathbf{v}_s}y) = 2_{\mathbf{u}}c \text{ для некоторого } c \in \{x, y\}.$$

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда условие (a) выполнено. Если  $\varphi(y) = x$ , то, в силу условия (\*), буква  $1_{\mathbf{u}}y$  обязана быть образом первого вхождения одной из букв из  $\{z_{(n-1)\rho}^{(4)}, z_{(n-1)\rho}^{(5)}, z_{(n-1)\rho}^{(6)}, z_{n\rho}^{(4)}\}$  относительно подстановки  $\varphi$ . Это возможно лишь в том случае, когда образ относительно подстановки  $\varphi$  каждой буквы из множества  $\{x, z_i^{(j)}, t_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$  является пустым словом. В этом случае, в силу условия (\*), образ относительно  $\varphi$  подслова слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащего между  $1_{\mathbf{v}_s}y$  и  $2_{\mathbf{v}_s}y$ , содержит не более  $3n$  различных букв. Следовательно,  $y = \varphi(z_{n\rho}^{(4)})$ . Откуда  $\varphi(t_i^{(5)}) = \varphi(z_i^{(5)}) = 1$  для любого  $i = 1, \dots, n$ . Тогда, с учетом условия (\*), образ относительно  $\varphi$  подслова слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащего между  $1_{\mathbf{v}_s}y$  и  $2_{\mathbf{v}_s}y$ , содержит не более  $2n$  различных букв, что противоречит тому факту, что подслово слова  $\mathbf{u}$ , зажатое между буквами  $1_{\mathbf{u}}x$  и  $2_{\mathbf{u}}x$ , содержит  $3n$  различных букв. Следовательно,  $\varphi(1_{\mathbf{v}_s}y) = 1_{\mathbf{u}}y$  и  $\varphi(2_{\mathbf{v}_s}y) = 2_{\mathbf{u}}y$ . Тогда подслово слова  $\mathbf{u}$ , зажатое между  $1_{\mathbf{u}}y$  и  $2_{\mathbf{u}}y$ , должно являться образом относительно  $\varphi$  подслова слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащего между  $1_{\mathbf{v}_s}y$  и  $2_{\mathbf{v}_s}y$ . Возможны четыре случая.

**Случай 2.1:**  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0$  и  $(s, t) = (0, 2)$ . В этом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$ , так как, в силу условия (\*), образ буквы  $z_{n\rho}^{(6)}$  относительно подстановки  $\varphi$  является либо пустым словом, либо буквой.

**Случай 2.2:**  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0$  и  $(s, t) = (2, 0)$ . В этом случае подслово слова  $\mathbf{u}$ , зажатое между  $1_{\mathbf{u}}y$  и  $2_{\mathbf{u}}y$ , содержит  $3n + 4$  различных буквы, а подслово слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащее между  $1_{\mathbf{v}_s}y$  и  $2_{\mathbf{v}_s}y$ , содержит только  $3n + 3$  различных буквы. Следовательно, образ некоторой буквы относительно подстановки  $\varphi$ , входящей в обсуждаемое подслово слова  $\mathbf{v}_s$ , обязан содержать по крайней мере две различных буквы, что невозможно в силу (\*). Следовательно, обсуждаемый случай невозможен.

**Случай 2.3:**  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_2$  и  $(s, t) = (0, 2)$ . Если  $\varphi(z_{n\rho}^{(6)}) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_s) = \varphi(\mathbf{v}_t)$  и потому  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_2$ . Поэтому остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(z_{n\rho}^{(6)}) \neq 1$ . Тогда  $\varphi(z_{n\rho}^{(6)}) = z_{n\rho}^{(5)}$  в силу условия (\*). Поскольку в алфавит подслова слова  $\mathbf{u}$ , зажатого между буквами  $1\mathbf{u}y$  и  $2\mathbf{u}y$ , входит  $3n + 3$  различных буквы, а подслово слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащее между  $1\mathbf{v}_s y$  и  $2\mathbf{v}_s y$ , содержит  $3n + 4$  различных буквы, из условия (\*) и того факта, что  $1\rho = n$  вытекает, что  $z_n^{(6)} \in \{\varphi(z_n^{(6)}), \varphi(z_{2\rho}^{(4)})\}$ . Однако это противоречит тому, что

$$\begin{aligned} (2\mathbf{v}_s z_{n\rho}^{(6)}) &< (\ell\mathbf{v}_s z_{n\rho}^{(6)}) < (2\mathbf{v}_s z_n^{(6)}) < (\ell\mathbf{v}_s z_n^{(6)}) < (2\mathbf{v}_s z_{2\rho}^{(4)}) < (\ell\mathbf{v}_s z_{2\rho}^{(4)}), \\ (2\mathbf{u} z_n^{(6)}) &< (\ell\mathbf{u} z_n^{(6)}) < (2\mathbf{u} z_{n\rho}^{(5)}) < (\ell\mathbf{u} z_{n\rho}^{(5)}). \end{aligned}$$

Следовательно, обсуждаемый случай также невозможен.

**Случай 2.4:**  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_2$  и  $(s, t) = (2, 0)$ . В этом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$ , так как, в силу условия (\*), образ буквы  $z_{n\rho}^{(6)}$  относительно подстановки  $\varphi$  является либо пустым словом, либо буквой.

Мы видим, что в любом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$ . Это означает, что множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$  является FIC( $\mathbf{Y}$ )-классом.

**3. Множество  $\mathbf{v}_0$  образует FIC( $\mathbf{Z}$ )-класс.** Рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве того факта, что множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  образует FIC( $\mathbf{X}$ )-класс, показывают, что достаточно установить, что если некоторое тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , где  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0$ , непосредственно следует из некоторого тождества из  $\{\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3\}$ , т.е. существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_s)\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_t)\mathbf{b})$ , где  $\{s, t\} \in \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0$ .

Далее, рассуждения, аналогичные доказательствам тех фактов, что  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  есть FIC( $\mathbf{X}$ )-класс, а  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$  есть FIC( $\mathbf{Y}$ )-класс, показывают, что имеет место утверждение (\*), а также, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0$ , если следующее условие не выполнено:

- (b) существует непустое подмножество  $A$  множества  $\{x, y\}$  такое, что для каждой буквы  $c \in A$ ,  $\varphi(1\mathbf{v}_s c) = 1\mathbf{u}c$  и  $\varphi(2\mathbf{v}_s c) = 2\mathbf{u}c$ .

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда условие (b) выполняется. Ясно, что это возможно лишь в том случае, когда  $s \neq 3$ . Предположим, что  $x \in A$ . Если  $(s, t) = (1, 3)$ , то алфавит подслова слова  $\mathbf{u}$ , лежащего между  $1\mathbf{u}x$  и  $2\mathbf{u}x$ , состоит из  $3n$  различных букв, в то время как подслово слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащее между  $1\mathbf{v}_s x$  и  $2\mathbf{v}_s x$ , содержит  $3n - 1$  различную букву. Следовательно, образ некоторой буквы относительно подстановки  $\varphi$ , входящей в обсуждаемое подслово слова  $\mathbf{v}_s$ , обязан содержать по крайней мере две различных буквы, что невозможно в силу (\*). Откуда  $(s, t) = (2, 3)$ . Тогда мы снова можем применить условие (\*), и получить, что  $\varphi(y) = y$  и потому  $y \in A$ . В этом случае подслово слова  $\mathbf{u}$ , зажатое между буквами  $1\mathbf{u}y$  и  $2\mathbf{u}y$ , содержит  $3n + 4$  различных буквы, а подслово слова  $\mathbf{v}_s$ , лежащее между буквами  $1\mathbf{v}_s y$  и  $2\mathbf{v}_s y$ , содержит только  $3n + 3$  различных буквы. Следовательно, образ некоторой буквы относительно подстановки  $\varphi$ , входящей в обсуждаемое подслово слова  $\mathbf{v}_s$ , обязан содержать по крайней мере две различных буквы, что противоречит условию (\*). Таким образом, буква  $x$  не может принадлежать  $A$ . Аналогичным образом можно показать, что  $y \notin A$ . Таким обра-

зом, условие (b) выполняться не может. Из сказанного следует, что в любом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0$  и потому множество  $\mathbf{v}_0$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{Z})$ -класс.

В силу сказанного выше,  $\delta$ -класс  $\mathbf{v}_0$  является  $\text{FIC}(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})$ -классом и  $\text{FIC}(\mathbf{Z})$ -классом. Отсюда вытекает стабильность этого  $\delta$ -класса относительно  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}$ . Однако  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}$  [соответственно  $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}$ ] удовлетворяет  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3$  [соответственно  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3$ ]. Следовательно, тождество  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_3$  выполнено в многообразии  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$ . Это означает, что  $\delta$ -класс  $\mathbf{v}_0$  не является стабильным относительно последнего многообразия, откуда

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \subset (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}.$$

Таким образом, мы доказали, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(\mathbf{a}_n[\rho]))$  не является дистрибутивной.  $\square$

**Предложение 3.47.** *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{a}_{0,k}[\pi]]^\lambda))$  не является дистрибутивной для всех  $k \geq 2$  и  $\pi \in S_k$ .*

Чтобы доказать предложение 3.47, нам потребуется следующий вспомогательный результат. Его доказательство вполне аналогично доказательству леммы 3.46 и потому мы позволим себе опустить его.

**Лемма 3.48.** *Если  $k, n \geq 2$ ,  $\pi \in S_k$  и  $\rho \in S_n$ , то  $\lambda$ -классы  $xx^+yty^+$ ,  $xzux^+ty^+$  и  $[(\mathbf{a}_{0,n}[\rho])_x]^\lambda$  стабильны относительно  $\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{a}_{0,k}[\pi]]^\lambda)$ .*  $\square$

*Доказательство предложения 3.47.* Для всех  $r \in \mathbb{N}$  и  $\tau \in S_r$ , положим  $\mathbf{a}_r[\tau] := [\mathbf{a}_{0,r}[\tau]]^\lambda$ . Также для краткости положим  $n := k + 1$ . Если  $\rho \in S_n$  — перестановка, определяемая формулой (3.57), то, рассуждая как в первом абзаце доказательства предложения 3.45, можно показать, что  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]) \in \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_k[\pi])$ . Таким образом, достаточно доказать, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$  не является дистрибутивной.

Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &:= x \mathbf{p} z_{n\rho}^{(1)} y z_{n\rho}^{(2)} z_{n\rho}^{(3)} x z_{n\rho}^{(4)} \mathbf{q} z_{n\rho}^{(5)} z_{n\rho}^{(6)} z_{n\rho}^{(7)} z_{n\rho}^{(8)} y \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_1 &:= x \mathbf{p} z_{n\rho}^{(1)} y z_{n\rho}^{(2)} x z_{n\rho}^{(3)} x z_{n\rho}^{(4)} \mathbf{q} z_{n\rho}^{(5)} z_{n\rho}^{(6)} z_{n\rho}^{(7)} z_{n\rho}^{(8)} y \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_2 &:= x \mathbf{p} z_{n\rho}^{(1)} y z_{n\rho}^{(2)} z_{n\rho}^{(3)} x z_{n\rho}^{(4)} \mathbf{q} z_{n\rho}^{(5)} z_{n\rho}^{(6)} z_{n\rho}^{(7)} y z_{n\rho}^{(8)} y \mathbf{r}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{i\rho}^{(1)} z_{i\rho}^{(2)} z_{i\rho}^{(3)} z_{i\rho}^{(4)} y_i^2 \right), \\ \mathbf{q} &:= \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{i\rho}^{(5)} z_{i\rho}^{(6)} z_{i\rho}^{(7)} z_{i\rho}^{(8)} (y_i')^2 \right), \\ \mathbf{r} &:= \left( \prod_{j=1}^4 \left( \prod_{i=1}^n t_i^{(j)} z_i^{(j)} \right) \right) \left( \prod_{j=8}^4 \left( \prod_{i=1}^n t_i^{(j)} z_i^{(j)} \right) \right). \end{aligned}$$

Положим также  $\mathbf{v}_j := [\mathbf{v}_j]^\lambda$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Поскольку многообразие  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho])$  удовлетворяет тождеству (1.4), множество  $\mathbf{v}_j$  целиком содержится в одном  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классе,  $j = 0, 1, 2$ . Более того, рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве предложения 3.45 показывают, что  $\lambda$ -классы  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  являются  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классами.

Пусть

$$\mathbf{X} := \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1\},$$

$$\mathbf{Y} := \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2\}.$$

Используя лемму 3.48 вместо леммы 3.46, рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве предложения 3.45, можно показать, что множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  [соответственно  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$ ] образует FIC( $\mathbf{X}$ )-класс [соответственно FIC( $\mathbf{Y}$ )-класс]. Отсюда следует, что  $\lambda$ -класс  $\mathbf{v}_0$  стабилен относительно  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . Положим  $\mathbf{Z} := \mathbf{M}_\lambda(\mathbf{v}_0)$ . В силу следствия 1.8(ii),  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  и потому  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3$  и  $\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3$ , где

$$\mathbf{v}_3 := x^2 \mathbf{p} z_{nr}^{(1)} y^2 z_{nr}^{(2)} z_{nr}^{(3)} x z_{nr}^{(4)} \mathbf{q} z_{nr}^{(5)} z_{nr}^{(6)} z_{nr}^{(7)} z_{nr}^{(8)} y \mathbf{r}.$$

Тогда тождество  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_3$  выполнено в многообразии  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$ . Мы видим, что множество  $\mathbf{v}_0$  не является стабильным относительно последнего многообразия, откуда

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}.$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{a}_n[\rho]))$  не является дистрибутивной.  $\square$

**Предложение 3.49.** *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\beta([\mathbf{a}_{0,k}[\pi]]^\beta))$  не является дистрибутивной для любых  $k \geq 2$  и  $\pi \in S_k$ .*

Чтобы доказать предложение 3.50, нам потребуется следующий вспомогательный результат. Его доказательство вполне аналогично доказательству леммы 3.46 и потому мы позволим себе опустить его.

**Лемма 3.50.** *Если  $k, n \geq 2$ ,  $\pi \in S_k$  и  $\rho \in S_n$ , то  $\beta$ -классы  $xx^+ty^+$ ,  $xzux^+ty^+$ ,  $xux^+$ ,  $xx^+y$ ,  $uxx^+ty^+$  и  $[(\mathbf{a}_{0,n}[\rho])_x]^\beta$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{M}_\beta([\mathbf{a}_{0,k}[\pi]]^\beta)$ .*  $\square$

*Доказательство предложения 3.49.* Для любых  $r \geq 2$  и  $\tau \in S_r$  положим  $\mathbf{a}_r[\tau] := [\mathbf{a}_{0,r}[\tau]]^\beta$ . Также для краткости положим  $n := k + 2$ . Определим перестановку  $\rho \in S_n$  следующим образом:

$$i\rho := \begin{cases} 1\pi + 1, & \text{если } i = 1, \\ n, & \text{если } i = 2, \\ (i-1)\pi + 1, & \text{если } 2 < i < n-1, \\ 1, & \text{если } i = n-1, \\ (n-2)\pi + 1, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Пусть  $\mathbf{a} \approx \mathbf{a}'$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_k[\pi])$  такое, что  $\mathbf{a} \in \mathbf{a}_n[\rho]$ . В силу леммы 3.50,  $\beta$ -классы  $[(\mathbf{a}_{0,n}[\rho])_x]^\beta$ ,  $xx^+ty^+$  и  $uxx^+ty^+$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_k[\pi])$ . Тогда  $\mathbf{a}'_x \in [(\mathbf{a}_{0,n}[\rho])_x]^\beta$ ,  $(1\mathbf{a}'x) < (1\mathbf{a}'z_{1\rho})$  и  $(1\mathbf{a}'z_{n\rho}) < (\ell\mathbf{a}'x) < (\ell\mathbf{a}'t_1)$ . Далее,

поскольку  $\psi_1(\mathbf{a}) \in \mathbf{a}_k[\pi]$ , где  $\psi_1: X \rightarrow X^*$  — подстановка, заданная формулой

$$\psi_1(v) := \begin{cases} v, & \text{if } v = x \text{ или } v = y_1, \\ y_{i-1}, & \text{если } v = y_i, \ i = 3, 4, \dots, n-2, \\ z_{i-1}, & \text{если } v = z_i, \ i = 2, 3, \dots, n-1, \\ t_{i-1}, & \text{если } v = t_i, \ i = 2, 3, \dots, n-1, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

из леммы 1.5 следует, что  $\psi_1(\mathbf{a}') \in \mathbf{a}_k[\pi]$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{a}' \in \mathbf{a}_n[\rho]$ . Мы видим, что  $\beta$ -класс  $\mathbf{a}_n[\rho]$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_k[\pi])$  и, следовательно, с учетом леммы 3.4,  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]) \in \mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_k[\pi])$ . Таким образом, достаточно проверить, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]))$  не является дистрибутивной.

Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &:= x \mathbf{q} x \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_1 &:= x \mathbf{q}[0; 1] x \mathbf{q}[1; 4n-3] x \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_2 &:= x \mathbf{q}[0; 4n-3] x \mathbf{q}[4n-3; 1] x \mathbf{r}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{q} := \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{i\rho} z'_{i\rho} y_i^2 \right) z_{n\rho} z'_{n\rho} \quad \text{и} \quad \mathbf{r} := \left( \prod_{i=1}^n t_i z_i \right) \left( \prod_{i=1}^n t'_i z'_i \right).$$

Положим  $\mathbf{v}_j := [\mathbf{v}_j]^\beta$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Легко видеть, что множество  $\mathbf{v}_j$  целиком содержится в одном  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классе,  $j = 0, 1, 2$ .

Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho])$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_1$ . Из леммы 3.50 вытекает стабильность  $\beta$ -класса  $[\mathbf{qr}]^\beta$  относительно  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho])$ . Откуда  $\mathbf{v}_x \in [\mathbf{qr}]^\beta$ . Поскольку, по лемме 3.50, множества  $uxx^+ty^+$  и  $xx^+yty^+$  стабильны относительно  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho])$ , получаем, что  $(1_v x) < (1_v z_{1\rho})$  и  $(1_v z'_{n\rho}) < (t_v x) < (1_v t_1)$ . Далее,  $\mathbf{u}(Z) \notin \mathbf{a}_n[\rho]$  и  $\psi_2(\mathbf{u}) \in \mathbf{a}_n[\rho]$ , где

$$Z := \{x, y_1, z_1, t_1, y_2, z_2, t_2, \dots, y_{n-1}, z_{n-1}, t_{n-1}, z_n, t_n\}$$

и  $\psi_2: X \rightarrow X^*$  — подстановка, заданная формулой

$$\psi_2(v) := \begin{cases} v, & \text{если } v = x \text{ или } v = y_i, \ i = 1, 2, \dots, n-1, \\ z_i, & \text{если } v = z'_i, \ i = 1, 2, \dots, n, \\ t_i, & \text{если } v = t'_i, \ i = 1, 2, \dots, n, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда  $\mathbf{v}(Z) \notin \mathbf{a}_n[\rho]$  и  $\psi_2(\mathbf{v}) \in \mathbf{a}_n[\rho]$  по лемме 1.5. Откуда  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_1$  и потому  $\beta$ -класс  $\mathbf{v}_1$  является  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классом. Аналогичным образом можно показать, что  $\beta$ -классы  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_2$  являются  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классами.

Положим

$$\mathbf{X} := \mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} := \mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2\}.$$

Нетрудно проверить, что можно взять достаточно большое  $r$ , скажем  $r > 2n$ , такое, что тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$  будут выполняться в  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_r[\theta])$  для любого  $\theta \in S_r$ . Рассуждения, аналогичные приведенным в первом абзаце этого доказательства, показывают, что существует  $\theta' \in S_r$  такое, что  $M_\beta(\mathbf{a}_r[\theta']) \in \mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho])$ . Откуда  $M_\beta(\mathbf{a}_r[\theta']) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Проверим, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Поскольку  $M_\beta(\mathbf{a}_r[\theta']) \in \mathbf{X}$ , из леммы 3.50 следует, что  $\mathbf{u}'_x \in [\mathbf{q}\mathbf{r}]^\beta$ . В силу предложения 1.1, мы можем без ограничения общности считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho])$ , либо непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ . Ввиду сказанного выше, множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  есть объединение двух  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]))$ -классов. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ , т.е. существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_s)\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_t)\mathbf{b})$ , где  $\{s, t\} = \{0, 1\}$ .

Заметим сначала, что если  $a$  и  $b$  — различные буквы, то слово  $ab$  входит в слово  $\mathbf{u}$  в качестве подслова не более одного раза. Отсюда вытекает, что

- (\*) для любой буквы  $v \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$  слово  $\varphi(v)$  либо является пустым, либо степенью некоторой буквы.

Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_s) = \varphi(\mathbf{v}_t)$  и потому  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , откуда  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Поэтому остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(x) \neq 1$ . Ясно, что буквы  $t_i, t'_i$  не входят в слово  $\varphi(x)$ , поскольку эти буквы являются простыми в слове  $\mathbf{u}$ , в то время как  $x \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ . Если слово  $\varphi(x)$  является степенью некоторой буквы из множества  $\{z_i, z'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ , то все подслова слова  $\mathbf{u}$  вида  $\varphi(x)$  обязаны следовать за буквой  $t_1$ . В этом случае применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  к слову  $\mathbf{u}$  не меняет подслово этого слова, предшествующее букве  $t_1$ , откуда  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Если  $\varphi(x) \in y_i^+$  для некоторого  $1 \leq i \leq n-1$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ , так как  $y_i$  образует только один остров в слове  $\mathbf{u}$ . Следовательно, далее мы можем считать, что  $\varphi(x) \in x^+$ . Если образ буквы  ${}_{1\mathbf{v}_s}x$  относительно подстановки  $\varphi$  следует за буквой  ${}_{1\mathbf{u}}z'_{n\rho}$  в слове  $\mathbf{u}$ , то применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  к слову  $\mathbf{u}$  снова не может изменить подслово слова  $\mathbf{u}$ , предшествующее букве  ${}_{1\mathbf{u}}z'_{n\rho}$  и потому  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Следовательно, образ буквы  ${}_{1\mathbf{v}_s}x$  относительно подстановки  $\varphi$  предшествует букве  ${}_{1\mathbf{u}}z'_{n\rho}$  в слове  $\mathbf{u}$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $\varphi({}_{1\mathbf{v}_s}x)$  либо предшествует  ${}_{1\mathbf{u}}z_{1\rho}$ , либо зажато между  ${}_{1\mathbf{u}}z_{1\rho}$  и  ${}_{1\mathbf{u}}z'_{1\rho}$  в слове  $\mathbf{u}$ .

Если  $\varphi({}_{1\mathbf{v}_s}x)$  предшествует  ${}_{1\mathbf{u}}z_{1\rho}$  в слове  $\mathbf{u}$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ , так как, в силу условия (\*), образ буквы  $z_{1\rho}$  относительно подстановки  $\varphi$  является либо пустым словом, либо буквой. Предположим теперь, что  $\varphi({}_{1\mathbf{v}_s}x)$  лежит между  ${}_{1\mathbf{u}}z_{1\rho}$  и  ${}_{1\mathbf{u}}z'_{1\rho}$  в слове  $\mathbf{u}$ . С этим случае  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_1$ . Если  $(s, t) = (1, 0)$ , то  $\varphi(z_{1\rho}) \in x^*$ , откуда  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Поэтому остается рассмотреть случай, когда  $(s, t) = (0, 1)$ . Ясно, что если  $\varphi(z_{1\rho}) \in x^*$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Пусть теперь  $\varphi(z_{1\rho}) \notin x^*$ . Тогда  $\varphi(z_{1\rho}) = z'_{1\rho}$  в силу условия (\*). Отсюда вытекает, что  $z_{2\rho} \in \{\varphi(z'_{1\rho}), \varphi(z_{2\rho})\}$ . Однако такого

быть не может, поскольку  $z_{2\rho} = z_n$  и потому

$$(2v_s z_{1\rho}) < (\ell v_s z_{1\rho}) < (2v_s z_{2\rho}) < (\ell v_s z_{2\rho}) < (2v_s z'_{1\rho}) < (\ell v_s z'_{1\rho}),$$

но

$$(2u z_{2\rho}) < (\ell u z_{2\rho}) < (2u z'_{1\rho}) < (\ell u z'_{1\rho}).$$

Следовательно, случай, когда  $(s, t) = (0, 1)$ , невозможен, и мы доказали, что  $\mathbf{u}' \in v_0 \cup v_1$  в любом случае.

Мы видим, что множество  $v_0 \cup v_1$  является  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -классом. Аналогичными рассуждениями можно установить, что множество  $v_0 \cup v_2$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{Y})$ -класс. Отсюда следует, что  $\beta$ -класс  $v_0$  стабилен относительно  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . Положим  $\mathbf{Z} := \mathbf{M}_\beta(v_0)$ . В силу леммы 3.4,  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  и, следовательно,  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3$  и  $\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3$ , где  $\mathbf{v}_3 := x \chi(\mathbf{q}) x \mathbf{r}$ . Тогда тождество  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_3$  выполнено в многообразии  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$ . Мы видим, что множество  $v_0$  нестабильно относительно этого многообразия, откуда

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}.$$

Таким образом, мы доказали, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\beta(\mathbf{a}_n[\rho]))$  не является дистрибутивной.  $\square$

**Предложение 3.51.** *Решетка  $\mathfrak{L}(M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{k,k'}^{(p)}[\pi]]^{\gamma'}))$  не является дистрибутивной для любых  $(k, k') \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$ ,  $\pi \in S_{k,k'}$  и  $p = 1, 2, 3, 4$ .*

*Доказательство.* Возможны следующие четыре случая:

- $k = k'$  и  $1 \leq 1\pi \leq k$ ;
- $k = k'$  и  $k + 1 \leq 1\pi \leq 2k$ ;
- $k = k' + 1$  и потому  $1 \leq 1\pi \leq k$ ;
- $k = k' - 1$  и потому  $k + 1 \leq 1\pi \leq k + k'$ .

Мы рассмотрим только первый из них, поскольку остальные вполне аналогичны. Итак, далее мы считаем, что  $1 \leq i\pi \leq k$  и  $k + 1 \leq (i + 1)\pi \leq 2k$  для любого  $i = 1, 3, \dots, 2k - 1$ . Мы также рассмотрим только случай, когда  $p = 1$ ; случаи, когда  $p \in \{2, 3, 4\}$  рассматриваются аналогичным образом.

Заметим сначала, что

- (★)  $\gamma'$ -классы  $\{xzxytu\}$ ,  $xx^+ytu$  и  $uxx^+tu$  стабильны относительно  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{q,q}^{(1)}[\theta]]^{\gamma'})$  для любых  $q \in \mathbb{N}$  и  $\theta \in S_{q,q}$ .

Для краткости положим  $n := k + 2$ . Определим перестановку  $\rho \in \mathcal{S}_{n,n}$  следующим образом:

$$i\rho := \begin{cases} 1\pi + 1, & \text{если } i = 1, \\ 2\pi + 3, & \text{если } i = 2, \\ k + 2, & \text{если } i = 3, \\ 2k + 4, & \text{если } i = 4, \\ (i - 2)\pi + 1, & \text{если } i = 5, 7, \dots, 2k - 1, \\ (i - 2)\pi + 3, & \text{если } i = 6, 8, \dots, 2k, \\ 1, & \text{если } i = 2k + 1, \\ k + 3, & \text{если } i = 2k + 2, \\ (2k - 1)\pi + 1, & \text{если } i = 2k + 3, \\ (2k)\pi + 3, & \text{если } i = 2k + 4. \end{cases}$$

Пусть  $\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho] \approx \mathbf{a}$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{k,k}^{(1)}[\pi]]^{\gamma'})$ . Из условия  $(\star)$  вытекает, что  $\mathbf{a}_x = (\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho])_x$ . Поскольку слово  $(\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho])_Z$  совпадает (с точностью до переименования переменных) со словом  $\mathbf{a}_{k,k}^{(1)}[\pi]$ , где

$$Z := \{z_i, t_i \mid i \in \{1, n, n + 1, 2n\}\} \cup \{y_j, z'_j \mid j \in \{n + 1, 2n\}\},$$

из леммы 1.5 следует, что  $\mathbf{a}_Z \in [(\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho])_x]^{\gamma'}$ . Заметим также, что, в силу условия  $(\star)$ ,  $(1\mathbf{a}t_{n+2}) < (1\mathbf{a}x)$  и  $(t\mathbf{a}x) < (1\mathbf{a}t_{n+3})$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{a} \in [\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$ . Мы видим, что  $\gamma'$ -класс  $[\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$  является стабильным относительно многообразия  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{k,k}^{(1)}[\pi]]^{\gamma'})$ . Тогда  $M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}) \in \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{k,k}^{(1)}[\pi]]^{\gamma'})$  в силу следствия 3.3(ii). Таким образом, достаточно установить, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}))$  не является дистрибутивной.

Пусть

$$\mathbf{v}_0 := \mathbf{p} x \mathbf{q} x \mathbf{r},$$

$$\mathbf{v}_1 := \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 1] x \mathbf{q}[1; 11n - 1] x \mathbf{r},$$

$$\mathbf{v}_2 := \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 11n - 1] x \mathbf{q}[11n - 1; 1] x \mathbf{r},$$

где

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^n z_i^{(1)} t_i^{(1)} \right) \left( \prod_{i=1}^n z_i^{(2)} t_i^{(2)} \right) \left( \prod_{i=1}^n z_i^{(3)} t_i^{(3)} \right) \left( \prod_{i=1}^n z_i^{(4)} t_i^{(4)} \right),$$

$$\mathbf{q} := \left( \prod_{i=1}^n z_{(2i-1)\rho}^{(1)} z_{(2i)\rho}^{(1)} z_{(2i-1)\rho}^{(2)} z_{(2i)\rho}^{(2)} z_{(2i-1)\rho}^{(3)} z_{(2i)\rho}^{(3)} y_{(2i)\rho}^2 z_{(2i)\rho}^{(4)} z_{(2i-1)\rho}^{(4)} z_{(2i)\rho}^{(5)} \right),$$

$$\mathbf{r} := \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i^{(1)} z_i^{(1)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i^{(3)} z_i^{(3)} t_i^{(4)} z_i^{(4)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i^{(2)} z_i^{(2)} t_i^{(5)} z_i^{(5)} \right).$$

Далее, положим  $\mathbf{v}_0 := [\mathbf{v}_0]^{\gamma'}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &:= \{\mathbf{p}x^{k_1} \mathbf{q}[0; 1] x^{k_2} \mathbf{q}[1; 1] x^{k_3} \mathbf{q}[2; 11n-2] x^{k_4} \mathbf{r} \mid k_1 + k_2, k_2 + k_3, k_4 \geq 1\}, \\ \mathbf{v}_2 &:= \{\mathbf{p}x^{k_4} \mathbf{q}[0; 11n-2] x^{k_3} \mathbf{q}[11n-2; 1] x^{k_2} \mathbf{q}[11n-1; 1] x^{k_1} \mathbf{r} \mid k_1, k_2 + k_3, k_4 \geq 1\}. \end{aligned}$$

Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'})$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_1$ . Из условия  $(\star)$  следует, что  $\mathbf{v}_x \in [\mathbf{pqr}]^{\gamma'}$  и  $({}_{1v}z_{(2n)\rho}^{(5)}) < ({}_{\ell v}x) < ({}_{1v}t_{n+1}^{(1)})$ . Далее,  $\psi_1(\mathbf{u}) \in [\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$ , где  $\psi_1: X \rightarrow X^*$  — подстановка, заданная формулой

$$\psi_1(v) := \begin{cases} v, & \text{если } v = x \text{ или } v = y_i, \ i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ z_i, & \text{если } v = z_i^{(2)}, \ i = 1, 2, \dots, 2n, \\ t_i, & \text{если } v = t_i^{(2)}, \ i = 1, 2, \dots, 2n, \\ z'_i, & \text{если } v = z_i^{(5)}, \ i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ t'_i, & \text{если } v = t_i^{(5)}, \ i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из этого факта и леммы 1.5 следует, что  $\psi_1(\mathbf{v}) \in [\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$ . Откуда

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}x^{r_1} \mathbf{q}[0; 1] x^{r_2} \mathbf{q}[1; 1] x^{r_3} \mathbf{q}[2; 11n-2] x^{r_4} \mathbf{r},$$

где  $r_1 + r_2 + r_3, r_4 \geq 1$ . В силу условия  $(\star)$ ,  $({}_{1v}x) < ({}_{1v}z_{2\rho}^{(1)})$ , откуда  $r_1 + r_2 \geq 1$ . Наконец,  $\psi_2(\mathbf{u}) \notin [\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$ , где  $\psi_2: X \rightarrow X^*$  — подстановка, заданная формулой

$$\psi_2(v) := \begin{cases} v, & \text{если } v = x \text{ или } v = y_i, \ i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ z_i, & \text{если } v = z_i^{(1)}, \ i = 1, 2, \dots, n \text{ или } v = z_i^{(2)}, \ i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ t_i, & \text{если } v = t_i^{(1)}, \ i = 1, 2, \dots, n \text{ или } v = t_i^{(2)}, \ i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ z'_i, & \text{если } v = z_i^{(5)}, \ i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ t'_i, & \text{если } v = t_i^{(5)}, \ i = n+1, n+2, \dots, 2n, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда из леммы 1.5 следует, что  $\psi_2(\mathbf{v}) \notin [\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}$ . Отсюда вытекает, что  $r_2 + r_3 \geq 1$  и потому  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_1$ . Мы видим, что множество  $\mathbf{v}_1$  есть объединение  $\text{FIC}(\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}))$ -классов. Аналогичным образом можно проверить, что множества  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_2$  суть объединения  $\text{FIC}(\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}))$ -классов.

Положим

$$\mathbf{X} := \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} := \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2\}.$$

Легко видеть, что можно взять достаточно большое  $r$ , скажем  $r > 9n$ , такое, что тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$  будут выполняться в  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{r,r}^{(1)}[\theta]]^{\gamma'})$  для любой перестановки  $\theta \in S_{r,r}$ .

Рассуждения, аналогичные приведенным в первом абзаце этого доказательства, показывают, что найдется перестановка  $\theta' \in S_{r,r}$  такая, что  $M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{r,r}^{(1)}[\theta]]^{\gamma'}) \in M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'})$ . Откуда  $M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{r,r}^{(1)}[\theta]]^{\gamma'}) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in v_0 \cup v_1$ . Проверим, что  $\mathbf{u}' \in v_0 \cup v_1$ . Поскольку  $M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{r,r}^{(1)}[\theta]]^{\gamma'}) \in \mathbf{X}$ , из условия  $(\star)$  вытекает, что  $\mathbf{u}'_x \in [\mathbf{pqr}]^{\gamma'}$ . В силу предложения 1.1, мы можем без ограничения общности считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'})$ , либо непосредственно следует из тождества  $v_0 \approx v_1$ . С учетом сказанного выше, множество  $v_0 \cup v_1$  является объединением  $\text{FIC}(M_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}))$ -классов. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из  $v_0 \approx v_1$ , т.е. существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_s)\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_t)\mathbf{b})$ , где  $\{s, t\} = \{0, 1\}$ .

Заметим сначала, что если  $a$  и  $b$  — различные буквы, то слово  $ab$  входит в слово  $\mathbf{u}$  в качестве подслова не более одного раза. Отсюда следует, что

- (\*) для любой буквы  $v \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$  слово  $\varphi(v)$  либо является пустым, либо степенью некоторой буквы.

Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_s) = \varphi(\mathbf{v}_t)$  и потому  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , откуда  $\mathbf{u}' \in v_0 \cup v_1$ . Остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(x) \neq 1$ . Ясно, что никакая буква вида  $t_i^{(j)}$  не может входить в запись слова  $\varphi(x)$ , поскольку  $t_i^{(j)} \in \text{sim}(\mathbf{u})$ , в то время как  $x \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ . Далее, буквы из множества

$$\{z_i^{(1)}, z_i^{(2)}, z_i^{(3)}, z_i^{(4)}, z_j^{(5)} \mid 1 \leq i \leq 2n, n+1 \leq j \leq 2n\}$$

также не могут входить в запись слова  $\varphi(x)$ , поскольку первое и второе вхождения любой такой буквы в слово  $\mathbf{u}$  расположены в различных блоках, в то время как все вхождения буквы  $x$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{v}_s$ . Если  $\varphi(x) \in y_i^+$  для некоторого  $n+1 \leq i \leq 2n$ , то  $\mathbf{u}' \in v_0 \cup v_1$ , так как буква  $y_i$  образует в точности один остров в слове  $\mathbf{u}$ . Поэтому далее мы можем считать, что  $\varphi(x) \in x^+$ . Если образ буквы  $1_{v_s}x$  относительно подстановки  $\varphi$  следует за буквой  $1_{\mathbf{u}}z_{(2n)\rho}^{(5)}$  в  $\mathbf{u}$ , то применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  к слову  $\mathbf{u}$  не может изменить префикс слова  $\mathbf{u}$ , предшествующий  $1_{\mathbf{u}}z_{(2n)\rho}^{(5)}$  и потому  $\mathbf{u}' \in v_0 \cup v_1$ . Следовательно, образ буквы  $1_{v_s}x$  относительно  $\varphi$  предшествует  $1_{\mathbf{u}}z_{(2n)\rho}^{(5)}$  в  $\mathbf{u}$ . Это возможно лишь в том случае, когда выполнено одно из следующих утверждений:

- (i)  $\varphi(1_{v_s}x)$  предшествует  $2_{\mathbf{u}}z_{1\rho}^{(1)}$  in  $\mathbf{u}$ ;
- (ii)  $\varphi(1_{v_s}x)$  лежит между  $2_{\mathbf{u}}z_{1\rho}^{(1)}$  и  $1_{\mathbf{u}}z_{2\rho}^{(1)}$  в  $\mathbf{u}$ ;
- (iii)  $\varphi(1_{v_s}x)$  лежит между  $1_{\mathbf{u}}z_{2\rho}^{(1)}$  и  $2_{\mathbf{u}}z_{1\rho}^{(2)}$  в  $\mathbf{u}$ .

Если выполнено условие (i), то  $\mathbf{u}' \in v_0 \cup v_1$ , так как, в силу (\*), образ буквы  $z_{1\rho}^{(1)}$  относительно  $\varphi$  является либо пустым словом, либо степенью некоторой буквы. Если выполнено условие (ii), то  $\varphi(z_{1\rho}^{(1)}) \in x^*$  и потому  $\mathbf{u}' \in v_0 \cup v_1$ , так как  $\varphi(z_{1\rho}^{(1)})$  не может содержать  $z_{2\rho}^{(1)}$ . Предположим теперь, что выполняется условие (iii). Ясно, что если  $\varphi(z_{1\rho}^{(1)}) \in x^*$ , то

$\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$ . Пусть теперь  $\varphi(z_{1\rho}^{(1)}) \notin x^*$ . Тогда  $\varphi(z_{1\rho}^{(1)}) = z_{1\rho}^{(2)}$  в силу условия (\*). Случай, когда  $(s, t) = (1, 0)$ , невозможен, поскольку между  $1\mathbf{u}z_{1\rho}^{(2)}$  и  $2\mathbf{u}z_{1\rho}^{(2)}$  в  $\mathbf{u}$  нет вхождений буквы  $x$ . Поэтому остается рассмотреть случай, когда  $(s, t) = (0, 1)$ . Применим еще раз условие (\*) и получим, что  $z_{3\rho}^{(1)} \in \{\varphi(z_{3\rho}^{(1)}), \varphi(z_{1\rho}^{(4)})\}$ . Однако это невозможно, так как  $3\rho = n$  и потому  $(1\mathbf{v}_s z_{1\rho}^{(1)}) < (1\mathbf{v}_s z_n^{(1)}) < (1\mathbf{v}_s z_{1\rho}^{(4)})$  и  $(1\mathbf{u} z_n^{(1)}) < (1\mathbf{u} z_{1\rho}^{(2)})$ . Следовательно,  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  в любом случае.

Мы видим, что множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_1$  есть объединение FIC( $\mathbf{X}$ )-классов. Аналогичным образом можно показать, что множество  $\mathbf{v}_0 \cup \mathbf{v}_2$  является объединением FIC( $\mathbf{Y}$ )-классов. Отсюда следует стабильность  $\gamma'$ -класса  $\mathbf{v}_0$  относительно многообразия  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . Положим  $\mathbf{Z} := \mathbf{M}_{\gamma'}(\mathbf{v}_0)$ . В силу следствия 3.3(ii),  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  и потому  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3$  и  $\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3$ , где  $\mathbf{v}_3 := \mathbf{p}x\chi(\mathbf{q})x\mathbf{r}$ . Тогда тождество  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_3$  выполнено в многообразии  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$ . Мы видим, что  $\gamma'$ -класс  $\mathbf{v}_0$  не является стабильным относительно этого многообразия, откуда

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}.$$

Итак, мы показали, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'}))$  не является дистрибутивной.  $\square$

**Предложение 3.52.** *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,m}^{(p)}[\rho]]^{\gamma''}))$  не является дистрибутивной для всех  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$ ,  $\rho \in S_{n,m}$  и  $p = 1, 2, 3, 4$ .*

*Доказательство.* Возможны следующие четыре случая:

- $n = m$  и  $1 \leq 1\rho \leq n$ ;
- $n = m$  и  $n + 1 \leq 1\rho \leq 2n$ ;
- $n = m + 1$  и потому  $1 \leq 1\rho \leq n$ ;
- $n = m - 1$  и потому  $n + 1 \leq 1\rho \leq n + m$ .

Мы рассмотрим только первый из них, поскольку остальные рассматриваются вполне аналогично. В этом случае  $1 \leq i\rho \leq n$  и  $n + 1 \leq (i + 1)\rho \leq 2n$  для любого  $i = 1, 3, \dots, 2n - 1$ . Мы также позволим себе считать, что  $p = 1$ ; случаи, когда  $p \in \{2, 3, 4\}$  рассматриваются аналогично.

Заметим сначала, что

- (★) для всех  $q \in \mathbb{N}$  и  $\theta \in S_{q,q}$  множества  $x\mathbf{x}^+y\mathbf{t}$  и  $u\mathbf{x}\mathbf{x}^+t$  стабильны относительно многообразия  $\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{q,q}^{(1)}[\theta]]^{\gamma''})$ ; в частности, слова  $xz\mathbf{x}y\mathbf{t}$  и  $xuz\mathbf{x}t$  являются изотермами для  $\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{q,q}^{(1)}[\theta]]^{\gamma''})$ .

Пусть

$$\mathbf{v}_0 := \mathbf{p}x\mathbf{q}[0; 6n - 6]y\mathbf{q}[6n - 6; 12]x\mathbf{q}[6n + 6; 6n - 6]y\mathbf{q}[12n; 1]\mathbf{r},$$

где

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^n z_i^{(1)} t_i^{(1)} \right) \left( \prod_{i=1}^n z_i^{(4)} t_i^{(4)} \right),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &:= z \left( \prod_{i=1}^{n-1} z_{(2i-1)\rho}^{(1)} z_{(2i)\rho}^{(1)} (y_{(2i)\rho}^{(1)})^2 z_{(2i)\rho}^{(2)} z_{(2i)\rho}^{(3)} \right) z_{1\rho}^{(4)} z_{2\rho}^{(4)} (y_{2\rho}^{(4)})^2 z_{2\rho}^{(5)} z_{2\rho}^{(6)} \\ &\quad \cdot z_{(2n-1)\rho}^{(1)} z_{(2n)\rho}^{(1)} (y_{(2n)\rho}^{(1)})^2 z_{(2n)\rho}^{(2)} z_{(2n)\rho}^{(3)} \left( \prod_{i=2}^n z_{(2i-1)\rho}^{(4)} z_{(2i)\rho}^{(4)} (y_{(2i)\rho}^{(4)})^2 z_{(2i)\rho}^{(5)} z_{(2i)\rho}^{(6)} \right), \\ \mathbf{r} &:= \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i^{(1)} z_i^{(1)} t_i^{(2)} z_i^{(2)} t_i^{(3)} z_i^{(3)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i^{(4)} z_i^{(4)} t_i^{(5)} z_i^{(5)} t_i^{(6)} z_i^{(6)} \right) t z. \end{aligned}$$

Положим также  $\mathbf{v}_0 := [\mathbf{v}_0]^{\gamma''}$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &:= \{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}_x \in [(\mathbf{v}_0)_x]^{\gamma''}, (1_{\mathbf{w}} t_n^{(4)}) < (1_{\mathbf{w}} x) < (1_{\mathbf{w}} z), (1_{\mathbf{w}} z_{(2n)\rho}^{(2)}) < (\ell_{\mathbf{w}} x) < (1_{\mathbf{w}} z_{(2n)\rho}^{(3)}) \}, \\ \mathbf{v}_2 &:= \left\{ \mathbf{w} \mid \begin{array}{l} \mathbf{w}_y \in [(\mathbf{v}_0)_y]^{\gamma''}, \\ (1_{\mathbf{w}} z_{(2n-2)\rho}^{(2)}) < (1_{\mathbf{w}} y) < (1_{\mathbf{w}} z_{(2n-2)\rho}^{(3)}), (1_{\mathbf{w}} z_{(2n)\rho}^{(5)}) < (\ell_{\mathbf{w}} y) < (1_{\mathbf{w}} z_{(2n)\rho}^{(6)}) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Рассуждая как в доказательстве предложения 3.51, можно показать, что каждое множество  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  является объединением  $\text{FIC}(\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}))$ -классов.

Пусть

$$\mathbf{X} := \mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} := \mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2\},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &:= \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 6n-6] y \mathbf{q}[6n-6; 12] x^2 \mathbf{q}[6n+6; 6n-6] y \mathbf{q}[12n; 1] \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_2 &:= \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 6n-6] y \mathbf{q}[6n-6; 12] x \mathbf{q}[6n+6; 6n-6] y^2 \mathbf{q}[12n; 1] \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что можно взять достаточно большое  $r$ , скажем  $r > 9n$ , такое, что тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$  будут выполняться в  $\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{r,r}^{(1)}[\theta]]^{\gamma''})$  для любого  $\theta \in S_{r,r}$ . Как и в доказательстве предложения 3.51, используя лемму 3.5 вместо следствия 3.3(ii), можно показать, что существует перестановка  $\theta' \in S_{r,r}$  такая, что  $\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{r,r}^{(1)}[\theta]]^{\gamma''}) \in \mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma'})$ . Откуда  $\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{r,r}^{(1)}[\theta]]^{\gamma''}) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_1$ . Покажем, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ . Поскольку  $\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{r,r}^{(1)}[\theta]]^{\gamma''}) \in \mathbf{X}$ , из условия  $(\star)$  вытекает, что  $\mathbf{u}'_{\{x,y\}} \in [\mathbf{pqr}]^{\gamma''}$ . В силу предложения 1.1, мы можем без ограничения общности считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''})$ , либо непосредственно следует из  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ . В силу сказанного выше, множество  $\mathbf{v}_1$  — объединение  $\text{FIC}(\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}))$ -классов. Поэтому остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ , т.е. существуют некоторые слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_s)\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_t)\mathbf{b})$ , где  $\{s, t\} = \{0, 1\}$ .

Заметим, что

- (\*) если  $a$  и  $b$  — различные буквы и слово  $ab$  встречается в качестве подслова в слове  $\mathbf{u}$  более одного раза, то

$$\{a, b\} \in \left\{ \{x, y_{2\rho}^{(4)}\}, \{x, y_i^{(1)}\} \mid n+1 \leq i \leq 2n \right\}.$$

Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_s) = \varphi(\mathbf{v}_t)$  и потому  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , откуда  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(x) \neq 1$ . Ясно, что никакая буква вида  $t_i^{(j)}$  не может входить в запись слова  $\varphi(x)$ , поскольку все буквы такого вида являются простыми в  $\mathbf{u}$ , в то время как  $x \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ . Далее, никакая буква из множества

$$\{z, z_i^{(1)}, z_j^{(2)}, z_j^{(3)}, z_i^{(4)}, z_j^{(5)}, z_j^{(6)} \mid 1 \leq i \leq 2n, n+1 \leq j \leq 2n\}$$

также не входит в запись слова  $\varphi(x)$ , так как первое и второе вхождения этих букв в слово  $\mathbf{u}$  лежат в различных блоках этого слова, в то время как все вхождения буквы  $x$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{v}_s$ . Если  $y_i^{(j)} \in \text{alph}(\varphi(x))$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ , так как все вхождения буквы  $y_i^{(j)}$  расположены между  ${}_{1\mathbf{u}}z_i^{(j)}$  и  ${}_{1\mathbf{u}}z_i^{(j+1)}$  в слове  $\mathbf{u}$ . Следовательно, с учетом условия (\*), остается рассмотреть случай, когда либо  $\varphi(x) \in x^+$ , либо  $\varphi(x) \in y^+$ . Если  $\varphi(x) \in x^+$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ , так как в этом случае применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  к слову  $\mathbf{u}$  не может изменить расположение первого и последнего вхождения буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$ . Поэтому далее мы можем считать, что  $\varphi(x) \in y^+$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $s = 0$  и  $\varphi(i\mathbf{v}_0x) = i\mathbf{u}y$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда

$$\varphi(\mathbf{q}[0; 6n-6] y \mathbf{q}[6n-6; 12]) = \mathbf{q}_1 x \mathbf{q}_2$$

для некоторых слов  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  таких, что  $(\mathbf{q}_1)_x \in [\mathbf{q}[6n-6; 12]]^{\gamma''}$  и  $\mathbf{q}_2 \in [\mathbf{q}[6n+6; 6n-6]]^{\gamma''}$ . Заметим также, что в этом случае  $\varphi(y) = 1$ . Однако это противоречит условию (\*), поскольку подслово слова  $\mathbf{u}$  [соответственно  $\mathbf{v}_s$ ], расположенное между  ${}_{1\mathbf{u}}y$  и  ${}_{2\mathbf{u}}y$  [соответственно  ${}_{1\mathbf{v}_s}x$  и  ${}_{2\mathbf{v}_s}x$ ], содержит в точности  $5n+5$  различных букв. Следовательно, случай, когда  $\varphi(x) \in y^+$  невозможен и  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$  в любом случае.

Мы видим, что множество  $\mathbf{v}_1$  является объединением FIC( $\mathbf{X}$ )-классов. Аналогичным образом можно показать, что множество  $\mathbf{v}_2$  есть объединение FIC( $\mathbf{Y}$ )-классов. Поскольку  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 \cap \mathbf{v}_2$ , отсюда вытекает стабильность  $\gamma''$ -класса  $\mathbf{v}_0$  относительно  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . Положим  $\mathbf{Z} := \mathbf{M}_{\gamma''}(\mathbf{v}_0)$ . В силу леммы 3.5,  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  и потому  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3$  и  $\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3$ , где

$$\mathbf{v}_3 := \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 6n-6] y \mathbf{q}[6n-6; 12] x^2 \mathbf{q}[6n+6; 6n-6] y^2 \mathbf{q}[12n; 1] \mathbf{r}.$$

Тогда тождество  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_3$  выполнено в многообразии  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$ . Мы видим, что множество  $\mathbf{v}_0$  не является стабильным относительно этого многообразия, откуда

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}.$$

Таким образом, мы показали, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\gamma''}([\mathbf{a}_{n,n}^{(1)}[\rho]]^{\gamma''}))$  не является дистрибутивной.  $\square$

**Предложение 3.53.** *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{k,k}[\pi]]^{\alpha_1}))$  не является дистрибутивной для всех  $k \in \mathbb{N}$  и  $\pi \in S_{2k}^\#$ .*

*Доказательство.* Заметим сначала, что

(★) для любых  $q \in \mathbb{N}$  и  $\theta \in S_{2q}^\sharp$ , множества  $ytxx^+y$  и  $uxx^+ty$  стабильны относительно  $\mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{q,q}[\theta]]^{\alpha_1})$ ; в частности, слова  $xuzxtu$  и  $xzytxu$  являются изотермами для  $\mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{q,q}[\theta]]^{\alpha_1})$ .

Пусть

$$\mathbf{v}_0 := \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 1] y \mathbf{q}[1; 3n-2] x \mathbf{q}[3n-1; 1] y \mathbf{r},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= \left( \prod_{i=1}^{(2n)\rho-1} z_i t_i \right) (z'_{(2n)\rho} t'_{(2n)\rho} z_{(2n)\rho} t_{(2n)\rho}) \left( \prod_{i=(2n)\rho+1}^n z_i t_i \right), \\ \mathbf{q} &:= z_{1\rho} z'_{1\rho} y_1^2 \left( \prod_{i=2}^{2n-1} z_i y_i^2 \right) z_{(2n)\rho} z'_{(2n)\rho}, \\ \mathbf{r} &:= \left( \prod_{i=n+1}^{1\rho-1} t_i z_i \right) (t_{1\rho} z_{1\rho} t'_{1\rho} z'_{1\rho}) \left( \prod_{i=1\rho+1}^{2n} t_i z_i \right). \end{aligned}$$

Положим также  $\mathbf{v}_0 := [\mathbf{v}_0]^{\alpha_1}$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &:= \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w}_x \in [(\mathbf{v}_0)_x]^{\alpha_1}, (1\mathbf{w}t_n^{(2)}) < (1\mathbf{w}x) < (1\mathbf{w}z_{1\rho}), (2\mathbf{w}z_{(2n)\rho}) < (\ell\mathbf{w}x) < (2\mathbf{w}z'_{(2n)\rho})\}, \\ \mathbf{v}_2 &:= \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w}_y \in [(\mathbf{v}_0)_y]^{\alpha_1}, (1\mathbf{w}z_{1\rho}) < (1\mathbf{w}y) < (1\mathbf{w}z'_{1\rho}), (2\mathbf{w}z'_{(2n)\rho}) < (\ell\mathbf{w}y) < (1\mathbf{w}t_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Как и в доказательстве предложения 3.51, можно показать, что каждое из множеств  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  является объединением  $\text{FIC}(\mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}))$ -классов.

Пусть

$$\mathbf{X} := \mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} := \mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2\},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &:= \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 1] y \mathbf{q}[1; 3n-2] x^2 \mathbf{q}[3n-1; 1] y \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_2 &:= \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 1] y \mathbf{q}[1; 3n-2] x \mathbf{q}[3n-1; 1] y^2 \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что можно найти достаточно большое  $r$ , скажем  $r > 2n$ , такое, что тождество  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$  будет выполнено  $\mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{r,r}[\theta]]^{\alpha_1})$  для любой перестановки  $\theta \in S_{2r}^\sharp$ . Далее, как и в доказательстве предложения 3.51, используя леммы 1.5 и 3.38 вместо следствия 3.3(ii), можно показать, что существует перестановка  $\theta' \in S_{2r}^\sharp$  такая, что  $M_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{r,r}[\theta']]^{\alpha_1}) \in \mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1})$ . Откуда  $M_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{r,r}[\theta']]^{\alpha_1}) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_1$ . Проверим, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ . Поскольку  $M_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{r,r}[\theta]]^{\alpha_1}) \in \mathbf{X}$ , из условия (★) следует, что  $\mathbf{u}'_{\{x,y\}} \in [\mathbf{pqr}]^{\alpha_1}$ . В силу предложения 1.1, мы можем без ограничения общности считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1})$ , либо непосредственно следует из  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ . В силу сказанного выше, множество  $\mathbf{v}_1$  есть объединение  $\text{FIC}(\mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}))$ -классов. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ , т.е. существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_s)\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_t)\mathbf{b})$ , где  $\{s, t\} = \{0, 1\}$ .

Сначала заметим, что если  $a$  и  $b$  — различные буквы, хотя бы одна из которых принадлежит множеству  $\{y, z'_{1\rho}, z'_{(2n)\rho}, z_{1\rho}, z_{2\rho}, \dots, z_{(2n)\rho}\}$ , то  $ab$  может входить в качестве подслова в слово  $\mathbf{u}$  не более одного раза. Отсюда вытекает, что

(\*) для любого  $v \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ , если

$$\text{alph}(\varphi(v)) \cap \{y, z'_{1\rho}, z'_{(2n)\rho}, z_{1\rho}, z_{2\rho}, \dots, z_{(2n)\rho}\} \neq \emptyset,$$

то  $\varphi(v)$  есть буква.

Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_s) = \varphi(\mathbf{v}_t)$  и потому  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , откуда  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(x) \neq 1$ . Ясно, что никакая буква вида  $t_i$  или  $t'_i$  не входит в слово  $\varphi(x)$ , так как эти буквы являются простыми в слове  $\mathbf{u}$ , в то время как  $x \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ . Далее, буквы из множества  $\{z'_{1\rho}, z'_{(2n)\rho}, z_{1\rho}, z_{2\rho}, \dots, z_{(2n)\rho}\}$  также не входят в запись слова  $\varphi(x)$ , поскольку первое и второе вхождение этих букв в слово  $\mathbf{u}$  лежат в различных блоках этого слова, в то время как все вхождения буквы  $x$  в слово  $\mathbf{v}_s$  расположены в одном и том же блоке этого слова. Если  $\text{alph}(\varphi(x)) \subseteq \{x, y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}\}$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ , так как в этом случае применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  к слову  $\mathbf{u}$  не изменит расположение первых и последних вхождений букв в это слово. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда  $y \in \text{alph}(\varphi(x))$ . Тогда, в силу условия (\*),  $\varphi(x) = y$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $s = 0$  и  $\varphi(i_{\mathbf{v}_0}x) = i_{\mathbf{u}}y$ ,  $i = 1, 2$ . Применим еще раз условие (\*) и получим, что

$$\{z'_{1\rho}, z_{2\rho}, z_{3\rho}, \dots, z_{(2n)\rho}, z'_{(2n)\rho}\} \subseteq \{\varphi(z_{1\rho}), \varphi(z'_{1\rho}), \varphi(z_{2\rho}), \varphi(z_{3\rho}), \dots, \varphi(z_{(2n)\rho})\}.$$

Поскольку образ относительно подстановки  $\varphi$  любого не первого вхождения буквы в слово  $\mathbf{v}_s$  не может содержать первые вхождения букв в слово  $\mathbf{u}$ , отсюда следует, что

$$\{z_{(n+1)\rho}, z_{(n+2)\rho}, \dots, z_{(2n)\rho}, z'_{(2n)\rho}\} \subseteq \{\varphi(z_{(n+1)\rho}), \varphi(z_{(n+2)\rho}), \dots, \varphi(z_{(2n)\rho})\}.$$

Однако это противоречит тому, что во множестве

$$\{\varphi(z_{(n+1)\rho}), \varphi(z_{(n+2)\rho}), \dots, \varphi(z_{(2n)\rho})\}$$

не более  $n$  элементов, в то время как во множество

$$\{z_{(n+1)\rho}, z_{(n+2)\rho}, \dots, z_{(2n)\rho}, z'_{(2n)\rho}\}$$

содержит  $n + 1$  элемент. Следовательно, случай, когда  $y \in \text{alph}(\varphi(x))$ , невозможен и  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$  в любом случае.

Мы видим, что множество  $\mathbf{v}_1$  является объединением FIC( $\mathbf{X}$ )-классов. Аналогичным образом можно показать, что множество  $\mathbf{v}_2$  является объединением FIC( $\mathbf{Y}$ )-классов. Поскольку  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 \cap \mathbf{v}_2$ , отсюда вытекает стабильность  $\alpha_1$ -класса  $\mathbf{v}_0$  относительно многообразия  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . По лемме 1.5,  $\alpha_1$ -класс  $\mathbf{v}_0$  также стабилен относительно многообразия  $\mathbf{Z} := \mathbf{M}_{\alpha_1}(\mathbf{v}_0)$ . Откуда следует стабильность  $\mathbf{v}_0$  относительно  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}$ . Рутинными вычислениями можно

проверить, что  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3$  и  $\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3$ , где

$$\mathbf{v}_3 := \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 1] y \mathbf{q}[1; 3n - 2] x^2 \mathbf{q}[3n - 1; 1] y^2 \mathbf{r}.$$

Тогда тождество  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_3$  выполнено в многообразии  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$ . Мы видим, что  $\alpha_1$ -класс  $\mathbf{v}_0$  нестабилен относительно этого многообразия, откуда

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}.$$

Итак, мы доказали, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\alpha_1}([\mathbf{a}_{n,n}[\rho]]^{\alpha_1}))$  не является дистрибутивной.  $\square$

**Предложение 3.54.** *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\pi]))$  не является дистрибутивной для любых  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\pi \in S_{n,m}$ .*

*Доказательство.* Возможны следующие четыре случая:

- $n = m$  и  $1 \leq 1\rho \leq n$ ;
- $n = m$  и  $n + 1 \leq 1\rho \leq 2n$ ;
- $n = m + 1$  и потому  $1 \leq 1\rho \leq n$ ;
- $n = m - 1$  и потому  $n + 1 \leq 1\rho \leq n + m$ .

Рассмотрим только первый из них, поскольку остальные случаи рассматриваются вполне аналогично. В обсуждаемом случае  $1 \leq i\theta \leq n$  и  $n + 1 \leq (i + 1)\theta \leq 2n$  для любого  $i = 1, 3, \dots, 2n - 1$ .

Для произвольного  $k \in \mathbb{N}$  и произвольной перестановки  $\theta \in S_{k,k}$  такой, что  $1 \leq i\theta \leq k$  и  $k + 1 \leq (i + 1)\theta \leq 2k$  при  $i = 1, 3, \dots, 2k - 1$ , определим перестановку  $\theta' \in S_{k+2,k+2}$  следующим образом:

- $1\theta' = 1\theta + 1$  и  $2\theta' = 2\theta + 3$ ;
- $3\theta' = k + 2$  и  $4\theta' = 2k + 4$ ;
- $i\theta' = (i - 2)\theta + 1$  для любых  $i = 5, 7, \dots, 2k - 1$ ;
- $i\theta' = (i - 2)\theta + 3$  для любых  $i = 6, 8, \dots, 2k$ ;
- $(2k + 1)\theta' = 1$  и  $(2k + 2)\theta' = k + 3$ ;
- $(2k + 3)\theta' = (2k - 1)\theta + 1$  и  $(2k + 4)\theta' = (2k)\theta + 3$ .

Пусть  $\hat{\mathbf{a}}_{k+2,k+2}[\theta'] \approx \hat{\mathbf{a}}$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\theta])$ . Легко видеть, что любое нетривиальное тождество вида  $xzxytu \approx \mathbf{w}$  влечет некоторое нетривиальное тождество вида  $\hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\theta] \approx \mathbf{w}'$ . Из этого наблюдения и леммы 1.3 вытекает, что слово  $xzxytu$  есть изотерм для  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\theta])$ . Тогда легко видеть, что  $\hat{\mathbf{a}}_x = (\hat{\mathbf{a}}_{k+2,k+2}[\theta'])_x$ . Поскольку слово  $\hat{\mathbf{a}}_{k+2,k+2}[\theta'](Z)$ , где

$$Z := \{x\} \cup \{z_i, t_i \mid 2 \leq i \leq n + 1\} \cup \{z_i, t_i \mid k + 4 \leq i \leq 2k + 3\},$$

совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\theta]$ , из леммы 1.3 вытекает, что  $\hat{\mathbf{a}}(Z) = \hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\theta](Z)$ . В частности,  $\text{occ}_x(\hat{\mathbf{a}}) = 2$ . Заметим также, что первое и второе вхождения буквы  $x$  в слово  $\hat{\mathbf{a}}$  лежат в одном блоке этого слова, поскольку слово  $xzxytu$ , а значит, и слово  $xzx$  являются изотермами для  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\theta])$ . Следовательно,  $(1\hat{\mathbf{a}}t_{n+2}) < (1\hat{\mathbf{a}}x)$  и  $(2\hat{\mathbf{a}}x) < (1\hat{\mathbf{a}}t_{n+3})$ . Отсюда следует, что  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{k+2,k+2}[\theta']$ . Мы видим, что слово  $\hat{\mathbf{a}}_{k+2,k+2}[\theta']$  есть изотерм для многообразия  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\theta])$ . Тогда  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{k+2,k+2}[\theta']) \subseteq \mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\theta])$  по лемме 1.3.

Поскольку нам достаточно установить, что некоторое подмногообразие многообразия  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho])$  не является дистрибутивным, далее мы можем без ограничения общности считать, что  $\rho = \xi'$  для некоторой перестановки  $\xi \in S_{n-2,n-2}$ . В частности,

$$2 \leq 1\rho, (2n-1)\rho \leq n-1 \text{ и } n+2 \leq 2\rho, (2n)\rho \leq 2n-1. \quad (3.58)$$

Для любых  $0 \leq s \leq t \leq 6n$ , положим

$$\mathbf{v}_{s,t} := \mathbf{p} \mathbf{q}[0; s] x \mathbf{q}[s; t-s] x \mathbf{q}[t; 6n-t] \mathbf{r},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= \left( \prod_{i=1}^{1\rho} z_i'' t_i'' \right) \left( \prod_{i=1}^{(2n-1)\rho} z_i' t_i' \right) \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=(2n-1)\rho+1}^n z_i' t_i' \right) \left( \prod_{i=1\rho+1}^n z_i'' t_i'' \right), \\ \mathbf{q} &:= z_{1\rho} z_{2\rho} \cdot \left( \prod_{i=1}^{2n} z_i' \right) \left( \prod_{i=3}^{2n-2} z_i \right) \left( \prod_{i=1}^{2n} z_i'' \right) \cdot z_{(2n-1)\rho} z_{(2n)\rho}, \\ \mathbf{r} &:= \left( \prod_{i=n+1}^{2\rho} t_i'' z_i'' \right) \left( \prod_{i=n+1}^{(2n)\rho} t_i' z_i' \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right) \left( \prod_{i=(2n)\rho+1}^{2n} z_i' t_i' \right) \left( \prod_{i=2\rho+1}^{2n} z_i'' t_i'' \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что слово  $\mathbf{v}_{0,6n}$  совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\hat{\mathbf{a}}_{3n,3n}[\tau]$  для некоторой перестановки  $\tau \in S_{3n,3n}$ . Тогда рассуждения, аналогичные рассуждениям во втором абзаце этого доказательства, показывают, что слово  $\mathbf{v}_{0,6n}$  есть изотерм для многообразия  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho])$ .

Пусть  $\mathbf{v}_{1,6n} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho])$ . Рассуждая как во втором абзаце данного доказательства, можно проверить, что  $\mathbf{v}_x = \mathbf{p} \mathbf{q} \mathbf{r}$ . Заметим, что если

$$Z := \{x, z_{(2n-1)\rho}, t_{(2n-1)\rho}, z_{(2n)\rho}, t_{(2n)\rho}\} \cup \{z_i', t_i' \mid 1 \leq i \leq 2n-2\},$$

то слово  $\mathbf{v}_{1,6n}(Z)$  совпадает (с точностью до переименования переменных) со словом  $\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]$ . Тогда  $\mathbf{v}(Z) = \mathbf{v}_{1,6n}(Z)$  по лемме 1.3. В частности,  $\text{occ}_x(\mathbf{v}) = 2$ . Далее, рассуждения, аналогичные рассуждениям во втором абзаце этого доказательства, показывают, что  $(1\mathbf{v}t_n'') < (1\mathbf{v}x)$  и  $(2\mathbf{v}x) < (1\mathbf{v}t_{n+1}'')$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{v} \in \{\mathbf{v}_{0,6n}, \mathbf{v}_{1,6n}, \mathbf{v}_{2,6n}\}$ . Поскольку слово  $\mathbf{v}_{0,6n}$  есть изотерм для  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho])$ , слово  $\mathbf{v}$  не может совпадать со словом  $\mathbf{v}_{0,6n}$ . Следовательно,  $\mathbf{v} \in \{\mathbf{v}_{1,6n}, \mathbf{v}_{2,6n}\}$ . Наконец, рутинными вычислениями можно проверить, что тождество  $\mathbf{v}_{1,6n} \approx \mathbf{v}_{2,6n}$  выполнено в  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho])$ . Мы видим, что множество  $\{\mathbf{v}_{1,6n}, \mathbf{v}_{2,6n}\}$  яв-

ляется  $\text{FIC}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]))$ -классом. Аналогичным образом можно показать, что множество  $\{\mathbf{v}_{0,6n-1}, \mathbf{v}_{0,6n-2}\}$  также представляет собой  $\text{FIC}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]))$ -класс.

Положим

$$\mathbf{X} := \mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{0,6n} \approx \mathbf{v}_{2,6n}\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} := \mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{0,6n} \approx \mathbf{v}_{0,6n-2}\}$$

и  $A := \{\mathbf{v}_{0,6n}, \mathbf{v}_{1,6n}, \mathbf{v}_{2,6n}\}$ . Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in A$ . Проверим, что  $\mathbf{u}' \in A$ . В силу предложения 1.1, без ограничения общности мы можем считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho])$ , либо непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_{0,6n} \approx \mathbf{v}_{2,6n}$ . В силу сказанного выше,  $A$  является объединением  $\text{FIC}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,n}[\rho]))$ -классов. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из  $\mathbf{v}_{0,6n} \approx \mathbf{v}_{2,6n}$ , т.е. найдутся такие слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$ , что  $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}'\} = \{\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{0,6n})\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{2,6n})\mathbf{b}\}$ .

Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_{0,6n}) = \varphi(\mathbf{v}_{2,6n})$  и потому  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , откуда  $\mathbf{u}' \in A$ . Остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(x) \neq 1$ . Ясно, что  $t_i, t'_i, t''_i \notin \text{alph}(\varphi(x))$  для любого  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , поскольку  $t_i, t'_i, t''_i \in \text{sim}(\mathbf{u})$ , в то время как  $x \in \text{mul}(\mathbf{v}_{0,6n}) = \text{mul}(\mathbf{v}_{2,6n})$ . Заметим также, что буквы вида  $z_i, z'_i$  и  $z''_i$  не могут входить в запись слова  $\varphi(x)$ , так как первое и второе вхождения этих букв в слово  $\mathbf{u}$  лежат в различных блоках этого слова, в то время как первое и второе вхождения буквы  $x$  в слова  $\mathbf{v}_{0,6n}$  и  $\mathbf{v}_{2,6n}$  располагаются в одном и том же блоке. Следовательно,  $\varphi(x) \in x^+$ . Поскольку  $\text{occ}_x(\mathbf{u}) = \text{occ}_x(\mathbf{v}_{0,6n}) = \text{occ}_x(\mathbf{v}_{2,6n}) = 2$ , имеем  $\varphi(x) = x$ . Отсюда следует, что  $x \notin \text{alph}(\varphi(z_i z'_i z''_i t_i t'_i t''_i))$  для любого  $i = 1, 2, \dots, 2n$ . Ясно, что  $t_i, t'_i, t''_i \notin \text{alph}(\varphi(z_j z'_j z''_j))$  для любых  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , поскольку  $t_i, t'_i, t''_i \in \text{sim}(\mathbf{u})$ , в то время как  $z_j, z'_j, z''_j \in \text{mul}(\mathbf{v}_{0,6n}) = \text{mul}(\mathbf{v}_{2,6n})$ . Заметим также, что для любого  $i = 1, 2, \dots, n$  слова  $\varphi(z_i)$ ,  $\varphi(z'_i)$  и  $\varphi(z''_i)$  либо пусты, либо являются буквами, поскольку любое подслово слова  $\mathbf{u}$  длины  $> 1$  входит в слово  $\mathbf{u}$  в точности один раз. Отсюда следует, что

$$\{\varphi(z_i), \varphi(z'_i), \varphi(z''_i) \mid 1 \leq i \leq 2n\} \subseteq \{1\} \cup \{z_i, z'_i, z''_i \mid 1 \leq i \leq 2n\}. \quad (3.59)$$

В силу сказанного выше, если  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{2,6n})\mathbf{b}$ , то  $\mathbf{u}' = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{0,6n})\mathbf{b} \in A$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{0,6n})\mathbf{b}$  и  $\mathbf{u}' = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{2,6n})\mathbf{b}$ . Поскольку  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\ell, 2n}$  для некоторого  $\ell \in \{0, 1, 2\}$ , имеем  $\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{q}[\ell; 6n - \ell]$ .

Если  $\ell = 0$ , то, поскольку, в силу включения (3.59), слова  $\varphi(z_{1\rho})$  и  $\varphi(z_{2\rho})$  либо пусты, либо являются буквами, имеем  $\mathbf{u}' \in A$ .

Предположим, что  $\ell = 1$ . Тогда  $\varphi(z_{1\rho}) = 1$ , так как слово  $\varphi(z_{1\rho})$  не может совпадать с буквой  $z_{2\rho}$ . Если  $\varphi(z_{2\rho}) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{v}_{0,6n}) = \varphi(\mathbf{v}_{2,6n})$  и потому  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , откуда  $\mathbf{u}' \in A$ . Если  $\varphi(z_{2\rho}) \neq 1$ , то  $\varphi(z_{2\rho}) = z_{2\rho}$  в силу включения (3.59). Из сказанного следует, что  $\mathbf{u}' = \mathbf{v}_{2,6n}$  и потому  $\mathbf{u}' \in A$ .

Предположим теперь, что  $\ell = 2$ . Тогда множество

$$\{z_{i_1}, z'_{i_2}, z''_{i_3} \mid 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n\} \setminus \{z_{1\rho}\} \quad (3.60)$$

является подмножеством множества

$$\{\varphi(z_{i_1}), \varphi(z'_{i_2}), \varphi(z''_{i_3}) \mid 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n\}$$

в силу включения (3.59) и, более того, множества (3.60) и  $\{\varphi(t_i), \varphi(t'_i), \varphi(t''_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$  не пересекаются. Если  $\varphi(z_{1\rho}) = 1$ , то  $\varphi(z_{2\rho}) = 1$ , так как  $\varphi(z_{2\rho}) \neq z'_{1\rho}$ . В этом случае  $\varphi(\mathbf{v}_{0,6n}) = \varphi(\mathbf{v}_{2,6n})$  и потому  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , откуда  $\mathbf{u}' \in A$ . Таким образом, мы можем считать, что  $\varphi(z_{1\rho}) \neq 1$ . Тогда  $\varphi(z_{1\rho}) = z'_{1\rho}$  в силу включения (3.59). Возможны два случая:

- (a)  $1\rho < (2n - 1)\rho$ ;
- (b)  $(2n - 1)\rho < 1\rho$ .

Предположим, что выполнено условие (a). Тогда множество

$$\{z_{i_1}, z'_{i_2}, z''_{i_3} \mid 1 \leq i_1 \leq n, 1\rho + 1 \leq i_2, i_3 \leq n\} \setminus \{z_{1\rho}\}$$

обязано быть подмножеством множества

$$\{\varphi(z_{i_1}), \varphi(z'_{i_2}), \varphi(z''_{i_3}) \mid 1\rho + 1 \leq i_1, i_3 \leq n, (2n - 1)\rho + 1 \leq i_2 \leq n\}.$$

Однако это также невозможно, поскольку первое из этих множеств состоит из  $(n-1)+2 \cdot (n-1\rho)$  элементов, а второе — содержит не более, чем  $(n - (2n - 1)\rho) + 2 \cdot (n - 1\rho)$  элементов и, в силу условия (3.58),  $1 < (2n - 1)\rho$ .

Предположим теперь, что выполнено условие (b). Тогда множество

$$\{z_{i_1}, z'_{i_2}, z''_{i_3} \mid 1 \leq i_1 \leq n, 1 \leq i_2, i_3 \leq 1\rho\} \setminus \{z_{1\rho}\}$$

обязано быть подмножеством множества

$$\{\varphi(z_{i_1}), \varphi(z'_{i_2}), \varphi(z''_{i_3}) \mid 1 \leq i_1, i_3 \leq 1\rho, 1 \leq i_2 \leq (2n - 1)\rho\}.$$

Однако это также невозможно, поскольку первое из этих множеств состоит из  $(n - 1) + 2 \cdot (1\rho)$  элементов, а второе — содержит не более, чем  $(2n - 1)\rho + 2 \cdot (1\rho)$  элементов и, в силу условия (3.58),  $(2n - 1)\rho < 1\rho < n$ .

Мы видим, что в любом случае  $\mathbf{u}' \in A$ . Это означает, что множество  $A$  является FIC( $\mathbf{X}$ )-классом. Аналогичным образом можно показать, что множество  $\{\mathbf{v}_{0,6n}, \mathbf{v}_{0,6n-1}, \mathbf{v}_{0,6n-2}\}$  есть FIC( $\mathbf{Y}$ )-класс. Отсюда следует, что слово  $\mathbf{v}_{0,6n}$  есть изотерм для  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . Положим  $\mathbf{Z} := \mathbf{M}(\mathbf{v}_{0,6n}) = \mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{3n,3n}[\tau])$ . В силу леммы 1.3,  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . Следовательно,  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет  $\hat{\mathbf{a}}_{k,k}[\pi] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{k,k}[\pi]$  для любых  $k = 1, 2, \dots, 3n - 1$  и  $\pi \in \mathcal{S}_{k,k}$ . Тогда  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{v}_{0,6n} \approx \mathbf{v}_{0,0}$ , поскольку тождество  $\mathbf{v}_{0,6n} \approx \mathbf{v}_{2,6n}$  выполнено в  $\mathbf{X}$ , тождество  $\mathbf{v}_{2,6n} \approx \mathbf{v}_{2,2}$  вытекает из некоторого тождества вида  $\hat{\mathbf{a}}_{3n-1,3n-1}[\pi] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{3n-1,3n-1}[\pi]$ , а тождество  $\mathbf{v}_{2,2} \approx \mathbf{v}_{0,0}$  является следствием тождества (3.44). Аналогичным образом можно показать, что тождество  $\mathbf{v}_{0,6n} \approx \mathbf{v}_{0,0}$  выполнено

также в многообразии  $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}$ . Следовательно, многообразии  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{v}_{0,6n} \approx \mathbf{v}_{0,0}$ . Мы видим, что слово  $\mathbf{v}_{0,6n}$  не является изотермом для последнего многообразия, откуда

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}.$$

Таким образом, мы доказали, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho]))$  не является дистрибутивной.  $\square$

Следующее утверждение обобщает предложение 3.54.

**Предложение 3.55.** *Если многообразие  $\mathbf{V}$  порождается некоторым моноидом из класса  $\mathbf{K}$ , то решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{V})$  не является дистрибутивной.*

*Доказательство.* Согласно условию, найдутся  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{n,m}$  такие, что в  $\mathbf{V}$  нарушается тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ . Выберем среди всех таких пар  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  такую, чтобы сумма  $n + m$  была наименьшей. Ясно, что  $n + m \geq 1$ .

Если  $M(xzxytu) \notin \mathbf{V}$ , то, по лемме 1.23, в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\sigma_3$ . В этом случае,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] &= \mathbf{h}_1 x \mathbf{h}_2 x \mathbf{h}_3 \stackrel{\sigma_3}{\approx} \mathbf{h}_1 x \mathbf{h}_4 \mathbf{h}_5 x \mathbf{h}_3 \stackrel{\sigma_3}{\approx} \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_4 x^2 \mathbf{h}_5 \mathbf{h}_3 \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_4 x^3 \mathbf{h}_5 \mathbf{h}_3 \\ &\stackrel{\sigma_3}{\approx} \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_4 x \mathbf{h}_5 x^2 \mathbf{h}_3 \stackrel{(3.6)}{\approx} \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_4 \mathbf{h}_5 x^2 \mathbf{h}_3 \stackrel{\sigma_3}{\approx} \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 x^2 \mathbf{h}_3 = \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho], \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{h}_1 := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right), \quad \mathbf{h}_2 := \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_i \rho \right), \quad \mathbf{h}_3 := \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right), \quad \mathbf{h}_4 := \left( \prod_{1 \leq i \rho \leq n} z_i \rho \right), \quad \mathbf{h}_5 := \left( \prod_{n < i \rho \leq n+m} z_i \rho \right).$$

Но это противоречит выбору  $n, m$  и  $\rho$ . Следовательно,  $M(xzxytu) \in \mathbf{V}$ .

Если  $M(\hat{\mathbf{a}}_{i,j}[\pi]) \in \mathbf{V}$  для некоторых  $(i, j) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\pi \in S_{i,j}$ , то требуемое утверждение следует из леммы 3.54. Таким образом, далее мы можем считать, что  $M(\hat{\mathbf{a}}_{i,j}[\rho]) \notin \mathbf{V}$  для всех  $(i, j) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\rho \in S_{i,j}$ . В частности,  $M(\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho]) \notin \mathbf{V}$ . В силу леммы 1.3, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \mathbf{a}$ . Поскольку, по лемме 1.3, слово  $xzxytu$  является изотермом для  $\mathbf{V}$ , легко видеть, что  $\mathbf{a}_x = (\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho])_x$ . Если  $\text{occ}_x(\mathbf{a}) > 2$  или  $x^2$  — подслово слова  $\mathbf{a}$ , то из леммы 3.40 вытекает, что  $m > 0$  и  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  для некоторого  $n + 1 \leq r \leq n + m$ . Пусть теперь  $\text{occ}_x(\mathbf{a}) \leq 2$  и слово  $x^2$  не является подсловом слова  $\mathbf{a}$ . Тогда  $\text{occ}_x(\mathbf{a}) = 2$ , так как  $x$  — изотерм для многообразия  $\mathbf{V}$ . Если  $(1_a x) < (1_a t_n)$ , то  $(\ell_a x) < (1_a t_n)$ , поскольку  $xux$  — изотерм для многообразия  $\mathbf{V}$ . В этом случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.44) и, по лемме 3.39, тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ , что противоречит выбору  $n, m$  и  $\rho$ . Следовательно,  $(1_a t_n) < (1_a x)$ . Аналогичным образом можно показать, что  $(\ell_a x) < (1_a t_{n+1})$ . Тогда мы можем без ограничения общности считать, что  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}_{n,m}^{p,q}[\rho]$  для некоторых  $0 < p < q \leq n + m$ , так как  $x^2$  не является подсловом слова  $\mathbf{a}$ , а тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \mathbf{a}$  нетривиально. Ясно, что слово  $(\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho])_Z$ , где

$$Z := \{z_i \rho, t_i \rho \mid i \in \{1, 2, \dots, p, q + 1, q + 2, \dots, n + m\}\}$$

совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\hat{\mathbf{a}}_{c,d}[\pi]$  для некоторых  $(c, d) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$  и  $\pi \in S_{c,d}$  таких, что  $c + d = q - p$ . В силу выбора  $n, m$  и  $\rho$ , тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{c,d}[\pi] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{c,d}[\pi]$  выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ . Отсюда вытекает, что многообразие обязано удовлетворять тождеству  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}_{n,m}^{p,q}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}_{n,m}^{q,q}[\rho]$ . Поскольку в  $\mathbf{V}$  нарушается тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ , из леммы 3.40(i) вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  для некоторых  $n + 1 \leq r \leq n + m$ . Таким образом, мы доказали, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет этому тождеству в любом случае. Пусть  $r$  — наименьшее натуральное число такое, что тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . В частности, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.5), но не удовлетворяет тождеству  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  для любого  $j = n + 1, n + 2, \dots, r$ .

Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{V}$ , то, по лемме 1.28, в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (3.31). Тогда  $\mathbf{V}$  также удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] &\approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho] \stackrel{(3.31)}{\approx} \mathbf{h}_1 x \mathbf{h}_2 x^2 \left( \prod_{i=n+1}^{r-1} t_i z_i \right) (t_r x^2 z_r) \left( \prod_{i=r+1}^{n+m} t_i z_i \right) \\ &\approx \mathbf{h}_1 x \mathbf{h}_2 x^2 \mathbf{h}_3 \stackrel{\{(3.6), (3.12)\}}{\approx} \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho], \end{aligned}$$

что противоречит выбору  $n, m$  и  $\rho$ . Следовательно,  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ .

Предположим, что  $n + m \leq 2$ . Тогда  $m = 1$  и  $n \in \{0, 1\}$ , так как  $(n, m) \in \hat{\mathbb{N}}_0^2$ . Если  $n = 1$ , то легко видеть, что тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  является следствием системы

$$\{(3.5), (3.30), (3.43), \hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]\}.$$

В силу выбора чисел  $n, m$ , тождество (3.43) выполнено в  $\mathbf{V}$ , что противоречит предположению, что в  $\mathbf{V}$  нарушается тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ . Следовательно, случай, когда  $n = 1$ , невозможен. Аналогичным образом можно показать, что  $n$  не может быть равно 0. Откуда  $n + m > 2$ .

Возможны четыре случая:

- $n = m$  и  $1 \leq 1\rho \leq n$ ;
- $n = m$  и  $n + 1 \leq 1\rho \leq n + m$ ;
- $n = m + 1$  и потому  $1 \leq 1\rho \leq n$ ;
- $n = m - 1$  и потому  $n + 1 \leq 1\rho \leq n + m$ .

Мы рассмотрим только первый из них, поскольку остальные рассматриваются вполне аналогично. В рассматриваемом случае  $n = m \geq 2$ ,  $1 \leq i\rho \leq n$  и  $n + 1 \leq (i + 1)\rho \leq n + m$  для любого  $i = 1, 3, \dots, n + m - 1$ .

Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &:= \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 2] y \mathbf{q}[2; n + m + 2] x \mathbf{q}[n + m + 4; 2] y \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_1 &:= \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 2] y \mathbf{q}[2; n + m + 2] x^2 \mathbf{q}[n + m + 4; 2] y \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_2 &:= \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 2] y \mathbf{q}[2; n + m + 2] x \mathbf{q}[n + m + 4; 2] y^2 \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_3 &:= \mathbf{p} x \mathbf{q}[0; 2] y \mathbf{q}[2; n + m + 2] x^2 \mathbf{q}[n + m + 4; 2] y^2 \mathbf{r}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &:= \psi_{n,m}^{(n+m-1)\rho} \left( \psi_{n,m}^{1\rho} \left( zt \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \right) \right), \\ \mathbf{q} &:= z'_{1\rho} z'_{2\rho} z_{1\rho} z_{2\rho} z z' \left( \prod_{i=3}^{n+m} z_i \rho \right) z'_{(n+m-1)\rho} z'_{(n+m)\rho}, \\ \mathbf{r} &:= \psi_{n,m}^{(n+m)\rho} \left( \psi_{n,m}^{2\rho} \left( \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right) t' z' \right) \right),\end{aligned}$$

и  $\psi_{n,m}^i : X \rightarrow X^*$  — подстановка, определяемая следующей формулой:

$$\psi_{n,m}^i(v) := \begin{cases} t_i z'_i t'_i, & \text{если } v = t_i \text{ и } 1 \leq i \leq n, \\ t'_i z'_i t_i, & \text{если } v = t_i \text{ и } n+1 \leq i \leq n+m, \\ v, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим

$$\mathbf{X} := \mathbf{V} \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1\}, \quad \mathbf{Y} := \mathbf{V} \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_2\}, \quad \mathbf{Z} := \mathbf{V} \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_3\}.$$

Через  $\mathbf{v}_1$  обозначим множество всех слов  $\mathbf{w}$  таких, что

- (a)  $\mathbf{w}_{\{x,y\}} = \mathbf{pqr}$ ;
- (b) первые два вхождения букв  $x$  и  $y$  в слово  $\mathbf{w}$  входят в тот же блок этого слова, что и  $2\mathbf{w}z$ ;
- (c)  $(2\mathbf{w}z'_{1\rho}) < (1\mathbf{w}y) < (2\mathbf{w}z_{1\rho})$  и  $(1\mathbf{w}z'_{(n+m)\rho}) < (2\mathbf{w}y)$ ;
- (d) между  $2\mathbf{w}y$  и  $1\mathbf{w}t_r$  нет вхождений буквы  $y$ .

Проверим, что множество  $\mathbf{v}_1$  стабильно относительно  $\mathbf{X}$ . Для этого возьмем произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_1$ . Требуется показать, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_1$ . В силу леммы 1.3 и следствия 1.8(ii), множества  $\{xzxyty\}$  и  $xux^+$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Легко видеть, что эти два множества также стабильны относительно  $\text{var}\{\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1\}$ . Следовательно, множества  $\{xzxyty\}$  и  $xux^+$  являются стабильными относительно многообразия  $\mathbf{X}$ . Из сказанного следует, что  $\mathbf{u}'_{\{x,y\}} = \mathbf{pqr}$  и первые два вхождения букв  $x$  и  $y$  в  $\mathbf{u}'$  лежат в том же блоке слова  $\mathbf{u}'$ , что и буква  $2\mathbf{u}'z$ . В силу предложения 1.1, мы можем без ограничения общности считать тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{V}$ , либо непосредственно следует из  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ .

Предположим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Положим  $\mathbf{w}_1 := \mathbf{u}(Z_1)$  и  $\mathbf{w}'_1 := \mathbf{u}'(Z_1)$ , где

$$Z_1 := \{y, z_{i\rho}, t_{i\rho} \mid 1 \leq i \leq n+m\}.$$

Поскольку  $\mathbf{u} \in \hat{\mathbf{v}}_1$ , слово  $\text{ini}_2(\mathbf{w}_1)$  совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho]$  и между  $2\mathbf{w}_1y$  и  $1\mathbf{w}_1t_r$  нет вхождений буквы  $y$ . Тогда тождество  $\text{ini}_2(\mathbf{w}_1) \approx \mathbf{w}_1$  вытекает из тождества  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}_{n,m}^r[\rho]$ . Откуда получаем, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\text{ini}_2(\mathbf{w}_1) \approx \mathbf{w}'_1$ . В силу выбора  $n$ ,  $m$ ,  $\rho$  и  $r$ , из сказанного следует, что  $\text{ini}_2(\mathbf{w}'_1) = \text{ini}_2(\mathbf{w}_1)$  и между  $2\mathbf{w}'_1y$  и  $1\mathbf{w}'_1t_r$

нет вхождений буквы  $y$ . Отсюда вытекает, что  $(1u'y) < (2u'z_{1\rho})$  и между  $2u'y$  и  $1u't_r$  нет вхождений буквы  $y$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\text{ini}_2(\mathbf{u}(Z_2)) = \text{ini}_2(\mathbf{u}'(Z_2))$  и  $\text{ini}_2(\mathbf{u}(Z_3)) = \text{ini}_2(\mathbf{u}'(Z_3))$ , где

$$\begin{aligned} Z_2 &:= \{y, z'_{1\rho}, t'_{1\rho}, z_{i\rho}, t_{i\rho} \mid 2 \leq i \leq n+m\}, \\ Z_3 &:= \{y, z'_{(n+m)\rho}, t'_{(n+m)\rho}, z_{i\rho}, t_{i\rho} \mid 1 \leq i \leq n+m-1\}. \end{aligned}$$

Откуда  $(2u'z_{1\rho}) < (1u'y)$  и  $(1u'z'_{(n+m)\rho}) < (2u'y)$ . Следовательно,  $\mathbf{u}' \in v_1$ .

Предположим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ , т.е. найдутся слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_s)\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_t)\mathbf{b})$ , где  $\{s, t\} = \{0, 1\}$ . Заметим сначала, что если  $a$  и  $b$  — различные буквы из множества

$$Z_4 := \{z, z', z'_{1\rho}, z'_{2\rho}, z'_{(n+m-1)\rho}, z'_{(n+m)\rho}, z_{1\rho}, z_{2\rho}, \dots, z_{(n+m)\rho}\},$$

то слово  $ab$  может встречаться в качестве под слова в слове  $\mathbf{u}$  не более одного раза. Отсюда следует, что

(\*) для любой буквы  $v \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ , если  $\text{alph}(\varphi(v)) \cap Z_4 \neq \emptyset$ , то слово  $(\varphi(v))_{\{x,y\}}$  является буквой.

Если  $y \notin \text{alph}(\varphi(x))$ , то  $\mathbf{u}' \in \hat{v}_1$ , так как в этом случае применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  не изменит расположения вхождений буквы  $y$  в слово  $\mathbf{u}$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $y \in \text{alph}(\varphi(x))$ . Ясно, что никакая буква из множества

$$\{t, t', t'_{1\rho}, t'_{2\rho}, t'_{(n+m-1)\rho}, t'_{(n+m)\rho}, t_{1\rho}, t_{2\rho}, \dots, t_{(n+m)\rho}\}$$

не может входить в  $\varphi(x)$ , так как все буквы из этого множества являются простыми в слове  $\mathbf{u}$ , в то время как  $x \in \text{mul}(\mathbf{v}_s) = \text{mul}(\mathbf{v}_t)$ . Далее, никакая буква из множества  $Z_4$  также не входит в  $\varphi(x)$  потому, что первое и второе вхождения любой такой буквы лежат в различных блоках слова  $\mathbf{u}$ , в то время как все вхождения буквы  $x$  располагаются в одном блоке слова  $\mathbf{v}_s$ . Таким образом,  $\{y\} \subseteq \text{alph}(\varphi(x)) \subseteq \{x, y\}$ . Если образ буквы  $1v_sx$  относительно подстановки  $\varphi$  не содержит  $1u$ , то  $\mathbf{u}' \in \hat{v}_1$ , так как в этом случае применение тождества  $\mathbf{v}_s \approx \mathbf{v}_t$  не изменит расположение первых трех вхождений буквы  $y$  в слово  $\mathbf{u}$ . Предположим теперь, что образ буквы  $1v_sx$  относительно подстановки  $\varphi$  содержит  $1u$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $s = 0$  и образ буквы  $2v_sx$  относительно подстановки  $\varphi$  содержит  $2u$ . Применим теперь условие (\*) и получим, что множество  $Z_4 \setminus \{z'_{1\rho}, z'_{2\rho}\}$  является подмножеством множества

$$\left\{ (\varphi(z))_x \mid z \in Z_4 \setminus \{z'_{(n+m-1)\rho}, z'_{(n+m)\rho}\} \right\}.$$

Поскольку эти два множества равномощны, это возможно лишь в том случае, когда они равны. Откуда

$$\begin{aligned} (\varphi(z'_{1\rho}))_x &= z_{1\rho}, \quad (\varphi(z'_{2\rho}))_x = z_{2\rho}, \quad (\varphi(y))_x = 1, \\ (\varphi(z_{1\rho}))_x &= z, \quad (\varphi(z_{2\rho}))_x = z', \quad (\varphi(z))_x = z_{3\rho}. \end{aligned}$$

Но это противоречит тому, что  $(1_{v_s}z) < (1_{v_s}z_{1\rho})$  и  $(1_u z) < (1_u z_{3\rho})$ . Следовательно, случай, когда  $y \in \text{alph}(\varphi(x))$  невозможен и потому  $\mathbf{u}' \in v_1$ .

Мы видим, что множество  $v_1$  стабильно относительно  $\mathbf{X}$ . Аналогичным образом можно проверить стабильность относительно многообразия  $\mathbf{Y}$  множества  $v_2$  всех слов  $\mathbf{w}$  таких, что выполняются условия (a) и (b) и

$$(c') \quad (1_{\mathbf{w}}x) < (2_{\mathbf{w}}z'_{1\rho}) \text{ и } (2_{\mathbf{w}}x) < (1_{\mathbf{w}}z'_{(n+m)\rho});$$

(d') между  $2_{\mathbf{w}}x$  и  $1_{\mathbf{w}}t_r$  нет вхождений буквы  $x$ .

Тогда множество  $v_1 \cap v_2$  является стабильным относительно  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно установить стабильность множества  $v_1 \cap v_2$  относительно  $\mathbf{Z}$ . Следовательно, это множество стабильно относительно  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}$ . Ясно, что в многообразии  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$  выполнено тождество  $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_3$ . Отсюда следует нестабильность множества  $v_0$  относительно последнего многообразия, откуда

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z}.$$

Таким образом, мы доказали, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{V})$  не является дистрибутивной.  $\square$

### 3.4.3. Многообразия, индуцированные словами вида $c_{n,m,k}[\rho]$

**Предложение 3.56.** *Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,n}[\rho]]^\lambda))$  не является модулярной для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_n$ .*

*Доказательство.* Легко видеть, что

(★) для любых  $q \in \mathbb{N}$  и  $\theta \in S_q$  множества  $xzyx^+ty^+$  и  $xx^+yty^+$  стабильны относительно  $\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,q}[\theta]]^\lambda)$ .

Для любых  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\theta \in S_p$  и  $q, r \in \{1, 2, \dots, p+1\}$  определим перестановку  $\theta_{q,r} \in S_{p+1}$  следующим образом:

- для любого  $i = 1, 2, \dots, q-1$ ,

$$i\theta_{q,r} := \begin{cases} i\theta, & \text{если } i\theta < r, \\ i\theta + 1, & \text{если } r \leq i\theta, \end{cases}$$

- $q\theta_{q,r} := r$ ;
- для любого  $i = q+1, q+2, \dots, p+1$ ,

$$i\theta_{q,r} := \begin{cases} (i-1)\theta, & \text{если } (i-1)\theta < r, \\ (i-1)\theta + 1, & \text{если } r \leq (i-1)\theta. \end{cases}$$

Если  $\theta \in S_q$ , то для краткости положим  $\mathbf{c}_q[\theta] := (\mathbf{c}_{0,0,q}[\theta])_{\{y_1, y_{q-1}\}}$ ,  $\mathbf{c}'_q[\theta] := (\mathbf{c}'_{0,0,q}[\theta])_{\{y_1, y_{q-1}\}}$  и  $\mathbf{c}_q[\theta] := [\mathbf{c}_q[\theta]]^\lambda$ .

Пусть также  $k := n + 2$ ,  $\pi := (\rho_{2,n+1})_{n+1,1}$  и  $\tau := (\rho_{2,1})_{n+1,n+2}$ . Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,n}[\rho]]^\lambda)$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{c}_k[\pi]$ . Тогда из условия  $(\star)$  следует, что

$$\mathbf{v} \in \mathbf{c} t x^+ z_{1\pi} \left( \prod_{i=2}^{k-2} z_{i\pi} y_i y_i^+ \right) z_{(k-1)\pi} z_{k\pi} y^+ \left( \prod_{i=1}^k t_i z_i \right),$$

где  $\mathbf{c} \in \{xy, ux\}$ . Согласно определению, слово  $(\mathbf{c}_{0,0,k}[\pi])_{Z_1}$ , где

$$Z_1 := \{y_2, y_{k-2}, z_1, z_k, t_2, t_k\},$$

совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\mathbf{c}_{0,0,n}[\rho]$ . Тогда из леммы 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}_{Z_1} \in [\mathbf{u}_{Z_1}]^\lambda$ . В частности,  $\mathbf{c} = xy$ . Таким образом,  $\mathbf{v} \in \mathbf{c}_k[\pi]$ . Мы видим, что множество  $\mathbf{c}_k[\pi]$  стабильно относительно  $\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,n}[\rho]]^\lambda)$ . Аналогичным образом можно показать стабильность множества  $\mathbf{c}_k[\tau]$  относительно  $\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,n}[\rho]]^\lambda)$ . Тогда моноиды  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\pi])$  и  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\tau])$  лежат в многообразии  $\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,n}[\rho]]^\lambda)$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что моноиды  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\pi])$  и  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\tau])$  удовлетворяют тождествам  $\mathbf{c}_k[\tau] \approx \mathbf{c}'_k[\tau]$  и  $\mathbf{c}_k[\pi] \approx \mathbf{c}'_k[\pi]$  соответственно. Таким образом, мы доказали, что многообразие  $\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,n}[\rho]]^\lambda)$  содержит два несравнимых подмногообразия  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\pi])$  и  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\tau])$ . Из этого факта и леммы 1.6 вытекает, что достаточно установить немодулярность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\pi], \mathbf{c}_k[\tau]))$ .

Для любых  $\xi, \eta \in S_2$  определим слово:

$$\mathbf{v}_{\xi,\eta} := a_1 b_1 x_{1\xi} x_{2\xi} x'_{1\eta} x'_{2\eta} b_2 a_2 \mathbf{tr} \mathbf{s},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &:= x_1 z'_{1\pi} a_1 \left( \prod_{i=2}^{k-2} z'_{i\pi} (y'_i)^2 \right) z'_{(k-1)\pi} b_2 z'_{k\pi} x_2 z_{1\tau} \left( \prod_{i=2}^{k-2} z_{i\tau} y_i^2 \right) z_{(k-1)\tau} z_{k\tau} \\ &\quad \cdot x'_1 z''_{1\pi} b_1 \left( \prod_{i=2}^{k-2} z''_{i\pi} (y''_i)^2 \right) z''_{(k-1)\pi} a_2 z''_{k\pi} x'_2, \\ \mathbf{s} &:= \left( \prod_{i=1}^k t_i z_i \right) \left( \prod_{i=1}^k t'_i z'_i \right) \left( \prod_{i=1}^k t''_i z''_i \right). \end{aligned}$$

Положим  $\mathbf{v}_{\xi,\eta} := [\mathbf{v}_{\xi,\eta}]^\lambda$ . Через  $\varepsilon$  [соответственно  $\nu$ ] будем обозначать тривиальную [единственную нетривиальную] перестановку в  $S_2$ . Нам потребуются два вспомогательных утверждения.

**Лемма 3.57.** *Множество  $\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\nu,\varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon,\nu} \cup \mathbf{v}_{\nu,\nu}$  является  $\text{FIC}(\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\tau]))$ -классом.*

*Доказательство.* Рутинными вычислениями можно проверить, что, если  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\nu,\varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon,\nu} \cup \mathbf{v}_{\nu,\nu}$ , то в моноиде  $\mathbf{M}_\lambda(\mathbf{c}_k[\tau])$  выполнено тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ . Пусть  $\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}(\mathbf{c}_{n,m,k+2}[\tau])$ . Тогда из условия  $(\star)$  следует, что  $\mathbf{v} \in [\mathbf{v}'\mathbf{qr}]^\lambda$ , где  $\mathbf{v}'$  — линейное слово такое, что  $\text{alph}(\mathbf{v}') = \{a_1, a_2, b_1, b_2, x_1, x_2, x'_1, x'_2\}$ . Поскольку слово

$(\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon})(Z_2)$ , где

$$Z_2 := \{a_1, b_1, t\} \cup \{y_j, z_i, t_i \mid 1 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k-2\},$$

совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\mathbf{c}_k[\tau]$ , из леммы 1.5 вытекает, что  $({}_{1\mathbf{v}}a_1) < ({}_{1\mathbf{v}}b_1)$ . Аналогичным образом можно показать, что

$$\begin{aligned} ({}_{1\mathbf{v}}b_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}x_1), & ({}_{1\mathbf{v}}b_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}x_2), & ({}_{1\mathbf{v}}x_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}x'_1), \\ ({}_{1\mathbf{v}}x_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}x'_2), & ({}_{1\mathbf{v}}x_2) &< ({}_{1\mathbf{v}}x'_1), & ({}_{1\mathbf{v}}x_2) &< ({}_{1\mathbf{v}}x'_2), \\ ({}_{1\mathbf{v}}x'_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}b_2), & ({}_{1\mathbf{v}}x'_2) &< ({}_{1\mathbf{v}}b_2), & ({}_{1\mathbf{v}}b_2) &< ({}_{1\mathbf{v}}a_2). \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{\xi, \eta}$  для некоторых перестановок  $\xi, \eta \in S_2$ , что и требовалось показать.  $\square$

**Лемма 3.58.** Пусть  $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \in S_2$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\xi, \eta}$  и  $\mathbf{v} \notin \mathbf{v}_{\xi, \eta}$ . Если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1} \approx \mathbf{v}_{\xi_2, \eta_2}$ , то  $\{\mathbf{v}_{\xi, \eta}, [\mathbf{v}]^\lambda\} = \{\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}, \mathbf{v}_{\xi_2, \eta_2}\}$ .

*Доказательство.* Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1} \approx \mathbf{v}_{\xi_2, \eta_2}$ , существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1})\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{\xi_2, \eta_2})\mathbf{b}).$$

В силу леммы 3.57,  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{\xi', \eta'}$  для некоторых  $\xi', \eta' \in S_2$ . Поскольку  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\xi, \eta}$  и  $\mathbf{v} \notin \mathbf{v}_{\xi, \eta}$ , получаем, что  $(\xi, \eta) \neq (\xi', \eta')$ . В силу симметрии мы можем считать, что  $\xi \neq \xi'$ . Тогда первые вхождения букв  $x_1$  и  $x_2$  появляются в различном порядке в словах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Это возможно лишь в том случае, когда выполнено одно из следующих утверждений:

- $\xi_1 \neq \xi_2$  и образ буквы  ${}_{1\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}}x_{i\xi_1}$  относительно подстановки  $\varphi$  содержит букву  ${}_{1\mathbf{u}}x_{i\xi}$ ,  $i = 1, 2$ ;
- $\eta_1 \neq \eta_2$  и образ буквы  ${}_{1\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}}x'_{i\eta_1}$  относительно подстановки  $\varphi$  содержит букву  ${}_{1\mathbf{u}}x_{i\xi}$ ,  $i = 1, 2$ .

Заметим, что если  $a$  и  $b$  — различные буквы, то слово  $ab$  входит в слово  $\mathbf{u}$  в качестве подслово не более одного раза. Отсюда вытекает, что

(\*) для любой буквы  $c \in \text{mul}(\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1})$  слово  $\varphi(c)$  является либо пустым, либо степенью буквы.

Поскольку первый блок слова  $\mathbf{u}$  есть линейное слово, из этого факта вытекает, что выполнено одно из следующих двух утверждений:

- (a)  $\xi_1 \neq \xi_2$ ,  $\varphi(x_{1\xi_1}) = \varphi(x_{2\xi_2}) = x_{1\xi}$  и  $\varphi(x_{2\xi_1}) = \varphi(x_{1\xi_2}) = x_{2\xi}$ ;
- (b)  $\eta_1 \neq \eta_2$ ,  $\varphi(x'_{1\eta_1}) = \varphi(x'_{2\eta_2}) = x_{1\xi}$  и  $\varphi(x'_{2\eta_1}) = \varphi(x'_{1\eta_2}) = x_{2\xi}$ .

Предположим, что выполнено условие (a). В этом случае вторые вхождения букв  $x_{1\xi_1}$  и  $x_{2\xi_1}$  появляются в слове  $\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}$  в том же порядке, что и вторые вхождения букв  $x_{1\xi}$  и  $x_{2\xi}$  в

**u.** Отсюда следует, что  $(1\xi_1, 2\xi_1) = (1\xi, 2\xi)$ , откуда  $\xi_1 = \xi$ . Тогда

$$\varphi\left(z'_{1\pi} a_1 \left(\prod_{i=2}^{k-2} z'_{i\pi} (y'_i)^2\right) z'_{(k-1)\pi} b_2 z'_{k\pi}\right) \in z'_{1\pi} a_1 a_1^+ \left(\prod_{i=2}^{k-2} z'_{i\pi} y'_i (y'_i)^+\right) z'_{(k-1)\pi} b_2 b_2^+ z'_{k\pi}.$$

Из условия (\*) и того факта, что первый блок слова **u** является линейным словом, следует, с что  $\varphi(a_1) = a_1$ ,  $\varphi(b_2) = b_2$  и  $\varphi(z'_{i\pi}) = z'_{i\pi}$  для любого  $i = 1, \dots, k$ . Тогда

$$\varphi(b_1 x_{1\xi_1} x_{2\xi_1} x'_{1\eta_1} x'_{2\eta_1}) = b_1 x_{1\xi} x_{2\xi} x'_{1\eta} x'_{2\eta}.$$

Применим условие (\*) еще раз и получим, что  $\varphi(b_1) = b_1$  и  $\varphi(x'_{i\eta_1}) = x'_{i\eta}$ ,  $i = 1, 2$ . Ясно, что вторые вхождения букв  $x'_{1\eta_1}$  и  $x'_{2\eta_1}$  должны появляться в слове  $\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}$  в том же порядке, что и вторые вхождения букв  $x'_{1\eta}$  и  $x'_{2\eta}$  в **u**. Отсюда следует, что  $(1\eta_1, 2\eta_1) = (1\eta, 2\eta)$ , а значит  $\eta_1 = \eta$ . Тогда **u**  $\in \mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}$ , **v**  $\in \mathbf{v}_{\xi_2, \eta_2}$  и потому  $\{\mathbf{v}_{\xi, \eta}, [\mathbf{v}]^\lambda\} = \{\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}, \mathbf{v}_{\xi_2, \eta_2}\}$ .

Предположим, что выполнено условие (b). В этом случае вторые вхождение букв  $x'_{1\eta_1}$  и  $x'_{2\eta_1}$  обязаны появляться в слове  $\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}$  в том же порядке, что и вторые вхождения букв  $x_{1\xi}$  и  $x_{2\xi}$  в **u**. Отсюда следует, что  $(1\eta_1, 2\eta_1) = (1\xi, 2\xi)$ , а значит  $\eta_1 = \xi$ . Тогда

$$\varphi\left(z''_{1\pi} b_1 \left(\prod_{i=2}^{k-2} z''_{i\pi} (y''_i)^2\right) z''_{(k-1)\pi} a_2 z''_{k\pi}\right) \in z'_{1\pi} a_1 a_1^+ \left(\prod_{i=2}^{k-2} z'_{i\pi} y'_i (y'_i)^+\right) z'_{(k-1)\pi} b_2 b_2^+ z'_{k\pi}.$$

Из условия (\*) и того факта, что первый блок слова **u** есть линейное слово, следует, что  $\varphi(b_1) = a_1$  и  $\varphi(a_2) = b_2$ . Тогда

$$\varphi(x_{1\xi_1} x_{2\xi_1} x'_{1\eta_1} x'_{2\eta_1} b_2) = b_1 x_{1\xi} x_{2\xi} x'_{1\eta} x'_{2\eta}.$$

Применим еще раз условие (\*) и получим, что  $\varphi(x'_{2\eta_1}) = x'_{1\eta}$ . Но это противоречит условию (b). Поэтому условие (b) невозможно.

Лемма 3.65 доказана. □

Вернемся к доказательству предложения 3.56. Положим

$$\mathbf{X} := \mathbf{M}_\lambda(c_k[\pi], c_k[\tau]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon}, \mathbf{v}_{\varepsilon, \nu} \approx \mathbf{v}_{\nu, \nu}\},$$

$$\mathbf{Y} := \mathbf{M}_\lambda(c_k[\pi], c_k[\tau]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\nu, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\nu, \nu}\},$$

$$\mathbf{Z} := \mathbf{M}_\lambda(c_k[\pi], c_k[\tau]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\varepsilon, \nu}, \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\nu, \nu}\}.$$

Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в **X** такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon}$ . Проверим, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon}$ . В силу предложения 1.1, мы можем без ограничения общности считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{M}_\lambda(c_k[\pi], c_k[\tau])$ , либо непосредственно следует из  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon}$  или из  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \nu} \approx \mathbf{v}_{\nu, \nu}$ . В силу леммы 3.65,  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  не может непосредственно следовать из  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \nu} \approx \mathbf{v}_{\nu, \nu}$  и, если  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  является непосредственным следствием тождества  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon}$ , то  $\{[\mathbf{u}]^\lambda, [\mathbf{u}']^\lambda\} \subseteq \{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon}, \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon}\}$ . Следовательно, остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  выполняется в  $\mathbf{M}_\lambda(c_k[\pi], c_k[\tau])$ . Из леммы 3.57 вытекает, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon, \nu} \cup \mathbf{v}_{\nu, \nu}$ .

Если  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \nu} \cup \mathbf{v}_{\nu, \nu}$ , то тождество  $\mathbf{u}(\mathbf{Z}) \approx \mathbf{u}'(\mathbf{Z})$  эквивалентно по модулю (1.4) тождеству  $\mathbf{c}_k[\pi] \approx \mathbf{c}'_k[\pi]$ , где

$$\mathbf{Z} := \{x'_1, x'_2, t, y''_j, z''_i, t''_i \mid 1 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k-2\}.$$

Но это невозможно, поскольку, по лемме 1.5, последнее тождество нарушается в моноиде  $M_\lambda(\mathbf{c}_k[\pi], \mathbf{c}_k[\tau])$ . Мы видим, что в любом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon}$  и потому множество  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\nu, \varepsilon}$  является  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -классом. Аналогичным образом можно показать, что множества  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon}$  и  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon, \nu}$  образуют  $\text{FIC}(\mathbf{Y})$ -класс и  $\text{FIC}(\mathbf{Z})$ -класс соответственно. Отсюда следует стабильность  $\lambda$ -класса  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon}$  относительно многообразия  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{Y}$ . Ясно, что оба многообразия  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  удовлетворяют тождеству  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\varepsilon, \nu}$ . Следовательно,  $\lambda$ -класс  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon}$  не является стабильным относительно  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z}$ . Поскольку  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Y}$ , имеем

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z} \subset (\mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{Y}.$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,n}[\rho]]^\lambda))$  не является модулярной.  $\square$

**Предложение 3.59.** *Решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,n+m+1}[\rho]))$  и  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau]))$  не являются модулярными для всех  $n, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\rho \in S_{n+m,n+m+1}$  и  $\tau \in S_{n+m}$ .*

*Доказательство.* Для всех  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\theta \in S_p$  и  $q, r \in \{1, 2, \dots, p+1\}$ , определим перестановку  $\theta_{q,r} \in S_{p+1}$  по тому же правилу, что и в доказательстве предложения 3.56.

Положим  $k =: n + m + 1$  и  $\pi =: (\rho_{1,k})_{2k+1, 2k+1}$ . Пусть  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi] \approx \hat{\mathbf{c}}$  — произвольное тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\rho])$ . Очевидно, что моноид  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho])$  содержит изоморфную копию моноида  $M(xyx)$  в качестве подмоноида. Тогда из леммы 1.21 вытекает, что

$$\hat{\mathbf{c}} = \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \hat{\mathbf{c}}' t \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i \right) \hat{\mathbf{c}}'' \left( \prod_{i=n+m+1}^{2k+1} t_i z_i \right),$$

где  $\hat{\mathbf{c}}'$  и  $\hat{\mathbf{c}}''$  — линейные слова такие, что

$$\text{alph}(\hat{\mathbf{c}}') = \{x, y\} \quad \text{и} \quad \text{alph}(\hat{\mathbf{c}}'') = \{x, y, z_1, z_2, \dots, z_{2k+1}\}.$$

Пусть  $1 \leq p \leq 2k$ . Очевидно, что слово  $xz_x t y$  есть изотерм для многообразия  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho])$ . Тогда если  $n + m < p\pi$ ,  $(p+1)\pi$ , то  $(1\hat{\mathbf{c}}'' z_{p\pi}) < (1\hat{\mathbf{c}}'' z_{(p+1)\pi})$ . Далее, поскольку  $k > 0$ , можно показать, что любое нетривиальное тождество вида  $xz_x t y u \approx \mathbf{v}$  влечет некоторое нетривиальное тождество вида  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{w}$ , откуда следует, что слово  $xz_x t y u$  является изотермом для  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho])$ . Отсюда вытекает, то если  $p\pi \leq n + m < (p+1)\pi$  или  $(p+1)\pi \leq n + m < p\pi$ , то  $(1\hat{\mathbf{c}}'' z_{p\pi}) < (1\hat{\mathbf{c}}'' z_{(p+1)\pi})$ . Случай, когда  $p\pi, (p+1)\pi \leq n + m$  невозможен в силу определения перестановки  $\pi$  и того факта, что  $\rho \in S_{n+m,n+m+1}$ . Мы видим, что в любом случае  $(1\hat{\mathbf{c}}'' z_{p\pi}) < (1\hat{\mathbf{c}}'' z_{(p+1)\pi})$ . Аналогичным образом можно показать, что  $(1\hat{\mathbf{c}}'' x) < (1\hat{\mathbf{c}}'' z_{1\pi})$  и  $(1\hat{\mathbf{c}}'' z_{(2k+1)\pi}) < (1\hat{\mathbf{c}}'' y)$ . Откуда  $\hat{\mathbf{c}}'' = xz_{1\pi} z_{2\pi} \cdots z_{(2k+1)\pi} y$ .

Далее, по определению слово  $(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi])_Z$ , где

$$\mathbf{Z} := \{z_{1\pi}, z_{(2k+1)\pi}, t_{1\pi}, t_{(2k+1)\pi}\},$$

совпадает (с точностью до переименования переменных) со словом  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho]$ . Тогда из леммы 1.3 следует, что  $\hat{\mathbf{c}}_Z = (\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi])_Z$ . В частности,  $\hat{\mathbf{c}}' = xу$ . Таким образом,  $\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi]$ . Мы видим, что слово  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi]$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho])$ . Аналогичным образом можно показать, что если  $\tau = (\rho_{1,2k})_{2k+1,k}$ , то слово  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau]$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho])$ . Тогда моноиды  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi])$  и  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$  лежат в многообразии  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho])$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что в моноидах  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi])$  и  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$  выполнены тождества  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,k+2}[\tau]$  и  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,k+2}[\pi]$  соответственно. Таким образом, мы доказали, что многообразии  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho])$  содержит два несравнимых подмногообразия  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi])$  и  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$ . Отсюда и из леммы 1.6 следует, что достаточно установить немодулярность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi], \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau]))$ .

Для произвольных  $\xi, \eta \in S_2$  определим слово:

$$\mathbf{v}_{\xi,\eta} := \mathbf{p} a_1 b_1 x_1 \xi x_2 \xi y_1 \eta y_2 \eta b_2 a_2 \mathbf{q} \mathbf{r} \mathbf{s},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^n z'_i t'_i \right) \left( \prod_{i=1}^n z''_i t''_i \right), \\ \mathbf{q} &:= t \left( \prod_{i=n+1}^{k-1} z_i t_i \right) \left( \prod_{i=n+1}^{k-1} z'_i t'_i \right) \left( \prod_{i=n+1}^{k-1} z''_i t''_i \right), \\ \mathbf{r} &:= x_1 z'_{1\pi} a_1 \left( \prod_{i=2}^{2k} z'_i \pi \right) b_2 z'_{(2k+1)\pi} x_2 \left( \prod_{i=1}^{2k+1} z_i \tau \right) y_1 z''_{1\pi} b_1 \left( \prod_{i=2}^{2k} z''_i \pi \right) a_2 z''_{(2k+1)\pi} y_2, \\ \mathbf{s} &:= \left( \prod_{i=k}^{2k+1} t_i z_i \right) \left( \prod_{i=k}^{2k+1} t'_i z'_i \right) \left( \prod_{i=k}^{2k+1} t''_i z''_i \right). \end{aligned}$$

Через  $\varepsilon$  будем обозначать тривиальную перестановку в  $S_2$ . Нам потребуется два вспомогательных утверждения.

**Лемма 3.60.** *Множество  $\{\mathbf{v}_{\xi,\eta} \mid \xi, \eta \in S_2\}$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau]))$ -класс.*

*Доказательство.* Рутинными вычислениями можно проверить, что тождество  $\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1} \approx \mathbf{v}_{\xi_2, \eta_2}$  выполняется в многообразии  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$  для любых  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \in S_2$ . Пусть  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в моноиде  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$ . Поскольку  $M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$  содержит изоморфную копию моноида  $M(xуx)$  в качестве подмоноида, из леммы 1.21 вытекает, что  $\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{v}'\mathbf{q}\mathbf{r}'$ , где  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{r}'$  — линейные слова такие, что

$$\text{alph}(\mathbf{v}') = \{a_1, a_2, b_1, b_2, x_1, x_2, y_1, y_2\} \quad \text{и} \quad \text{alph}(\mathbf{r}) = \text{alph}(\mathbf{r}').$$

Далее, рассуждения, аналогичные рассуждениям из второго абзаца доказательства предложения 3.59 показывают, что все буквы входят в запись слова  $\mathbf{r}'$  в том же порядке, что и в запись слова  $\mathbf{r}$  и потому  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ . Поскольку слово  $(\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon})_Z$ , где

$$Z := \{a_1, b_1, t\} \cup \{z_i, t_i \mid 1 \leq i \leq 2k+1\},$$

совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau]$ , из леммы 1.3 следует, что  $({}_{1\mathbf{v}}a_1) < ({}_{1\mathbf{v}}b_1)$ . Аналогичным образом можно показать, что

$$\begin{aligned}({}_{1\mathbf{v}}b_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}x_1), & ({}_{1\mathbf{v}}b_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}x_2), & ({}_{1\mathbf{v}}x_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}y_1), \\({}_{1\mathbf{v}}x_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}y_2), & ({}_{1\mathbf{v}}x_2) &< ({}_{1\mathbf{v}}y_1), & ({}_{1\mathbf{v}}x_2) &< ({}_{1\mathbf{v}}y_2), \\({}_{1\mathbf{v}}y_1) &< ({}_{1\mathbf{v}}b_2), & ({}_{1\mathbf{v}}y_2) &< ({}_{1\mathbf{v}}b_2), & ({}_{1\mathbf{v}}b_2) &< ({}_{1\mathbf{v}}a_2).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\xi,\eta}$  для некоторых  $\xi, \eta \in S_2$ . Таким образом, множество  $\{\mathbf{v}_{\xi,\eta} \mid \xi, \eta \in S_2\}$  является  $\text{FIC}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau]))$ -классом.  $\square$

**Лемма 3.61.** Пусть  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \in S_2$ . Если нетривиальное тождество вида  $\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon} \approx \mathbf{v}$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1} \approx \mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2}$ , то  $\{\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon}, \mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1}, \mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2}\}$ .

*Доказательство.* Поскольку  $\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon} \approx \mathbf{v}$  непосредственно следует из  $\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1} \approx \mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2}$ , существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$  такие, что  $\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1})\mathbf{b}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2})\mathbf{b}$ . Далее, из леммы 3.60 вытекает, что  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\xi,\eta}$  для некоторых  $\xi, \eta \in S_2$ . Поскольку тождество  $\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon} \approx \mathbf{v}$  не является тривиальным,  $(\xi, \eta) \neq (\varepsilon, \varepsilon)$ . В силу симметрии мы можем считать, что  $\xi \neq \varepsilon$ . Тогда  $({}_{1\mathbf{v}}x_2) < ({}_{1\mathbf{v}}x_1)$ . Это возможно лишь в том случае, когда выполнено одно из следующих условий:

- $\xi_1 \neq \xi_2$ ,  $x_1 \in \text{alph}(\varphi(x_{1\xi_1}))$  и  $x_2 \in \text{alph}(\varphi(x_{2\xi_1}))$ ;
- $\eta_1 \neq \eta_2$ ,  $x_1 \in \text{alph}(\varphi(y_{1\eta_1}))$  и  $x_2 \in \text{alph}(\varphi(y_{2\eta_1}))$ .

Заметим, что любое подслово длины  $> 1$  слова  $\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon}$  имеет единственное вхождение в это слово. Следовательно,

(\*) для любой буквы  $c \in \text{mul}(\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1})$  слово  $\varphi(c)$  является либо буквой, либо пустым словом.

Отсюда вытекает, что выполнено одно из следующих утверждений:

- (a)  $\xi_1 \neq \xi_2$ ,  $\varphi(x_{1\xi_1}) = \varphi(x_{2\xi_2}) = x_1$  и  $\varphi(x_{2\xi_1}) = \varphi(x_{1\xi_2}) = x_2$ ;
- (b)  $\eta_1 \neq \eta_2$ ,  $\varphi(y_{1\eta_1}) = \varphi(y_{2\eta_2}) = x_1$  и  $\varphi(y_{2\eta_1}) = \varphi(y_{1\eta_2}) = x_2$ .

Пусть выполнено условие (a). Поскольку  $({}_{2\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon}}x_1) < ({}_{2\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon}}x_2)$ , мы имеем  $({}_{2\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1}}x_{1\xi_1}) < ({}_{2\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1}}x_{2\xi_1})$ . Отсюда следует, что  $(1\xi_1, 2\xi_1) = (1, 2)$ , а значит  $\xi_1 = \varepsilon$ . Тогда

$$\varphi\left(z'_{1\pi}a_1\left(\prod_{i=2}^{2k} z'_{i\pi}\right)b_2z'_{(2k+1)\pi}\right) = z'_{1\pi}a_1\left(\prod_{i=2}^{2k} z'_{i\pi}\right)b_2z'_{(2k+1)\pi}.$$

Из условия (\*) вытекает, что  $\varphi(a_1) = a_1$ ,  $\varphi(b_2) = b_2$  и  $\varphi(z'_{i\pi}) = z'_{i\pi}$  для любых  $i = 1, 2, \dots, 2k+1$ . Тогда

$$\varphi(b_1x_{1\xi_1}x_{2\xi_1}y_{1\eta_1}y_{2\eta_1}) = b_1x_1x_2y_1y_2.$$

Снова применим условие (\*) и получим, что  $\varphi(b_1) = b_1$  и  $\varphi(y_i) = y_{i\eta_1}$  для любого  $i = 1, 2$ . Поскольку  $({}_{2\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon}}y_1) < ({}_{2\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon}}y_2)$ , имеем  $({}_{2\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1}}y_{1\eta_1}) < ({}_{2\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1}}y_{2\eta_1})$ . Отсюда следует, что  $(1\eta_1, 2\eta_1) = (1, 2)$ , а значит  $\eta_1 = \varepsilon$ . Тогда  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2}$  и потому  $\{\mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon}, \mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1}, \mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2}\}$ .

Пусть выполнено условие (b). Поскольку  $(2v_{\varepsilon, \varepsilon} x_1) < (2v_{\varepsilon, \varepsilon} x_2)$ , мы имеем  $(2v_{\xi_1, \eta_1} y_{1\eta_1}) < (2v_{\xi_1, \eta_1} y_{2\eta_1})$ . Отсюда следует, что  $(1\eta_1, 2\eta_1) = (1, 2)$ , а значит  $\eta_1 = \varepsilon$ . Тогда

$$\varphi\left(z''_{1\pi} b_1 \left(\prod_{i=2}^{2k} z''_{i\pi}\right) a_2 z''_{(2k+1)\pi}\right) = z'_{1\pi} a_1 \left(\prod_{i=2}^{2k} z'_{i\pi}\right) b_2 z'_{(2k+1)\pi}.$$

В силу условия (\*),  $\varphi(b_1) = a_1$  и  $\varphi(a_2) = b_2$ . Тогда

$$\varphi(x_{1\xi_1} x_{2\xi_1} y_{1\eta_1} y_{2\eta_1} b_2) = b_1 x_1 x_2 y_1 y_2.$$

Снова применим условие (\*) и получим, что  $\varphi(y_{2\eta_1}) = y_1$ . Но это противоречит условию (b). Следовательно это условие выполняться не может.

Лемма 3.61 доказана. □

Вернемся к доказательству предложения 3.59. Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &:= \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi], \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \approx \mathbf{v}_4\}, \\ \mathbf{Y} &:= \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi], \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_4\}, \\ \mathbf{Z} &:= \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi], \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau]) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{v}_4\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ . Проверим, что  $\mathbf{u}' \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ . В силу предложения 1.1, мы можем без ограничения общности считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi], \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$ , либо непосредственно следует из  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$  или  $\mathbf{v}_3 \approx \mathbf{v}_4$ . В силу леммы 3.61,  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  не может непосредственно следовать из  $\mathbf{v}_3 \approx \mathbf{v}_4$  и, если  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  является непосредственным следствием тождества  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$ , то  $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}'\} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ . Следовательно, остается рассмотреть случай, когда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  выполнено в  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi], \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$ . Из леммы 3.60 вытекает, что  $\mathbf{u}' \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ . Если  $\mathbf{u}' \in \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ , то тождество  $\mathbf{u}(Z) \approx \mathbf{u}'(Z)$ , где  $Z := \{y_1, y_2, t\} \cup \{z''_i, t'_i \mid 1 \leq i \leq 2k+1\}$ , совпадает (с точностью до переименования переменных) с тождеством  $\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,k+2}[\pi]$ . Но это невозможно, поскольку, в силу леммы 1.3, последнее тождество нарушается в многообразии  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\pi], \hat{\mathbf{c}}_{n,m,k+2}[\tau])$ . Мы видим, что в любом случае  $\mathbf{u}' \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  и потому множество  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  является FIC( $\mathbf{X}$ )-классом. Аналогичным образом можно показать, что множество  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$  является FIC( $\mathbf{Z}$ )-классом, а слово  $\mathbf{v}_1$  есть изотерм для  $\mathbf{Y}$ . Из сказанного следует, что множество  $\mathbf{v}_1$  является изотермом для  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{Y}$ . Ясно, что многообразия  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  удовлетворяют тождеству  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_3$ . Следовательно, слово  $\mathbf{v}_1$  не является изотермом для  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z}$ . Поскольку  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Y}$ , имеем

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z} \subset (\mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{Y}.$$

Таким образом, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,n+m+1}[\rho]))$  не является модулярной. Вполне аналогичным образом можно установить отсутствие модулярности в решетке  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau]))$ ; соответствующие выкладки мы опускаем. □

**Предложение 3.62.** *Решетки*

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L} \left( \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_n^{(1)}[\pi_1, \tau]]^{\gamma'}) \right), \quad \mathfrak{L} \left( \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_n^{(2)}[\pi_2, \tau]]^{\gamma'}) \right), \\ & \mathfrak{L} \left( \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_n^{(3)}[\pi_3, \tau]]^{\gamma'}) \right), \quad \mathfrak{L} \left( \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_n^{(4)}[\pi_4, \tau]]^{\gamma'}) \right) \end{aligned}$$

не являются модулярными для всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_1 \in S_{4n+1}$ ,  $\pi_2 \in S_{n+1}$ ,  $\pi_3, \pi_4 \in S_{2n+1}$  и  $\tau \in S_{2n}$ .

*Доказательство.* Мы рассмотрим только многообразие  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_n^{(1)}[\pi, \tau]]^{\gamma'})$ ; для остальных трех многообразий доказательство вполне аналогично и мы опустим его.

Рассуждая как во доказательстве предложения 3.56, можно показать, что многообразие  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_n^{(1)}[\pi, \tau]]^{\gamma'})$  содержит два несравнимых подмногообразия  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_1, \tau_1]]^{\gamma'})$  и  $\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_2, \tau_2]]^{\gamma'})$ , где  $k := n + 2$ ,  $\pi_1, \pi_2 \in S_{4k+1}$  и  $\tau_1, \tau_2 \in S_{2k}$ . В силу этого утверждения и леммы 1.6, достаточно установить, что решетка  $\mathfrak{L} \left( \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_1, \tau_1]]^{\gamma'}, [\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_2, \tau_2]]^{\gamma'}) \right)$  не является модулярной.

Для любых  $\xi, \eta \in S_2$  положим

$$\mathbf{v}_{\xi, \eta} := \mathbf{p} a_1 b_1 x_{1\xi} x_{2\xi} x'_{1\eta} x'_{2\eta} b_2 a_2 \mathbf{qrs},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= \left( \prod_{i=1}^k t_i^{(2)} z_i^{(2)} \right) \left( \prod_{i=1}^k t_i^{(4)} z_i^{(4)} \right) \left( \prod_{i=1}^k t_i^{(6)} z_i^{(6)} \right), \\ \mathbf{q} &:= t \left( \prod_{i=k+1}^{2k} z_i^{(2)} t_i^{(2)} \right) \left( \prod_{i=k+1}^{2k} z_i^{(4)} t_i^{(4)} \right) \left( \prod_{i=k+1}^{2k} z_i^{(6)} t_i^{(6)} \right), \\ \mathbf{r} &:= x_1 z_{1\pi_1}^{(3)} a_1 \hat{z}_{1\pi_1}^{(3)} (y_1^{(3)})^2 z_{2\pi_1}^{(3)} z_{1\tau_1}^{(4)} \left( \prod_{i=2}^{2k} z_{(2i-1)\pi_1}^{(3)} (y_i^{(3)})^2 z_{(2i)\pi_1}^{(3)} z_{i\tau_1}^{(4)} \right) \hat{z}_{(4k+1)\pi_1}^{(3)} \\ &\quad \cdot b_2 z_{(4k+1)\pi_1}^{(3)} x_2 \left( \prod_{i=1}^{2k} z_{(2i-1)\pi_2}^{(1)} (y_i^{(1)})^2 z_{(2i)\pi_2}^{(1)} z_{i\tau_2}^{(2)} \right) z_{(4k+1)\pi_2}^{(1)} x'_1 z_{1\pi_1}^{(5)} b_1 \\ &\quad \cdot \hat{z}_{1\pi_1}^{(5)} (y_1^{(5)})^2 z_{2\pi_1}^{(5)} z_{1\tau_1}^{(6)} \left( \prod_{i=2}^{2k} z_{(2i-1)\pi_1}^{(5)} (y_i^{(5)})^2 z_{(2i)\pi_1}^{(5)} z_{i\tau_1}^{(6)} \right) \hat{z}_{(4k+1)\pi_1}^{(5)} a_2 z_{(4k+1)\pi_1}^{(5)} x'_2, \\ \mathbf{s} &:= \left( \prod_{i=1}^{4k+1} t_i^{(1)} z_i^{(1)} \right) \left( \prod_{i=1}^{k'-1} t_i^{(3)} z_i^{(3)} \right) (t_{k'}^{(3)} z_{k'}^{(3)} \hat{t}_{k'}^{(3)} \hat{z}_{k'}^{(3)}) \left( \prod_{i=k'+1}^{k''-1} t_i^{(3)} z_i^{(3)} \right) (t_{k''}^{(3)} z_{k''}^{(3)} \hat{t}_{k''}^{(3)} \hat{z}_{k''}^{(3)}) \left( \prod_{i=k''+1}^{4k+1} t_i^{(3)} z_i^{(3)} \right) \\ &\quad \cdot \left( \prod_{i=1}^{k'-1} t_i^{(5)} z_i^{(5)} \right) (t_{k'}^{(5)} z_{k'}^{(5)} \hat{t}_{k'}^{(5)} \hat{z}_{k'}^{(5)}) \left( \prod_{i=k'+1}^{k''-1} t_i^{(5)} z_i^{(5)} \right) (t_{k''}^{(5)} z_{k''}^{(5)} \hat{t}_{k''}^{(5)} \hat{z}_{k''}^{(5)}) \left( \prod_{i=k''+1}^{4k+1} t_i^{(5)} z_i^{(5)} \right) \end{aligned}$$

и  $k' := \min(1\pi_1, (4k+1)\pi_1)$ ,  $k'' := \max(1\pi_1, (4k+1)\pi_1)$ . Определим также следующие три

многообразия:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &:= \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_1, \tau_1]]^{\gamma'}, [\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_2, \tau_2]]^{\gamma'}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{v, \varepsilon}, \mathbf{v}_{\varepsilon, v} \approx \mathbf{v}_{v, v}\}, \\ \mathbf{Y} &:= \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_1, \tau_1]]^{\gamma'}, [\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_2, \tau_2]]^{\gamma'}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{v, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{v, v}\}, \\ \mathbf{Z} &:= \mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_1, \tau_1]]^{\gamma'}, [\mathbf{c}_k^{(1)}[\pi_2, \tau_2]]^{\gamma'}) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\varepsilon, v}, \mathbf{v}_{v, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{v, v}\},\end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  [соответственно  $v$ ] обозначает тривиальную [единственную нетривиальную] перестановку в  $S_2$ . Тогда, используя те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 3.56, можно показать, что

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z} \subset (\mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{Y}.$$

Потому решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\gamma'}([\mathbf{c}_n^{(1)}[\pi, \tau]]^{\gamma'}))$  не является модулярной.  $\square$

**Предложение 3.63.** *Решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\gamma}(c_n))$  и  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_{\gamma}(c'_n))$  не являются модулярными для любого  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Доказательство.* Легко видеть, что  $\mathbf{M}_{\gamma}(c_{k+1}) \subseteq \mathbf{M}_{\gamma}(c_k)$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ . Это позволяет считать, что  $n \geq 3$ . Для всех  $\xi, \eta \in S_2$  положим

$$\mathbf{v}_{\xi, \eta} := a_1 b_1^2 a_2 b_2^2 x_{1\xi} x_{2\xi} b^2 y_{1\eta} y_{2\eta} b_3^2 a_3 b_4^2 a_4 \mathbf{q},$$

где

$$\mathbf{q} := tx_1 c_1^2 a_1 \left( \prod_{i=2}^{n-1} c_i^2 \right) a_3 c_n^2 x_2 c^2 y_1 d_1^2 a_2 \left( \prod_{i=2}^{n-1} d_i^2 \right) a_4 d_n^2 y_2.$$

Через  $\varepsilon$  [соответственно  $v$ ] обозначим тривиальную [единственную нетривиальную] подстановку в  $S_2$ . Положим также

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} &:= a_1^+ b_1 b_1^+ a_2^+ b_2 b_2^+ x_1^+ x_2^+ b b^+ y_1^+ y_2^+ b_3 b_3^+ a_3^+ b_4 b_4^+ a_4^+ \mathbf{q}, \\ \mathbf{v}_{v, \varepsilon} &:= a_1^+ b_1 b_1^+ a_2^+ b_2 b_2^+ \overline{x_1^+ x_2^+} b b^+ y_1^+ y_2^+ b_3 b_3^+ a_3^+ b_4 b_4^+ a_4^+ \mathbf{q}, \\ \mathbf{v}_{\varepsilon, v} &:= a_1^+ b_1 b_1^+ a_2^+ b_2 b_2^+ x_1^+ x_2^+ b b^+ \overline{y_1^+ y_2^+} b_3 b_3^+ a_3^+ b_4 b_4^+ a_4^+ \mathbf{q}, \\ \mathbf{v}_{v, v} &:= a_1^+ b_1 b_1^+ a_2^+ b_2 b_2^+ \overline{x_1^+ x_2^+} b b^+ \overline{y_1^+ y_2^+} b_3 b_3^+ a_3^+ b_4 b_4^+ a_4^+ \mathbf{q},\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{q} := tx_1^+ c_1 c_1^+ a_1^+ \left( \prod_{i=2}^{n-1} c_i c_i^+ \right) a_3^+ c_n c_n^+ x_2^+ c c^+ y_1^+ d_1 d_1^+ a_2^+ \left( \prod_{i=2}^{n-1} d_i d_i^+ \right) a_4^+ d_n d_n^+ y_2^+.$$

Заметим, что  $\mathbf{v}_{\xi, \eta} \in \mathbf{v}_{\xi, \eta}$  для любых  $\xi, \eta \in S_2$ . Нам потребуются следующие два вспомогательных утверждения.

**Лемма 3.64.** *Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}_{\gamma}(c_n) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\varepsilon, v} \approx \mathbf{v}_{v, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{v, v}\}$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{v, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon, v} \cup \mathbf{v}_{v, v}$ . Тогда  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{v, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon, v} \cup \mathbf{v}_{v, v}$ .*

*Доказательство.* Из очевидного включения

$$\mathbf{M}_{\gamma}(x^+ y u^+ t x^+) \vee \mathbf{M}_{\gamma}(x^+ t y u^+ x^+) \subseteq \mathbf{M}_{\gamma}(c_n) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\varepsilon, v} \approx \mathbf{v}_{v, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{v, v}\}$$

следует, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{M}_\gamma(x^+yu^+tx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x^+tyu^+x^+)$ . Стабильность  $\gamma$ -классов  $x^+tyu^+x^+$ ,  $x^+yu^+tx^+$  и  $xx^+yu^+$  относительно  $\mathbf{M}_\gamma(x^+yu^+tx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x^+tyu^+x^+)$  вытекает из следствия 1.8(i) и леммы 1.17. Используя это факт, рутинными вычислениями можно проверить, что  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{\varepsilon,\varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\nu,\varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon,\nu} \cup \mathbf{v}_{\nu,\nu}$ . Например,  $\mathbf{v}(a_1, b_1, t) \in a_1^+b_1b_1^+ta_1^+$ , так как  $\mathbf{u}(a_1, b_1, t) \in a_1^+b_1b_1^+ta_1^+$ . Однако  $\mathbf{v}(b_1, a_2) \in b_1b_1^+a_2a_2^+$ , поскольку  $\mathbf{u}(b_1, a_2) \in b_1b_1^+a_2a_2^+$ .  $\square$

**Лемма 3.65.** Пусть  $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \in S_2$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\xi,\eta}$  и  $\mathbf{v} \notin \mathbf{v}_{\xi,\eta}$ . Если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  непосредственно вытекает из тождества  $\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1} \approx \mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2}$ , то либо  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1}$  и  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2}$ , либо  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1}$  и  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2}$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1})\mathbf{b}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{v}_{\xi_2,\eta_2})\mathbf{b}$  для некоторых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и  $\varphi: X \rightarrow X^*$ . Тогда из леммы 3.64 следует, что  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{\xi',\eta'}$  для некоторых  $\xi', \eta' \in S_2$ . Поскольку  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\xi,\eta}$  и  $\mathbf{v} \notin \mathbf{v}_{\xi,\eta}$ , имеем  $(\xi, \eta) \neq (\xi', \eta')$ . В силу симметрии мы можем считать, что  $\xi \neq \xi'$  и, более того,  $(\xi, \xi') = (\varepsilon, \nu)$ . Тогда  $\mathbf{u}(x_1, x_2, t) \in x_1^+x_2^+tx_1^+x_2^+$  и  $\mathbf{v}(x_1, x_2, t) \in \overline{x_1^+x_2^+tx_1^+x_2^+}$ . Это возможно лишь в том случае, когда образ буквы  $t$  относительно подстановки  $\varphi$  содержит букву  $t$  и выполнено одно из следующих двух утверждений:

- (a)  $\xi_1 = \xi = \varepsilon$ ,  $\xi_2 = \xi' = \nu$  и  $\varphi(x_i) \in x_i^+$ ,  $i = 1, 2$ ;
- (b)  $\eta_1 = \xi = \varepsilon$ ,  $\eta_2 = \xi' = \nu$  и  $\varphi(y_i) \in x_i^+$ ,  $i = 1, 2$ .

Заметим также, что если  $x$  и  $y$  — различные буквы и  $xu$  входит в  $\mathbf{u}$  в качестве подслова более одного раза, то  $\{x, y\} = \{y_1, y_2\}$  и все такие подслова зажаты между буквами  $b$  и  $b_3$ . Поскольку  $t \in \text{alph}(\varphi(t))$ , из этого факта следует, что

- (\*) для любого  $\nu \in \text{mul}(\mathbf{v}_{\xi_1,\eta_1})$  слово  $\varphi(\nu)$  либо является пустым, либо есть степень некоторой буквы.

Предположим, что выполняется условие (a). Тогда

$$\varphi(c_1^2a_1c_2^2c_3^2 \cdots c_{n-1}^2a_3c_n^2) \in c_1c_1^+a_1^+c_2c_2^+c_3c_3^+ \cdots c_{n-1}c_{n-1}^+a_3^+c_nc_n^+.$$

Из условия (\*) следует, что  $\varphi(a_1) \in a_1^+$ ,  $\varphi(a_3) \in a_3^+$  и  $\varphi(c_i^2) \in c_ic_i^+$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$$\varphi(a_1b_1^2a_2b_2^2x_1x_2b^2y_{1\eta_1}y_{2\eta_1}b_3^2a_3) \in a_1^+b_1b_1^+a_2^+b_2b_2^+x_1^+x_2^+bb^+y_\eta b_3b_3^+a_3^+,$$

где

$$y_\eta := \begin{cases} y_1^+y_2^+ & \text{if } \eta = \varepsilon, \\ \overline{y_1^+y_2^+} & \text{if } \eta = \nu. \end{cases} \quad (3.61)$$

Снова применим условие (\*) и получим, что  $y_\eta = y_{1\eta}^+y_{2\eta}^+$  и

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) &\in b_1b_1^+, \quad \varphi(a_2) \in a_2^+, \quad \varphi(b_2) \in b_2b_2^+, \quad \varphi(b) \in bb^+, \\ \varphi(y_{1\eta_1}) &= y_{1\eta}^+, \quad \varphi(y_{2\eta_1}) \in y_{2\eta}^+, \quad \varphi(b_3) \in b_3b_3^+. \end{aligned}$$

Наконец, поскольку  $\mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}(y_1, y_2, t) \in y_{1\eta_1}^+ y_{2\eta_1}^+ t y_1^+ y_2^+$ , мы получаем, что  $\mathbf{u}(y_1, y_2, t) \in y_{1\eta_1}^+ y_{2\eta_1}^+ t y_1^+ y_2^+$ . Однако  $\mathbf{u}(y_1, y_2, t) \in y_{1\eta}^+ y_{2\eta}^+ t y_1^+ y_2^+$ . Отсюда следует, что  $\eta_1 = \eta$ . Таким образом,  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\xi_1, \eta_1}$  и  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_{\xi_2, \eta_2}$ .

Предположим, что выполнено условие (b). Тогда

$$\varphi(d_1^2 a_2 d_2^2 d_3^2 \cdots d_{n-1}^2 a_4 d_n^2) \in c_1 c_1^+ a_1^+ c_2 c_2^+ c_3 c_3^+ \cdots c_{n-1} c_{n-1}^+ a_3^+ c_n c_n^+.$$

Из условия (\*) вытекает, что  $\varphi(a_2) \in a_1^+$ ,  $\varphi(a_4) \in a_3^+$  и  $\varphi(d_i^2) \in c_i c_i^+$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$$\varphi(a_2 b_2^2 x_{1\xi_1} x_{2\xi_1} b^2 y_1 y_2 b_3^2 a_3 b_4^2 a_4) \in a_1^+ b_1 b_1^+ a_2^+ b_2 b_2^+ x_1^+ x_2^+ b b^+ y_\eta b_3 b_3^+ a_3^+,$$

где  $y_\eta$  — множество, задаваемое формулой (3.61). Снова применим условие (\*) и получим, что  $\varphi(y_2) \in b b^+$ . Но это противоречит условию (b). Таким образом, случай, когда выполнено условие (b), невозможен.  $\square$

Вернемся к доказательству предложения 3.63. Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &:= \mathbf{M}_\gamma(c_n) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{u, \varepsilon}, \mathbf{v}_{\varepsilon, v} \approx \mathbf{v}_{u, v}\}, \\ \mathbf{Y} &:= \mathbf{M}_\gamma(c_n) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{u, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{u, v}\}, \\ \mathbf{Z} &:= \mathbf{M}_\gamma(c_n) \wedge \text{var}\{\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\varepsilon, v}, \mathbf{v}_{u, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{u, v}\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в  $\mathbf{X}$  такое, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{u, \varepsilon}$ . Проверим, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{u, \varepsilon}$ . В силу предложения 1.1, без ограничения общности можно считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  либо выполнено в  $\mathbf{M}_\gamma(c_n)$ , либо непосредственно вытекает из  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{u, \varepsilon}$  или из  $\mathbf{v}_{\varepsilon, v} \approx \mathbf{v}_{u, v}$ . В силу леммы 3.65, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  не может непосредственно следовать из  $\mathbf{v}_{\varepsilon, v} \approx \mathbf{v}_{u, v}$  и, если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  непосредственно следует из  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{u, \varepsilon}$ , то  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{u, \varepsilon}$ . Следовательно, остается рассмотреть случай, когда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  выполнено в многообразии  $\mathbf{M}_\gamma(c_n)$ . В этом случае из леммы 3.64 вытекает, что  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{u, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon, v} \cup \mathbf{v}_{u, v}$ . Далее, рутинными вычислениями можно проверить, что в  $\mathbf{M}_\gamma(c_p)$  выполнены тождества

$$(xy)^2 \approx xy^2x \approx (yx)^2 \approx yx^2y \quad (3.62)$$

и (3.36) для любого  $r \in \mathbb{N}$ . Если  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, v} \cup \mathbf{v}_{u, v}$ , то тождество

$$\mathbf{u}(y_1, y_2, t, d_1, d_2, \dots, d_n) \approx \mathbf{u}'(y_1, y_2, t, d_1, d_2, \dots, d_n)$$

эквивалентно по модулю (3.36) и (3.62) тождеству  $\mathbf{c}_n \approx \mathbf{c}'_n$ . Но это невозможно, поскольку, по следствию 1.8(i), последнее тождество нарушается в  $\mathbf{M}_\gamma(c_p)$ . Мы видим, что в любом случае  $\mathbf{u}' \in \mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{u, \varepsilon}$  и, следовательно, множество  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{u, \varepsilon}$  является стабильным относительно  $\mathbf{X}$ . Аналогичным образом можно убедиться в стабильности множеств  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon}$  и  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \cup \mathbf{v}_{\varepsilon, v}$  относительно  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  соответственно. Отсюда следует стабильность  $\gamma$ -класса  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon}$  относительно  $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{Y}$ . Ясно, что оба многообразия  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  удовлетворяют тождеству  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon} \approx \mathbf{v}_{\varepsilon, v}$ . Следовательно,  $\gamma$ -класс  $\mathbf{v}_{\varepsilon, \varepsilon}$  не является стабильным относительно  $(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z}$ . Поскольку

$\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Y}$ , имеем

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z} \subset (\mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{Y}.$$

Таким образом, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\gamma(c_n))$  не является модулярной. Аналогичным образом устанавливается, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\gamma(c'_n))$  немодулярна.  $\square$

## § 3.5. Тождества, задающие многообразия

### 3.5.1. Короткие списки тождеств

**Предложение 3.66.** Любое некоммутативное многообразие моноидов, удовлетворяющее системе тождеств  $\{\Phi, \Phi_1, \Phi_2\}$ , можно задать тождествами из  $\{\Phi, \Phi_1, \Phi_2\}$  вместе с некоторыми из следующих тождеств: (1.1), где  $r \in \mathbb{N}$ ,  $e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ ; и

$$\left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) xy \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right) \approx \left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) yx \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right), \quad (3.63)$$

$$\left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) x^2 y \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right) \approx \left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) xyx \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right), \quad (3.64)$$

$$\left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) yx^2 \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right) \approx \left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) xyx \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right), \quad (3.65)$$

где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . При этом тождества вида (1.1) могут быть выбраны эффективными.

Чтобы доказать предложение 3.66, нам потребуются три вспомогательных результата.

**Лемма 3.67.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее  $\Phi_2$ . Если  $\mathbf{w} := \mathbf{p}x\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2x\mathbf{r}$  и  $\text{alph}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) \subseteq \text{mul}(\mathbf{w})$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p}x\mathbf{q}_1x\mathbf{q}_2x\mathbf{r}$ .

*Доказательство.* Если для любой кратной буквы в слове  $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2$ , каждый остров, образованный этой буквой, имеет длину  $> 1$ , то можно подобрать такие  $k, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in \mathcal{S}_{k+m}$ , что  $\mathbf{a}_{m,k}[\rho] \approx \bar{\mathbf{a}}_{m,k}[\rho]$  влечет  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p}x\mathbf{q}_1x\mathbf{q}_2x\mathbf{r}$ .

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда некоторая кратная буква в слове  $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2$  образует некоторый остров длины 1. Тогда найдется буква  $y_1 \in \text{alph}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)$  такая, что  $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}_1y_1\mathbf{v}_2y_1\mathbf{v}_3$  и, для любой буквы  $a \in \text{mul}(\mathbf{v}_2)$ , каждый остров, образованный буквой  $a$  в  $\mathbf{v}_2$  имеет длину  $> 1$ . Рассуждая как в предыдущем абзаце, легко видеть, что  $\mathbf{w} = \mathbf{p}x\mathbf{v}_1y_1\mathbf{v}_2y_1\mathbf{v}_3x\mathbf{r} \stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{p}x\mathbf{v}_1y_1^2\mathbf{v}_2y_1^2\mathbf{v}_3x\mathbf{r}$ . Иными словами, используя тождества из системы  $\Phi_2$ , мы можем заменить в слове  $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2$  обсуждаемые вхождения буквы  $y_1$  на квадрат этой буквы  $y_1^2$ . Повторяя эти рассуждения, мы можем заменить в слове  $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2$  все вхождения кратных букв на их квадраты, получив в результате некоторое слово  $\mathbf{q}'_1\mathbf{q}'_2$ . Рассуждая как в предыдущем абзаце, можно показать, что  $\Phi_2$  влечет  $\mathbf{p}x\mathbf{q}'_1\mathbf{q}'_2x\mathbf{r} \approx \mathbf{p}x\mathbf{q}'_1x\mathbf{q}'_2x\mathbf{r}$ . Используя тождества из системы  $\Phi_2$ , остается удалить добавленные ранее квадраты из  $\mathbf{q}'_1x\mathbf{q}'_2$ , получив в результате слово  $\mathbf{q}_1x\mathbf{q}_2$ . Таким образом, мы доказали, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p}x\mathbf{q}_1x\mathbf{q}_2x\mathbf{r}$ .  $\square$

**Лемма 3.68.** Пусть  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . Тогда тождество

$$\left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) x^2 y \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right) \approx \left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) y x^2 \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right) \quad (3.66)$$

эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  системе тождеств  $\{(3.64), (3.65)\}$ .

*Доказательство.* Принимая во внимание лемму 3.67, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{h} x^2 y \mathbf{t} &\stackrel{(3.64)}{\approx} \mathbf{h} x y x \mathbf{t} \stackrel{(3.65)}{\approx} \mathbf{h} y x^2 \mathbf{t}, \\ \mathbf{h} x^2 y \mathbf{t} &\stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{h} x^3 y \mathbf{t} \stackrel{(3.66)}{\approx} \mathbf{h} x y x^2 \mathbf{t} \stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{h} x y x \mathbf{t}, \\ \mathbf{h} y x^2 \mathbf{t} &\stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{h} y x^3 \mathbf{t} \stackrel{(3.66)}{\approx} \mathbf{h} x^2 y x \mathbf{t} \stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{h} x y x \mathbf{t}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{h} := \left( \prod_{i=1}^k a_i^{g_i} t_i \right) \text{ и } \mathbf{t} := \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^{g_i} \right).$$

Это означает, что тождество (3.66) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  множеству  $\{(3.64), (3.65)\}$ , что и требовалось показать.  $\square$

**Лемма 3.69.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее системе тождеств

$$\{\Phi_2, \mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho] \mid n, m, k \in \mathbb{N}, \rho \in S_{n+m+k}\}.$$

Если  $\mathbf{w} := \mathbf{p} x y \mathbf{q} x \mathbf{r} y \mathbf{s}$  и  $\text{alph}(\mathbf{r}) \subseteq \text{mul}(\mathbf{w})$ , то в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p} y \mathbf{q} x \mathbf{r} y \mathbf{s}$ .

*Доказательство.* В силу леммы 3.67, система тождеств  $\Phi_2$  влечет тождество  $\mathbf{p} x y \mathbf{q} x \mathbf{r} y \mathbf{s} \approx \mathbf{p} x y \mathbf{q} x \mathbf{r}' y \mathbf{s}$ , где слово  $\mathbf{r}'$  получается из слова  $\mathbf{r}$  заменой всех кратных букв на их квадраты. Далее, можно подобрать такие  $n, k, m \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_{n+k+m}$ , что тождество  $\mathbf{p} x y \mathbf{q} x \mathbf{r}' y \mathbf{s} \approx \mathbf{p} x y \mathbf{q} x \mathbf{r}' y \mathbf{s}$  будет вытекать из  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$ . Еще раз воспользуемся леммой 3.67 и получим, что  $\mathbf{p} x y \mathbf{q} x \mathbf{r}' y \mathbf{s} \stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{p} y \mathbf{q} x \mathbf{r} y \mathbf{s}$ . Таким образом,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p} y \mathbf{q} x \mathbf{r} y \mathbf{s}$ , что и требовалось показать.  $\square$

*Доказательство предложения 3.66.* Обозначим через  $\Sigma$  множество всевозможных тождеств вида (1.1), где  $r \in \mathbb{N}$ ,  $e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ , и всевозможных тождеств вида (3.63)–(3.65), где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . Пусть  $\mathbf{V}$  — произвольное некоммутативное подмногообразие многообразия

$$\mathbf{O}' := \text{var}\{\Phi, \Phi_1, \Phi_2\}.$$

Возьмем произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в  $\mathbf{V}$ . Проверим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{O}'$  некоторому подмножеству множества тождеств  $\Sigma$ .

В силу леммы 1.25,  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Пусть  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  — разложение слова  $\mathbf{u}$ . Из леммы 1.20 следует, что разложение слова  $\mathbf{u}'$  имеет вид  $\mathbf{u}'_0 t_1 \mathbf{u}'_1 \cdots t_m \mathbf{u}'_m$ . Согласно лемме 3.67,

используя тождества из системы  $\Phi_2$ , можно преобразовать слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}'$  к некоторым словам  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  соответственно, таким, что выполнены следующие утверждения:

- разложения слов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  имеют вид  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  и  $\mathbf{v}'_0 t_1 \mathbf{v}'_1 \cdots t_m \mathbf{v}'_m$  соответственно;
- $\text{occ}_x(\mathbf{v}_i), \text{occ}_x(\mathbf{v}'_i) \leq 2$  для любых  $x \in X$  и  $i = 0, 1, \dots, m$ .

В силу этого факта, достаточно установить, что тождество  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}'$  эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{O}'$  некоторому подмножеству множества  $\Sigma$ .

Возьмем произвольную букву  $x \in \text{mul}(\mathbf{v}) = \text{mul}(\mathbf{v}')$ . Очевидно, что

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i x^{c_i} \mathbf{q}_i x^{d_i} \mathbf{r}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{p}'_i x^{c'_i} \mathbf{q}'_i x^{d'_i} \mathbf{r}'_i$$

для некоторых слов  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}'_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}'_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i \in X^*$ , не содержащих букву  $x$ , где

$$c_i := \begin{cases} 1, & \text{если } \text{occ}_x(\mathbf{v}_i) > 0, \\ 0, & \text{если } \text{occ}_x(\mathbf{v}_i) = 0, \end{cases} \quad d_i := \begin{cases} 1, & \text{если } \text{occ}_x(\mathbf{v}_i) = 2, \\ 0, & \text{если } \text{occ}_x(\mathbf{v}_i) \leq 1, \end{cases}$$

$$c'_i := \begin{cases} 1, & \text{если } \text{occ}_x(\mathbf{v}'_i) > 0, \\ 0, & \text{если } \text{occ}_x(\mathbf{v}'_i) = 0, \end{cases} \quad d'_i := \begin{cases} 1, & \text{если } \text{occ}_x(\mathbf{v}'_i) = 2, \\ 0, & \text{если } \text{occ}_x(\mathbf{v}'_i) \leq 1, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, m$ . Для удобства положим  $t_0 := 1$ . В силу леммы 3.67, тождество

$$\mathbf{v}(x, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \mathbf{v}'(x, t_1, t_2, \dots, t_m) \quad (3.67)$$

вместе с системой  $\Phi_2$  влекут тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\stackrel{\Phi_2}{\approx} \left( \prod_{i=0}^m t_i \mathbf{p}_i x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}_i) + d_i} \mathbf{q}_i x^{d_i} \mathbf{r}_i \right) \stackrel{(3.67)}{\approx} \left( \prod_{i=0}^m t_i \mathbf{p}'_i x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}'_i) + d_i} \mathbf{q}'_i x^{d_i} \mathbf{r}'_i \right) \\ &\stackrel{\Phi_2}{\approx} \left( \prod_{i=0}^m t_i \mathbf{p}_i x^{h_i} \mathbf{q}_i x^{d_i} \mathbf{r}_i \right), \\ \mathbf{v}' &\stackrel{\Phi_2}{\approx} \left( \prod_{i=0}^m t_i \mathbf{p}'_i x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}'_i)} \mathbf{q}'_i x^{d'_i} \mathbf{r}'_i \right) \stackrel{(3.67)}{\approx} \left( \prod_{i=0}^m t_i \mathbf{p}'_i x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}_i)} \mathbf{q}'_i x^{d'_i} \mathbf{r}'_i \right) \\ &\stackrel{\Phi_2}{\approx} \left( \prod_{i=0}^m t_i \mathbf{p}'_i x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}_i) + 2d_i} \mathbf{q}'_i x^{d'_i} \mathbf{r}'_i \right) \stackrel{(3.67)}{\approx} \left( \prod_{i=0}^m t_i \mathbf{p}'_i x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}'_i) + 2d_i} \mathbf{q}'_i x^{d'_i} \mathbf{r}'_i \right) \\ &\stackrel{\Phi_2}{\approx} \left( \prod_{i=0}^m t_i \mathbf{p}'_i x^{h'_i} \mathbf{q}'_i x^{d'_i} \mathbf{r}'_i \right), \end{aligned}$$

где

$$h_i := \begin{cases} \text{occ}_x(\mathbf{v}'_i), & \text{если } d_i = 0, \\ 1, & \text{если } d_i = 1, \end{cases} \quad h'_i := \begin{cases} \text{occ}_x(\mathbf{v}'_i), & \text{если } d_i = d'_i = 0, \\ 1, & \text{если } d'_i = 1, \\ 2, & \text{если } d'_i = 0, d_i = 1, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, m$ . Заметим также, что  $h_i + d_i = h'_i + d'_i$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m$ . Поскольку буква  $x$

является произвольной, используя тождества из системы

$$\{\mathbf{v}(x, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \mathbf{v}'(x, t_1, t_2, \dots, t_m) \mid x \in \text{mul}(\mathbf{v}) = \text{mul}(\mathbf{v}')\} \quad (3.68)$$

вместе с тождествами из системы  $\Phi_2$ , можно преобразовать слова  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  к некоторым словам  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{w}'$  соответственно таким образом, что будут выполняться следующие два утверждения:

- разложения слов  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{w}'$  имеют вид  $\mathbf{w}_0 t_1 \mathbf{w}_1 \cdots t_m \mathbf{w}_m$  и  $\mathbf{w}'_0 t_1 \mathbf{w}'_1 \cdots t_m \mathbf{w}'_m$  соответственно;
- $\text{осс}_x(\mathbf{w}_i) = \text{осс}_x(\mathbf{w}'_i) \leq 2$  для всех  $x \in X$  и  $i = 0, 1, \dots, m$ .

Очевидно, что любое тождество вида (3.68) имеет вид (1.1). Откуда  $\mathbf{O}'\{\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'\} = \mathbf{O}'\{\Gamma, \mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\}$  для некоторого  $\Gamma \subseteq \Sigma$ . В силу этого факта, остается показать, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  эквивалентно внутри  $\mathbf{O}'$  некоторому подмножеству множества  $\Sigma$ .

В силу леммы 1.2, тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  является  $r$ -инвертируемым для некоторого  $r \in \mathbb{N}_0$ . Мы будем вести доказательство индукцией по  $r$ .

**База индукции.** Если  $r = 0$ , то  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ , откуда  $\mathbf{O}'\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\} = \mathbf{O}'\{\emptyset\}$ .

**Шаг индукции.** Пусть  $r > 0$ . Очевидно, что  $\mathbf{w}_s \neq \mathbf{w}'_s$  для некоторого  $s \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Тогда найдутся такие буквы  $x$  и  $y$ , что  $\mathbf{w}_s = \mathbf{a}_s q_{\mathbf{w}_s} y p_{\mathbf{w}_s} x \mathbf{b}_s$  для некоторых  $p, q \in \{1, 2\}$  и  $\mathbf{a}_s, \mathbf{b}_s \in X^*$ , а буква  $p_{\mathbf{w}'_s} x$  предшествует букве  $q_{\mathbf{w}'_s} y$  в  $\mathbf{w}'_s$ . Обозначим через  $\hat{\mathbf{w}}$  слово, получающееся из  $\mathbf{w}$  перестановкой местами букв  $p_{\mathbf{w}_s} x$  и  $q_{\mathbf{w}_s} y$  в блоке  $\mathbf{w}_s$ .

Для завершения доказательства достаточно установить, что тождество  $\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{O}'\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\}$  и  $\mathbf{O}'\{\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}\} = \mathbf{O}'\Gamma'$  для некоторой системы тождеств  $\Gamma' \subseteq \Sigma$ . В самом деле, в этом случае тождество  $\hat{\mathbf{w}} \approx \mathbf{w}'$  является  $(r-1)$ -инвертируемым. По предположению индукции,  $\mathbf{O}'\{\hat{\mathbf{w}} \approx \mathbf{w}'\} = \mathbf{O}'\Gamma''$  для некоторой системы тождеств  $\Gamma'' \subseteq \Sigma$ , откуда

$$\mathbf{O}'\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\} = \mathbf{O}'\{\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}} \approx \mathbf{w}'\} = \mathbf{O}'\{\Gamma', \Gamma''\},$$

что и требовалось показать.

Предположим, что  $\text{осс}_x(\mathbf{w}_s), \text{осс}_y(\mathbf{w}_s) \geq 2$ . Тогда, с учетом леммы 3.67, получаем, что в  $\mathbf{O}'$  выполнены тождества

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} y x \mathbf{b} \stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{a} y^2 x^2 \mathbf{b} \stackrel{\Phi}{\approx} \mathbf{a} x^2 y^2 \mathbf{b} \stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{a} x y \mathbf{b} = \hat{\mathbf{w}},$$

где

$$\mathbf{a} := \left( \prod_{i=0}^{s-1} \mathbf{w}_i t_{i+1} \right) \mathbf{a}_s \quad \text{и} \quad \mathbf{b} := \mathbf{b}_s \left( \prod_{i=s+1}^m t_i \mathbf{w}_i \right)$$

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда либо  $\text{осс}_x(\mathbf{w}_s) = 1$ , либо  $\text{осс}_y(\mathbf{w}_s) = 1$ . В силу симметрии мы можем считать, что  $\text{осс}_y(\mathbf{w}_s) = 1$ .

Если  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{w}_{s'}) = \text{alph}(\mathbf{w}_{s'})$  для некоторого  $s' \neq s$ , то из леммы 3.69 или двойственного к ней утверждения следует, что  $\mathbf{O}'$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}$ . Таким образом, далее мы можем считать, что для любого  $i \neq s$  только одна из букв  $x$  и  $y$  может принадлежать множеству  $\text{alph}(\mathbf{w}_i)$ . Обозначим эту букву через  $a_i$  (если  $x, y \notin \text{alph}(\mathbf{w}_i)$ , то через  $a_i$

будем обозначать пустое слово). Тогда  $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i a_i^{b_i} \mathbf{b}_i a_i^{b'_i} \mathbf{c}_i$  для некоторых  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i \in X^*$  и

$$b_i := \begin{cases} 1, & \text{если } \text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i) > 0, \\ 0, & \text{если } \text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i) = 0, \end{cases} \quad b'_i := \begin{cases} 1, & \text{если } \text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i) = 2, \\ 0, & \text{если } \text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i) \leq 1, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, s-1, s+1, s+2, \dots, m$ .

Далее, тождество  $\mathbf{w}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \mathbf{w}'(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m)$  совпадает либо с тождеством

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{i=0}^{s-1} a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} t_{i+1} \right) x^{\text{occ}_x(\mathbf{a}_s)} y x^{1+\text{occ}_x(\mathbf{b}_s)} \left( \prod_{i=s+1}^m t_i a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} \right) \\ & \approx \left( \prod_{i=0}^{s-1} a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} t_{i+1} \right) x^{1+\text{occ}_x(\mathbf{a}_s)} y x^{\text{occ}_x(\mathbf{b}_s)} \left( \prod_{i=s+1}^m t_i a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} \right), \end{aligned} \quad (3.69)$$

либо с тождеством

$$\left( \prod_{i=0}^{s-1} a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} t_{i+1} \right) y x^2 \left( \prod_{i=s+1}^m t_i a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} \right) \approx \left( \prod_{i=0}^{s-1} a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} t_{i+1} \right) x^2 y \left( \prod_{i=s+1}^m t_i a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} \right).$$

В силу леммы 3.68, последнее тождество вместе с системой  $\Phi_2$  влечет тождество (3.69). Следовательно, тождество (3.69) является следствием системы

$$\{\Phi_2, \mathbf{w}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \mathbf{w}'(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m)\}$$

в любом случае. Ясно, что тождество  $\mathbf{w}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \hat{\mathbf{w}}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m)$  является ничем иным как тождеством (3.69). По лемме 3.67,

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} x \mathbf{b} \stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{a}' x^{\text{occ}_x(\mathbf{a}_s)} y x^{1+\text{occ}_x(\mathbf{b}_s)} \mathbf{b}' \stackrel{(3.69)}{\approx} \mathbf{a}' x^{1+\text{occ}_x(\mathbf{a}_s)} y x^{\text{occ}_x(\mathbf{b}_s)} \mathbf{b}' \stackrel{\Phi_2}{\approx} \mathbf{a} x y \mathbf{b} = \hat{\mathbf{w}},$$

где

$$\mathbf{a}' := \left( \prod_{i=0}^{s-1} \mathbf{a}_i a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} \mathbf{b}_i a_i^{b'_i} \mathbf{c}_i t_{i+1} \right) \mathbf{a}_s \quad \text{и} \quad \mathbf{b}' := \mathbf{b}_s \left( \prod_{i=s+1}^m t_i \mathbf{a}_i a_i^{\text{occ}_{a_i}(\mathbf{w}_i)} \mathbf{b}_i a_i^{b'_i} \mathbf{c}_i \right).$$

Следовательно, тождество (3.69) эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{O}'$  тождеству  $\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}$ . Остается заметить, что тождество (3.69) является тождеством вида (3.63)–(3.65), где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . Наконец, легко видеть, что любое тождество вида (1.1) или (3.63)–(3.65) эквивалентно некоторому эффективному тождеству такого же вида.  $\square$

### 3.5.2. Тождества, образованные словами с одной кратной буквой

**Лемма 3.70.** Пусть  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — аperiodические многообразия моноидов. Если  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $x^n \approx x^m$ , то это тождество выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности мы можем считать, что  $n < m$ . Тогда из лем-

мы 1.24 вытекает, что одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , скажем  $\mathbf{X}$ , удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^r$  для некоторого  $r > n$ . Однако многообразие  $\mathbf{X}$  является аperiodическим, откуда, с учетом леммы 1.12, следует, что в  $\mathbf{X}$  выполнено тождество  $x^n \approx x^{n+1}$  и потому тождество  $x^n \approx x^m$ .  $\square$

**Лемма 3.71.** Пусть  $r, e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ . Тогда тождество (1.1) эквивалентно по модулю (3.44) некоторому тождеству

$$x^{e'_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e'_i} \right) \approx x^{f'_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{f'_i} \right),$$

где  $e'_1, f'_1, e'_2, f'_2, \dots, e'_r, f'_r \leq 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $p_i$  и  $q_i$  — наибольшие четные числа такие, что  $p_i \leq e_i$  и  $q_i \leq f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Тогда требуемое утверждение следует из того факта, что тождества

$$x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} \right) \approx x^{e_0 + \sum_{i=1}^r p_i} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i - p_i} \right) \text{ и } x^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{f_i} \right) \approx x^{f_0 + \sum_{i=1}^r q_i} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{f_i - q_i} \right)$$

являются следствием тождества (3.44).  $\square$

Для любых  $n, m \in \mathbb{N}_0$  зафиксируем обозначение для следующей серии тождеств:

$$\omega_{n,m} : x^m t_1 x t_2 x \cdots t_n x \approx x^{m+n} t_1 t_2 \cdots t_n.$$

Отметим, что тождество  $\omega_{n,0}$  совпадает тождеством  $\omega_n$ , введенным в главе 2.

**Лемма 3.72.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие аperiodических моноидов, в котором выполнено тождество (3.44),  $0 \leq e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \leq 1$  и  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}_0$ . Если тождество (1.1) нетривиально, то

$$\mathbf{V}\{(1.1)\} = \mathbf{V}\{x^e \approx x^f, \omega_{e-e_0, e_0}, \omega_{f-f_0, f_0}\},$$

где  $e := \sum_{i=0}^r e_i$  и  $f := \sum_{i=0}^r f_i$ .

*Доказательство.* Тождество (1.1) является следствием системы тождеств

$$\{x^e \approx x^f, \omega_{e-e_0, e_0}, \omega_{f-f_0, f_0}\},$$

так как

$$x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} \right) \omega_{e-e_0, e_0} \approx x^e \left( \prod_{i=1}^r t_i \right) x^e \approx x^f \left( \prod_{i=1}^r t_i \right) \omega_{f-f_0, f_0} \approx x^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{f_i} \right).$$

Очевидно, что  $x^e \approx x^f$  следует из (1.1). Поэтому остается показать, что в многообразии  $\mathbf{V}\{(1.1)\}$  выполнены тождества  $\omega_{e-e_0, e_0}$  и  $\omega_{f-f_0, f_0}$ . Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

**Случай 1:**  $e_i = f_i = 1$  для любого  $i = 1, 2, \dots, r$ . Тогда  $r = e - e_0 = f - f_0$ . Поскольку тождество (1.1) нетривиально, с учетом симметрии мы можем считать, что  $e_0 = f_0 + g$  для

некоторого  $g \in \mathbb{N}$ . В силу леммы 1.12,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^s \approx x^{s+1}$  для некоторого  $s \in \mathbb{N}$ . Тогда в  $\mathbf{V}\{(1.1)\}$  выполнены тождества

$$x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x \right) \stackrel{(1.1)}{\approx} x^{e_0+sg} \left( \prod_{i=1}^r t_i x \right) \stackrel{\{x^s \approx x^{s+1}, (3.44)\}}{\approx} x^{e_0+r+sg} \left( \prod_{i=1}^r t_i \right) \stackrel{(1.1)}{\approx} x^{e_0+r} \left( \prod_{i=1}^r t_i \right)$$

и потому тождество  $\omega_{r,e_0}$ . Остается заметить, что  $\omega_{r,f_0}$  вытекает из  $\omega_{r,e_0}$ .

**Случай 2:**  $(e_j, f_j) \neq (1, 1)$  для некоторого  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Мы будем вести доказательство индукцией по  $r$ .

**База индукции:**  $r = 1$ . Мы можем без ограничения общности считать, что тождество (1.1) совпадает с одним из тождеств  $x^{e_0} t_1 \approx x^{f_0} t_1$  и  $x^{e_0} t_1 \approx x^{f_0} t_1 x$ . Если тождество (1.1) совпадает с  $x^{e_0} t_1 \approx x^{f_0} t_1$ , то  $(e, f) = (e_0, f_0)$ . В этом случае тождества  $\omega_{e-e_0, e_0}$  и  $\omega_{f-f_0, f_0}$  тривиальны и потому следуют из (1.1). Если тождество (1.1) совпадает с  $x^{e_0} t_1 \approx x^{f_0} t_1 x$ , то тождество  $\omega_{e-e_0, e_0}$  тривиально, а тождество  $\omega_{f-f_0, f_0}$  следует из тождества (1.1), поскольку

$$x^{f_0} t_1 x \stackrel{(1.1)}{\approx} x^{e_0} t_1 = x^e t_1 \stackrel{x^e \approx x^f}{\approx} x^f t_1.$$

Мы видим, что в любом случае (1.1) влечет  $\omega_{e-e_0, e_0}$  и  $\omega_{f-f_0, f_0}$ .

**Шаг индукции:**  $r > 1$ . Для любого  $\ell = 1, 2, \dots, r$  положим

$$\mathbf{p}_\ell := \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} \right)_{t_\ell} \quad \text{и} \quad \mathbf{q}_\ell := \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{f_i} \right)_{t_\ell}.$$

Предположим, что  $e_k + e_{k+1}, f_k + f_{k+1} \leq 1$  для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ . Рассмотрим тождество  $x^{e_0} \mathbf{p}_{k+1} \approx x^{f_0} \mathbf{q}_{k+1}$ . Если  $e_i = f_i = e_k + e_{k+1} = f_k + f_{k+1} = 1$  для любого  $i = 1, 2, \dots, k-1, k+2, \dots, r$ , то, в силу доказанного в случае 1, в  $\mathbf{V}\{x^{e_0} \mathbf{p}_{k+1} \approx x^{f_0} \mathbf{q}_{k+1}\}$  выполнены тождества  $\omega_{e-e_0-1, e_0}$  и  $\omega_{f-f_0-1, f_0}$  и потому тождества  $\omega_{e-e_0, e_0}$  и  $\omega_{f-f_0, f_0}$ . Если  $(e_k + e_{k+1}, f_k + f_{k+1}) \neq (1, 1)$  или  $(e_q, f_q) \neq (1, 1)$  для некоторого  $q \in \{1, 2, \dots, k-1, k+2, \dots, r\}$ , то оба тождества  $\omega_{e-e_0, e_0}$  и  $\omega_{f-f_0, f_0}$  выполнены в многообразии  $\mathbf{V}\{x^{e_0} \mathbf{p}_{k+1} \approx x^{f_0} \mathbf{q}_{k+1}\}$  по предположению индукции. Поскольку  $x^{e_0} \mathbf{p}_{k+1} \approx x^{f_0} \mathbf{q}_{k+1}$  вытекает из (1.1), тождества  $\omega_{e-e_0, e_0}$  и  $\omega_{f-f_0, f_0}$  выполнены в  $\mathbf{V}\{(1.1)\}$ . Поэтому далее мы можем считать, что  $e_i + e_{i+1} > 1$  или  $f_i + f_{i+1} > 1$  для любого  $i = 1, 2, \dots, r-1$ . В частности,  $(e_i, f_i) \neq (0, 0)$  для любого  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Тогда  $(e_j, f_j) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $(e_j, f_j) = (0, 1)$  и  $j \neq r$ . Тогда  $f_{j+1} = 1$ . Рассмотрим тождество  $x^{e_0} \mathbf{p}_{j+1} \approx x^{f_0} \mathbf{q}_{j+1}$ . Ясно, что (3.44) влечет  $x^{f_0} \mathbf{q}_{j+1} \approx x^{f_0+2} \mathbf{q}'_{j+1}$ , где

$$\mathbf{q}'_{j+1} := \left( \prod_{i=1}^{j-1} t_i x^{f_i} \right) \cdot t_j \cdot \left( \prod_{i=j+2}^r t_i x^{f_i} \right).$$

По предположению индукции, многообразие  $\mathbf{V}\{x^{e_0} \mathbf{p}_{j+1} \approx x^{f_0+2} \mathbf{q}'_{j+1}\}$  и потому многообразие  $\mathbf{V}\{(1.1)\}$  удовлетворяют  $\omega_{e-e_0, e_0}$  и  $\omega_{f-(f_0+2), f_0+2}$ . Тогда тождество  $\omega_{f-f_0, f_0}$  выполнено в

$\mathbf{V}\{(1.1)\}$ , поскольку

$$x^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{f_i} \right) \stackrel{(1.1)}{\approx} x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} \right) \stackrel{\omega_{e-e_0, e_0}}{\approx} x^e \left( \prod_{i=1}^r t_i \right) \stackrel{x^e \approx x^f}{\approx} x^f \left( \prod_{i=1}^r t_i \right),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие 3.73.** Пусть  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — апериодические многообразия, удовлетворяющие тождеству (3.44). Если многообразие  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству  $\omega_{n,m}$  для некоторых  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , то это тождество выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

*Доказательство.* Если  $M(xy) \notin \mathbf{X}$ , то, в силу леммы 1.25, многообразие  $\mathbf{X}$  коммутативно и потому удовлетворяет тождеству  $\omega_{n,m}$ . Аналогичным образом можно показать, что если  $M(xy) \notin \mathbf{Y}$ , то тождество  $\omega_{n,m}$  выполнено в  $\mathbf{Y}$ . Поэтому далее можно считать, что  $M(xy) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . В силу предложения 1.1, существует последовательность попарно различных слов  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell$  такая, что  $\mathbf{w}_1 = x^m t_1 x t_2 x \cdots t_n x$ ,  $\mathbf{w}_\ell = x^{m+n} t_1 t_2 \cdots t_n$  и тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполняется в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  для любого  $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$ . В силу симметрии можно считать, что тождество  $\mathbf{w}_1 \approx \mathbf{w}_2$  выполнено в  $\mathbf{X}$ . Поскольку  $M(xy) \in \mathbf{X}$ , из леммы 1.20 вытекает, что  $\mathbf{w}_2 = x^{e_0} t_1 x^{e_1} t_2 x^{e_2} \cdots t_n x^{e_n}$  для некоторых  $e_0, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{N}_0$ . Лемма 3.71 позволяет считать, что  $e_1, e_2, \dots, e_n \leq 1$ . Тогда мы можем применить лемму 3.72 и заключить, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет  $\omega_{n,m}$ .  $\square$

Напомним, что через  $\mathbf{A}$  мы обозначаем многообразие, заданное тождествами  $x^2 \approx x^3$  и (3.8). Ниже мы построим минимальное множество тождеств вида (1.1), которые могут использоваться для задания подмногообразий многообразия  $\mathbf{A}$ .

Следующее утверждение непосредственно вытекает из леммы 1.27, двойственного к ней утверждения и леммы 3.10.

**Лемма 3.74.** Пусть  $r, e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ .

- (i) Если одно из чисел  $e_0$  и  $f_0$  равно 0, а другое — нет, то многообразие  $\mathbf{A}\{(1.1)\}$  удовлетворяет тождеству (3.4).
- (ii) Если одно из чисел  $e_r$  и  $f_r$  равно 0, а другое — нет, то многообразие  $\mathbf{A}\{(1.1)\}$  удовлетворяет тождеству (3.5).
- (iii) Если для некоторого  $k \in \{1, \dots, r-1\}$  одно из чисел  $e_k$  и  $f_k$  равно 0, а другое — нет, то многообразие  $\mathbf{A}\{(1.1)\}$  удовлетворяет тождеству (3.9).  $\square$

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  зафиксируем обозначение для следующего тождества:

$$\iota'_n : xt_1 x \cdots t_{n-1} x^2 t_n x \approx xt_1 x \cdots t_{n-1} x t_n x^2.$$

До конца главы будем полагать

$$\Delta := \{(3.4), (3.5), (3.9), \iota_n, \iota'_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

**Лемма 3.75.** Пусть  $r, e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Тогда тождество (1.1) эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{A}$  некоторому подмножеству множества  $\Delta$ .

*Доказательство.* Очевидно, что любое тождество вида (1.1) эквивалентно некоторому эффективному тождеству того же вида. Далее, легко видеть, что любое тождество вида (1.1) эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.8)\}$  некоторому тождеству того же вида, обе части которого имеют не более одного острова длины  $> 1$ , образованного буквой  $x$ . Таким образом, далее мы можем считать, что тождество (1.1) является эффективным и обе его части имеют не более одного острова вида  $x^2$ , в то время как все остальные их острова, образованные буквой  $x$ , имеют длину 1. Если тождество (1.1) тривиально, то доказывать нечего. Поэтому далее мы можем считать, что тождество (1.1) тривиальным не является. Для удобства обозначим через  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  левую и правую части этого тождества соответственно. Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

**Случай 1:**  $e_i, f_i > 0$  для всех  $i = 0, 1, \dots, r$ . Поскольку тождество (1.1) нетривиально и эффективно, хотя бы одно из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  содержит остров вида  $x^2$ . В силу симметрии мы можем считать, что  $f_k = 2$  для некоторого  $k$ . Тогда  $f_i = 1$  для всех  $i = 0, 1, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, r$ .

Предположим, что  $e_i = 1$  для всех  $i = 0, 1, \dots, r$ . Если  $k = r$ , тождество (1.1) является ничем иным как тождеством  $t_r$  и доказывать нечего. Предположим теперь, что  $k < r$ . Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, t_1, t_2, \dots, t_{k+1})x &= xt_1x \cdots t_kxt_{k+1}x^{r-k+1}, \\ \mathbf{v}(x, t_1, t_2, \dots, t_{k+1})x &= xt_1x \cdots t_kx^2t_{k+1}x^{r-k+1}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что тождество  $\mathbf{u}(x, t_1, t_2, \dots, t_{k+1})x \approx \mathbf{v}(x, t_1, t_2, \dots, t_{k+1})x$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.8)\}$  тождеству  $l'_{k+1}$ . Тогда тождество  $t_r$  вытекает из тождества (1.1), так как

$$xt_1x \cdots t_r x \stackrel{(1.1)}{\approx} xt_1x \cdots t_kx^2t_{k+1}x \cdots t_r x \stackrel{l'_{k+1}}{\approx} xt_1x \cdots t_{r-1}xt_r x^2.$$

Наконец, поскольку

$$\mathbf{u} = xt_1x \cdots t_r x \stackrel{l'_r}{\approx} xt_1x \cdots t_{r-1}xt_r x^2 \stackrel{l'_{k+1}}{\approx} xt_1x \cdots t_kx^2t_{k+1}x \cdots t_r x = \mathbf{v},$$

получаем, что  $\mathbf{A}\{(1.1)\} = \mathbf{A}\{t_r, l'_{k+1}\}$ .

Предположим теперь, что  $e_m = 2$  для некоторого  $m$ . Тогда  $e_i = 1$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m-1, m+1, m+2, \dots, r$ . Поскольку тождество (1.1) нетривиально и эффективно,  $k \neq m$ . Без ограничения общности можно считать, что  $m < k$ . Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, t_1, t_2, \dots, t_{m+1}) &= xt_1x \cdots t_{m-1}xt_mx^2t_{m+1}x^{r-m}, \\ \mathbf{v}(x, t_1, t_2, \dots, t_{m+1}) &= xt_1x \cdots t_mx t_{m+1}x^{r-m+1}.\end{aligned}$$

Откуда следует, что тождество  $\mathbf{u}(x, t_1, t_2, \dots, t_{m+1}) \approx \mathbf{v}(x, t_1, t_2, \dots, t_{m+1})$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.8)\}$  тождеству  $l'_{m+1}$ . Ясно, что из тождества  $l'_{m+1}$  следует тождество (1.1), откуда  $\mathbf{A}\{(1.1)\} = \mathbf{A}\{l'_{m+1}\}$ .

**Случай 2:** по крайней мере одно из чисел  $e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r$  равно 0. В этом случае  $r > 0$ . Мы будем вести доказательство индукцией по  $r$ . Возможны два случая.

**Случай 2.1:**  $e_0, f_0 > 0$ . Пусть  $k$  — наименьшее натуральное число такое, что один из показателей степеней  $e_k$  и  $f_k$  равен 0. В силу симметрии мы можем считать, что  $e_k = 0$ .

**База индукции:**  $r = 1$ . Тогда  $\mathbf{u} = x^2 t_1$  и  $f_0, f_1 > 0$ . По лемме 3.74(ii), в многообразии  $\mathbf{A}\{(1.1)\}$  выполнено тождество (3.5). В силу доказанного в случае 1,  $\mathbf{A}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{A}\Delta'$  для некоторого  $\Delta' \subseteq \Delta$ . Тогда

$$\mathbf{A}\{(1.1)\} = \mathbf{A}\{(1.1), (3.5)\} = \mathbf{A}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}, (3.5)\} = \mathbf{A}\{\Delta', (3.5)\},$$

что и требовалось доказать.

**Шаг индукции:**  $r > 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t_k} &= x^{e_0} t_1 x^{e_1} \dots t_{k-1} x^{e_{k-1}} t_{k+1} x^{e_{k+1}} \dots t_r x^{e_r}, \\ \mathbf{v}_{t_k} &= x^{f_0} t_1 x^{f_1} \dots t_{k-1} x^{f_{k-1}+f_k} t_{k+1} x^{f_{k+1}} \dots t_r x^{f_r}. \end{aligned}$$

В силу предположения индукции и доказанного в случае 1,  $\mathbf{A}\{\mathbf{u}_{t_k} \approx \mathbf{v}_{t_k}\} = \mathbf{A}\Delta'_1$  для некоторого  $\Delta'_1 \subseteq \Delta$ . Для удобства через  $\sigma$  будем обозначать тождество (3.9), если  $e_r, f_r > 0$ , и тождество (3.5) в противном случае. По лемме 3.74(ii),(iii) тождество  $\sigma$  выполнено в многообразии  $\mathbf{A}\{(1.1)\}$ . Положим  $\Delta_1 := \Delta'_1 \cup \{\sigma\}$ . Тогда многообразию  $\mathbf{A}\Delta_1$  и потому многообразию  $\mathbf{A}\{(1.1)\}$  удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx x^{f_0} t_1 x^{f_1} \dots t_{k-1} x^{f_{k-1}+f_k} t_k t_{k+1} x^{f_{k+1}} \dots t_r x^{f_r} && \text{в силу } \mathbf{u}_{t_k} \approx \mathbf{v}_{t_k} \\ &\approx x^{f_0} t_1 x^{f_1} \dots t_{k-1} x^2 t_k x \dots t_r x && \text{в силу } \sigma \\ &=: \mathbf{u}'. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}$ . Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что существует подмножество  $\Delta_2$  множества  $\Delta$ , состоящее из тождеств, выполненных  $\mathbf{A}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}\}$ , такое, что многообразию  $\mathbf{A}\Delta_2$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{v} \approx x^{f'_0} t_1 x^{f'_1} \dots t_r x^{f'_r} =: \mathbf{v}',$$

где  $f'_0, f'_1, \dots, f'_r > 0$ . В силу сказанного выше, тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{A}\{(1.1)\}$ , откуда следует, что  $\mathbf{A}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\}$  удовлетворяет системе тождеств  $\Delta_2$  и потому тождеству  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ . Наконец, в силу доказанного в случае 1,  $\mathbf{A}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'\} = \mathbf{A}\Delta_3$  для некоторого  $\Delta_3 \subseteq \Delta$ . Мы видим, что  $\mathbf{A}\{(1.1)\} \subseteq \mathbf{A}\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ . На самом деле имеет место и обратное включение, так как  $\mathbf{u} \stackrel{\mathbf{A}\Delta_1}{\approx} \mathbf{u}' \stackrel{\mathbf{A}\Delta_3}{\approx} \mathbf{v}' \stackrel{\mathbf{A}\Delta_2}{\approx} \mathbf{v}$ . Откуда  $\mathbf{A}\{(1.1)\} = \mathbf{A}\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ , что и требовалось доказать.

**Случай 2.2:** по крайней мере один из показателей степеней  $e_0$  и  $f_0$  равен 0. В этом случае  $\mathbf{A}\{(1.1)\}$  удовлетворяет тождеству (3.4) по лемме 3.74(i). В силу симметрии мы без ограничения общности можем считать, что  $e_0 = 0$ . Тогда  $f_0 > 0$ , поскольку тождество (1.1) эффективно.

**База индукции:**  $r = 1$ . Тогда  $\mathbf{u} = t_1x^2$ . В силу доказанного в случаях 1 и 2.1,  $\mathbf{A}\{x\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{A}\Delta'$  для некоторого  $\Delta' \subseteq \Delta$ . Тогда

$$\mathbf{A}\{(1.1)\} = \mathbf{A}\{(1.1), (3.4)\} = \mathbf{A}\{x\mathbf{u} \approx \mathbf{v}, (3.4)\} = \mathbf{A}\{\Delta', (3.4)\},$$

что и требовалось доказать.

**Шаг индукции:**  $r > 1$ . Предположим, что  $f_1 > 0$ . Тогда  $f_0 + f_1 \geq 2$  и

$$\mathbf{u}_{t_1} = x^{e_1}t_2x^{e_2} \cdots t_r x^{e_r}, \quad \mathbf{v}_{t_1} = x^{f_0+f_1}t_2x^{f_2} \cdots t_r x^{f_r}.$$

В силу доказанного в случаях 1 и 2.1,  $\mathbf{A}\{\mathbf{u}_{t_1} \approx \mathbf{v}_{t_1}\} = \mathbf{A}\Delta_1$  для некоторого  $\Delta_1 \subseteq \Delta$ . Ясно, что  $\mathbf{u}_{t_1} \approx \mathbf{v}_{t_1}$  вместе с (3.4) влечет

$$\mathbf{u} \approx xt_1x^2t_2x^{f_2} \cdots t_r x^{f_r} =: \mathbf{u}'.$$

В силу доказанного в случаях 1 и 2.1,  $\mathbf{A}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{A}\Delta_2$  для некоторого  $\Delta_2 \subseteq \Delta$ . Тогда

$$\mathbf{A}\{(1.1)\} = \mathbf{A}\{(1.1), \mathbf{u}_{t_1} \approx \mathbf{v}_{t_1}, (3.4)\} = \mathbf{A}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}, \mathbf{u}_{t_1} \approx \mathbf{v}_{t_1}, (3.4)\} = \mathbf{A}\{\Delta_1, \Delta_2, (3.4)\},$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что  $f_1 = 0$ . Тогда

$$\mathbf{u}_{t_2} = t_1x^{e_1+e_2}t_3x^{e_3} \cdots t_r x^{e_r}, \quad \mathbf{v}_{t_2} = x^{f_0}t_1x^{f_2}t_3x^{f_3} \cdots t_r x^{f_r}.$$

По предположению индукции,  $\mathbf{A}\{\mathbf{u}_{t_2} \approx \mathbf{v}_{t_2}\} = \mathbf{A}\Delta_3$  для некоторого  $\Delta_3 \subseteq \Delta$ . Ясно, что  $\mathbf{u}_{t_2} \approx \mathbf{v}_{t_2}$  влечет

$$\mathbf{v} \approx t_1t_2x^{e_1+e_2}t_3x^{e_3} \cdots t_r x^{e_r} =: \mathbf{v}'.$$

По предположению индукции,  $\mathbf{A}\{\mathbf{u}_{t_1} \approx \mathbf{v}'_{t_1}\} = \mathbf{A}\Delta_4$  для некоторого  $\Delta_4 \subseteq \Delta$ . Поскольку тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}'$  и  $\mathbf{u}_{t_1} \approx \mathbf{v}'_{t_1}$  эквивалентны, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\{(1.1)\} &= \mathbf{A}\{(1.1), \mathbf{u}_{t_2} \approx \mathbf{v}_{t_2}\} = \mathbf{A}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}', \mathbf{u}_{t_2} \approx \mathbf{v}_{t_2}\} \\ &= \mathbf{A}\{\mathbf{u}_{t_1} \approx \mathbf{v}'_{t_1}, \mathbf{u}_{t_2} \approx \mathbf{v}_{t_2}\} = \mathbf{A}\{\Delta_3, \Delta_4\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  положим  $\mu_n := \text{FIC}(\text{var}\{x^2 \approx x^3, t'_n\})$ . Заметим, что конгруэнция  $\mu_2$  есть не что иное как конгруэнция  $\mu$ .

**Следствие 3.76.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия такое  $\mathbf{A}$ , что  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_{\mu_n}(xt_1x \cdots t_nx^+) \notin \mathbf{V}$ , то в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $t'_n$ .

*Доказательство.* Используя лемму 1.4, рутинными вычислениями можно проверить, что

$$\{xt_1x \cdots t_nx^+\}^{\leq \mu_n} = \left\{ \begin{array}{l} 1, x, x^e t_k x \cdots t_m x^f, x^e t_k x \cdots t_n x x^+, \\ t_1 x t_2 x \cdots t_n x, x t_1 x \cdots t_{n-1} x t_n, \\ t_1 x t_2 x \cdots t_n x x^+, x t_1 x \cdots t_n x^+ \end{array} \middle| \begin{array}{l} e, f \in \{0, 1\}, \\ 1 \leq k \leq m \leq n, \\ m - k < n \end{array} \right\}.$$

Из последнего равенства легко выводится, что  $\mu_n$ -класс  $xt_1x \cdots t_nx^+$  является стабильным относительно некоторого многообразия тогда и только тогда, когда любой  $\mu_n$ -класс из множества  $\{xt_1x \cdots t_nx^+\}^{\leq \mu_n}$  стабилен относительно этого многообразия. Из этого факта и леммы 1.5 следует нестабильность  $\mu_n$ -класса  $xt_1x \cdots t_nx^+$  относительно многообразия  $\mathbf{V}$ . Это означает, что в  $\mathbf{V}$  выполнено нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такое, что  $\mathbf{u} \in xt_1x \cdots t_nx^+$ , но  $\mathbf{v} \notin xt_1x \cdots t_nx^+$ . Из включения  $\mathbf{M}(xy) \subseteq \mathbf{V}$  и леммы 1.20 вытекает, что  $\mathbf{w}(\text{sim}(\mathbf{v})) = t_1 t_2 \cdots t_n$  и  $\text{mul}(\mathbf{w}) = \{x\}$ . Тогда, по лемме 3.75,  $\mathbf{A}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{A}\Delta'$  для некоторого  $\Delta' \subseteq \Delta$ . Рутинными вычислениями можно проверить стабильность множества  $xt_1x \cdots t_nx^+$  относительно многообразия  $\mathbf{A} \wedge \text{var}(\Delta \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t'_1, t'_2, \dots, t'_n\})$ . Откуда следует, что множество  $\Delta' \cap \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t'_1, t'_2, \dots, t'_n\}$  не является пустым. Из сказанного вытекает, что тождество  $t'_n$  является следствием системы  $\Delta'$  и потому выполнено в  $\mathbf{V}$ .  $\square$

**Следствие 3.77.** Пусть  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — подмногообразия многообразия  $\mathbf{A}\{(3.34)\}$ . Если многообразие  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta$ , то это тождество  $\sigma$  выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

*Доказательство.* Если  $\mathbf{M}(xy) \notin \mathbf{X}$ , то многообразие  $\mathbf{X}$  коммутативно по лемме 1.25. Тогда  $\mathbf{X}$  удовлетворяет всем тождествам из  $\Delta$  (и, в частности, тождеству,  $\sigma$ ), поскольку  $\Delta$  вытекает из  $\{x^2 \approx x^3, xy \approx yx\}$ . Аналогичным образом можно показать, что если  $\mathbf{M}(xy) \notin \mathbf{Y}$ , то тождество  $\sigma$  выполнено в  $\mathbf{Y}$ . Таким образом, далее мы можем считать, что  $\mathbf{M}(xy) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Предположим, что тождество  $\sigma$  совпадает с тождеством (3.9). Тогда  $M_\gamma(x^+uzx^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  по лемме 1.5. Это означает, что моноид  $M_\gamma(x^+uzx^+)$  не принадлежит хотя бы одному из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Применим лемму 3.10 и получим, что тождество  $\sigma$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Используя лемму 1.27 и двойственное к ней утверждение вместо леммы 3.10, аналогичным образом можно показать, что если  $\sigma \in \{(3.4), (3.5)\}$ , то  $\sigma$  выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

Далее, если  $\sigma = t_n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , то  $M(xt_1x \cdots t_nx) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  по лемме 1.3. Это означает, что моноид  $M(xt_1x \cdots t_nx)$  не содержится хотя бы в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Тогда применим следствие 3.9 и получим, что  $\sigma$  выполняется в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Наконец, используя лемму 1.5 вместо леммы 1.3 и следствие 3.76 вместо следствия 3.9, аналогичными рассуждениями можно показать, что если  $\sigma = t'_n$ , то  $\sigma$  выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

Таким образом, следствие 3.77 доказано.  $\square$

### 3.5.3. Тождества, образованные словами с двумя кратными буквами

**Лемма 3.78.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие в  $\mathbf{A}\{\sigma_3, \iota_2, (3.22), (3.34)\}$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Предположим, что либо  $\sum_{i=0}^r e_i > 2$ , либо  $e_0 > 1$  и либо  $\sum_{i=0}^r f_i > 2$ , либо  $f_0 > 1$ . Тогда тождество (1.2) выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ .

*Доказательство.* Если  $e_0 > 1$  или  $f_0 > 1$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  некоторому тождеству того же вида такому, что буквы  $x$  и  $y$  входят в каждую из сторон этого тождества по меньшей мере трижды. Поэтому далее мы можем считать, что  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i > 2$ . Очевидно, что тождество (1.2) является следствием системы  $\Phi$ , если  $e_0, f_0 > 1$ . Предположим теперь, что хотя бы одно из чисел  $e_0$  и  $f_0$ , скажем  $f_0$ , равно 1. Обозначим через  $k$  и  $m$  наибольшие числа такие, что  $e_k, f_m > 0$ . Поскольку  $f_0 = 1$ , имеем  $m > 0$ . Если  $k = 0$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{p} \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} x^3 y^{f_0} \mathbf{p} \stackrel{\sigma_3}{\approx} x y^{f_0} x^2 \mathbf{p} \stackrel{\iota_2}{\approx} x y^{f_0} x^2 \mathbf{p}' \stackrel{(3.22)}{\approx} y^{f_0} x^3 \mathbf{p}' \stackrel{\iota_2}{\approx} y^{f_0} x^3 \mathbf{p} \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{p},$$

где

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) \text{ и } \mathbf{p}' := \left( \prod_{i=1}^{m-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) (t_m x^{e_m} y^2) \left( \prod_{i=m+1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).$$

Пусть теперь  $k > 0$ . Если  $k < m$ , то в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{p} \stackrel{\iota_2}{\approx} x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{q} \stackrel{(3.22)}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{q} \stackrel{\iota_2}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{p},$$

где

$$\mathbf{q} := \left( \prod_{i=1}^{k-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) (t_k x^2 y^{f_k}) \left( \prod_{i=k+1}^{m-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) (t_m x^{e_m} y^2) \left( \prod_{i=m+1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).$$

Аналогичным образом можно показать, что тождество (1.2) выполнено в  $\mathbf{V}$  когда  $m \leq k$ .  $\square$

**Лемма 3.79.** Пусть  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{A}\{\sigma_2, \sigma_3, (3.34)\}$ . Предположим, что многообразия  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (1.2), где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ , и выполнено одно из следующих трех утверждений:

- (i) слова  $x^{e_0} t_1 x^{e_1} \dots t_r x^{e_r}$  и  $y^{f_0} t_1 y^{f_1} \dots t_r y^{f_r}$  являются изотермами для многообразия  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ ;
- (ii) в многообразии  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  выполнено тождество (3.22) и  $M(xux) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ ;
- (iii) в многообразии  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  выполнено тождество (3.52),  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  и для некоторого  $j$  либо  $e_j > 1$ , либо  $f_j > 1$ ;

Тогда тождество (1.2) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  или  $\mathbf{Y}$ .

*Доказательство.* Для удобства обозначим через  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  левую и правую части тождества (1.2) соответственно.

(i) В силу предложения 1.1, существует конечная последовательность слов  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество выполнено  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Поскольку слова  $x^{e_0}t_1x^{e_1}\dots t_r x^{e_r}$  и  $y^{f_0}t_1y^{f_1}\dots t_r y^{f_r}$  суть изотермы для  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , имеем  $(\mathbf{w}_i)_y = x^{e_0}t_1x^{e_1}\dots t_r x^{e_r}$  и  $(\mathbf{w}_i)_x = y^{f_0}t_1y^{f_1}\dots t_r y^{f_r}$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Очевидно, что найдется такое  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , что  $(1_{\mathbf{w}_j}x) < (1_{\mathbf{w}_j}y)$ , но  $(1_{\mathbf{w}_{j+1}}y) < (1_{\mathbf{w}_{j+1}}x)$ . Тогда тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, \sigma_2, \sigma_3\}$  тождеству (1.2). Откуда следует, что тождество (1.2) выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ , что и требовалось показать.

(ii) В силу следствия 3.9, тождество  $\iota_1$  выполнено либо  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Остается применить лемму 3.78.

(iii) В силу симметрии мы можем считать, что  $e_j > 1$ . В силу лемм 1.25 и 1.28, тождество (3.31) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Если  $\sum_{i=1}^r f_i > 0$ , одно из этих многообразий удовлетворяет тождествам

$$x^{e_0}y^{f_0}\mathbf{p} \stackrel{\{x^2 \approx x^3, (3.31)\}}{\approx} x^2y^{f_0}\mathbf{p} \stackrel{(3.52)}{\approx} y^{f_0}x^2\mathbf{p} \stackrel{\{x^2 \approx x^3, (3.31)\}}{\approx} y^{f_0}x^{e_0}\mathbf{p},$$

где  $\mathbf{p} := t_1x^{e_1}y^{f_1}t_2x^{e_2}y^{f_2}\dots t_r x^{e_r}y^{f_r}$ . Если  $\sum_{i=1}^r f_i = 0$ , то  $f_0 > 1$ , откуда следует, что либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$  выполнены тождества

$$x^{e_0}y^{f_0}\mathbf{p} \stackrel{\{x^2 \approx x^3, (3.31)\}}{\approx} x^2y^2\mathbf{p} \stackrel{(3.34)}{\approx} y^2x^2\mathbf{p} \stackrel{\{x^2 \approx x^3, (3.31)\}}{\approx} y^{f_0}x^{e_0}\mathbf{p}.$$

Таким образом, в любом случае тождество (1.2) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .  $\square$

Доказательство следующего утверждения вполне аналогично доказательству леммы 3.79 и потому мы опустим его.

**Лемма 3.80.** Пусть  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — подмногообразия в  $\mathbf{A}\{\sigma_1, \sigma_3, (3.34)\}$ . Предположим, что многообразия  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству

$$\left(\prod_{i=r}^1 x^{e_i}y^{f_i}t_i\right)x^{e_0}y^{f_0} \approx \left(\prod_{i=r}^1 x^{e_i}y^{f_i}t_i\right)y^{f_0}x^{e_0}, \quad (3.70)$$

где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ , и выполнено одно из следующих двух утверждений:

- (i) слова  $x^{e_0}t_1x^{e_1}\dots t_r x^{e_r}$  и  $y^{f_0}t_1y^{f_1}\dots t_r y^{e_r}$  являются изотермами для  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ ;
- (ii)  $M(xux) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Тогда тождество (3.70) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .  $\square$

### § 3.6. Доказательство основного результата

Данный параграф посвящен доказательству теоремы 3.1.

*Необходимость.* Пусть  $\mathbf{V}$  — дистрибутивное многообразие аperiodических моноидов. Тогда, по лемме 1.12,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $n = 1$ , то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{B}$ . Пусть теперь  $n > 1$  и  $\mathbf{V}$  не является многообразием идемпотентных моноидов. Тогда  $M(x) \in \mathbf{V}$  по лемме 1.11. В силу леммы 1.16, решетки  $\mathfrak{L}(M(x) \vee \mathbf{LRB})$  и  $\mathfrak{L}(M(x) \vee \mathbf{RRB})$  не являются модулярными. Откуда  $\mathbf{LRB}, \mathbf{RRB} \notin \mathbf{V}$ . Тогда из леммы 1.30 и двойственного утверждения следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $(x^n y^n)^n \approx (x^n y^n)^n x^n \approx (y^n x^n)^n$ .

Предположим, что  $M_\gamma(xx^+yy^+) \in \mathbf{V}$ . Поскольку, в силу леммы 1.17,  $M_\gamma(uxx^+) \subset M_\gamma(xx^+yy^+)$ , из леммы 3.43(i) вытекает, что  $M(x^2) \notin \mathbf{V}$ . Отсюда и из леммы 1.24 следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $x^2 \approx x^3$ . В силу предложения 3.43(ii),  $M(xux) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, по следствию 3.9, тождество (1.4) выполнено в  $\mathbf{V}$ . Комбинируя лемму 1.28, предложение 3.43(iii) и двойственные к ним утверждения, получаем, что в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнены тождества (3.31) и (3.8). Из последних трех тождеств вместе с  $(x^n y^n)^n \approx (y^n x^n)^n$  вытекают тождества (3.26) и (3.28). Остается применить лемму 3.34, предложение 3.63 и двойственные утверждения и заключить, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_{15}$ .

Таким образом, далее остается рассмотреть случай, когда  $M_\gamma(xx^+yy^+) \notin \mathbf{V}$ . В этом случае, по лемме 3.23, в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $x^n y^n \approx (x^n y^n)^n$  и потому тождество  $x^n y^n \approx y^n x^n$ . Это означает, в частности, что  $\mathbf{V}$  является многообразием аperiodических моноидов с коммутирующими идемпотентами.

Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

**Случай 1:**  $M_\gamma(uxx^+), M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, в силу леммы 1.27 и двойственного к ней утверждения, в  $\mathbf{V}$  выполняется тождество  $x^n y \approx y x^n$ . Возможны два случая.

**Случай 1.1:**  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Если  $n = 2$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.44). Пусть теперь  $n > 2$ . Тогда, согласно леммам 1.3 и 1.24, слово  $x^2$  является изотермом для  $\mathbf{V}$ . Из предложения 3.42 вытекает, что  $M(x^2y) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, в силу леммы 1.3, в  $\mathbf{V}$  выполнено нетривиальное тождество вида  $x^2y \approx \mathbf{v}$ . Поскольку  $x^2$  — изотерм для  $\mathbf{V}$ ,  $\text{alph}(\mathbf{v}) = \{x, y\}$ ,  $\text{occ}_x(\mathbf{v}) = 2$  и  $\text{occ}_y(\mathbf{v}) = 1$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $\mathbf{v} = ux^2$ , поскольку  $M(xux) \in \mathbf{V}$  и тождество  $x^2y \approx \mathbf{v}$  нетривиально. Мы видим, что в любом случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.44).

Если  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}$  или  $\mathbf{N}^\delta \subseteq \mathbf{V}$ , то из леммы 1.23, предложения 3.44(xxiii), (xxiv) и двойственного к нему утверждения следует, что либо  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{R}_n$ , либо  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{R}_n^\delta$ . Таким образом, далее можно считать, что  $\mathbf{N}, \mathbf{N}^\delta \notin \mathbf{V}$ . В силу предложения 3.59 и двойственного к нему утверждения,  $\mathbf{V}$  не содержит

$$M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,n+m+1}[\pi]), M(\hat{\mathbf{d}}_{n,m,n+m+1}[\pi]), M(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau]) \text{ и } M(\hat{\mathbf{d}}_{n,m,0}[\tau])$$

для всех  $n, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\pi \in S_{n+m,n+m+1}$  и  $\tau \in S_{n+m}$ . Тогда из леммы 3.29 и двойственного к ней утверждения вытекает, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$\hat{\mathbf{c}}_{n,m,k}[\rho] \approx \hat{\mathbf{c}}'_{n,m,k}[\rho] \text{ и } \hat{\mathbf{d}}_{n,m,k}[\rho] \approx \hat{\mathbf{d}}'_{n,m,k}[\rho]$$

для любых  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m+k}$ . Очевидно, что эти тождества эквивалентны по моду-

лю (3.44) тождествам

$$\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho] \quad \text{и} \quad \mathbf{d}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{d}'_{n,m,k}[\rho].$$

Далее, согласно предложению 3.54,  $M(\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho]) \notin \mathbf{V}$  для любых  $(n, m) \in \mathbb{N}_0^2$  и  $\rho \in S_{n,m}$ . Тогда, в силу леммы 3.39,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$ . Отсюда и из доказательства леммы 3.5 в [11] вытекает, что тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] \approx \hat{\mathbf{a}}'_{n,m}[\rho]$  выполнено в  $\mathbf{V}$  для всех  $n, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{n+m}$ . Отметим, что последнее тождество эквивалентно по модулю (3.44) тождеству  $\mathbf{a}_{n,m}[\rho] \approx \mathbf{a}'_{n,m}[\rho]$ , откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_n$ .

**Случай 1.2:**  $M(xux) \notin \mathbf{V}$ . Из леммы 1.3 вытекает, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $xux \approx x^s ux^t$ , где либо  $s \geq 2$ , либо  $t \geq 2$ . В силу симметрии мы можем считать, что  $s \geq 2$ . Если  $n = 2$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.50), так как

$$xux \approx x^s ux^t \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} x^2 ux^t \stackrel{(3.44)}{\approx} ux^{2+t} \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} ux^2 \stackrel{(3.44)}{\approx} x^2 u.$$

Если  $n > 2$ , то  $s = 2$  и  $t = 0$ , поскольку в этом случае, в силу лемм 1.3 и 1.24, слово  $x^2$  будет изотермом для  $\mathbf{V}$ . Мы видим, что в многообразии  $\mathbf{V}$  в любом случае выполняется тождество (3.50), откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Q}_n$ .

**Случай 2:** одно из многообразий  $\mathbf{M}_\gamma(uxx^+)$  и  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+u)$  содержится в многообразии  $\mathbf{V}$ . В силу предложения 3.43(i) и двойственного к нему утверждения,  $M(x^2) \notin \mathbf{V}$ . С учетом леммы 1.24, отсюда следует, что  $n = 2$ . Иными словами  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $x^2 \approx x^3$  и (3.34). Далее, в силу предложения 3.44(iv),  $\mathbf{V}$  не содержит по крайней мере одно из многообразий  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+)$  и  $\mathbf{M}_\lambda(x^+ux)$ . В силу симметрии далее можно считать, что  $\mathbf{M}_\lambda(x^+ux) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, по лемме, двойственной к лемме 1.28,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.8).

Предположим, что  $M(xux) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, по следствию 3.9, в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (1.4). Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{V}$ , то, согласно лемме 1.28,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.31) и потому тождеству (3.26), так как  $xux \stackrel{(1.4)}{\approx} xux^2 \stackrel{(3.31)}{\approx} x^2 ux^2 \stackrel{(3.8)}{\approx} x^2 ux$ . В этом случае  $\Phi_2$  выполняется в  $\mathbf{V}$ , поскольку для любых  $k, \ell \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_{k+\ell}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{k,\ell}[\rho] &\stackrel{\{(1.4), (3.26)\}}{\approx} \mathbf{h} x^{2(k+\ell)} \left( \prod_{i=1}^{k+\ell-1} z_{i\rho}^2 y_i^2 \right) z_{(k+\ell)\rho} x \mathbf{t} \\ &\stackrel{(3.34)}{\approx} \mathbf{h} x^2 \left( \prod_{i=1}^{k+\ell-1} z_{i\rho}^2 y_i^2 x^2 \right) z_{(k+\ell)\rho} x \mathbf{t} \stackrel{\{(1.4), (3.26)\}}{\approx} \bar{\mathbf{a}}_{k,\ell}[\rho], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{h} := z_1 t_1 z_2 t_2 \cdots z_k t_k$  и  $\mathbf{t} := t_{k+1} z_{k+1} t_{k+2} z_{k+2} \cdots t_{k+\ell} z_{k+\ell}$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\Phi_1$  выполняется в  $\mathbf{V}$ . Откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_2$ .

Предположим теперь, что  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\gamma(xx^+u) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.5) по лемме, двойственной к лемме 1.27, откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_1$ . Если  $M_\gamma(xx^+u) \in \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{H}_1 \notin \mathbf{V}$  в силу предложения 3.44(i). В этом случае из леммы 3.15 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.19).

Тогда тождество (3.30) выполняется в  $\mathbf{V}$ , поскольку

$$хузуху \stackrel{(1.4)}{\approx} хузух^2у^2 \stackrel{(3.19)}{\approx} ухзух^2у^2 \stackrel{(1.4)}{\approx} ухзуху.$$

В силу предложений 3.45, 3.47 и 3.49, многообразие  $\mathbf{V}$  не содержит моноиды  $M_\lambda([\hat{\mathbf{a}}_{0,k}[\pi]]^\lambda)$ ,  $M_\lambda([\mathbf{a}_{0,k}[\pi]]^\lambda)$  и  $M_\beta([\mathbf{a}_{0,k}[\pi]]^\beta)$  для всех  $k \geq 2$  и  $\pi \in S_k$ . Это позволяет нам применить лемму 3.35 заключая, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$ . Далее, согласно предложению 3.56,  $M_\lambda([\mathbf{c}_{0,0,k}[\pi]]^\lambda) \notin \mathbf{V}$  для любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $\pi \in S_k$ . Тогда, по лемме 3.30,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{c}_{k,\ell,m}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{k,\ell,m}[\rho]$  для всех  $k, \ell, m \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_{k+\ell+m}$ . Наконец, тождество  $\mathbf{d}_{k,\ell,m}[\rho] \approx \mathbf{d}'_{k,\ell,m}[\rho]$  также выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку оно является следствием системы тождеств  $\{(1.4), (3.34)\}$ . Мы видим, что  $\Phi_1$  выполняется в  $\mathbf{V}$ . Откуда снова получаем, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_2$ . Таким образом, далее будем считать, что  $M(хух) \in \mathbf{V}$ . Возможны три случая.

**Случай 2.1:**  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}$ . Из пп. (xxiii) и (xxiv) предложения 3.44 и леммы 1.23 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Если  $M_\gamma(ухх^+) \notin \mathbf{V}$ , то, по лемме 1.27, в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (3.4). В этом случае  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_6$ , поскольку  $хузух^2ту \stackrel{(3.4)}{\approx} ухзух^2ту$ ,  $хузух^2ту \stackrel{(3.4)}{\approx} ухзух^2ту$  и  $х^2уту \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} х^3уту \stackrel{\sigma_3}{\approx} хух^2ту \stackrel{(3.4)}{\approx} ух^2ту$ . Таким образом, далее мы можем считать, что  $M_\gamma(ухх^+) \in \mathbf{V}$ .

Предположим, что  $M_\nu([ух^2ту]^\nu) \in \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  не содержит многообразий  $\mathbf{M}_\gamma(хх^+у)$ ,  $\mathbf{M}_\lambda(хух^+)$  и  $\mathbf{M}(хухзх)$  в силу пп. (ii), (v) и (xv) предложения 3.44. Из утверждения, двойственного к лемме 1.27, леммы 1.28 и следствия 3.9(i) следует, что тождества (3.5), (3.31) и  $\iota_2$  выполнены в  $\mathbf{V}$ . Поскольку тождество (3.31) эквивалентно по модулю (3.5) тождеству (3.42), получаем, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_3$ . Поэтому далее можно считать, что  $M_\nu([ух^2ту]^\nu) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, в силу леммы 3.6(i), многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.2). Ясно, что это тождество эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.8), \sigma_2, \sigma_3\}$  тождеству (3.7). Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

**Случай 2.1.1:**  $M_\lambda(хух^+) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, по лемме 1.28, в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (3.31) и значит, тождество (3.42). Если  $M(хухзх) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\iota_2$  по следствию 3.9(i). В этом случае  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_5$ , так как  $хузух^2у \stackrel{(3.31)}{\approx} х^2узух^2у \stackrel{(3.7)}{\approx} ух^2зух^2у \stackrel{(3.31)}{\approx} ухзух^2у$ . Таким образом, далее можно считать, что  $M(хухзх) \in \mathbf{V}$ . В этом случае из предложения 3.44(xvi) вытекает, что  $M_{\gamma'}(ухх^+ту) \notin \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.6) по следствию 3.8. Из сказанного следует, что тождество (3.52) выполняется в  $\mathbf{V}$ , поскольку

$$х^2уту \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} х^3уту \stackrel{\sigma_3}{\approx} хух^2ту \stackrel{(3.6)}{\approx} ух^2ту. \quad (3.71)$$

Наконец, поскольку

$$\begin{aligned} хузух^2ту &\stackrel{(3.42)}{\approx} х^2узухту \stackrel{(3.52)}{\approx} ух^2зухту \stackrel{(3.42)}{\approx} ухзух^2ту, \\ хузух^2ту &\stackrel{(3.42)}{\approx} х^2узухту \stackrel{(3.52)}{\approx} ух^2зухту \stackrel{(3.42)}{\approx} ухзух^2ту, \end{aligned} \quad (3.72)$$

имеем  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_6$ .

**Случай 2.1.2:**  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Тогда из пп. (vi) и (xii) предложения 3.44 вытекает, что  $\mathbf{V}$  не содержит многообразий  $\mathbf{M}_{\gamma'}(uxx^+ty)$  и  $\mathbf{H}_1$ . В силу следствия 3.8 и леммы 3.15, в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества (3.6) и (3.19). Тогда, с учетом (3.71), получаем, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет также тождеству (3.52).

Предположим сначала, что  $M_\eta([xuzx^2ty]^\eta) \in \mathbf{V}$ . Ясно, что в моноиде  $M_\eta([xuzx^2ty]^\eta)$  нарушается тождество (3.17). Из этого факта и леммы 3.14(ii) вытекает, что  $\mathbf{M}_{\lambda'}(xuzytxx^+) \subset \mathbf{M}_\eta([xuzx^2ty]^\eta)$ . Тогда  $\mathbf{V}$  не содержит многообразий  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+y)$ ,  $\mathbf{M}(xuxzx)$  и  $\mathbf{M}_\mu(xuxzx^+)$  в силу пп. (iii), (xix) и (xxii) предложения 3.44. Теперь применим лемму 1.27, а также следствия 3.9 и 3.76 заключая, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества (3.5),  $\iota_2$  и  $\iota'_2$ . Наконец, в  $\mathbf{V}$  также выполнены тождества

$$xuzx^2ty^2 \stackrel{(3.5)}{\approx} xuzx^2tx^2y^2 \stackrel{(3.19)}{\approx} yxzx^2tx^2y^2 \stackrel{(3.5)}{\approx} yxzx^2ty^2,$$

откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_4$ . Следовательно, можно далее считать, что  $M_\eta([xuzx^2ty]^\eta) \notin \mathbf{V}$ . В силу леммы 3.14(i),  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.16). Ясно, что это тождество эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, \sigma_2\}$  тождеству (3.23). Дальнейшие рассуждения снова делятся на два случая.

**Случай 2.1.2.1:**  $M(xuxzx) \in \mathbf{V}$ . В это случае из пп. (xviii) и (xix) предложения 3.44 вытекает, что моноиды  $M_{\lambda'}(xuzxx^+ty)$  и  $M_{\lambda'}(xuzytxx^+)$  не лежат в многообразии  $\mathbf{V}$ . В силу леммы 3.14(ii) и следствия 3.21,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам (3.17) и (3.24). Отсюда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_6$ .

**Случай 2.1.2.2:**  $M(xuxzx) \notin \mathbf{V}$ . В этом случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\iota_2$  по следствию 3.9(i). В силу предложения 3.44(xiii),  $M_\lambda(xuzx^+ty^+) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, согласно следствию 3.19,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.22). Далее, если  $M_\mu(xuxzx^+) \notin \mathbf{V}$ , то тождество  $\iota'_2$  выполняется в  $\mathbf{V}$  по следствию 3.76, откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_7$ . Если  $M_\mu(xuxzx^+) \in \mathbf{V}$ , то из предложения 3.44(xxi) и леммы 3.22 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.25), откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_8$ .

**Случай 2.2:**  $\mathbf{N}^\delta \subseteq \mathbf{V}$ . Тогда из п. (xxiii) и утверждения, двойственного к п. (xxiv) предложения 3.44, а также леммы 1.23 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Предположим сначала, что  $M_{\bar{\gamma}}([ytx^2y]^{\bar{\gamma}}) \in \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  не содержит многообразий  $\mathbf{M}_\gamma(uxx^+)$  и  $\mathbf{M}(xuxzx)$  в силу утверждений, двойственных к пп. (ii) и (xv) предложения 3.44. Далее, применим лемму 1.27 и следствие 3.9 и получим, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества (3.4) и  $\iota_2$ . Поскольку  $\{(3.4), (3.8)\}$  влечет (3.42), имеем  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_3^\delta$ . Следовательно, далее мы можем считать, что  $M_{\bar{\gamma}}([ytx^2y]^{\bar{\gamma}}) \notin \mathbf{V}$ . В силу утверждения, двойственного к лемме 3.6(i),  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^2yx^2tx^2y \approx x^2yx^2tx^2yx^2$ . Ясно, что последнее тождество эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.8), \sigma_3\}$  тождеству (3.14).

Далее, если  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.5) в силу леммы, двойственной к лемме 1.27. Ясно, что это тождество вместе с тождеством  $\sigma_3$  влечет тождество

$$ytx^2y \approx ytyx^2, \tag{3.73}$$

откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_9$ . Поэтому далее можно считать, что  $M_\gamma(xx^+y) \in \mathbf{V}$ . Если  $M(xuxzx) \in \mathbf{V}$ , то из утверждения, двойственного к предложению 3.44(xvi), вытекает, что  $M_{\gamma'}(ytxx^+y) \notin \mathbf{V}$ . Если  $M_\gamma(uxx^+) \notin \mathbf{V}$ , то, по лемме 1.27,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.4) и потому  $ytx^2y \stackrel{(3.4)}{\approx} x^2ytx^3y \stackrel{(3.14)}{\approx}$

$x^2ytx^2yx \stackrel{(3.4)}{\approx} ytx^2yx$ . Если  $M_\gamma(yxx^+) \in \mathbf{V}$ , из утверждения, двойственного к лемме 3.7 вытекает, что тождество

$$ytx^2y \approx ytx^2yx \quad (3.74)$$

выполнено в  $\mathbf{V}$ . Поскольку  $ytx^2yx \stackrel{\sigma_3}{\approx} ytx^3 \stackrel{x^2 \approx x^3}{\approx} ytx^2$ , снова получаем, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_9$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $M(xuxzx) \notin \mathbf{V}$ . В этом случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\iota_2$  по следствию 3.9. Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{V}$ , то из леммы 1.28 следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.31), а значит, и тождеству (3.42), откуда вытекает, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_5^\delta$ . Предположим теперь, что  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Тогда  $M_{\gamma'}(ytxx^+), M_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'}) \notin \mathbf{V}$  в силу пп. (vii) и (xi) предложения 3.44. В силу утверждения, двойственного к лемме 3.6(ii), тождество (3.12) выполнено в  $\mathbf{V}$ . Теперь применим лемму 3.13 и получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (3.15). Откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_{10}$ .

**Случай 2.3:**  $\mathbf{N}, \mathbf{N}^\delta \not\subseteq \mathbf{V}$ . Из предложений 3.59, 3.62, леммы 3.33 и двойственных к ним утверждений вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_1$ . В частности, в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества (3.30) и (3.41). Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

**Случай 2.3.1:**  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, по лемме 1.28, в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (3.31) и значит, тождество (3.42). Далее,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$  в силу леммы 3.37, предложений 3.51, 3.52, 3.53, 3.55, а также утверждения, двойственного к предложению 3.55. Если  $M(xuxzx) \notin \mathbf{V}$ , то, по следствию 3.9,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\iota_2$ , откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_{11}$ . Поэтому далее можно считать, что  $M(xuxzx) \in \mathbf{V}$ . Тогда из пп. (xvi) и (xvii) предложения 3.44 вытекает, что моноиды  $M_{\gamma'}(xx^+ty)$  и  $M_{\gamma'}(ytxx^+)$  не лежат в  $\mathbf{V}$ . В силу леммы 3.6(ii) и следствия 3.8,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам (3.3) и (3.6). В этом случае тождество (3.52) выполнено в  $\mathbf{V}$ , поскольку

$$x^2yty \stackrel{(3.3)}{\approx} x^2yx^2ty \stackrel{(3.6)}{\approx} yx^2ty. \quad (3.75)$$

Двойственными рассуждениями можно показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.73). Учитывая тождества (3.72) и

$$zyyxtx^2 \stackrel{(3.42)}{\approx} zyux^2tx \stackrel{(3.73)}{\approx} yzx^2ytx \stackrel{(3.42)}{\approx} yzxytx^2,$$

получаем, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_{12}$ .

**Случай 2.3.2:**  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Из пп. (vi) и (vii) предложения 3.44 вытекает, что моноиды  $M_{\gamma'}(ytxx^+)$  и  $M_{\gamma'}(ytxx^+)$  не лежат в  $\mathbf{V}$ . В силу утверждения, двойственного к лемме 3.6(ii) и следствия 3.8, в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества (3.6) и (3.12). Далее,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\Phi_2$  по лемме 3.36 и предложению 3.55. Дальнейшие рассуждения снова делятся на два случая.

**Случай 2.3.2.1:**  $M(xuxzx) \in \mathbf{V}$ . Из пп. (xvii)–(xx) предложения 3.44 и утверждения, двойственного к п. (xvi) этого предложения вытекает, что следующие моноиды не лежат в  $\mathbf{V}$ :

$$M_{\gamma'}(ytxx^+), M_{\gamma'}(xx^+ty), M_{\lambda'}(xyzxx^+ty), M_{\lambda'}(xyzytxx^+), M_{\lambda'}(zyyxtx^+).$$

Согласно утверждению, двойственному к следствию 3.8, лемме 3.6(ii), лемме 3.14(ii),(iii) и

следствию 3.21,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам (3.74), (3.3), (3.17), (3.18) и (3.24). С учетом тождеств (3.75) и  $ytux^2 \stackrel{(3.12)}{\approx} ytx^2ux^2 \stackrel{(3.74)}{\approx} ytx^2u$ , имеем  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_{12}$ .

**Случай 2.3.2.2:**  $M(xuxzx) \notin \mathbf{V}$ . Тогда многообразию  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\iota_2$  по следствию 3.9(i). Далее, из пп. (viii)–(xiv) предложения 3.44 следует, что  $\mathbf{V}$  не содержит следующие многообразия:

$$\mathbf{H}_1, \mathbf{M}_\lambda(xyzx^+ty^+), \mathbf{M}_\lambda(xx^+ty^+), \\ \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2yzytx^2]^{\gamma'}), \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2yzx^2ty]^{\gamma'}), \mathbf{M}_{\gamma'}([yzyx^2ytx^2]^{\gamma'}), \mathbf{M}_{\gamma'}([x^2zytx^2y]^{\gamma'}).$$

Тогда, в силу лемм 3.11, 3.12, 3.13 и следствий 3.17, 3.19,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет следующим тождествам: (3.10), (3.11), (3.13), (3.15), (3.21) и (3.22). Далее, если  $M_\mu(xuxzx^+) \notin \mathbf{V}$ , то тождество  $\iota'_2$  выполнено в  $\mathbf{V}$  по следствию 3.76, откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_{13}$ . Если  $M_\mu(xuxzx^+) \in \mathbf{V}$ , применяя предложение 3.44(xxi) и лемму 3.22, получаем, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.25), откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_{14}$ .

*Достаточность.* В силу симметрии достаточно установить дистрибутивность многообразий  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}_1$ – $\mathbf{D}_{15}$ ,  $\mathbf{P}_n$ ,  $\mathbf{Q}_n$  и  $\mathbf{R}_n$ . Многообразия  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}_1$  дистрибутивны в силу предложения 1.14 и леммы 1.18 соответственно. Таким образом, остается рассмотреть многообразия  $\mathbf{D}_2$ – $\mathbf{D}_{15}$ ,  $\mathbf{P}_n$ ,  $\mathbf{Q}_n$  и  $\mathbf{R}_n$ .

Нашим ключевым инструментом будет следующая лемма.

**Лемма 3.81.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, а  $\mathbf{W}$  — его подмногообразие. Предположим, что существует система тождеств  $\Sigma$  такая, что

- (i) если  $\mathbf{U} \in [\mathbf{W}, \mathbf{V}]$ , то  $\mathbf{U} = \mathbf{V}\Sigma'$  для некоторого множества тождеств  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ;
- (ii) если  $\mathbf{U}, \mathbf{U}' \in [\mathbf{W}, \mathbf{V}]$  и в многообразии  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{U}'$  выполнено некоторое тождество  $\sigma \in \Sigma$ , то одно из многообразий  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{U}'$  удовлетворяет этому тождеству  $\sigma$ .

Тогда интервал  $[\mathbf{W}, \mathbf{V}]$  решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{V})$  дистрибутивен.

*Доказательство.* Рассуждая от противного, предположим, что существуют три многообразия  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in [\mathbf{W}, \mathbf{V}]$  такие, что подрешетка  $L$  интервала  $[\mathbf{W}, \mathbf{V}]$ , порожденная этими многообразиями, совпадает с одной из двух минимальных 5-элементных недистрибутивных решеток. Без ограничения общности мы можем считать, что  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — атомы решетки  $L$ , и либо  $\mathbf{Z}$  также является атомом решетки  $L$ , либо  $\mathbf{Y} \subset \mathbf{Z}$ . В любом из этих случаев существует тождество  $\sigma$ , выполненное в  $\mathbf{Y}$ , но не выполненное в  $\mathbf{Z}$ . В силу условия (i), мы можем считать, что  $\sigma \in \Sigma$ . Тождество  $\sigma$  выполнено в многообразии  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Z}$ . Поскольку это тождество нарушается в  $\mathbf{Z}$ , из условия (ii) вытекает, что оно выполнено в  $\mathbf{X}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y} = \mathbf{X} \vee \mathbf{Z}$  удовлетворяет  $\sigma$ . Однако это противоречит тому факту, что  $\sigma$  нарушается в  $\mathbf{Z}$ .  $\square$

Чтобы доказать дистрибутивность многообразий  $\mathbf{D}_2$ – $\mathbf{D}_{14}$ , мы будем использовать следующую общую схему. Для каждого  $2 \leq n \leq 14$ , согласно лемме 1.25, подмногообразию многообразия  $\mathbf{D}_n$  коммутативно тогда и только тогда, когда оно не содержит  $M(xy)$ . Из этого факта и следствия 6.1.5 в [29] вытекает, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_n)$  является дизъюнктивным

объединением решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(x))$  и интервала  $[\mathbf{M}(xy), \mathbf{D}_n]$ . В силу рис. 1.3, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(x))$  дистрибутивна. Что касается интервала  $[\mathbf{M}(xy), \mathbf{D}_n]$ , мы построим множество тождеств  $\Delta_n$  таких, что:

- (i) любое некоммутативное подмногообразие многообразия  $\mathbf{D}_n$  задается внутри  $\mathbf{D}_n$  некоторым подмножеством множества  $\{\Delta, \Delta_n\}$ ;
- (ii) если  $\mathbf{U}, \mathbf{U}'$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_n$  и  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{U}'$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_n$ , то  $\sigma$  выполняется либо в  $\mathbf{U}$ , либо в  $\mathbf{U}'$ .

Тогда дистрибутивность интервала  $[\mathbf{M}(xy), \mathbf{D}_n]$ , а потому и всей решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_n)$  будет вытекать из леммы 3.81 и следствия 3.77. Остается пояснить каким образом будет строиться система тождеств  $\Delta_n$  для каждого  $n$ .

Если  $n = 2$  или  $11 \leq n \leq 14$ , то из предложения 3.66 и леммы 3.75 следует, что каждое некоммутативное подмногообразие многообразия  $\mathbf{D}_n$  может быть задано тождествами из  $\Delta$  вместе с некоторыми тождествами вида (3.63)–(3.65), где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . В этом случае мы строим множество  $\Delta_n$  уточняя вид тождеств (3.63)–(3.65).

Если  $3 \leq n \leq 8$ , из предложения 1.15 и леммы 3.75 вытекает, что каждое некоммутативное подмногообразие многообразия  $\mathbf{D}_n$  может быть задано тождествами из  $\Delta$  вместе с некоторыми эффективными тождествами вида (1.2), где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . В этом случае мы строим множество  $\Delta_n$  уточняя вид тождеств (1.2).

Наконец, если  $n = 9$  или  $n = 10$ , то из утверждения, двойственного к предложению 1.15 и леммы 3.75 следует, что каждое некоммутативное подмногообразие многообразия  $\mathbf{D}_n$  может быть задано тождествами из  $\Delta$  вместе с некоторыми эффективными тождествами вида (3.70), где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . В этом случае мы строим множество  $\Delta_n$  уточняя вид тождеств (3.70).

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_2)$ .** Возьмем произвольные  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . Рассмотрим тождество (3.63). Если  $k > 0$ , то, в силу симметрии можно считать, что  $x \in \text{alph}(a_1 a_2 \cdots a_k)$ . Тогда тождество (3.63) эквивалентно по модулю (1.4) тождеству (3.66). Таким образом тождество (3.63) эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_2$  либо тождеству

$$xy \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right) \approx yx \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right), \quad (3.76)$$

либо, по лемме 3.68, системе тождеств  $\{(3.64), (3.65)\}$ . Далее, предположим, что тождество (3.64) не выполнено в многообразии  $\mathbf{D}_2$ . Легко видеть, что  $y \notin \text{alph}(a_1 a_2 \cdots a_k)$ , поскольку в противном случае тождество (3.64) является следствием системы тождеств  $\{(1.4), (3.34)\}$ . Тогда рутинными вычислениями можно проверить, что тождество (3.64) эквивалентно по

модулю  $\{\Phi_2, (1.4)\}$  тождеству

$$x^2y \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right) \approx xyx \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right). \quad (3.77)$$

Аналогичным образом можно показать, что если тождество (3.65) не выполнено в  $\mathbf{D}_2$ , то оно эквивалентно по модулю  $\{\Phi_2, (1.4)\}$  тождеству

$$x^g t y x^2 \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right) \approx x^g t x y x \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right), \quad (3.78)$$

где

$$g := \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ 1, & \text{если } k = 1 \text{ и } g_1 = 1, \\ 2, & \text{если } k > 1 \text{ или } g_1 > 1. \end{cases}$$

В качестве  $\Delta_2$  возьмем множество всех тождеств вида (3.76)–(3.78). Остается показать, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Delta_2$ , то это тождество выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . В силу леммы 1.25,  $M(xy) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Если  $M_\lambda(xyx^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, по лемме 1.28, одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.31). В этом случае тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в одном из этих многообразий, поскольку оно вытекает из системы  $\{(3.31), (1.4), (3.34)\}$ . Если  $M_\lambda(xx^+y) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, согласно утверждению, двойственному к лемме 1.27, одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.5). В этом случае тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в одном из этих многообразий, поскольку  $\mathbf{u} \stackrel{\{(3.5), (1.4)\}}{\approx} \mathbf{u}xy \stackrel{(3.30)}{\approx} \mathbf{v}xy \stackrel{\{(3.5), (1.4)\}}{\approx} \mathbf{v}$ . Поэтому далее мы можем считать, что  $M_\lambda(xyx^+) \vee M_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Мы рассмотрим только случай, когда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид (3.78). Случай, когда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с одним из тождеств (3.76) и (3.77) рассматриваются вполне аналогично и мы опустим соответствующие выкладки.

Предположим сначала, что существует  $k+1 \leq r \leq k+\ell$  такое, что  $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_{r-1} = x$  и  $a_r = a_{r+1} = \dots = a_{k+\ell} = y$ . В силу предложения 1.1, найдется конечная последовательность слов  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Поскольку, в силу леммы 1.5, множества  $xx^+y$  и  $xyx^+$  стабильны относительно  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , получаем, что для любого  $j = 0, 1, \dots, m$

$$\mathbf{w}_j \in x^{g_j} t \mathbf{a}_j \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^+ \right),$$

где  $\text{alph}(\mathbf{a}_j) = \{x, y\}$ ,  $\mathbf{w}_j(x, t_{k+1}) \in xx^+t_{k+1}x^*$ ,  $\mathbf{w}_j(y, t_{k+1}) \in yt_{k+1}y^+$ ,  $\mathbf{w}_j(y, t_r) \in yt_r y^+$ , и если  $g \leq 1$ , то  $g_j = g$ , а если  $g \geq 2$ , то  $g_j \geq 2$ . Тогда существует  $s \in \{0, \dots, m-1\}$  такое, что  $(1_{\mathbf{a}_s}y) < (1_{\mathbf{a}_s}x)$ , но  $(1_{\mathbf{a}_{s+1}}x) < (1_{\mathbf{a}_{s+1}}y)$ . В этом случае тождество  $\mathbf{w}_s \approx \mathbf{w}_{s+1}$  эквивалентно по модулю  $\{\Phi_2, (1.4)\}$

одному из тождеств (3.78) или

$$x^s t x^2 y \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right) \approx x^s t y x^2 \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right).$$

Легко видеть, что последнее тождество вместе с (1.4) влечет (3.78). Отсюда следует, что тождество (3.78) выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

Предположим теперь, что найдется  $k+1 \leq r < k+\ell$  такое, что  $a_r = y$  и  $a_{r+1} = x$ . Если  $M_\gamma(x^+ y z x^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, по лемме 3.10, одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.9) и потому тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\stackrel{(3.9)}{\approx} x^s t y x^2 \left( \prod_{i=k+1}^{r-1} t_i a_i \right) t_r x y \left( \prod_{i=r+1}^{k+\ell} t_i a_i \right) \\ &\stackrel{(3.30)}{\approx} x^s t x y x \left( \prod_{i=k+1}^{r-1} t_i a_i \right) t_r x y \left( \prod_{i=r+1}^{k+\ell} t_i a_i \right) \stackrel{(3.9)}{\approx} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Если  $M_\gamma(x^+ y z x^+) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то рассуждая как в предыдущем абзаце, можно показать, что тождество (3.78) выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_3)$ .** Возьмем произвольное эффективное тождество вида (1.2), не выполненное в  $\mathbf{D}_3$ , где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $e := \sum_{i=0}^r e_i$ ,  $f := \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Поскольку

$$x y z x^2 t y^2 \stackrel{(3.42)}{\approx} x^2 y^2 z x t y \stackrel{(3.34)}{\approx} y^2 x^2 z x t y \stackrel{(3.42)}{\approx} y x z x^2 t y^2, \quad (3.79)$$

из леммы 3.78 вытекает, что либо  $(e, e_0) = (2, 1)$ , либо  $(f, f_0) = (2, 1)$ . В силу симметрии мы можем без ограничения общности считать, что  $(f, f_0) = (2, 1)$ . Тогда рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $(e, e_0) = (2, 1)$ , то  $r \in \{1, 2\}$  и потому тождество (1.2) совпадает (с точностью до переименования букв) с одним из тождеств  $\sigma_1$  и (3.30);
- если  $e_0 > 1$  или  $e > 2$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{(3.5), (3.42), \iota_2\}$  тождеству (3.52).

Таким образом, тождество (1.2) эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_3$  некоторому тождеству из  $\Delta_3 := \{\sigma_1, (3.30), (3.52)\}$ . Остается показать, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_3$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_3$ , то  $\sigma$  выполняется в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

Если  $M(x u x) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то требуемое утверждение выполняется в силу леммы 3.79(ii). Поэтому далее мы можем считать, что  $M(x u x) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . Далее, если  $\sigma \in \{\sigma_1, (3.30)\}$ , то, по лемме 3.79(i), тождество  $\sigma$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Пусть теперь  $\sigma$  обозначает тождество (3.52). В силу предложения 1.1, существует последовательность слов  $x^2 y t u = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = u x^2 t y$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в

$\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Поскольку, по лемме 1.3, слово  $xux$  является изотермом для  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , получаем, что  $\mathbf{w}_i(y, t) = ytu$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m$ . Очевидно, что существует  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  такое, что  $(1_{\mathbf{w}_j}x) < (1_{\mathbf{w}_j}y)$ , но  $(1_{\mathbf{w}_{j+1}}y) < (1_{\mathbf{w}_{j+1}}x)$ . Тогда тождество  $\varphi(\mathbf{w}_j) \approx \varphi(\mathbf{w}_{j+1})$ , где  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, определяемая по формуле

$$\varphi(v) := \begin{cases} x^2t, & \text{если } v = t, \\ v, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.80)$$

эквивалентно по модулю  $\{(3.5), (3.42)\}$  тождеству (3.52). Откуда следует, что тождество (3.52) выполнено либо  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_4)$ .** Возьмем произвольное эффективное тождество вида (1.2), не выполненное в  $\mathbf{D}_4$ , где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $e := \sum_{i=0}^r e_i$ ,  $f := \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Тогда, в силу леммы 3.78, либо  $(e, e_0) = (2, 1)$ , либо  $(f, f_0) = (2, 1)$ . В силу симметрии без ограничения общности мы можем считать, что  $(f, f_0) = (2, 1)$ . Очевидно, что  $e_0 = 1$ , так как в противном случае тождество (1.2) выполняется в  $\mathbf{D}_4$ . Тогда рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $e = 2$ , то тождество (1.2) совпадает (с точностью до переименования букв) с одним из тождеств  $\sigma_1$  и (3.30);
- если  $e > 2$  и  $e_1 = 0$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{(3.5), \iota_2, \iota'_2\}$  тождеству (3.17);
- если  $e > 2$  и  $e_1 > 0$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{(3.5), \iota_2, \iota'_2\}$  тождеству (3.24).

Таким образом, тождество (1.2) эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_4$  некоторому тождеству из множества  $\Delta_4 := \{\sigma_1, (3.30), (3.17), (3.24)\}$ . Остается проверить, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_4$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_4$ , то  $\sigma$  выполняется в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

Если  $M(xux) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то требуемое утверждение выполняется в силу леммы 3.79(ii). Поэтому далее мы можем считать, что  $M(xux) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . Далее, если  $\sigma \in \{\sigma_1, (3.30)\}$ , то, по лемме 3.79(i), тождество  $\sigma$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\sigma \in \{(3.17), (3.24)\}$ . Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то тождество  $\sigma$  выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  по лемме 3.79(iii). Поэтому далее будем считать, что  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . Предположим, что  $\sigma$  обозначает тождество (3.24). В силу предложения 1.1, существует последовательность слов  $xuzx^2ty = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = xzxx^2ty$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Поскольку, согласно леммам 1.3 и 1.5, множества  $xux^+$  и  $\{xux\}$  стабильны относительно  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{w}_i(x, z) \in xzxx^+$  и  $\mathbf{w}_i(y, t, z) = yztu$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Откуда  $\mathbf{w}_i \in xuzx^+tx^*yx^* \cup xzxx^+tx^*yx^*$ . Очевидно, что существует  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  такое, что  $(1_{\mathbf{w}_j}x) < (1_{\mathbf{w}_j}y)$ , но  $(1_{\mathbf{w}_{j+1}}y) < (1_{\mathbf{w}_{j+1}}x)$ . Тогда тождество  $\varphi(\mathbf{w}_j) \approx \varphi(\mathbf{w}_{j+1})$ , где  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, определяемая по формуле (3.80), эквивалентно по модулю (3.5) тождеству (3.24). Откуда следует, что тождество (3.24) вы-

полнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Аналогичным образом можно доказать требуемое утверждение в случае, когда  $\sigma$  обозначает тождество (3.17).

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_5)$ .** Возьмем произвольное эффективное тождество вида (1.2), не выполненное в  $\mathbf{D}_5$ , где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $e := \sum_{i=0}^r e_i$ ,  $f := \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . С учетом тождеств (3.79), мы можем применить лемму 3.78 и заключить, что  $(e, e_0) = (2, 1)$  или  $(f, f_0) = (2, 1)$ . В силу симметрии без ограничения общности можно считать, что  $(f, f_0) = (2, 1)$ . Существует  $p \in \{1, 2, \dots, r\}$  такое, что  $f_p = 1$  и  $f_1 = f_2 = \dots = f_{p-1} = f_{p+1} = f_{p+2} = \dots = f_r = 0$ . Поскольку тождество (1.2) является эффективным,  $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_r > 0$ . Если  $(e, e_0) = (2, 1)$ , то тождество (1.2) совпадает (с точностью до переименования букв) с одним из тождеств  $\sigma_1$  и (3.30). Пусть теперь  $e > 2$  или  $e_0 > 1$ . В этом случае  $e_p = 0$ , поскольку в противном случае тождество (1.2) является следствием системы  $\{\iota_2, (3.23), (3.42)\}$ . Тогда рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $p < r$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{\sigma_3, \iota_2, (3.42)\}$  тождеству (3.17);
- если  $p = r$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{\sigma_3, \iota_2, (3.42)\}$  тождеству (3.52).

Таким образом, тождество (1.2) эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_5$  некоторому тождеству из системы  $\Delta_5 := \{\sigma_1, (3.30), (3.17), (3.52)\}$ . Остается показать, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_5$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_5$ , то  $\sigma$  выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

Если  $M(xux) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то требуемое утверждение выполняется в силу леммы 3.79(ii). Поэтому далее мы можем считать, что  $M(xux) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . Далее, если  $\sigma \in \{\sigma_1, (3.30)\}$ , то, по лемме 3.79(i), тождество  $\sigma$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

Предположим, что  $\sigma$  обозначает тождество (3.17). Если  $M_\gamma(x^+uzx^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, согласно леммам 1.25 и 3.10, либо  $\mathbf{X}$ , либо  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.9) и потому тождествам

$$xyzytx^2 \stackrel{(3.42)}{\approx} x^2yzyt \stackrel{(3.9)}{\approx} x^2yzx^2yt \stackrel{(3.23)}{\approx} yx^2zx^2yt \stackrel{(3.9)}{\approx} yx^2zyt \stackrel{(3.42)}{\approx} yxzytx^2.$$

Таким образом, далее мы можем считать, что  $M_\gamma(x^+uzx^+) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . В силу предложения 1.1, существует конечная последовательность слов  $xyzytx^2 = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = yxzytx^2$  такая, что каждое из слов  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Поскольку, согласно леммам 1.3 и 1.5, множества  $x^+uzx^+$  и  $\{xux\}$  стабильны относительно  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , имеем  $\mathbf{w}_i(x, z, t) \in x^+ztx^+$ ,  $\mathbf{w}_i(x, z, t) \neq xztx$  и  $\mathbf{w}_i(y, z, t) = yzyt$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Очевидно, что существует  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  такое, что  $(1_{\mathbf{w}_j}x) < (1_{\mathbf{w}_j}y)$ , но  $(1_{\mathbf{w}_{j+1}}y) < (1_{\mathbf{w}_{j+1}}x)$ . Тогда тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, (3.42), \sigma_3\}$  тождеству (3.17). Откуда следует, что тождество (3.17) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

Предположим, что  $\sigma$  обозначает тождество (3.52). Если  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, в силу леммы 1.25 и утверждения, двойственного к лемме 1.27, либо  $\mathbf{X}$ , либо  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.5) и потому тождествам

$$x^2yty \stackrel{(3.5)}{\approx} x^2ytx^2y \stackrel{(3.23)}{\approx} yx^2tx^2y \stackrel{(3.5)}{\approx} yx^2ty.$$

Поэтому далее можно считать, что  $M_\gamma(xx^+y) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . В силу предложения 1.1, существует конечная последовательность попарно различных слов  $x^2yty = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = yx^2ty$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Поскольку, согласно леммам 1.3 и 1.5, множества  $xx^+y$  и  $\{xux\}$  стабильны относительно  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , имеем  $\mathbf{w}_i(x, t) \in xx^+t$  и  $\mathbf{w}_i(y, t) = yty$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m$ . Откуда  $\mathbf{w}_i \in xx^+ux^*ty \cup x^+yx^+ty \cup yxx^+ty$ . Очевидно, что существует  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  такое, что  $(1_{\mathbf{w}_j}x) < (1_{\mathbf{w}_j}y)$ , но  $(1_{\mathbf{w}_{j+1}}y) < (1_{\mathbf{w}_{j+1}}x)$ . Тогда тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, \sigma_3\}$  тождеству (3.52). Откуда следует, что тождество (3.52) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_6)$ .** Возьмем произвольное эффективное тождество вида (1.2), не выполненное в  $\mathbf{D}_6$ , где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $e := \sum_{i=0}^r e_i, f := \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Тогда  $e_i, f_i \leq 1$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ , поскольку в противном случае тождество (1.2) следует из системы  $\{\Phi, (3.17), (3.24), (3.52)\}$ . Таким образом, тождество (1.2) принадлежит множеству

$$\Delta_6 := \{xut_1\mathbf{c}_1t_2\mathbf{c}_2 \cdots t_i\mathbf{c}_i \approx yxt_1\mathbf{c}_1t_2\mathbf{c}_2 \cdots t_i\mathbf{c}_i \mid i \in \mathbb{N}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_i \in \{x, y, xy\}\}.$$

Остается показать, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_6$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Delta_6$ , то  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Если слова  $xt_1x \cdots t_kx$  и  $yt_1y \cdots t_my$ , где  $k := \text{осс}_x(\mathbf{u}) - 1 = \text{осс}_x(\mathbf{v}) - 1$  и  $m := \text{осс}_y(\mathbf{u}) - 1 = \text{осс}_y(\mathbf{v}) - 1$ , являются изотермами для многообразия  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то требуемое утверждение вытекает из леммы 3.79(i). Поэтому далее можно считать, что одно из этих слов, скажем  $xt_1x \cdots t_kx$ , не является изотермом для одного из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Тогда применим лемму 1.3 и следствие 3.9 и получим, что одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет  $u_k$ . Заметим, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из  $\{u_k, (3.17), (3.24)\}$ . Откуда вытекает, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_7)$ .** Возьмем произвольное эффективное тождество вида (1.2), не выполненное в  $\mathbf{D}_7$ , где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $e := \sum_{i=0}^r e_i, f := \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Тогда  $(e, e_0) = (2, 1)$  или  $(f, f_0) = (2, 1)$  по лемме 3.78. В силу симметрии мы можем без ограничения общности считать, что  $(f, f_0) = (2, 1)$ . В этом случае найдется такое  $p \in \{1, \dots, r\}$ , что  $f_p = 1$ , а  $f_1 = f_2 = \dots = f_{p-1} = f_{p+1} = f_{p+2} = \dots = f_r = 0$ . Поскольку тождество (1.2) является эффективным,  $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_r > 0$ . Очевидно, что  $e_0 = 1$ , поскольку в противном случае тождество (1.2) вытекает из  $\{x^2 \approx x^3, (3.52)\}$ . Если  $e = 2$ , то тождество (1.2) совпадает (с точностью до переименования букв) с одним из тождеств  $\sigma_1$  и (3.30). Предположим теперь, что  $e > 2$ . В этом случае  $e_p = 0$ , так как иначе тождество (1.2) является следствием системы  $\{x^2 \approx x^3, (3.23), u_2, u'_2\}$ . Тогда рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $p = 1$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, u_2\}$  тождеству (3.17);
- если  $p = r$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, u_2\}$  тождеству (3.24);
- если  $1 < p < r$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, u_2, u'_2\}$  тождеству (3.56).

Таким образом, тождество (1.2) эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_7$  некоторому тождеству из системы

$$\Delta_7 := \{\sigma_1, (3.30), (3.17), (3.24), (3.56)\}.$$

Остается показать, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_7$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_7$ , то  $\sigma$  выполняется в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Этот факт можно доказать, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве дистрибутивности многообразия  $\mathbf{D}_4$  и потому мы опустим соответствующие выкладки.

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_8)$ .** Возьмем произвольное эффективное тождество вида (1.2), не выполненное в  $\mathbf{D}_8$ , где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $e := \sum_{i=0}^r e_i, f := \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Тогда  $(e, e_0) = (2, 1)$  или  $(f, f_0) = (2, 1)$  по лемме 3.78. В силу симметрии мы можем без ограничения общности считать, что  $(f, f_0) = (2, 1)$ . Тогда существует  $p \in \{1, 2, \dots, r\}$  такое, что  $f_p = 1$ , а  $f_1 = f_2 = \dots = f_{p-1} = f_{p+1} = f_{p+2} = \dots = f_r = 0$ . Поскольку тождество (1.2) является эффективным,  $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_r > 0$ . Очевидно, что  $e_0 = 1$ , так как в противном случае тождество (1.2) является следствием системы  $\{x^2 \approx x^3, (3.52)\}$ . Если  $e = 2$ , то легко видеть, что тождество (1.2) совпадает (с точностью до переименования букв) с одним из тождеств  $\sigma_1$  и (3.30). Предположим теперь, что  $e > 2$ . В этом случае  $e_p \leq 1$ , так как иначе тождество (1.2) вытекает из тождества (3.23). Тогда рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $e_p = 0$  и  $p = 1$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, \iota_2\}$  тождеству (3.17);
- если  $e_p = 0$  и  $p = r$ , то тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, \iota_2\}$  тождеству (3.24);
- если  $e_p = 0$  и  $1 < p < r$ , то  $p = 2$  и  $e_1 = 1$ , поскольку иначе тождество (1.2) вытекает из системы  $\{(3.25), \iota_2\}$ ; следовательно, в обсуждаемом случае тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\iota_2$  тождеству (3.56);
- если  $e_p = 1$ , то  $p = 1$ , поскольку в противном случае тождество (1.2) вытекает из системы  $\{(3.23), \iota_2\}$ ; следовательно, в обсуждаемом случае тождество (1.2) эквивалентно по модулю  $\iota_2$  тождеству

$$xyzxytx \approx yxzxytx. \quad (3.81)$$

Таким образом, тождество (1.2) эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_8$  некоторому тождеству из системы

$$\Delta_8 := \{\sigma_1, (3.30), (3.17), (3.24), (3.56), (3.81)\}.$$

Остается показать, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_8$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_8$ , то  $\sigma$  выполняется в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Этот факт можно доказать, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве дистрибутивности многообразия  $\mathbf{D}_4$  и потому мы опустим соответствующие

выкладки.

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_9)$ .** Возьмем произвольное эффективное тождество вида (3.70), не выполненное в  $\mathbf{D}_9$ , где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $e := \sum_{i=0}^r e_i, f := \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Тогда  $e_i, f_i \leq 1$  для любого  $i = 0, \dots, m$ , поскольку в противном случае тождество (3.70) следует из системы  $\{\Phi, (3.8), (3.73)\}$ . Отсюда вытекает, что тождество (3.70) принадлежит системе тождеств

$$\Delta_9 := \{\mathbf{c}_i t_i \cdots \mathbf{c}_2 t_2 \mathbf{c}_1 t_1 x y \approx \mathbf{c}_i t_i \cdots \mathbf{c}_2 t_2 \mathbf{c}_1 t_1 y x \mid i \in \mathbb{N}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_i \in \{x, y, xy\}\}.$$

Остается проверить, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_9$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Delta_9$ , то это тождество выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Если слова  $xt_1x \cdots t_kx$  и  $yt_1y \cdots t_my$ , где  $k := \text{occ}_x(\mathbf{u}) - 1 = \text{occ}_x(\mathbf{v}) - 1$  и  $m := \text{occ}_y(\mathbf{u}) - 1 = \text{occ}_y(\mathbf{v}) - 1$ , являются изотермами для  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то требуемое утверждение следует из леммы 3.80(i). Поэтому далее мы можем считать, что хотя бы одно из этих двух слов, скажем  $xt_1x \cdots t_kx$ , не является изотермом для одного из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Тогда применим лемму 1.3 и следствие 3.9 и получим, что либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$  выполнено тождество  $\iota_k$ . Заметим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является следствием системы  $\{\iota_k, (3.73)\}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_{10})$ .** Возьмем произвольное эффективное тождество вида (3.70), не выполненное в  $\mathbf{D}_{10}$ , где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $e := \sum_{i=0}^r e_i, f := \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . Тогда  $(e, e_0) = (2, 1)$  или  $(f, f_0) = (2, 1)$ , так как в противном случае тождество (3.70) следует из системы  $\{\Phi, \iota_2\}$ . В силу симметрии мы можем без ограничения общности считать, что  $(f, f_0) = (2, 1)$ . Тогда существует  $p \in \{1, 2, \dots, r\}$  такое, что  $f_p > 0$ , а  $f_1 = f_2 = \cdots = f_{p-1} = f_{p+1} = f_{p+2} = \cdots = f_r = 0$ . Поскольку тождество (3.70) является эффективным,  $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_r > 0$ . Ясно, что  $e_p, e_{p+1}, \dots, e_r \leq 1$  и  $\sum_{i=p}^r e_i \leq 2$ , так как в противном случае тождество (3.70) следует из системы  $\{\iota_2, (3.15)\}$ . Если  $(e, e_0) = (2, 1)$ , то тождество (3.70) совпадает (с точностью до переименования букв) с одним из тождеств  $\sigma_2$  и (3.41). Предположим теперь, что  $e > 2$  или  $e_0 > 1$ . В этом случае рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $(e_p, \sum_{i=p}^r e_i) = (0, 0)$ , то тождество (3.70) эквивалентно по модулю

$$\{x^2 \approx x^3, \sigma_3, \iota_2, (3.42)\} \tag{3.82}$$

тождеству (3.73);

- если  $(e_p, \sum_{i=p}^r e_i) = (0, 1)$ , то тождество (3.70) эквивалентно по модулю (3.82) тождеству (3.53);
- если  $(e_p, \sum_{i=p}^r e_i) = (0, 2)$ , то тождество (3.70) эквивалентно по модулю (3.82) тождеству

$$xzxtysxy \approx xzxtysyx; \tag{3.83}$$

- если  $(e_p, \sum_{i=p}^r e_i) = (1, 1)$ , то тождество (3.70) эквивалентно по модулю (3.82) тождеству

$$xuzx^2y \approx xuzyx^2; \quad (3.84)$$

- если  $(e_p, \sum_{i=p}^r e_i) = (1, 2)$ , то тождество (3.70) эквивалентно по модулю (3.82) тождеству

$$xzxytxy \approx xzxytyx. \quad (3.85)$$

Таким образом, тождество (3.70) эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_{10}$  некоторому тождеству из системы

$$\Delta_{10} := \{\sigma_2, (3.41), (3.73), (3.53), (3.83), (3.84), (3.85)\}.$$

Остается показать, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_{10}$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_{10}$ , то  $\sigma$  выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

Если  $M(xux) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то требуемое утверждение вытекает из леммы 3.80(ii). Поэтому далее мы можем считать, что  $M(xux) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . В этом случае, если  $\sigma \in \{\sigma_2, (3.41)\}$ , то требуемое утверждение следует из леммы 3.80(i). Остается рассмотреть случай, когда  $\sigma \in \{(3.73), (3.53), (3.83), (3.84), (3.85)\}$ .

Предположим, что  $\sigma$  есть тождество (3.53). Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, по лемме 1.28, одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.31) и потому тождествам  $xzytx^2y \stackrel{(3.31)}{\approx} x^2zytx^2y \stackrel{(3.15)}{\approx} x^2zytyx^2 \stackrel{(3.31)}{\approx} xzytyx^2$ . Пусть теперь  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . В силу предложения 1.1, существует конечная последовательность слов  $xzytx^2y = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = xzytyx^2$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Поскольку, согласно леммам 1.3 и 1.5, множества  $xux^+$  и  $\{xux\}$  стабильны относительно  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , имеем  $\mathbf{w}_i(x, z, t) \in xztxx^+$  и  $\mathbf{w}(y, z, t) = zytu$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Очевидно, что существует  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  такое, что  $(\ell_{\mathbf{w}_j}x) < (\ell_{\mathbf{w}_j}y)$ , но  $(\ell_{\mathbf{w}_{j+1}}y) < (\ell_{\mathbf{w}_{j+1}}x)$ . Тогда тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, \sigma_3\}$  тождеству (3.53). Откуда следует, что тождество (3.53) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Аналогичным образом можно проверить требуемое утверждение в случае, когда  $\sigma \in \Delta_{10} \setminus \{\sigma_2, (3.41), (3.53)\}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_{11})$ .** Возьмем произвольные  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . Если  $\text{осс}_x(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \dots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}}) > 1$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\{(3.42), \iota_2\}$  тождеству (3.66). Отсюда следует, что тождество (3.63) либо совпадает (с точностью до переименования букв) с некоторым тождеством из  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ , либо, в силу леммы 3.68, эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{D}_{11}$  системе  $\{(3.64), (3.65)\}$ . Если  $\text{осс}_y(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \dots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}}) > 1$ , то мы можем переименовать буквы  $x$ ,  $y$  и затем провести аналогичные рассуждения.

Далее, если тождество (3.64) не выполняется в  $\mathbf{D}_{11}$ , то  $\text{осс}_y(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \dots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}}) = 1$ , так как в противном случае тождество (3.64) является следствием системы  $\{\Phi, \iota_2, (3.42)\}$ . В этом случае существует единственное  $p \in \{1, 2, \dots, k+\ell\}$  такое, что  $a_p = y$  и  $g_p = 1$ . Тогда рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $p = 1$  и  $\ell = 0$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  тождеству

$$ytx^2y \approx ytxyx; \quad (3.86)$$

- если  $p = 1$  и  $\ell > 1$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\{\Phi_2, (3.42)\}$  тождеству

$$yzx^2ytx \approx yzxyxtx; \quad (3.87)$$

- если  $1 < p \leq k$  и  $\ell = 0$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\{\Phi_2, (3.42)\}$  тождеству (3.54);

- если  $1 < p \leq k$  и  $\ell > 0$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\{\Phi_2, (3.42)\}$  тождеству

$$xzytx^2ysx \approx xzytxyxsx; \quad (3.88)$$

- если  $p = k + 1$  и  $\ell = 1$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  то (3.40);
- если  $p = k + 1$  и  $\ell > 1$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\{\Phi_2, (3.42)\}$  тождеству

$$x^2yzytx \approx xyxzytx; \quad (3.89)$$

- если  $k+1 < p < k+\ell$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\{\Phi_2, (3.42)\}$  тождеству

$$x^2yzxtysx \approx xyxzxtysx; \quad (3.90)$$

- если  $p = k + \ell$  и  $\ell > 1$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\{\Phi_2, (3.42)\}$  тождеству

$$x^2yzxty \approx xyxzxtty. \quad (3.91)$$

Через  $\Delta_{11}$  обозначим множество всех тождеств, возникающих в предыдущем абзаце, а именно, тождеств

$$(3.86), (3.87), (3.54), (3.88), (3.40), (3.89), (3.90), (3.91),$$

а также двойственных к ним тождеств и тождеств  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Остается проверить, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_{11}$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_{11}$ , то  $\sigma$  выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

Если  $M(xux) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (1.4) по следствию 3.9. В этом случае тождество  $\sigma$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$  или  $\mathbf{Y}$ , так как это тождество является следствием системы  $\{(3.34), (1.4), (3.42)\}$ . Поэтому далее можно считать, что  $M(xux) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . Если  $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ , то требуемое утверждение вытекает из леммы 1.23.

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\sigma \in \Delta_{11} \setminus \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Предположим, что  $\sigma$  есть тождество (3.86). Если  $M_\lambda(uxx^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, по леммам 1.25 и 1.27, одно из

многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.4) и потому тождествам

$$ytx^2y \stackrel{(3.4)}{\approx} xytx^3y \stackrel{\Phi_1}{\approx} xytx^2yx \stackrel{(3.4)}{\approx} ytx^2yx \stackrel{\Phi_2}{\approx} ytxyx.$$

Пусть теперь  $M_\lambda(uxx^+) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . В силу предложения 1.1, существует конечная последовательность слов  $ytx^2y = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = ytxyx$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Поскольку, в силу лемм 1.3 и 1.5, множества  $uxx^+$  и  $\{xyx\}$  стабильны относительно  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{w}_i(x, t) \in txx^+$  и  $\mathbf{w}_i(y, t) = yty$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Откуда  $\mathbf{w}_i \in ytxx^+yx^* \cup ytx^+yx^+ \cup ytx^*yx^+$ . Очевидно, что существует  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  такое, что  $(\ell_{\mathbf{w}_j}x) < (\ell_{\mathbf{w}_j}y)$ , но  $(\ell_{\mathbf{w}_{j+1}}y) < (\ell_{\mathbf{w}_{j+1}}x)$ . Тогда тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  одному из двух тождеств (3.73) и (3.86). Поскольку, по лемме 3.68, тождество (3.73) вместе с  $\{\Phi, \Phi_2\}$  влечет тождество (3.86), в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  тождество (3.86) выполнено в любом случае. Аналогичными рассуждениями можно установить требуемое утверждение в случае, когда  $\sigma \in \Delta_{11} \setminus \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, (3.86)\}$ ; мы опускаем эти рассуждения.

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_{12})$ .** Возьмем произвольные  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . Заметим сначала, что тождества (3.64) и (3.65) вытекают из  $\{\Phi_2, (3.52), (3.73)\}$  и потому выполнены в многообразии  $\mathbf{D}_{12}$ .

Предположим, что тождество (3.63) не выполняется в  $\mathbf{D}_{12}$ . Тогда  $g_1 = g_2 = \dots = g_{k+\ell} = 1$ , так как в противном случае тождество (3.63) следует из системы тождеств

$$\{x^2 \approx x^3, (3.8), (3.17), (3.18), (3.24), (3.52), (3.73)\}.$$

Тогда тождество (3.63) имеет вид

$$\left( \prod_{i=1}^k a_i t_i \right) xy \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right) \approx \left( \prod_{i=1}^k a_i t_i \right) yx \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right), \quad (3.92)$$

Пусть  $\Delta_{12}$  обозначает множество всех слов такого вида. Остается показать, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_{12}$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Delta_{12}$ , то  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

Если оба моноида  $M(xt_1x \cdots t_px)$  и  $M(yt_1y \cdots t_qy)$ , где  $p := \text{occ}_x(\mathbf{u}) - 1 = \text{occ}_x(\mathbf{v}) - 1$  и  $q := \text{occ}_y(\mathbf{u}) - 1 = \text{occ}_y(\mathbf{v}) - 1$ , лежат в многообразии  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то требуемое утверждение вытекает из леммы 1.23. Поэтому мы можем считать, что по крайней мере один из этих моноидов, скажем  $M(xt_1x \cdots t_px)$ , не лежит по крайней мере во дном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Тогда применим следствие 3.9 и получим, что  $\mathbf{X}$  или  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству  $\iota_p$ . Заметим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является следствием системы тождеств  $\{x^2 \approx x^3, \iota_p, (3.17), (3.18), (3.24), (3.52), (3.73)\}$ . Откуда вытекает, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_{13})$ .** Возьмем произвольные  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$ . Положим  $e := \text{occ}_x(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}})$  и  $f := \text{occ}_y(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}})$ . Заметим сначала, что тождество (3.65) следует из системы тождеств  $\{\Phi_2, (3.6), (3.12)\}$  и потому выполнено в  $\mathbf{D}_{13}$ .

Предположим, что тождество (3.63) нарушается в  $\mathbf{D}_{13}$ . Тогда  $e = 1$  или  $f = 1$ , так как в противном случае тождество (3.63) следует из системы тождеств  $\{\Phi, (3.21), (3.22), \iota_2\}$ . В силу симметрии мы можем считать, что  $f = 1$ . Тогда существует единственное  $p \in \{1, 2, \dots, k + \ell\}$  такое, что  $a_p = y$  и  $g_p = 1$ . Если  $e = 1$ , то тождество (3.63) совпадает (с точностью до переименования букв) с некоторым тождеством из множества  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Пусть теперь  $e > 1$ . Если  $\text{осс}_x(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_k^{g_k}) > 0$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\{\iota_2, \iota'_2\}$  тождеству (3.66). В силу сказанного выше и леммы 3.68, последнее тождество эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_{13}$  тождеству (3.64). Если  $\text{осс}_x(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_k^{g_k}) = 0$ , то рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $k = p = 1$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству (3.18);
- если  $k = 0$  и  $p = 1$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству (3.17);
- если  $k = 0$  и  $1 < p < \ell$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\{\iota_2, \iota'_2\}$  тождеству (3.56);
- если  $k = 0$  и  $p = \ell$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству (3.24).

Предположим, что тождество (3.64) не выполнено в многообразии  $\mathbf{D}_{13}$ . Тогда  $f = 1$ , так как в противном случае тождество (3.64) следует из системы  $\{\Phi, \Phi_2, (3.21), \iota_2\}$ . Тогда существует единственное  $q \in \{1, 2, \dots, k + \ell\}$  такое, что  $a_q = y$  и  $g_q = 1$ . Ясно, что  $\text{осс}_x(a_{k+1}^{g_{k+1}} a_{k+2}^{g_{k+2}} \cdots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}}) = 0$ , поскольку в противном случае тождество (3.64) вытекает из системы тождеств  $\{\Phi_2, (3.10), (3.11), (3.13)\}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $q = 1$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  тождеству (3.86);
- если  $1 < q \leq k$ , то  $q = 2$  и  $g_1 = 1$ , так как иначе тождество (3.64) следует из системы  $\{\iota_2, \iota'_2, (3.15)\}$ ; поэтому в обсуждаемом случае тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  тождеству (3.54);
- если  $q = k + 1$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  тождеству (3.40).

Пусть

$$\Delta_{13} := \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, (3.18), (3.17), (3.56), (3.24), (3.86), (3.54), (3.40)\}.$$

Остается проверить, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_{13}$  и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству  $\sigma \in \Delta_{13}$ , то  $\sigma$  выполняется либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ .

Предположим, что  $\sigma$  есть тождество (3.18). Если  $M(xux) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, в силу следствия 3.9, одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (1.4) и потому тождествам

$$yzxuyx^2 \stackrel{(1.4)}{\approx} yzxy^2tx^2 \stackrel{(3.21)}{\approx} yzy^2xtx^2 \stackrel{(1.4)}{\approx} yzyx^2tx^2.$$

Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , то, согласно леммам 1.25 и 1.28, одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.31) и потому тождествам

$$yzxuyx^2 \stackrel{(3.31)}{\approx} yzx^2ytx^2 \stackrel{(3.13)}{\approx} yzyx^2tx^2 \stackrel{(3.31)}{\approx} yzyx^2tx^2.$$

Таким образом, далее мы можем считать, что  $\mathbf{M}_l(xux^+) \vee \mathbf{M}(xux) \subseteq \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . В силу предложения 1.1, существует последовательность слов  $yzxutx^2 = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = yzuxttx^2$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Поскольку, в силу лемм 1.3 и 1.5, множества  $xux^+$  и  $\{xux\}$  стабильны относительно  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , получаем, что  $\mathbf{w}_i(x, z, t) \in zxtxx^+$  и  $\mathbf{w}_i(y, z, t) = yzxt$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Откуда  $\mathbf{w}_i \in yzxttxx^+ \cup yzuxttxx^+$ . Очевидно, что существует  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  такое, что  $\mathbf{w}_j \in yzxttxx^+$ , но  $\mathbf{w}_{j+1} \in yzuxttxx^+$ . Тогда тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству (3.18). Откуда следует, что тождество (3.18) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Аналогичным образом можно доказать требуемое утверждение в случае, когда  $\sigma \in \Delta_{13} \setminus \{(3.18)\}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_{14})$ .** Возьмем произвольные  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_{k+\ell} \in \{1, 2\}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{x, y\}$  и положим  $e := \text{occ}_x(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}})$  и  $f := \text{occ}_y(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}})$ . Заметим сначала, что тождество (3.65) следует из системы  $\{\Phi_2, (3.6), (3.12)\}$  и потому выполнено в  $\mathbf{D}_{14}$ .

Предположим, что тождество (3.63) не выполняется в многообразии  $\mathbf{D}_{14}$ . Тогда  $e = 1$  или  $f = 1$ , поскольку в противном случае тождество (3.63) следует из системы тождеств  $\{\Phi, (3.21), (3.22), \iota_2\}$ . В силу симметрии мы можем считать, что  $f = 1$ . Тогда существует единственное  $p \in \{1, 2, \dots, k+\ell\}$  такое, что  $a_p = y$  и  $g_p = 1$ . Если  $e = 1$ , то тождество (3.63) совпадает (с точностью до переименования букв) с одним из тождеств из множества  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Пусть теперь  $e > 1$ . Если  $\text{occ}_x(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_k^{g_k}) > 1$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\iota_2$  тождеству (3.66). В силу сказанного выше и леммы 3.68, последнее тождество эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_{14}$  тождеству (3.64). Если  $\text{occ}_x(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_k^{g_k}) = 0$ , то рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $k = p = 1$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, \iota_2\}$  тождеству (3.18);
- если  $k = 0$  и  $p = 1$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\{x^2 \approx x^3, \iota_2\}$  тождеству (3.17);
- если  $k = 0$  и  $1 < p < \ell$ , то  $p = 2$  и  $g_1 = 1$ , поскольку иначе тождество (3.63) следует из системы  $\{(3.25), \iota_2\}$ ; поэтому в обсуждаемом случае тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\iota_2$  тождеству (3.56);
- если  $k = 0$  и  $p = \ell$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $x^2 \approx x^3$  тождеству (3.24).

Если  $\text{occ}_x(a_1^{g_1} a_2^{g_2} \cdots a_k^{g_k}) = 1$ , то рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $p = 1$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\iota_2$  тождеству

$$yzxtxysx \approx yzxtuxsx; \quad (3.93)$$

- если  $p = k = 2$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\iota_2$  тождеству

$$xzytxysx \approx xzytuxsx; \quad (3.94)$$

- если  $k = 1$  и  $1 < p < \ell + 1$ , то  $p = 2$  и  $g_1 = 1$ , поскольку иначе тождество (3.63) следует из системы тождеств  $\{(3.25), \iota_2\}$ ; поэтому в осуждаемом случае тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\iota_2$  тождеству

$$xzxytysx \approx xzyxtysx; \quad (3.95)$$

- если  $k = 1$  и  $2 < p = \ell + 1$ , то тождество (3.63) эквивалентно по модулю  $\iota_2$  тождеству

$$xzxytxsy \approx xzyxtxsy. \quad (3.96)$$

Предположим, что тождество (3.64) не выполнено в многообразии  $\mathbf{D}_{14}$ . Тогда  $f = 1$ , так как в противном случае тождество (3.64) является следствием системы  $\{\Phi, \Phi_2, (3.21), \iota_2\}$ . В этом случае существует единственное  $q \in \{1, 2, \dots, k + \ell\}$  такое, что  $a_q = y$  и  $g_q = 1$ . Ясно, что  $\text{осс}_x(a_{k+1}^{g_{k+1}} a_{k+2}^{g_{k+2}} \cdots a_{k+\ell}^{g_{k+\ell}}) = 0$ , поскольку иначе тождество (3.64) вытекает из системы тождеств  $\{\Phi_2, (3.10), (3.11), (3.13)\}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что

- если  $q = 1$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  тождеству (3.86);
- если  $1 < q \leq k$ , то  $2 \leq q \leq 3$  и  $g_1 = g_{q-1} = 1$ , поскольку иначе тождество (3.64) является следствием системы  $\{\iota_2, (3.15)\}$ ; поэтому в осуждаемом случае тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  одному из тождеств (3.54) или

$$xzxtysx^2y \approx xzxtysxyx; \quad (3.97)$$

- если  $q = k + 1$ , то тождество (3.64) эквивалентно по модулю  $\Phi_2$  тождеству (3.40).

Положим

$$\Delta_{14} := \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, (3.18), (3.17), (3.56), (3.24), (3.93), (3.94), \\ (3.95), (3.96), (3.86), (3.54), (3.97), (3.40) \end{array} \right\}.$$

Остается проверить, что если  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — некоммутативные подмногообразия многообразия  $\mathbf{D}_{14}$ , и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\sigma \in \Delta_{14}$ , то  $\sigma$  выполняется в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Этот факт можно установить теми же рассуждениями, что и при доказательстве дистрибутивности многообразия  $\mathbf{D}_{13}$  и потому мы их опускаем.

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_{15})$ .** Нам потребуются два вспомогательных утверждения.

**Предложение 3.82.** *Всякое многообразие из интервала  $[\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+), \mathbf{D}_{15}]$  может быть задано внутри многообразия  $\mathbf{D}_{15}$  тождествами вида*

$$\left( \prod_{i=1}^k a_i t_i \right) x^2 y^2 \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right) \approx \left( \prod_{i=1}^k a_i t_i \right) (xy)^2 \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right), \quad (3.98)$$

где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{1, x, y\}$ .

*Доказательство.* В первую очередь заметим, что многообразие  $\mathbf{D}_{15}$  удовлетворяет системе тождеств  $\Phi_2$ . Это наблюдение позволит нам применять леммы 3.67 и 3.69 с  $\mathbf{V} = \mathbf{D}_{15}$ .

Для краткости через  $\Sigma$  будем обозначать множество всех тождеств вида (3.98), где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{1, x, y\}$ . Пусть  $\mathbf{V} \in [\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+), \mathbf{D}_{15}]$ . Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$ , выполненное в  $\mathbf{V}$ . Нам нужно проверить, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'$  эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_{15}$  некоторому подмножеству из  $\Sigma$ .

Пусть  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  — разложение слова  $\mathbf{u}$ . В силу леммы 1.22, разложение слова  $\mathbf{u}'$  имеет вид  $\mathbf{u}'_0 t_1 \mathbf{u}'_1 \cdots t_m \mathbf{u}'_m$  и  $\text{alph}(\mathbf{u}_i) = \text{alph}(\mathbf{u}'_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Согласно лемме 3.67, используя тождества, задающие многообразие  $\mathbf{D}_{15}$ , можно преобразовать слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}'$  к некоторым словам  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{w}'$  соответственно таким, что

- разложения слов  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{w}'$  имеют вид  $\mathbf{w}_0 t_1 \mathbf{w}_1 \cdots t_m \mathbf{w}_m$  и  $\mathbf{w}'_0 t_1 \mathbf{w}'_1 \cdots t_m \mathbf{w}'_m$  соответственно;
- $\text{occ}_x(\mathbf{w}_i) = \text{occ}_x(\mathbf{w}'_i) = 2$  для всех  $x \in \text{alph}(\mathbf{w}_i \mathbf{w}'_i)$  и  $i = 0, 1, \dots, m$ .

Таким образом, достаточно показать, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  эквивалентно внутри  $\mathbf{D}_{15}$  некоторому подмножеству из  $\Sigma$ .

В силу леммы 1.2, тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  является  $r$ -инвертируемым для некоторого  $r \geq 0$ . Мы будем вести доказательство индукцией по  $r$ .

**База индукции.** Если  $r = 0$ , то  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ , откуда  $\mathbf{D}_{15}\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\} = \mathbf{D}_{15}\{\emptyset\}$ .

**Шаг индукции.** Пусть  $r > 0$ . Очевидно, что  $\mathbf{w}_s \neq \mathbf{w}'_s$  для некоторого  $s \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Тогда найдутся  $x, y \in X$  и  $p, q \in \{1, 2\}$  такие, что

- $(p_{\mathbf{w}_s} x) < (q_{\mathbf{w}_s} y)$ ;
- между буквами  $p_{\mathbf{w}_s} x$  и  $q_{\mathbf{w}_s} y$  в слове  $\mathbf{w}_s$  нет других букв;
- $(q_{\mathbf{w}'_s} y) < (p_{\mathbf{w}'_s} x)$ .

В этом случае  $\mathbf{w}_s = \mathbf{a}_s x y \mathbf{b}_s$  для некоторых  $\mathbf{a}_s, \mathbf{b}_s \in X^*$ . Через  $\hat{\mathbf{w}}$  обозначим слово, получающееся из слова  $\mathbf{w}$  перестановкой местами букв  $p_{\mathbf{w}_s} x$  и  $q_{\mathbf{w}_s} y$  в блоке  $\mathbf{w}_s$ . Иными словами,  $\hat{\mathbf{w}} := \mathbf{a} x y \mathbf{b}$ , где

$$\mathbf{a} := \left( \prod_{i=1}^s \mathbf{w}_{i-1} t_i \right) \mathbf{a}_s \quad \text{и} \quad \mathbf{b} := \mathbf{b}_s \left( \prod_{i=s+1}^m t_i \mathbf{w}_i \right).$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что  $\mathbf{D}_{15}\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\}$  и  $\mathbf{D}_{15}\{\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}\} = \mathbf{D}_{15}\Sigma_1$  для некоторой системы тождеств  $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ . В самом деле, в этом случае тождество  $\hat{\mathbf{w}} \approx \mathbf{w}'$  является  $(r-1)$ -инвертируемым, и, согласно предположению индукции,  $\mathbf{D}_{15}\{\hat{\mathbf{w}} \approx \mathbf{w}'\} = \mathbf{D}_{15}\Sigma_2$  для некоторого множества тождеств  $\Sigma_2 \subseteq \Sigma$ , откуда

$$\mathbf{D}_{15}\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\} = \mathbf{D}_{15}\{\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}} \approx \mathbf{w}'\} = \mathbf{D}_{15}\{\Sigma_1, \Sigma_2\}.$$

Предположим, что  $p = q = 1$ . Тогда, поскольку  $\text{occ}_x(\mathbf{w}_s) = \text{occ}_x(\mathbf{w}'_s) = \text{occ}_y(\mathbf{w}_s) = \text{occ}_y(\mathbf{w}'_s) = 2$ , из леммы 3.69 вытекает, что  $\mathbf{D}_{15}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}$ . Аналогичным образом можно показать, что если  $p = q = 2$ , то в  $\mathbf{D}_{15}$  выполнено тождество  $\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\{p, q\} = \{1, 2\}$ .

Если  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{w}_{s'}) = \text{alph}(\hat{\mathbf{w}}_{s'})$  для некоторого  $s' \neq s$ , то из леммы 3.69 и двойственного к ней утверждения следует, что  $\mathbf{D}_{15}$  удовлетворяет  $\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}$ . Таким образом, далее мы можем считать, что для каждого  $i \neq s$  только одна из букв  $x$  и  $y$  может входить в  $\text{alph}(\mathbf{w}_i)$ . Обозначим эту букву через  $a_i$  (если  $x, y \notin \text{alph}(\mathbf{w}_i)$ , то через  $a_i$  будем обозначать пустое слово). Для краткости положим

$$\mathbf{h} := \left( \prod_{i=1}^s a_{i-1} t_i \right) \text{ и } \mathbf{t} := \left( \prod_{i=s+1}^m t_i a_i \right).$$

Предположим, что  $(p, q) = (2, 1)$ . Тогда тождество

$$\mathbf{w}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \mathbf{w}'(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m)$$

эквивалентно по модулю системы  $\{(1.4), (3.26)\}$  тождеству  $\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}\mathbf{p}\mathbf{t}$  для некоторого  $\mathbf{p} \in \{(xy)^2, xy^2x, (yx)^2, yx^2y, y^2x^2\}$ . Тождества (3.62) выполнены в многообразии  $\mathbf{D}_{15}$ , откуда следует, что  $\mathbf{D}_{15}\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\}$  удовлетворяет одному из тождеств  $\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}(xy)^2\mathbf{t}$  и  $\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}y^2x^2\mathbf{t}$ . Далее, поскольку тождества

$$\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \stackrel{(1.4)}{\approx} \mathbf{h}x^4y^4\mathbf{t} \approx \mathbf{h}(x^2y^2)^2\mathbf{t} \stackrel{\{(1.4), (3.26)\}}{\approx} \mathbf{h}(xy)^2\mathbf{t}$$

выполнены в  $\mathbf{D}_{15}\{\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}y^2x^2\mathbf{t}\}$ , получаем, что тождество  $\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}(xy)^2\mathbf{t}$  выполнено в  $\mathbf{D}_{15}\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'\}$  в любом случае. Ясно, что тождество

$$\mathbf{w}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \hat{\mathbf{w}}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m)$$

является ничем иным как тождеством  $\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}(xy)^2\mathbf{t}$ . В многообразии  $\mathbf{D}_{15}\{\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}(xy)^2\mathbf{t}\}$  выполнены тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{a}xy\mathbf{b} \\ &\approx \mathbf{a}x^2y^2\mathbf{b} && \text{в силу } \{(1.4), (3.26)\} \\ &\approx \mathbf{a}(xy)^2\mathbf{b} && \text{в силу } \mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}(xy)^2\mathbf{t} \\ &\approx \mathbf{a}yx\mathbf{b} = \hat{\mathbf{w}} && \text{по лемме 3.67.} \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что тождество  $\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}(xy)^2\mathbf{t}$  эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{D}_{15}$  тождеству  $\mathbf{w} \approx \hat{\mathbf{w}}$ . Остается заметить, что  $\mathbf{h}x^2y^2\mathbf{t} \approx \mathbf{h}(xy)^2\mathbf{t} \in \Sigma$ .

Случай, когда  $(p, q) = (1, 2)$ , рассматривается вполне аналогично и мы позволим себе опустить соответствующие рассуждения.  $\square$

**Лемма 3.83.** *Если  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in [\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+), \mathbf{V}]$ , и многообразия  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяют тождеству (3.98), где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{1, x, y\}$ , то это тождество (3.98) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .*

*Доказательство.* Левую [правую] часть тождества (3.98) обозначим через  $\mathbf{u}$  [соответственно  $\mathbf{v}$ ]. В силу предложения 1.1, существует последовательность слов  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое из тождеств  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Согласно

лемме 1.22,

$$\mathbf{w}_j \in \left( \prod_{i=1}^k a_{i-1}^+ t_i \right) \mathbf{a}_j \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i^+ \right),$$

где  $\text{alph}(\mathbf{a}_j) = \{x, y\}$  для любого  $j = 0, 1, \dots, m$ . Тогда существует такое  $s \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , что  $\mathbf{a}_s \in x^+ y^+$ , но  $\mathbf{a}_{s+1} \in \overline{x^+ y^+}$ . Подставим  $t_k x$  вместо  $t_k$ , а  $yt_{k+1}$  вместо  $t_{k+1}$  в тождество  $\mathbf{w}_s \approx \mathbf{w}_{s+1}$ . В результате мы получим тождество, эквивалентное по модулю  $\{(1.4), (3.26)\}$  тождеству (3.98). Мы видим, что тождество (1.2) выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .  $\square$

Перейдем к непосредственному доказательству дистрибутивности решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_{15})$ . Пусть  $\mathbf{X}$  — произвольное подмногообразие многообразия  $\mathbf{D}_{15}$ . В силу леммы 3.23, если  $M(xx^+yy^+) \notin \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $x^2y^2 \approx (x^2y^2)^2$  и потому тождествам  $x^2y^2 \approx (x^2y^2)^2 \approx (y^2x^2)^2 \approx y^2x^2$ . В этом случае  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+)$  в силу [93, теорема 4.3(i)] и [73, предложение 4.3]. Далее, из леммы 3.10 вытекает, что если  $\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \notin \mathbf{X}$  и  $\mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+) \in \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $xuzx \approx xuxzx$ . В этом случае, согласно [93, теорема 4.1(iv)] и [36, предложение 3.2a)],  $\mathbf{X} = \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+)$ . Мы видим, что решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{D}_{15})$  является объединением решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+))$  и интервала  $[\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+), \mathbf{V}]$ .

С учетом леммы 1.17, остается установить дистрибутивность интервала  $[\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+), \mathbf{D}_{15}]$ . В силу леммы 3.81, достаточно отыскать такое множество тождеств  $\Sigma$ , что

- (i) если  $\mathbf{X} \in [\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+), \mathbf{D}_{15}]$ , то  $\mathbf{X} = \mathbf{D}_{15}\Sigma'$  для некоторой системы тождеств  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ;
- (ii) если  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in [\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(xx^+yy^+), \mathbf{D}_{15}]$ , и в  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  выполнено некоторое тождество  $\sigma \in \Sigma$ , то одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет этому тождеству  $\sigma$ .

В качестве  $\Sigma$  можно взять множество всех тождеств вида (3.98), где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell} \in \{1, x, y\}$ , поскольку условие (i) выполнено в силу предложения 3.82, а условие (ii) — в силу леммы 3.83.

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{P}_n)$ .** Нам потребуется три вспомогательных утверждения.

**Лемма 3.84.** Пусть  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — аperiodические многообразия, удовлетворяющие тождеству (3.44). Если многообразие  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (3.92), где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  и  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell}\} = \{1, x, y\}$ , то это тождество выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

*Доказательство.* Если  $M(xy) \notin \mathbf{X}$  или  $M(xy) \notin \mathbf{Y}$ , то, в силу леммы 1.25, одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  является коммутативным и потому удовлетворяет тождеству (3.92). Поэтому далее мы можем считать, что  $M(xy) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

Положим  $\mathbf{u} := \mathbf{p}xy\mathbf{q}$ , где

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^k a_i t_i \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{q} := \left( \prod_{i=k+1}^{k+\ell} t_i a_i \right).$$

Если слово  $\mathbf{u}_y$  не является изотермом для одного из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , скажем,  $\mathbf{X}$ , то это многообразие удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $\mathbf{u}_y \approx \mathbf{u}'$ . В силу леммы 1.20,  $\mathbf{u}' =$

$x^{f_0}t_1x^{f_1}\dots t_{k+\ell}x^{f_{k+\ell}}$  для некоторых  $f_0, f_1, \dots, f_{k+\ell} \in \mathbb{N}_0$ . Лемма 3.71 позволяет нам считать, что  $f_1, f_2, \dots, f_{k+\ell} \leq 1$ . Тогда мы можем применить лемму 3.72 и заключить, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\omega_{\text{occ}_x(\mathbf{u})-1,1}$ . Последнее тождество вместе с тождеством (3.44) влечет тождество  $\mathbf{u} \approx x^{\text{occ}_x(\mathbf{u})} \mathbf{u}_x \approx \mathbf{p} \mathbf{u} \mathbf{x} \mathbf{q}$ , что и требовалось показать. Аналогичным образом можно установить, что если слово  $\mathbf{u}_x$  не является изотермом для одного из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , то это многообразие удовлетворяет тождеству (3.92).

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда оба слова  $\mathbf{u}_x$  и  $\mathbf{u}_y$  являются изотермами для  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Из предложения 1.1 вытекает, что хотя бы одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , скажем  $\mathbf{X}$ , удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . В силу лемм 1.3 и 1.21, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является линейно-сбалансированным. Это означает, что  $\text{sim}(\mathbf{v}) = \{t_1, t_2, \dots, t_{k+\ell}\}$  и блоками слова  $\mathbf{v}$  (в порядке их появления слева направо) являются слова  $a_1, a_2, \dots, a_k, \mathbf{w}, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+\ell}$ , где  $\mathbf{w} \in \{xu, ux\}$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  нетривиально,  $\mathbf{w} = ux$ , откуда  $\mathbf{v} = \mathbf{p} \mathbf{u} \mathbf{x} \mathbf{q}$ .  $\square$

**Лемма 3.85.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее  $\{\Phi_3, (3.44)\}$ . Если  $\mathbf{w} := \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{r}$  и  $\text{alph}(\mathbf{q}) \subseteq \text{mul}(\mathbf{w})$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p} \mathbf{q} \mathbf{x}^2 \mathbf{r}$ .

*Доказательство.* Предположим сначала, что  $x \notin \text{alph}(\mathbf{q})$ . Если слово  $\mathbf{q}$  является линейным, то в этом случае легко подобрать  $k, m \in \mathbb{N}_0$  и  $\rho \in S_{k+m}$  такие, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p} \mathbf{q} \mathbf{x}^2 \mathbf{r}$  является следствием тождества  $\mathbf{a}_{k,m}[\rho] \approx \mathbf{a}'_{k,m}[\rho]$ .

Поэтому остается рассмотреть случай, когда слово  $\mathbf{q}$  не является линейным. Тогда найдется буква  $y_1 \in \text{alph}(\mathbf{q})$  такая, что  $\mathbf{q} = \mathbf{v}_1 y_1 \mathbf{v}_2 y_1 \mathbf{v}_3$ , где  $y_1 \notin \text{alph}(\mathbf{v}_2)$ , а слово  $\mathbf{v}_2$  является либо пустым, либо линейным. Рассуждая как в предыдущем абзаце, можно показать, что

$$\mathbf{w} = \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{v}_1 y_1 \mathbf{v}_2 y_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{x} \mathbf{r} \stackrel{\Phi_3}{\approx} \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{v}_1 y_1^2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{x} \mathbf{r} \stackrel{(3.44)}{\approx} \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{x} y_1^2 \mathbf{r}.$$

Иными словами, тождества из  $\{\Phi_3, (3.44)\}$  позволяют удалить букву  $y_1$  из слова  $\mathbf{q}$ . Повторяя эти рассуждения, удалим из слова  $\mathbf{q}$  все кратные буквы. После этого применим рассуждения из предыдущего абзаца, а затем, применяя тождества из  $\{\Phi_3, (3.44)\}$ , вернем в слове  $\mathbf{q}$  кратные буквы на прежние места. В результате получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p} \mathbf{q} \mathbf{x}^2 \mathbf{r}$ .

Предположим теперь, что  $x \in \text{alph}(\mathbf{q})$ . Тогда  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \mathbf{x} \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{x} \mathbf{q}_r$ , где  $x \notin \text{alph}(\mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_r)$ . Рассуждая как в первом абзаце доказательства, мы можем шаг за шагом переставить местами вхождения буквы  $x$  со словами  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r$ . В результате мы снова получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p} \mathbf{q} \mathbf{x}^2 \mathbf{r}$ .  $\square$

**Лемма 3.86.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее системе тождеств

$$\{\Phi_3, (3.44), \mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho] \mid n, m, k \in \mathbb{N}, \rho \in S_{n+m+k}\}.$$

Если  $\mathbf{w} := \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{u} \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{r} \mathbf{y} \mathbf{s}$  и  $\text{alph}(\mathbf{r}) \subseteq \text{mul}(\mathbf{w})$ , то в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{u} \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{r} \mathbf{y} \mathbf{s}$ .

*Доказательство.* В силу леммы 3.85, система тождеств  $\Phi_3$  влечет тождество  $\mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{u} \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{r} \mathbf{y} \mathbf{s} \approx \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{u} \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{r}' \mathbf{y} \mathbf{s}$ , где слово  $\mathbf{r}'$  получается из слова  $\mathbf{r}$  перемещением всех вхождений каждой буквы

к последнему вхождению этой буквы в слово  $\mathbf{r}$ . Далее, можно подобрать такие  $n, k, m \in \mathbb{N}$  и  $\rho \in S_{n+k+m}$ , что тождество  $\mathbf{p}x\mathbf{u}q\mathbf{x}r'ys \approx \mathbf{p}x\mathbf{u}q\mathbf{x}r'ys$  будет вытекать из  $\mathbf{c}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{n,m,k}[\rho]$ . Еще раз воспользуемся леммой 3.85 и получим, что  $\mathbf{p}x\mathbf{u}q\mathbf{x}r'ys \stackrel{\Phi_3}{\approx} \mathbf{p}x\mathbf{u}q\mathbf{x}r'ys$ . Таким образом,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{w} \approx \mathbf{p}x\mathbf{u}q\mathbf{x}r'ys$ , что и требовалось показать.  $\square$

Возвращаемся к доказательству дистрибутивности решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{P}_n)$ . Выведем требуемое утверждение из леммы 3.81 с  $\mathbf{V} = \mathbf{P}_n$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{T}$  и множеством  $\Sigma$ , состоящим из тождества  $xu \approx ux$ , всех тождеств вида  $x^k \approx x^\ell$ , где  $k, \ell \in \mathbb{N}$ , всех тождеств вида  $\omega_{k,\ell}$ , где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  и всех тождеств вида (3.92), где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  и  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k+\ell}\} = \{1, x, y\}$ . В силу лемм 1.25, 3.70 и 3.84 и следствия 3.73, для этого остается доказать, что любое подмножество многообразия  $\mathbf{P}_n$  может быть задано внутри  $\mathbf{P}_n$  некоторым подмножеством множества  $\Sigma$ .

Пусть  $\mathbf{w}' \approx \mathbf{v}'$  — произвольное тождество. Достаточно проверить, что  $\mathbf{P}_n\{\mathbf{w}' \approx \mathbf{v}'\} = \mathbf{P}_n\Sigma'$  для некоторого  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ . Если многообразие  $\mathbf{P}_n\{\mathbf{w}' \approx \mathbf{v}'\}$  коммутативно, то, по предложению 1.13 его можно задать некоторым подмножеством множества  $\{x^k \approx x^\ell, xu \approx ux \mid k, \ell \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$ . Рассмотрим случай, когда многообразие  $\mathbf{P}_n\{\mathbf{w}' \approx \mathbf{v}'\}$  не является коммутативным. Тогда  $M(xu) \in \mathbf{P}_n\{\mathbf{w}' \approx \mathbf{v}'\}$  по лемме 1.25. Пусть  $\mathbf{w}'_0 t_1 \mathbf{w}'_1 \cdots t_m \mathbf{w}'_m$  — разложение слова  $\mathbf{w}'$ . Из леммы 1.20 следует, что разложение слова  $\mathbf{v}'$  имеет вид  $\mathbf{v}'_0 t_1 \mathbf{v}'_1 \cdots t_m \mathbf{v}'_m$ . С учетом леммы 3.85, применением тождеств  $\{\Phi_3, (3.44)\}$  мы можем преобразовать слова  $\mathbf{w}'$  и  $\mathbf{v}'$  к некоторым словам  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно таким, что

- разложения слов  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$  имеют вид  $\mathbf{w}_0 t_1 \mathbf{w}_1 \cdots t_m \mathbf{w}_m$  и  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  соответственно;
- $\text{occ}_x(\mathbf{w}_i) = \text{occ}_x(\mathbf{w}'_i)$  и  $\text{occ}_x(\mathbf{v}_i) = \text{occ}_x(\mathbf{v}'_i)$  для всех  $x \in X$  и  $i = 0, 1, \dots, m$ ;
- слова  $x^{\text{occ}_x(\mathbf{w}_i)}$  и  $x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}_i)}$  являются подсловами слов  $\mathbf{w}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  соответственно для всех  $x \in \text{alph}(\mathbf{w}_i) = \text{alph}(\mathbf{v}_i)$  и  $i = 0, 1, \dots, m$ .

В силу сказанного, достаточно показать, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно внутри  $\mathbf{P}_n$  некоторому подмножеству множества  $\Sigma$ . Легко видеть, что применяя тождества из множества

$$\Sigma^\sharp := \{\mathbf{w}(x, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \mathbf{v}(x, t_1, t_2, \dots, t_m) \mid x \in \text{mul}(\mathbf{w}) = \text{mul}(\mathbf{v})\},$$

можно преобразовать слово  $\mathbf{w}$  к некоторому слову  $\mathbf{u}$  такому, что

- разложение слова  $\mathbf{u}$  имеет вид  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$ ;
- $\text{occ}_x(\mathbf{u}_i) = \text{occ}_x(\mathbf{v}_i)$  для всех  $x \in X$  и  $i = 1, 2, \dots, m$ ;
- слово  $x^{\text{occ}_x(\mathbf{u}_i)}$  является подсловом слова  $\mathbf{u}_i$  для всех  $x \in \text{alph}(\mathbf{u}_i)$  и  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Очевидно, что любое тождество из множества  $\Sigma^\sharp$  имеет вид (1.1). Тогда из лемм 3.71 и 3.72 следует, что множество  $\Sigma^\sharp$  эквивалентно по модулю (3.44) некоторым тождествам вида  $\omega_{k,\ell}$  и  $x^k \approx x^\ell$ . Поэтому остается показать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно внутри  $\mathbf{P}_n$  некоторому подмножеству множества  $\Sigma$ .

В силу леммы 1.2, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $r$ -инвертируемым для некоторого  $r \in \mathbb{N}_0$ . Мы будем вести доказательство индукцией по  $r$ .

**База индукции.** Если  $r = 0$ , то  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , откуда  $\mathbf{P}_n\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{P}_n\{\emptyset\}$ .

**Шаг индукции.** Пусть  $r > 0$ . Очевидно, что  $\mathbf{u}_j \neq \mathbf{v}_j$  для некоторого  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Тогда существуют буквы  $x$  и  $y$  такие, что  $\mathbf{u}_j = \mathbf{a}y^q x^p \mathbf{a}'$  для некоторых  $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in X^*$  и слово  $x^p$  предшествует слову  $y^q$  в блоке  $\mathbf{v}_j$ , где  $p := \text{occ}_x(\mathbf{u}_j) = \text{occ}_x(\mathbf{v}_j)$  и  $q := \text{occ}_y(\mathbf{u}_j) = \text{occ}_y(\mathbf{v}_j)$ . Обозначим через  $\hat{\mathbf{u}}$  слово, получающееся из слова  $\mathbf{u}$  перестановкой местами подслов  $x^p$  и  $y^q$  блоке  $\mathbf{u}_j$ .

Если буква  $x$  входит в некоторый блок слова  $\mathbf{u}$  более одного раза, то мы можем применить тождество (3.44), поставив  $x^2$  рядом с  $y^q$ , а затем лемму 3.85, получая, что тождество  $\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{P}_n$ . Тождество  $\hat{\mathbf{u}} \approx \mathbf{v}$  является  $(r - pq)$ -инвертируемым. По предположению индукции,  $\mathbf{P}_n\{\hat{\mathbf{u}} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{P}_n\Sigma'$  для некоторой системы  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ . Тогда  $\mathbf{P}_n\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{P}_n\Sigma'$ , что и требовалось доказать. Аналогичным образом можно установить требуемое утверждение, если буква  $y$  входит в некоторый блок слова  $\mathbf{u}$  более одного раза. Поэтому мы далее можем считать, что  $\text{occ}_x(\mathbf{u}_i), \text{occ}_y(\mathbf{u}_i) \leq 1$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . В частности,  $p = q = 1$ .

Если  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{u}_{j'}) = \text{alph}(\mathbf{v}_{j'})$  для некоторого  $j' \neq j$ , то тождество  $\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}}$  выполнено в  $\mathbf{P}_n$  по лемме 3.86. Тождество  $\hat{\mathbf{u}} \approx \mathbf{v}$  является  $(r - 1)$ -инвертируемым. По предположению индукции,  $\mathbf{P}_n\{\hat{\mathbf{u}} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{P}_n\Sigma'$  для некоторой системы тождеств  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ . Тогда  $\mathbf{P}_n\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{P}_n\Sigma'$ , что и требовалось доказать. Поэтому далее мы можем считать, что только одна из букв  $x$  и  $y$  может входить в блок  $\mathbf{u}_i$  при  $i \neq j$ . В этом случае тождество  $\mathbf{u}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \mathbf{v}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m)$  принадлежит  $\Sigma$  (так как имеет вид (3.92)). Ясно, что это тождество влечет  $\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}}$ . Тождество  $\hat{\mathbf{u}} \approx \mathbf{v}$  является  $(r - 1)$ -инвертируемым. По предположению индукции,  $\mathbf{P}_n\{\hat{\mathbf{u}} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{P}_n\Sigma'$  для некоторого множества тождеств  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ . Тогда

$$\mathbf{P}_n\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{P}_n\{\mathbf{u}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m) \approx \mathbf{v}(x, y, t_1, t_2, \dots, t_m), \Sigma'\},$$

что и требовалось показать.

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}_n)$ .** Нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.87.** Любое многообразие, удовлетворяющее тождеству (3.50), можно задать тождеством (3.50) вместе с некоторыми из следующих тождеств:  $x^k \approx x^\ell$  и  $x^k y^\ell \approx y^\ell x^k$ , где  $k, \ell \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* В силу предложения 1.13, любое коммутативное многообразие может быть задано тождествами  $xu \approx ux$  и  $x^k \approx x^\ell$  для некоторых  $k, \ell \in \mathbb{N}$ . Остается доказать требуемое утверждение для некоммутативных подмногообразий многообразия  $\mathbf{Q} := \text{var}\{(3.50)\}$ . Для этого достаточно показать, что если некоторое тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  не следует из коммутативности, то оно эквивалентно по модулю (3.50) некоторым тождествам вида  $x^k \approx x^\ell$  и  $x^k y^\ell \approx y^\ell x^k$ . В силу леммы 1.15 и того факта, что  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{O}$ , мы можем считать, что справедливо одно из следующих утверждений:

- (а) тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с некоторым эффективным тождеством вида (1.1), где  $r, e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ;

(b) тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с некоторым эффективным тождеством вида (1.2), где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ .

Положим  $e := \sum_{i=0}^r e_i$  и  $f := \sum_{i=0}^r f_i$ .

Предположим, что имеет место утверждение (а). Мы можем без ограничения общности считать, что  $e_0 > 0$ , поскольку тождество (1.1) является эффективным. В многообразии  $\mathbf{Q}\{(1.1)\}$  выполнено тождество  $x^e \approx x^f$ . Если  $f_0 > 0$ , то  $\mathbf{Q}\{(1.1)\} = \mathbf{Q}\{x^e \approx x^f\}$ . Если  $f_0 = 0$ , то  $\mathbf{Q}\{(1.1)\}$  удовлетворяет тождеству  $x^e t \approx t x^f$ . Легко видеть, что в этом случае  $\mathbf{Q}\{(1.1)\} = \mathbf{Q}\{x^e \approx x^f, x^e t \approx t x^f\}$ , что и требовалось показать.

Предположим, что выполнено утверждение (b). Поскольку

$$x^e y^f \stackrel{(3.50)}{\approx} x^{e_0} y^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r x^{e_i} y^{f_i} \right) \stackrel{(1.2)}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r x^{e_i} y^{f_i} \right) \stackrel{(3.50)}{\approx} y^f x^e,$$

в многообразии  $\mathbf{Q}\{(1.2)\}$  выполнено тождество  $x^e y^f \approx y^f x^e$ . С другой стороны тождество (1.2) выполняется в многообразии  $\mathbf{Q}\{x^e y^f \approx y^f x^e\}$ , поскольку это многообразие удовлетворяет тождествам

$$x^{e_0} y^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) \stackrel{(3.50)}{\approx} x^e y^f \cdot \prod_{i=1}^r t_i \approx y^f x^e \cdot \prod_{i=1}^r t_i \stackrel{(3.50)}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).$$

Следовательно,  $\mathbf{Q}\{(1.2)\} = \mathbf{Q}\{x^e y^f \approx y^f x^e\}$ , что и требовалось показать.  $\square$

Возвращаемся к доказательству дистрибутивности решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{Q}_n)$ . Докажем требуемое утверждение, применив лемму 3.81 с  $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_n$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{T}$  и множеством  $\Sigma$ , состоящим из всех тождеств вида  $x^k \approx x^\ell$  и  $x^k y^\ell \approx y^\ell x^k$ , где  $k, \ell \in \mathbb{N}$ . С учетом лемм 3.87 и 3.70, нам остается проверить только, что если  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  — подмногообразия многообразия  $\mathbf{Q}_n$ , а пересечение  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству  $x^k y^\ell \approx y^\ell x^k$  для некоторых  $1 \leq k, \ell < n$ , то это тождество выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

Предположим, что слово  $x^k$  не является изотермом для одного из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Тогда из лемм 1.3 и 1.24 вытекает, что  $\mathbf{X}$  или  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству  $x^k \approx x^r$  для некоторого  $r > k$ . Поскольку  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Q}_n$ , отсюда следует, что  $\mathbf{X}$  или  $\mathbf{Y}$  удовлетворяет  $x^k y^\ell \approx x^n y^\ell \approx y^\ell x^n \approx y^\ell x^k$ , что и требовалось доказать. Аналогичным образом можно доказать требуемое утверждение, если слово  $y^\ell$  не является изотермом для одного из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Поэтому далее мы можем считать, что оба слова  $x^k$  и  $y^\ell$  являются изотермами для  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . В силу предложения 1.1, существует такая последовательность слов  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ , что  $\mathbf{w}_0 = x^k y^\ell$ ,  $\mathbf{w}_m = y^\ell x^k$  и, для каждого  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Поскольку  $x^k$  и  $y^\ell$  — изотермы для  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ ,  $\text{alph}(\mathbf{w}_i) = \{x, y\}$ ,  $\text{осс}_x(\mathbf{w}_i) = k$  и  $\text{осс}_y(\mathbf{w}_i) = \ell$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Очевидно, что существует такое  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , что  $\text{h}(\mathbf{w}_j) = x$ , а  $\text{h}(\mathbf{w}_{j+1}) = y$ . Принимая во внимание тот факт, что  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяют тождеству (3.50), получаем, что тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  эквивалентно тождеству  $x^k y^\ell \approx y^\ell x^k$  в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

**Дистрибутивность решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{R}_n)$ .** Нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.88.** Пусть  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — аперриодические многообразия моноидов, удовлетворяющие тождествам (3.44),  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Если  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  удовлетворяет тождеству (1.2), где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ , то это тождество выполнено в одном из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

*Доказательство.* Если  $e_i > 1$  или  $f_i > 1$  для некоторого  $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ , то рутинными вычислениями можно проверить, что тождество (1.2) является следствием системы  $\{(3.44), \sigma_3\}$ . Поэтому далее мы можем считать, что  $e_0 = f_0 = 1$  и  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \leq 1$ .

Если  $M(xy) \notin \mathbf{X}$ , то многообразию  $\mathbf{X}$  коммутативно по лемме 1.25, значит, удовлетворяет тождеству (1.2). Аналогичным образом можно показать, что если  $M(xy) \notin \mathbf{Y}$ , то в  $\mathbf{Y}$  выполнено тождество (1.2). Таким образом, далее мы будем считать, что  $M(xy) \in \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ . Пусть  $\mathbf{u}$  обозначает левую часть тождества (1.2). Заметим, что  $\text{sim}(\mathbf{u}) = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$ . Если слово  $\mathbf{u}_y$  не является изотермом для одного из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , скажем  $\mathbf{X}$ , то в этом многообразии выполнено нетривиальное тождество вида  $\mathbf{u}_y \approx \mathbf{u}'$ . Из леммы 1.20 следует, что  $\mathbf{u}' = x^{g_0} t_1 x^{g_1} \dots t_r x^{g_r}$  для некоторых  $g_0, g_1, \dots, g_r \in \mathbb{N}_0$ . Лемма 3.75 позволяет нам считать, что  $g_1, g_2, \dots, g_r \leq 1$ . Тогда мы можем применить лемму 3.72 и заключить, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\omega_{e-1,1}$ , где  $e := \sum_{i=0}^r e_i$ . Это тождество вместе с  $\{(3.44), \sigma_3\}$  влечет

$$\mathbf{u} \stackrel{\omega_{e-1,1}}{\approx} x^e y^{f_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i y^{f_i} \right) \stackrel{\{(3.44), \sigma_3\}}{\approx} y^{f_0} x^e \left( \prod_{i=1}^r t_i y^{f_i} \right) \stackrel{\omega_{e-1,1}}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что если слово  $\mathbf{u}_x$  не является изотермом для одного из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , то в одном из этих многообразий выполнено тождество (1.2).

Таким образом, далее будем считать, что оба слова  $\mathbf{u}_x$  и  $\mathbf{u}_y$  являются изотермами для  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Из предложения 1.1 вытекает, что существует последовательность попарно различных слов  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\ell$  такая, что  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}_\ell$  совпадает с правой частью тождества (1.2) и, для каждого  $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$ , тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{X}$ , либо в  $\mathbf{Y}$ . Тогда найдется  $j \in \{1, 2, \dots, \ell - 1\}$  такое, что  $(1_{\mathbf{w}_j} x) < (1_{\mathbf{w}_j} y)$ , но  $(1_{\mathbf{w}_{j+1}} y) < (1_{\mathbf{w}_{j+1}} x)$ . Поскольку  $\mathbf{u}_x$  и  $\mathbf{u}_y$  — изотермы для  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , из лемм 1.3 и 1.21 вытекает, что

$$\mathbf{w}_j = xy \left( \prod_{i=1}^r t_i \mathbf{a}_i \right) \text{ и } \mathbf{w}_{j+1} = yx \left( \prod_{i=1}^r t_i \mathbf{b}_i \right),$$

где  $(\mathbf{a}_i)_x = (\mathbf{b}_i)_x = y^{f_i}$  и  $(\mathbf{a}_i)_y = (\mathbf{b}_i)_y = x^{e_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Без ограничения общности можно считать, что тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$  выполнено в  $\mathbf{X}$ . Тогда  $\mathbf{X}$  удовлетворяет

$$xy \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) \stackrel{\sigma_2}{\approx} xy \left( \prod_{i=1}^r t_i \mathbf{a}_i \right) \approx yx \left( \prod_{i=1}^r t_i \mathbf{b}_i \right) \stackrel{\sigma_2}{\approx} yx \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right),$$

что и требовалось показать. □

Возвращаемся к доказательству дистрибутивности решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{R}_n)$ . Выведем требуемое утверждение из леммы 3.81 с  $\mathbf{V} = \mathbf{R}_n$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{T}$  и множеством  $\Sigma$ , состоящим из тождества

$xu \approx ux$ , всех тождеств вида  $x^k \approx x^\ell$ , где  $k, \ell \in \mathbb{N}$ , всех тождеств вида  $\omega_{k,\ell}$ , где  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ , а также всех тождеств вида (1.2), где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ . В силу лемм 1.25, 3.70 и 3.88 и следствия 3.73, остается только доказать, что каждое подмногообразие многообразия  $\mathbf{R}_n$  может быть задано внутри  $\mathbf{R}_n$  некоторым подмножеством множества  $\Sigma$ .

Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество. Достаточно проверить, что  $\mathbf{R}_n\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{R}_n\Sigma'$  для некоторой системы тождеств  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ . Если многообразие  $\mathbf{R}_n\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\}$  коммутативно, то его можно задать некоторым подмножеством множества  $\{x^k \approx x^\ell, xu \approx ux \mid k, \ell \in \mathbb{N}\}$  по предложению 1.13. Поэтому остается рассмотреть случай, когда многообразие  $\mathbf{R}_n\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\}$  не является коммутативным. В силу предложения 1.15 и включения  $\mathbf{R}_n \subseteq \mathbf{O}$ , мы можем считать, что имеет место одно из двух следующих утверждений:

- (a)  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид (1.1), где  $r, e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ;
- (b)  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид (1.2), где  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $e_0, f_0 \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{i=0}^r e_i \geq 2$  и  $\sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ .

Заметим, что если имеет место утверждение (b), то  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Sigma$  и доказывать нечего. Предположим теперь, что выполняется утверждение (a). Лемма 3.71 позволяет считать, что  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \leq 1$ . В силу леммы 3.72, тождество (1.1) эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{R}_n$  множеству  $\{x^e \approx x^f, \omega_{e-e_0, e_0}, \omega_{f-f_0, f_0}\}$ , где  $e := \sum_{i=0}^r e_i$  и  $f := \sum_{i=0}^r f_i$ . Мы видим, что в любом случае тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{R}_n$  некоторому подмножеству множества  $\Sigma$ .

Теорема 3.1 доказана. □

**Следствие 3.89.** *Число дистрибутивных многообразий аperiodических моноидов счетно.*

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{V}$  — одно из многообразий, перечисленных в теореме 3.1. Из доказательства этой теоремы следует, что любое подмногообразие многообразия  $\mathbf{V}$  может быть задано внутри  $\mathbf{V}$  конечным набором тождеств. Поэтому решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{V})$  не более чем счетна. Число перечисленных в теореме 3.1 дистрибутивных многообразий также счетно. Отсюда получаем требуемое утверждение, поскольку объединение счетного числа счетных множеств снова является счетным множеством. □

Мы завершим эту главу утверждением, показывающим, что существуют бесконечно убывающие цепи недистрибутивных многообразий аperiodических моноидов, пересечение элементов которых является дистрибутивным многообразием.

**Предложение 3.90.** *Многообразие*

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} \left( \bigwedge_{m=1}^{\infty} \left( \bigwedge_{\tau \in S_{n+m}} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau]) \right) \right)$$

*дистрибутивно.*

*Доказательство.* Рутинными вычислениями можно проверить, что в  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau])$  выполнена система тождеств

$$\{\sigma_3, x^2 \approx x^3, (3.44), \mathbf{d}_{p,q,r}[\rho] \approx \mathbf{d}'_{p,q,r}[\rho] \mid p, q, r \in \mathbb{N}, \rho \in S_{p+q+r}\} \cup \\ \{\mathbf{c}_{p,q,r}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{p,q,r}[\rho] \mid 1 \leq p < n, 1 \leq q < m, r \in \mathbb{N}, \rho \in S_{p+q+r}\}.$$

Отсюда вытекает, что  $\bigwedge_{n=1}^{\infty} (\bigwedge_{m=1}^{\infty} (\bigwedge_{\tau \in S_{n+m}} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau]))) \subseteq \mathbf{P}_2$ . Нам остается только сослаться на теорему 3.1. □

Отметим, что любое многообразие вида  $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{c}}_{n,m,0}[\tau])$  не является дистрибутивным в силу предложения 3.59.

# Глава 4

## Специальные элементы

Данная глава посвящена специальным элементам решетки  $\text{Mon}$ . Она состоит из трех параграфов. В § 4.1 получено описание нейтральных, стандартных, дистрибутивных и нижнемодулярных элементов обсуждаемой решетки, в § 4.2 — константных и, наконец, в § 4.3 — сократимых.

### § 4.1. Нейтральные, стандартные, дистрибутивные и нижнемодулярные элементы

Основным результатом этого параграфа является следующее описание нейтральных, стандартных, дистрибутивных и нижнемодулярных элементов решетки  $\text{Mon}$ .

**Теорема 4.1.** *Для многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  следующие условия эквивалентны:*

- (i)  $\mathbf{V}$  является нижнемодулярным элементом решетки  $\text{Mon}$ ;
- (ii)  $\mathbf{V}$  является дистрибутивным элементом решетки  $\text{Mon}$ ;
- (iii)  $\mathbf{V}$  является стандартным элементом решетки  $\text{Mon}$ ;
- (iv)  $\mathbf{V}$  является нейтральным элементом решетки  $\text{Mon}$ ;
- (v)  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$  или  $\text{Mon}$ .

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы 4.1, нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 4.2.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное многообразие моноидов. Если  $\mathbf{LRB} \subseteq \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  не является нижнемодулярным элементом решетки  $\text{Mon}$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $\mathbf{V}$  — собственное многообразие, оно удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству  $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1$ . Найдутся две различные буквы  $x$  и  $y$  такие, что тождество  $\mathbf{u}_1(x, y) \approx \mathbf{v}_1(x, y)$  нетривиально. Поэтому можно считать, что слова  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v}_1$  зависят только от этих двух букв. Ясно, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$x^{\text{occ}_x(\mathbf{u}_1)+1} \approx x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}_1)+1} \quad \text{и} \quad x^{\text{occ}_y(\mathbf{u}_1)+1} \approx x^{\text{occ}_y(\mathbf{v}_1)+1}$$

и потому тождеству

$$\mathbf{u}_1 x^{\text{occ}_x(\mathbf{v}_1)+1} y^{\text{occ}_y(\mathbf{v}_1)+1} \approx \mathbf{v}_1 x^{\text{occ}_x(\mathbf{u}_1)+1} y^{\text{occ}_y(\mathbf{u}_1)+1}.$$

Домножая это тождество справа на буквы  $x$  и  $y$ , можно получить тождество, в обе его части которого все буквы входят ровно  $n$  раз для некоторого  $n \geq 2$ . Таким образом, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\text{alph}(\mathbf{u}) = \text{alph}(\mathbf{v}) = \{x, y\}$  и  $\text{occ}_x(\mathbf{u}) = \text{occ}_x(\mathbf{v}) = \text{occ}_y(\mathbf{u}) = \text{occ}_y(\mathbf{v}) = n$ .

Поскольку  $\mathbf{LRB} \subseteq \mathbf{V}$ , в силу леммы 1.19, мы можем без ограничения общности считать, что  $\text{ini}(\mathbf{u}) = \text{ini}(\mathbf{v}) = xy$ . Пусть  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$  — слова, получающиеся из  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  заменой всех вхождений  $x$  на  $y$  и наоборот. Тогда  $\text{ini}(\mathbf{u}') = \text{ini}(\mathbf{v}') = yx$ .

Положим

$$\mathbf{X} := \text{var}\{\mathbf{ux} \approx \mathbf{u}'x, \mathbf{vx} \approx \mathbf{v}'x\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} := \text{var}\{\mathbf{ux} \approx \mathbf{vx}\}.$$

Покажем, что множество  $\{\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x\}$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -класс. Для этого достаточно проверить, что если  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  и  $\mathbf{p} \in \{\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x\}$ , то  $\mathbf{q} \in \{\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x\}$ . Предложение 1.1 по индукции сводит проверку к случаю, когда тождество  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  непосредственно вытекает из одного из тождеств, задающих многообразие  $\mathbf{X}$ . Иными словами,  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{t})\mathbf{b})$  для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^*$ , и либо  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x\}$ , либо  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{\mathbf{vx}, \mathbf{v}'x\}$ . Очевидно, что если  $\varphi(x) = 1$  или  $\varphi(y) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{s}) = \varphi(\mathbf{t})$  и потому  $\mathbf{q} = \mathbf{p} \in \{\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x\}$ . Поэтому можно предположить, что слова  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  не являются пустыми. Тогда

$$|\varphi(\mathbf{s})| \geq |\mathbf{s}| = 2n + 1 = |\mathbf{p}|.$$

Отсюда вытекает, что  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  — буквы и  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ . Учтывая, что

$$\text{occ}_x(\mathbf{p}) = \text{occ}_x(\mathbf{s}) = n + 1 \quad \text{и} \quad \text{occ}_y(\mathbf{p}) = \text{occ}_y(\mathbf{s}) = n,$$

получаем, что  $\varphi(x) = x$  и  $\varphi(y) = y$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $\mathbf{s} = \mathbf{p}$ , откуда  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x\}$  и потому  $\mathbf{q} = \mathbf{t} \in \{\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x\}$ .

Таким образом, множество  $\{\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x\}$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -класс. Аналогичным образом проверяется, что множество  $\{\mathbf{vx}, \mathbf{v}'x\}$  является  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -классом, а слово  $\mathbf{u}'x$  — изотермом для  $\mathbf{Y}$ . Отсюда, включения  $\mathbf{LRB} \subseteq \mathbf{V}$  и леммы 1.19 вытекает, что слова  $\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x, \mathbf{vx}, \mathbf{v}'x$  являются изотермами для многообразия  $\mathbf{V} \vee \mathbf{X}$ . Тогда слово  $\mathbf{u}'x$  будет изотермом и для  $\mathbf{Y} \wedge (\mathbf{V} \vee \mathbf{X})$ . С другой стороны, очевидно, что в многообразии  $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X}$  выполнено тождество  $\mathbf{u}'x \approx \mathbf{v}'x$ . Ясно, что это тождество справедливо и в многообразии  $\mathbf{V}$ . Следовательно,  $\mathbf{V} \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X})$  удовлетворяет  $\mathbf{u}'x \approx \mathbf{v}'x$ . Поскольку  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Y}$ , отсюда вытекает, что

$$\mathbf{V} \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X}) \subset \mathbf{Y} \wedge (\mathbf{V} \vee \mathbf{X}).$$

Таким образом, многообразие  $\mathbf{V}$  не является нижнемодулярным элементом решетки  $\text{Mon}$ , что и требовалось показать.  $\square$

*Доказательство теоремы 4.1.* Импликации  $(iv) \rightarrow (iii) \rightarrow (ii) \rightarrow (i)$  имеют место в произвольной решетке. Очевидно, что многообразия  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{Mon}$  являются нейтральными элементами решетки  $\mathbf{Mon}$ . Согласно [103, предложение 3.4], многообразие  $\mathbf{M}(1)$  является нейтральным элементом решетки  $\mathbf{Sem}$ . Учитывая предложение 1.9, мы можем заключить, что  $\mathbf{M}(1)$  — нейтральный элемент решетки  $\mathbf{Mon}$  и потому импликация  $(v) \rightarrow (iv)$  справедлива. Таким образом, остается проверить импликацию  $(i) \rightarrow (v)$ .

Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное многообразие моноидов, являющееся нижнемодулярным элементом решетки  $\mathbf{Mon}$ . Предположим сначала, что многообразие  $\mathbf{V}$  не является периодическим. Тогда оно является надкоммутативным, т.е.  $\mathbf{Com} \subseteq \mathbf{V}$ . В [102, лемма 2.16] доказано, что многообразие всех полугрупп порождается всеми минимальными неабелевыми многообразиями групп. Учитывая это утверждение, предложение 1.9, а также тот факт, что  $\mathbf{V}$  — собственное многообразие моноидов, мы получаем, что существует минимальное неабелево многообразие групп  $\mathbf{G}$  такое, что  $\mathbf{V}$  не содержит  $\mathbf{G}$ . Положим  $\mathbf{W} := \mathbf{V} \vee \mathbf{G}$ . Ясно, что  $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}$ . Как хорошо известно, любое надкоммутативное многообразие полугрупп является объединением всех своих нильпотентных, а значит, и аperiodических подмногообразий (см., например, [108]). Из этого факта и предложения 1.9 следует, что существует аperiodическое многообразие  $\mathbf{K}$  такое, что  $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{W}$ , но  $\mathbf{K} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Положим  $\mathbf{Y} := \mathbf{V} \vee \mathbf{K}$ . Ясно, что  $\mathbf{V} \subset \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{W}$ . В [101, лемма 1.4] доказано, что если  $\mathbf{U}$  — произвольное, а  $\mathbf{X}$  — многообразие аperiodических полугрупп, то любая группа из  $\mathbf{U} \vee \mathbf{X}$  содержится в  $\mathbf{U}$ . Поскольку  $\mathbf{G} \not\subseteq \mathbf{V}$ , учитывая этот факт и предложение 1.9, мы получаем, что  $\mathbf{G} \not\subseteq \mathbf{V} \vee \mathbf{K} = \mathbf{Y}$ . Следовательно, многообразие  $\mathbf{G} \wedge \mathbf{Y}$  коммутативно, откуда следует, что  $\mathbf{G} \wedge \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V}$ . Поскольку  $\mathbf{V}$  — нижнемодулярный элемент решетки  $\mathbf{Mon}$  и  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Y}$ , мы имеем, что

$$\mathbf{V} = (\mathbf{G} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{V} = (\mathbf{G} \vee \mathbf{V}) \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{W} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{Y}.$$

Получаем противоречие с включением  $\mathbf{V} \subset \mathbf{Y}$ . Таким образом, мы доказали, что многообразие  $\mathbf{V}$  является периодическим. В этом случае многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+m}$  для некоторых  $n, m \in \mathbb{N}$ . Предположим, что  $n$  и  $m$  — наименьшие натуральные числа, для которых тождество  $x^n \approx x^{n+m}$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Возможны два случая.

**Случай 1:** многообразие  $\mathbf{V}$  является вполне регулярным. Тогда, в силу леммы 1.11,  $n = 1$ .

Предположим, что  $\mathbf{V}$  содержит нетривиальную группу. Тогда  $m > 1$  по лемме 1.12. Положим

$$\mathbf{u}_1 := x^{4m+1}yx^{m+1}, \quad \mathbf{u}_2 := x^{2m+2}yx^{3m+1}, \quad \mathbf{v}_1 := x^{3m+1}yx^{2m+1}, \quad \mathbf{v}_2 := x^{m+2}yx^{4m+1}.$$

Пусть

$$\mathbf{X} := \text{var}\{\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} := \text{var}\{\mathbf{u}_2 \approx \mathbf{v}_2\}.$$

Покажем, что множество  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -класс. Для этого достаточно проверить, что если  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  и  $\mathbf{p} \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , то  $\mathbf{q} \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ . Предложение 1.1 по индукции сводит проверку к случаю, когда тождество  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  непосредственно вытекает из одного из тождеств, задающих многообразие  $\mathbf{X}$ . Иными словами,  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{t})\mathbf{b})$

для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^*$ , и либо  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , либо  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ . Очевидно, что если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{s}) = \varphi(\mathbf{t}) = \varphi(y)$  и потому  $\mathbf{q} = \mathbf{p} \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ . Если  $\varphi(y) = 1$ , а  $\varphi(x) \neq 1$ , то  $\{\varphi(\mathbf{s}), \varphi(\mathbf{t})\} = \{(\varphi(x))^{5m+2}, (\varphi(x))^{5m+3}\}$ . В любом случае  $\varphi(\mathbf{s})$  содержит подслово  $(\varphi(x))^{5m+2}$ . Но это невозможно, поскольку слова  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  не содержат подслово, являющееся  $(5m+2)$ -й степенью некоторого непустого слова. Поэтому далее можно считать, что слова  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  не являются пустыми. Тогда

$$|\varphi(\mathbf{s})| \geq |\mathbf{s}| \geq 5m+3.$$

Отсюда вытекает, что  $\varphi(x)$  — буква и, более того, что  $\varphi(x) = x$  и  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ . Если  $y \notin \text{alph}(\xi(y))$ , то  $\text{alph}(\varphi(y)) = \{x\}$  и потому  $\varphi(\mathbf{s})$  содержит подслово  $(\varphi(x))^{5m+2}$ , что невозможно, как мы отметили выше. Поэтому  $y \in \text{alph}(\varphi(y))$ . Легко видеть, что такая ситуация возможна лишь в том случае, когда  $\varphi(y) = y$ ,  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  и  $\mathbf{p} = \varphi(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{q} = \mathbf{t} \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ .

Таким образом, множество  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  образует FIC( $\mathbf{X}$ )-класс. Аналогичным образом можно проверить, что множество  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  является FIC( $\mathbf{X}$ )-классом, а слово  $\mathbf{u}_1$  — изотермом для  $\mathbf{Y}$ . Заметим, что в  $\mathbf{V}$  не выполнены тождества  $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{u}_2$  и  $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$ , поскольку любое многообразие, удовлетворяющее одному из этих тождеств, удовлетворяет также тождеству  $x^{5m+3} \approx x^{5m+4}$  и потому является аперiodическим в силу леммы 1.12. Отсюда и из сказанного выше вытекает, что слова  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  являются изотермами для многообразия  $\mathbf{V} \vee \mathbf{X}$ . Тогда слово  $\mathbf{u}_1$  будет изотермом и для  $\mathbf{Y} \wedge (\mathbf{V} \vee \mathbf{X})$ . С другой стороны, очевидно, что в многообразии  $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X}$  выполнено тождество  $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1$ . Ясно, что это тождество справедливо и в многообразии  $\mathbf{V}$ , поскольку оно является следствием тождества  $x \approx x^{m+1}$ . Следовательно,  $\mathbf{V} \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X})$  удовлетворяет  $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1$ . Поскольку  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Y}$ , отсюда вытекает, что

$$\mathbf{V} \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X}) \subset \mathbf{Y} \wedge (\mathbf{V} \vee \mathbf{X}).$$

Таким образом, многообразию  $\mathbf{V}$  не является нижнемодулярным элементом решетки  $\text{Mon}$ . Получаем противоречие с предположением, что  $\mathbf{V}$  содержит нетривиальную группу.

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{V}$  является многообразием аперiodических моноидов. Тогда  $\mathbf{V}$  является идемпотентным, поскольку каждое аперiodическое вполне регулярное многообразие состоит из идемпотентных моноидов. Из леммы 4.2 и двойственной к ней леммы следует, что  $\mathbf{LRB}, \mathbf{RRB} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Тогда из предложения 1.14 вытекает, что  $\mathbf{V}$  совпадает либо с  $\mathbf{M}(1)$ , либо с  $\mathbf{T}$ , что и требовалось показать.

**Случай 2:** многообразию  $\mathbf{V}$  не является вполне регулярным. Тогда, в силу леммы 1.11,  $\mathbf{M}(x) \in \mathbf{V}$ . Лемма 4.2 позволяет считать, что  $\mathbf{LRB} \not\subseteq \mathbf{V}$ .

По лемме 1.19, в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такое, что  $\text{ini}(\mathbf{u}) \neq \text{ini}(\mathbf{v})$ . Как и в доказательстве леммы 4.2, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  можно выбрать таким, что  $\text{alph}(\mathbf{u}) = \text{alph}(\mathbf{v}) = \{x, y\}$  и  $\text{occ}_x(\mathbf{u}) = \text{occ}_x(\mathbf{v}) = \text{occ}_y(\mathbf{u}) = \text{occ}_y(\mathbf{v}) = k$  для некоторого  $k \geq 2$  и, кроме того, слова  $x^k$  и  $y^k$  не являются подсловами слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

Предположим, что  $\mathbf{M}_\gamma(\text{u}x\text{x}^+) \not\subseteq \mathbf{V}$ . Согласно лемме 1.16,  $\mathbf{M}_\gamma(\text{u}x\text{x}^+) \subset \mathbf{M}(x) \vee \mathbf{LRB}$ . От-

сюда и из включения  $\mathbf{M}(x) \subseteq \mathbf{V}$  следует, что

$$(\mathbf{V} \vee \mathbf{M}_\gamma(yxx^+)) \wedge (\mathbf{V} \vee \mathbf{LRB}) = \mathbf{V} \vee \mathbf{M}_\gamma(yxx^+).$$

С другой стороны,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , которое, очевидно, выполнено и в  $\mathbf{M}_\gamma(yxx^+)$ . Поэтому  $\mathbf{V} \vee \mathbf{M}_\gamma(yxx^+)$  удовлетворяет  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Отсюда, леммы 1.19 и того факта, что  $\text{ini}(\mathbf{u}) \neq \text{ini}(\mathbf{v})$ , вытекает, что  $\mathbf{LRB} \not\subseteq \mathbf{V} \vee \mathbf{M}_\gamma(yxx^+)$ . Учитывая этот факт и предложение 1.14, получаем, что

$$\mathbf{V} \vee ((\mathbf{V} \vee \mathbf{M}_\gamma(yxx^+)) \wedge \mathbf{LRB}) = \mathbf{V} \vee \mathbf{M}(1) = \mathbf{V},$$

что противоречит тому, что  $\mathbf{V}$  является нижнемодулярным элементом решетки  $\text{Mon}$ .

Таким образом, нам остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{M}_\gamma(yxx^+) \in \mathbf{V}$ . Положим

$$\mathbf{X} := \text{var}\{xtu \approx txu, xtv \approx txv\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} := \text{var}\{txu \approx txv\}.$$

Покажем, что множество  $\{xtu, txu\}$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -класс. Для этого достаточно проверить, что если  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  и  $\mathbf{p} \in \{xtu, txu\}$ , то  $\mathbf{q} \in \{xtu, txu\}$ . Предложение 1.1 по индукции сводит проверку к случаю, когда тождество  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  непосредственно вытекает из одного из тождеств, задающих многообразие  $\mathbf{X}$ . Иными словами,  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{a}\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{t})\mathbf{b})$  для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^*$ , и либо  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{xtu, txu\}$ , либо  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{xtv, txv\}$ . Очевидно, что если  $\varphi$  отображает одну из букв  $x$  или  $t$  в пустое слово, то  $\varphi(\mathbf{s}) = \varphi(\mathbf{t})$  и потому  $\mathbf{q} = \mathbf{p} \in \{xtu, txu\}$ . Поэтому можно предположить, что слова  $\varphi(x)$  и  $\varphi(t)$  не являются пустыми. Если  $\varphi(y) = 1$ , то  $\{\varphi(\mathbf{s}), \varphi(\mathbf{t})\} = \{\varphi(x)\varphi(t)(\varphi(x))^k, \varphi(t)(\varphi(x))^{k+1}\}$ . Поскольку  $\varphi(x) \neq 1$ ,  $\text{occ}_y(\mathbf{p}) = k$  и  $\text{occ}_t(\mathbf{p}) = 1$ , это возможно лишь в том случае, когда  $\varphi(x) = x$ . Однако последнее равенство противоречит предположению, что слово  $x^k$  не является подсловом слова  $\mathbf{u}$ . Следовательно,  $\varphi(y) \neq 1$ . Тогда

$$|\varphi(\mathbf{s})| \geq |\mathbf{s}| = 2k + 2 = |\mathbf{p}|.$$

Отсюда вытекает, что  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(y)$  и  $\varphi(t)$  — буквы и  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ . Учитывая, что

$$\text{occ}_x(\mathbf{p}) = \text{occ}_x(\mathbf{s}) = k + 1, \quad \text{occ}_y(\mathbf{p}) = \text{occ}_y(\mathbf{s}) = k \quad \text{и} \quad \text{occ}_t(\mathbf{p}) = \text{occ}_t(\mathbf{s}) = 1$$

получаем, что  $\varphi(x) = x$ ,  $\varphi(y) = y$  и  $\varphi(t) = t$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $\mathbf{s} = \mathbf{p}$ , откуда  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{xtu, txu\}$  и потому  $\mathbf{q} = \mathbf{t} \in \{xtu, txu\}$ .

Таким образом, множество  $\{xtu, txu\}$  образует  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -класс. Аналогичным образом можно проверить, что множество  $\{xtv, txv\}$  является  $\text{FIC}(\mathbf{X})$ -классом, а слово  $xtu$  — изотермом для  $\mathbf{Y}$ . Из включения  $\mathbf{M}_\gamma(yxx^+) \subseteq \mathbf{V}$  вытекает, что слова  $xtu$  и  $txu$  лежат в разных  $\text{FIC}(\mathbf{V})$ -классах. С учетом сказанного выше, отсюда следует, что эти слова являются изотермами для многообразия  $\mathbf{V} \vee \mathbf{X}$ . Тогда слово  $xtu$  будет изотермом и для  $\mathbf{Y} \wedge (\mathbf{V} \vee \mathbf{X})$ . С другой стороны, очевидно, что в многообразии  $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X}$  выполнено тождество  $xtu \approx xtv$ . Ясно, что это тождество справедливо и в многообразии  $\mathbf{V}$ . Следовательно,  $\mathbf{V} \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X})$  удовлетворяет

$x\mathbf{t}u \approx x\mathbf{t}v$ . Поскольку  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Y}$ , отсюда вытекает, что

$$\mathbf{V} \vee (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X}) \subset \mathbf{Y} \wedge (\mathbf{V} \vee \mathbf{X}).$$

Получаем противоречие с тем, что  $\mathbf{V}$  является нижнемодулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ . Таким образом, рассматриваемый случай, когда многообразие  $\mathbf{V}$  не является вполне регулярным, невозможен.  $\square$

## § 4.2. Костандартные элементы

Основным результатом данного параграфа является следующее описание костандартных элементов решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ .

**Теорема 4.3.** *Для многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  следующие условия эквивалентны:*

- (i)  $\mathbf{V}$  является модулярным и верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ ;
- (ii)  $\mathbf{V}$  является костандартным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ ;
- (iii)  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$ ,  $\mathbf{M}(x)$  и  $\mathbb{M}\text{on}$ .

Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Первое из них представляет определенный самостоятельный интерес и дает существенную информацию о верхнемодулярных элементах решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ .

**Предложение 4.4.** *Если собственное многообразие моноидов  $\mathbf{V}$  является верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ , то  $\mathbf{V}$  либо коммутативно, либо вполне регулярно.*

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное некоммутативное и не вполне регулярное многообразие моноидов, являющееся верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ . Тогда, по лемме 1.25,  $\mathbf{M}(xy) \notin \mathbf{V}$ . В [102, лемма 2.16] доказано, что многообразие всех полугрупп порождается всеми минимальными неабелевыми многообразиями групп. Учитывая это утверждение и предложение 1.9, мы получаем, что существует минимальное неабелево многообразие групп  $\mathbf{G}$  такое, что  $\mathbf{G} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{G} = \mathbf{A}_n$  для некоторого натурального  $n$ , откуда  $\mathbf{M}(x) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{G}) = \mathbf{M}(x) \vee \mathbf{A}_n$ . С другой стороны, в силу леммы 1.25,  $\mathbf{M}(xy) \in \mathbf{M}(x) \vee \mathbf{G}$ . Принимая во внимание тот факт, что  $\mathbf{M}(xy) \in \mathbf{V}$ , мы получаем, что  $\mathbf{M}(xy) \in \mathbf{V} \wedge (\mathbf{M}(x) \vee \mathbf{G})$ . Многообразие  $\mathbf{A}_n \vee \mathbf{M}(x)$  коммутативно, в то время как  $\mathbf{M}(xy)$  не является коммутативным, откуда

$$\mathbf{M}(x) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{G}) \neq \mathbf{V} \wedge (\mathbf{M}(x) \vee \mathbf{G}).$$

Учитывая, что  $\mathbf{M}(x) \subset \mathbf{M}(xy) \subseteq \mathbf{V}$ , мы получаем противоречие с тем, что многообразие  $\mathbf{V}$  является верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ .  $\square$

Поскольку кодистрибутивный элемент произвольной решетки является ее верхнемодулярным элементом, из предложения 4.4 следует, что любое собственное многообразие моноидов, являющееся кодистрибутивным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ , либо коммутативно, либо вполне регулярно. Оказывается, что справедливо

**Предложение 4.5.** *Всякое коммутативное многообразие моноидов является кодистрибутивным элементом решетки  $\text{МОН}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{V}$  — коммутативное многообразие моноидов, а  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  — произвольные многообразия. Положим

$$\mathbf{X} := \mathbf{V} \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) \quad \text{и} \quad \mathbf{W} := (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}).$$

Очевидно, что  $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{X}$ . Проверим, что  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{W}$ . Если  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Y}$ , то

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) = \mathbf{V} = \mathbf{V} \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}) = (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}) = \mathbf{W},$$

что и требовалось доказать. Следовательно, мы можем предположить, что  $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{Y}$ . В силу симметрии,  $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{Z}$ . Если  $\mathbf{V}$  является периодическим, то  $\mathbf{X}$  также будет периодическим. Если  $\mathbf{V}$  не является периодическим, то  $\mathbf{V}$  является многообразием всех коммутативных моноидов. Поскольку  $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{Z}$ , многообразия  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  являются периодическими, откуда следует периодичность многообразия  $\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ . Следовательно,  $\mathbf{X}$  — коммутативное периодическое многообразие. Тогда из предложения 1.13 вытекает, что  $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \vee \mathbf{A}_s$  для некоторого  $s$ , где  $\mathbf{Q}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$  или  $\mathbf{M}(x^n)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$  и  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ . Теперь проверим, что либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y}$ , либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$ . Если  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}$ , то доказывать нечего. Если  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}(1)$ , то требуемый факт следует из леммы 1.10. Пусть теперь, что  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}(x^n)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Предположим, что  $\mathbf{Q} \not\subseteq \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Q} \not\subseteq \mathbf{Z}$ . Тогда из леммы 1.24 следует, что найдутся  $i$  и  $j$  такие, что в  $\mathbf{Y}$  выполнено тождество  $x^{n-1} \approx x^{n-1+i}$ , в  $\mathbf{Z}$  — тождество  $x^{n-1} \approx x^{n-1+j}$ . Тогда многообразие  $\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$  удовлетворяет тождеству  $x^{n-1} \approx x^{n-1+i+j}$ . Получаем противоречие с тем, что  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ . Таким образом, мы доказали, что либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y}$ , либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$ . Поскольку  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$ , мы получаем, что либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}$ , либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}$ . Следовательно,  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{W}$ .

Теперь проверим, что  $\mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{W}$ . Заметим, что  $\mathbf{W}$  является коммутативным периодическим многообразием. Тогда, в силу предложения 1.13,  $\mathbf{W} = \mathbf{Q}' \vee \mathbf{A}_r$  для некоторого  $r$ , где  $\mathbf{Q}'$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$  или  $\mathbf{M}(x^n)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Предположим, что  $s$  не делит  $r$ . Тогда найдутся такие простое число  $p$  и натуральное число  $k$ , что  $p^k$  делит  $s$ , но не делит  $r$ . Положим  $q := p^k$ . Тогда  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{X}$ , но  $\mathbf{A}_q \not\subseteq \mathbf{A}_r$ . Легко видеть, что любое подмногообразие многообразия  $\mathbf{W} = \mathbf{Q}' \vee \mathbf{A}_r$ , состоящее из групп, содержится в  $\mathbf{A}_r$ . Следовательно,  $\mathbf{A}_q \not\subseteq \mathbf{W}$ . Поскольку  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{X}$ , мы получаем, что  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ . Согласно [103, теорема 3.26], любое многообразие периодических абелевых групп является кодистрибутивным элементом решетки  $\mathbb{S}_{\text{EM}}$ . Из этого факта и предложения 1.9 следует, что

$$\mathbf{A}_q = \mathbf{A}_q \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) = (\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Z}).$$

Поскольку решетка подмногообразий многообразия  $\mathbf{A}_q$  является цепью,  $\mathbf{A}_q$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Z}$ , откуда следует, что либо  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Y}$ , либо  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Z}$ . Принимая во внимание, что  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$ , мы получаем противоречие с тем, что  $\mathbf{A}_q \not\subseteq \mathbf{W}$ . Поэтому  $s$  делит  $r$ . Тогда  $\mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{A}_r \subseteq \mathbf{W}$ . Следовательно,  $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \vee \mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{W}$ . Предложение 4.5 доказано.  $\square$

**Лемма 4.6.** Пусть  $\mathbf{V}$  — некоммутативное вполне регулярное многообразие моноидов. Тогда

$$\mathbf{M}(x) \vee (\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{M}(x) \subseteq \mathbf{M}(xy) = \mathbf{M}(xy) \wedge (\mathbf{M}(x) \vee \mathbf{V}).$$

В частности,  $\mathbf{V}$  не является модулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ .

*Доказательство.* Из рис. 1.3 вытекает, что  $\mathbf{M}(1)$  является максимальным вполне регулярным подмногообразием многообразия  $\mathbf{M}(xy)$ . Многообразие  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}(xy)$  вполне регулярно. Следовательно  $\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{V} \subseteq \mathbf{M}(1)$ . Поэтому  $\mathbf{M}(x) \vee (\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{M}(x)$ . С другой стороны,  $\mathbf{M}(x) \vee \mathbf{V}$  является некоммутативным и не вполне регулярным многообразием, поскольку  $\mathbf{V}$  некоммутативно, а  $\mathbf{M}(x)$  не вполне регулярно. Тогда из леммы 1.25 следует, что  $\mathbf{M}(xy) \subseteq \mathbf{M}(x) \vee \mathbf{V}$ , откуда  $\mathbf{M}(xy) = \mathbf{M}(xy) \wedge (\mathbf{M}(x) \vee \mathbf{V})$ .  $\square$

Для любых  $n, m \in \mathbb{N}$  положим

$$\mathbf{B}_{n,m} := \text{var}\{x^n \approx x^m\}.$$

**Лемма 4.7.** Если  $\mathbf{V}$  — коммутативное многообразие моноидов, содержащее нетривиальную группу, то

$$\text{var}\{\mathbf{s} \approx \mathbf{t}\} \vee (\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V}) \subseteq \mathbf{B}_{2,3} \wedge (\text{var}\{\mathbf{s} \approx \mathbf{t}\} \vee \mathbf{V}),$$

где  $\mathbf{s} := \text{ухузхз}$  и  $\mathbf{t} := \text{ухзхухз}$ . В частности,  $\mathbf{V}$  не является модулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ .

*Доказательство.* Для краткости положим  $\mathbf{Q} := \text{var}\{\mathbf{s} \approx \mathbf{t}\}$ . Ясно, что  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}_{2,3}$ . Очевидно, что  $\mathbf{M}(x) \subseteq \mathbf{Q}$ . Поскольку  $\mathbf{V}$  коммутативно, отсюда вытекает, что  $\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V} \subseteq \mathbf{M}(x)$ . Следовательно,

$$\mathbf{Q} \vee (\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}_{2,3} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}).$$

Требуется показать, что последнее включение — строгое. Для этого достаточно установить, что в  $\mathbf{B}_{2,3} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{V})$  не выполнено тождество  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ . В противном случае, в силу предложения 1.1, существует последовательность попарно различных слов  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  такая, что  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{s}$ ,  $\mathbf{w}_k = \mathbf{t}$  и для любого  $0 \leq i < k$  тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{B}_{2,3}$ , либо в  $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$ . Рассмотрим тождество  $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$ . Очевидно, что оно не выполнено в многообразии  $\mathbf{B}_{2,3}$ , так как  $\mathbf{s}$  является изотермом для  $\mathbf{B}_{2,3}$ . Следовательно, это тождество выполнено в  $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$ . Тогда из предложения 1.1 вытекает, что существует вывод тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$  из тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ , т.е. последовательность попарно различных слов  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  такая, что  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{s}$ ,  $\mathbf{v}_m = \mathbf{w}_1$  и для любого  $0 \leq i < m$  либо  $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \varphi_i(\mathbf{s}) \mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i \varphi_i(\mathbf{t}) \mathbf{b}_i$ , либо  $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \varphi_i(\mathbf{t}) \mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i \varphi_i(\mathbf{s}) \mathbf{b}_i$  для некоторых слов  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$  и некоторой подстановки  $\varphi_i: X \rightarrow X^*$ . Без ограничения общности мы можем считать, что последовательность  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  является кратчайшим выводом  $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$  из  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ .

Рассмотрим произвольную подстановку  $\psi: X \rightarrow X^*$ . В табл. 4.1 приведены формы слов  $\psi(\mathbf{s})$  и  $\psi(\mathbf{t})$  в случае, когда  $\psi$  отображает хотя бы одну из букв  $x, y$  и  $z$  в пустое слово. Мы видим, что во всех случаях слова  $\psi(\mathbf{s})$  и  $\psi(\mathbf{t})$  содержат подслово, являющееся квадратом

непустого слова. Заметим, что слова  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{t}$  не содержат квадратов. Из этого факта и табл. 4.1 вытекает, что если выполнено равенство  $\mathbf{a} = \mathbf{c}\psi(\mathbf{b})\mathbf{d}$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ ,  $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in X^*$ , а  $\psi$  — подстановка, отображающая хотя бы одну из букв  $x$ ,  $y$  или  $z$  в пустое слово, то  $\psi(\mathbf{b}) = 1$ . Этот факт мы будем в дальнейшем неоднократно использовать для получения противоречия.

Таблица 4.1: вид слов  $\psi(\mathbf{s})$  и  $\psi(\mathbf{t})$  в зависимости от подстановки  $\psi$

Слово	Вид слова, если		
	$\psi(x) = 1$	$\psi(y) = 1$	$\psi(z) = 1$
$\psi(\mathbf{s})$	$\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2$	$(\mathbf{pq})^2$	$(\mathbf{pq})^2$
$\psi(\mathbf{t})$	$(\mathbf{pq})^2$	$\mathbf{pqp}^2\mathbf{q}$	$\mathbf{pq}^2\mathbf{pq}$

Рассмотрим тождество  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ . Предположим сначала, что  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0\varphi_0(\mathbf{s})\mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0\varphi_0(\mathbf{t})\mathbf{b}_0$ . Если слова  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}_0$  являются пустыми, то подстановка  $\varphi_0$  действует тождественно на буквах  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В этом случае  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}$ . Пусть теперь хотя бы одно из слов  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}_0$  не является пустым. Тогда подстановка  $\varphi_0$  отображает одну из букв  $x$ ,  $y$  и  $z$  в пустое слово. В предыдущем абзаце мы показали, что в этом случае  $\varphi_0(\mathbf{s}) = \varphi_0(\mathbf{t}) = 1$ , откуда  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0$ . Получаем противоречие с тем, что слова  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  различны.

Предположим теперь, что  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0\varphi_0(\mathbf{t})\mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0\varphi_0(\mathbf{s})\mathbf{b}_0$ . Поскольку длина слова  $\mathbf{s}$  меньше длины слова  $\mathbf{t}$ , подстановка  $\varphi_0$  должна отображать одну из букв  $x$ ,  $y$  или  $z$  в пустое слово. Учитывая доказанное выше, мы снова получаем, что  $\varphi_0(\mathbf{t}) = 1$ . В этом случае вновь возникает противоречие с тем, что  $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{v}_1$ . Таким образом,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}$ .

Рассмотрим теперь тождество  $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$ . Предположим, что  $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1\varphi_1(\mathbf{s})\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1\varphi_1(\mathbf{t})\mathbf{b}_1$ . Заметим, что число вхождений буквы  $x$  в слово  $\varphi_1(\mathbf{s})$  не может быть равно 3, и поэтому  $x \in \text{alph}(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1)$ . Поскольку как первая, так и последняя буква слова  $\mathbf{t}$  не совпадает с  $x$ , мы получаем, что слово  $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$  имеет длину  $\geq 2$ . Тогда подстановка  $\varphi_1$  должна отображать одну из букв  $x$ ,  $y$  или  $z$  в пустое слово. В этом случае, как мы показали выше,  $\varphi_1(\mathbf{s}) = 1$ , откуда  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ . Противоречие.

Пусть теперь  $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1\varphi_1(\mathbf{t})\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1\varphi_1(\mathbf{s})\mathbf{b}_1$ . Если слова  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{b}_1$  являются пустыми, то подстановка  $\varphi_1$  действует тождественно на буквах  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В этом случае  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{s}$ . Но этого не может быть, так как последовательность  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  является кратчайшим выводом тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$  из тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ . Таким образом, хотя бы одно из слов  $\mathbf{a}_1$  или  $\mathbf{b}_1$  не является пустым. Тогда подстановка  $\varphi_1$  отображает одну из букв  $x$ ,  $y$  или  $z$  в пустое слово. В этом случае, как мы показали выше,  $\varphi_1(\mathbf{t}) = 1$ , откуда  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ . Получаем противоречие с тем, что слова  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  различны. Таким образом, мы показали, что единственно возможной ситуацией является случай, когда  $m = 1$  и  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{t}$ . Следовательно, тождество  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$ . Тогда это многообразие удовлетворяет и тождеству  $x^2 \approx x^3$ , что невозможно, так как  $\mathbf{V}$  содержит нетривиальную группу.  $\square$

*Доказательство теоремы 4.3.* Импликация (ii)  $\longrightarrow$  (i) очевидна. Нам остается доказать импликации (i)  $\longrightarrow$  (iii) и (iii)  $\longrightarrow$  (ii).

(i)  $\longrightarrow$  (iii) Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное многообразие моноидов, являющееся модулярным

и верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ . Согласно предложению 4.4, многообразие  $\mathbf{V}$  либо вполне регулярно, либо коммутативно. Из леммы 4.6 вытекает, что если  $\mathbf{V}$  вполне регулярно, то оно коммутативно. Таким образом,  $\mathbf{V}$  в любом случае коммутативно. Учитывая лемму 4.7, получаем, что многообразие  $\mathbf{V}$  является аperiodическим, а значит, по лемме 1.12, удовлетворяет тождеству вида  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n$ . Из предложения 1.13 вытекает теперь, что  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$  и  $\mathbf{M}(x^m)$  для некоторого  $1 \leq m < n$ . Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что если  $m > 1$ , то

$$(\mathbf{M}(x^m) \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+) \subset (\mathbf{M}(x^m) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+)) \wedge \mathbf{B}_{2,3}.$$

В самом деле,  $(\mathbf{M}(x^m) \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+) \subseteq (\mathbf{M}(x^m) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+)) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ . Покажем, что это включение строгое. Поскольку  $M(x) \in \mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ , мы имеем, что  $(\mathbf{M}(x^m) \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+) = \mathbf{M}(x) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+) = \mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ . Таким образом, нам нужно показать, что  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \subset (\mathbf{M}(x^m) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+)) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ . Для этого достаточно установить, что в  $(\mathbf{M}(x^m) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+)) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$  не выполнено тождество (1.4). В противном случае существует последовательность различных слов  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  такая, что  $\mathbf{v}_0 = xux$ ,  $\mathbf{v}_k = xux^2$  и для любого  $0 \leq i < k$  тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{B}_{2,3}$ , либо в  $\mathbf{M}(x^m) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ . Рассмотрим тождество  $xux \approx \mathbf{v}_1$ . Очевидно, что оно не выполнено в многообразии  $\mathbf{B}_{2,3}$ , так как  $xux$  является изотермом для  $\mathbf{B}_{2,3}$ . С другой стороны, это тождество выполняется в  $\mathbf{M}(x^m)$  тогда и только тогда, когда оно следует из коммутативности. Это означает, что  $\mathbf{v}_1 \in \{x^2u, ux^2\}$ . В любом из возможных двух случаев для  $\mathbf{v}_1$  тождество  $xux \approx \mathbf{v}_1$  не выполнено в  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+)$ . Таким образом, многообразие  $(\mathbf{M}(x^m) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+)) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$  не удовлетворяет тождеству (1.4), откуда  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \subset (\mathbf{M}(x^m) \vee \mathbf{M}_\lambda(xux^+)) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ . Таким образом, случай, когда  $m \geq 2$ , невозможен. Следовательно,  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$  и  $\mathbf{M}(x)$ .

(iii)  $\longrightarrow$  (ii) Ввиду теоремы 4.1, многообразия  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$  и  $\mathbb{M}\text{on}$  являются нейтральными, а значит и костандартными элементами решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ . Нам остается показать, что костандартным элементом этой решетки является также многообразие  $\mathbf{M}(x)$ .

Нетрудно проверить, что элемент решетки является костандартным тогда и только тогда, когда он является модулярным и кодистрибутивным. Это утверждение легко следует, например, из [42, теорема 253] или [?, предложение 1.7]. Ввиду указанного факта и предложения 4.5, достаточно доказать, что  $\mathbf{M}(x)$  является модулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ . Предположим противное. Тогда из [55, предложение 2.1] вытекает, что существуют многообразия  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$  такие, что  $\mathbf{U} \subset \mathbf{W}$ ,  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{M}(x) = \mathbf{W} \wedge \mathbf{M}(x)$  и  $\mathbf{U} \vee \mathbf{M}(x) = \mathbf{W} \vee \mathbf{M}(x)$ . Если  $\mathbf{M}(x) \subseteq \mathbf{U}$ , то  $\mathbf{W} \wedge \mathbf{M}(x) = \mathbf{U} \wedge \mathbf{M}(x) = \mathbf{M}(x)$ , откуда  $\mathbf{M}(x) \subseteq \mathbf{W}$ . Но тогда  $\mathbf{U} = \mathbf{M}(x) \vee \mathbf{U} = \mathbf{M}(x) \vee \mathbf{W} = \mathbf{W}$ , что противоречит выбору  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$ . Таким образом,  $\mathbf{M}(x) \not\subseteq \mathbf{U}$ . Аналогично проверяется, что  $\mathbf{M}(x) \not\subseteq \mathbf{W}$ . Тогда из леммы 1.11 следует, что многообразия  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$  вполне регулярны.

Предположим сначала, что  $\mathbf{U}$  есть многообразие групп. Тогда  $M(1) \notin \mathbf{U}$ . Если  $\mathbf{W}$  не является групповым многообразием, то из леммы 1.10 следует, что  $M(1) \in \mathbf{W}$ . Тогда  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{M}(x) = \mathbf{T}$ , но  $M(1) \in \mathbf{W} \wedge \mathbf{M}(x)$ . Получаем противоречие с равенством  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{M}(x) = \mathbf{W} \wedge \mathbf{M}(x)$ . Таким образом,  $\mathbf{W}$  является многообразием групп. В [101, лемма 1.4] доказано, что если  $\mathbf{X}$  — аperiodическое многообразие полугрупп, а  $\mathbf{G}$  — многообразие периодических групп,

то  $\mathbf{G}$  является наибольшим групповым подмногообразием в  $\mathbf{G} \vee \mathbf{X}$ . Учитывая этот факт и предложение 1.9, мы получаем, что наибольшим групповым подмногообразием многообразия  $\mathbf{U} \vee \mathbf{M}(x)$  является многообразие  $\mathbf{U}$ . Но это невозможно, так как  $\mathbf{W}$  является многообразием групп и  $\mathbf{U} \subset \mathbf{W} \subset \mathbf{W} \vee \mathbf{M}(x) = \mathbf{U} \vee \mathbf{M}(x)$ . Мы видим, что  $\mathbf{U}$  не является многообразием групп. Тогда, в силу леммы 1.10,  $M(1) \in \mathbf{U}$ . Но в этом случае  $M(1) \in \mathbf{U} \wedge \mathbf{M}(x) = \mathbf{W} \wedge \mathbf{M}(x) \subseteq \mathbf{W}$  и потому  $\mathbf{W}$  также не является групповым многообразием. Поскольку  $\mathbf{U}$  вполне регулярно, оно удовлетворяет тождеству  $x \approx x^{n+1}$  для некоторого натурального  $n$ . Пусть  $n$  — наименьшее число с таким свойством, а  $\Sigma$  — базис тождеств многообразия  $\mathbf{U}$ . Обозначим через  $\psi$  подстановку, отображающую каждую букву  $x$  в слово  $x^{n+1}$ . Положим

$$\hat{\Sigma} := \{\psi(\mathbf{u}) \approx \psi(\mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Sigma\}.$$

Очевидно, что  $\mathbf{U} = \text{var}\{x \approx x^{n+1}, \hat{\Sigma}\}$ . Если  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q} \in \hat{\Sigma}$ , то из леммы 1.10 следует, что  $\text{alph}(\mathbf{p}) = \text{alph}(\mathbf{q})$ . Легко видеть, что все тождества из  $\hat{\Sigma}$  выполнены в  $\mathbf{M}(x)$ . Принимая во внимание, что  $\mathbf{U} \vee \mathbf{M}(x) = \mathbf{W} \vee \mathbf{M}(x)$ , получаем, что многообразие  $\mathbf{W}$  также удовлетворяет системе тождеств  $\hat{\Sigma}$ . Поскольку  $\mathbf{M}(x)$  удовлетворяет тождеству  $x^2 \approx x^3$ , а  $\mathbf{U}$  — тождеству  $x \approx x^{n+1}$ , в многообразии  $\mathbf{U} \vee \mathbf{M}(x) = \mathbf{W} \vee \mathbf{M}(x)$  выполнено тождество  $x^2 \approx x^{n+2}$ . Принимая во внимание, что  $\mathbf{W}$  вполне регулярно, получаем, что в  $\mathbf{W}$  выполнено тождество  $x \approx x^{n+1}$ . Из сказанного следует, что  $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$ , что противоречит выбору  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$ . Таким образом, мы доказали, что  $\mathbf{M}(x)$  является модулярным элементом решетки  $\text{Мон}$ .  $\square$

### § 4.3. Сократимые элементы

Основным результатом данного параграфа является следующее описание сократимых элементов решетки  $\text{Мон}$ .

**Теорема 4.8.** *Многообразие моноидов  $\mathbf{V}$  является сократимым элементом решетки  $\text{Мон}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$ ,  $\mathbf{M}(x)$ ,  $\mathbf{M}(xy)$  и  $\text{Мон}$ .*

Чтобы доказать эту теорему нам потребуется следующее необходимое условие модулярности элемента в решетке  $\text{Мон}$ , представляющее определенный самостоятельный интерес.

**Предложение 4.9.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное многообразие моноидов, являющееся модулярным элементом решетки  $\text{Мон}$ . Тогда многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $x^2 \approx x^3$  и  $x^2y \approx yx^2$ .*

Чтобы доказать это предложение, нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

**Лемма 4.10.** *Пусть*

$$\mathbf{p} := y^2xt^2z^2y^2t^2xz^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{q} := y^2xt^2z^2xy^2t^2xz^2.$$

Тогда множество  $W := W_1 \cup W_2$ , где

$$W_1 := \{y^{r_1}xt^{r_2}z^{r_3}y^{r_4}t^{r_5}xz^{r_6} \mid r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 \geq 2\},$$

$$W_2 := \{y^{r_1}xt^{r_2}z^{r_3}xy^{r_4}t^{r_5}xz^{r_6} \mid r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 \geq 2\},$$

является  $\text{FIC}(\text{var}\{\mathbf{p} \approx \mathbf{q}\})$ -классом.

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в многообразии  $\text{var}\{\mathbf{p} \approx \mathbf{q}\}$  такое, что  $\mathbf{u} \in W$ . Требуется установить, что  $\mathbf{v} \in W$ . Согласно предложению 1.1, существует последовательность слов  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  такая, что  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}_m = \mathbf{v}$  и для каждого  $i = 0, 1, \dots, m-1$  тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ . Иными словами, существуют слова  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in X^*$  и подстановка  $\varphi_i: X \rightarrow X^*$  такие, что  $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i\varphi_i(\mathbf{s}_i)\mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{a}_i\varphi_i(\mathbf{t}_i)\mathbf{b}_i$ , где  $\{\mathbf{s}_i, \mathbf{t}_i\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ . В силу тривиальной индукции по  $m$ , достаточно рассмотреть случай, когда  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{t})\mathbf{b}$  для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^*$ , где  $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ .

Поскольку любое подслово слова  $\mathbf{u}$  вида  $ab$ , где  $a$  и  $b$  — различные буквы, может входить в  $\mathbf{u}$  не более одного раза, и все буквы, входящие в слово  $\mathbf{s}$  являются кратными, справедливо следующее утверждение:

(I) для любой буквы  $a \in \text{alph}(\mathbf{s})$ , либо  $\varphi(a) = 1$ , либо слово  $\varphi(a)$  является степенью буквы.

Далее, поскольку  $\text{occ}_x(\mathbf{u}) \leq 3$  и  $\text{occ}_y(\mathbf{s}) = \text{occ}_z(\mathbf{s}) = \text{occ}_t(\mathbf{s}) = 4$ , получаем, что

(II)  $x \notin \text{alph}(\varphi(yzt))$ .

Заметим, что если  $\varphi(\mathbf{s}) = 1$  или  $\varphi(\mathbf{s})$  является степенью буквы, то требуемое утверждение очевидно. Поэтому мы можем считать, что

(III)  $|\text{alph}(\varphi(\mathbf{s}))| \geq 2$ .

Пусть  $\mathbf{u} = y^{\ell_1}xt^{\ell_2}z^{\ell_3}x^c y^{\ell_4}t^{\ell_5}xz^{\ell_6}$ , где  $c \in \{0, 1\}$  и  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6 \geq 2$ . Положим

$$d := \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{s} = \mathbf{p}, \\ 1, & \text{если } \mathbf{s} = \mathbf{q}. \end{cases}$$

Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{s}) = \varphi(\mathbf{t})$ , откуда  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in W$ . Поэтому далее остается рассмотреть случай, когда  $\varphi(x) \neq 1$ . Тогда из условия (I) следует, что  $\varphi(x)$  является степенью некоторой буквы.

Предположим, что  $\varphi(x)$  есть степень буквы  $y$ . Тогда из условия (III) следует, что множество  $\text{alph}(\varphi(t^2z^2x^d y^2 t^2))$  содержит одну из букв  $x, z$  и  $t$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $\varphi(t^2z^2x^d y^2 t^2) = y^p x t^{\ell_2} z^{\ell_3} x^c y^q$  для некоторых  $0 \leq p \leq \ell_1$  и  $0 \leq q \leq \ell_4$ . Однако, поскольку  $x \notin \{t\} = \text{alph}(\varphi(x))$ , и  $x \notin \text{alph}(\varphi(yzt))$  по условию (II), выводим противоречие  $x \notin \text{alph}(\varphi(t^2z^2x^d y^2 t^2))$ . Следовательно,  $\varphi(x)$  не может быть степенью буквы  $y$ . Рассуждая аналогично можно убедиться, что  $\varphi(x)$  не может быть степенью и буквы  $z$ .

Предположим теперь, что  $\varphi(x)$  есть степень буквы  $t$ . Тогда из условия (III) следует, что множество  $\text{alph}(\varphi(t^2z^2x^d y^2 t^2))$  содержит одну из букв  $x, y$  и  $z$ . Это возможно лишь в том

случае, когда  $\varphi(t^2z^2x^dy^2t^2) = t^p z^{\ell_3} x^c y^{\ell_4} t^q$  для некоторых  $0 \leq p \leq \ell_2$  и  $0 \leq q \leq \ell_5$ . Тогда, согласно условию (I), либо  $\varphi(t) = 1$  либо  $\varphi(t)$  есть степень буквы  $t$ . Отсюда вытекает, что  $\varphi(z^2x^dy^2) = z^{\ell_3} x^c y^{\ell_4}$ . Принимая во внимание тот факт, что  $\varphi(x)$  является степенью буквы  $t$ , снова применим условие (I) и получим, что  $\varphi(z^2) = z^{\ell_3}$ ,  $\varphi(y^2) = y^{\ell_4}$  и  $c = d = 0$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $\varphi(xt^2z^2x^d) = y^r x t^{\ell_2} z^{\ell_3} x^c$  для некоторого  $0 \leq r \leq \ell_1$ . Однако поскольку  $x \notin \{t\} = \text{alph}(\varphi(x))$ , и  $x \notin \text{alph}(\varphi(yzt))$  по условию (II), выводим противоречие  $x \notin \text{alph}(\varphi(xt^2z^2x^d))$ . Следовательно,  $\varphi(x)$  не может быть и степенью буквы  $t$ .

Наконец, предположим, что  $\varphi(x)$  есть степень буквы  $x$ . Тогда, поскольку  $x^2$  не является подсловом слова  $\mathbf{u}$ , получаем, что  $\varphi(x) = x$ .

Предположим, что  $c = 0$ . Тогда  $d = 0$  так как  $\text{осс}_x(\mathbf{u}) < \text{осс}_x(\varphi(\mathbf{s}))$  в противном случае.  $\varphi(t^2z^2y^2t^2) = t^{\ell_2} z^{\ell_3} y^{\ell_4} t^{\ell_5}$ . Из условия (I) следует, что  $\varphi(z^2) = z^{\ell_3}$ ,  $\varphi(y^2) = y^{\ell_4}$  и  $\varphi(t^2) = t^{\ell_2} = t^{\ell_5}$ . Тогда  $\varphi(\mathbf{s}) = y^{\ell_4} x t^{\ell_2} z^{\ell_3} y^{\ell_4} t^{\ell_5} x z^{\ell_3}$ ,  $\mathbf{a} = y^{\ell_1 - \ell_4}$  и  $\mathbf{b} = z^{\ell_6 - \ell_3}$ . Следовательно,  $\varphi(\mathbf{t}) = y^{\ell_4} x t^{\ell_2} z^{\ell_3} x y^{\ell_4} t^{\ell_5} x z^{\ell_3}$ , откуда  $\mathbf{v} = y^{\ell_1} x t^{\ell_2} z^{\ell_3} x y^{\ell_4} t^{\ell_5} x z^{\ell_6} \in W$ , что и требовалось показать.

Предположим теперь, что  $c = 1$ . Если  $x \in \text{alph}(\mathbf{b})$ , то  $d = 0$  так как в противном случае  $\text{осс}_x(\mathbf{u}) < \text{осс}_x(\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b})$ . Это возможно лишь в том случае, когда

$$\mathbf{a}\varphi(y^2) = y^{\ell_1}, \quad x\varphi(t^2z^2y^2t^2)x = x t^{\ell_2} z^{\ell_3} x \quad \text{и} \quad \varphi(z^2)\mathbf{b} = y^{\ell_4} t^{\ell_5} x z^{\ell_6}.$$

Из второго равенства вытекает, что  $\varphi(t^2z^2y^2t^2) = t^{\ell_2} z^{\ell_3}$ . Ясно, что  $\varphi(t^2) = 1$ , откуда  $\xi(z^2y^2) = t^{\ell_2} z^{\ell_3}$ . В силу условия (I), имеем, что  $\varphi(z^2) = t^{\ell_2}$  и  $\xi(y^2) = z^{\ell_3}$ . Однако это противоречит тому факту, что  $\varphi(z^2)\mathbf{b} = z^{\ell_4} t^{\ell_5} x z^{\ell_6}$ . Следовательно,  $x \notin \text{alph}(\mathbf{b})$ . Аналогичным образом можно проверить, что  $x \notin \text{alph}(\mathbf{a})$ . Отсюда вытекает, что  $d = 1$ . Тогда

$$\mathbf{a}\varphi(y^2) = y^{\ell_1}, \quad x\varphi(t^2z^2)x\varphi(y^2t^2)x = x t^{\ell_2} z^{\ell_3} x y^{\ell_4} t^{\ell_5} x \quad \text{и} \quad \varphi(z^2)\mathbf{b} = z^{\ell_6}.$$

Из условия (I) следует, что  $\varphi(z^2) = z^{\ell_3}$ ,  $\varphi(y^2) = y^{\ell_4}$  и  $\varphi(t^2) = t^{\ell_2} = t^{\ell_5}$ . Тогда  $\varphi(\mathbf{s}) = y^{\ell_3} x t^{\ell_2} z^{\ell_3} x y^{\ell_4} t^{\ell_5} x z^{\ell_4}$ ,  $\mathbf{a} = y^{\ell_1 - \ell_3}$  и  $\mathbf{b} = z^{\ell_6 - \ell_4}$ . Следовательно,  $\varphi(\mathbf{t}) = y^{\ell_3} x t^{\ell_2} z^{\ell_3} x y^{\ell_4} t^{\ell_5} x z^{\ell_4}$ , откуда  $\mathbf{v} = y^{\ell_1} x t^{\ell_2} z^{\ell_3} y^{\ell_4} t^{\ell_5} x z^{\ell_6} \in W$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Как обычно, главный идеал решетки  $L$ , порожденный элементом  $a \in L$ , обозначим через  $(a)_L$ . Через  $L_{\text{FIC}}(X^*)$  обозначим решетку всех вполне инвариантных конгруэнций на  $X^*$ . Общеизвестно, что отображение FIC из  $\text{Mon}$  в  $L_{\text{FIC}}(X^*)$ , ставящее в соответствие многообразию  $\mathbf{V}$  вполне инвариантную конгруэнцию  $\text{FIC}(\mathbf{V})$ , является антиизоморфизмом решеток. Для любых  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^+$  положим  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ , если  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{u})\mathbf{b}$  для некоторых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и некоторой подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^+$ . Определенное таким образом отношение  $\preceq$  является отношением квазипорядка на  $X^+$ . Для произвольной антицепи  $A \subseteq X^+$  относительно квазипорядка  $\preceq$  рассмотрим множество  $L_A$  всех многообразий моноидов  $\mathbf{V}$ , для которых  $A$  является объединением  $\text{FIC}(\mathbf{V})$ -классов. Определим отображение  $\varphi_A: L_A \rightarrow \mathfrak{Cq}(A)$  правилом  $\varphi_A(\mathbf{V}) = \text{FIC}(\mathbf{V})|_A$  для любого  $\mathbf{V} \in L_A$ .

**Лемма 4.11** ([11, лемма 2.3]). *Пусть  $A$  — произвольная антицепь в  $X^+$  относительно квазипорядка  $\preceq$  и для любых двух слов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$  и любого непустого множества  $X \subseteq \text{con}(\mathbf{u})$  выполнены равенства  $\text{alph}(\mathbf{u}) = \text{alph}(\mathbf{v})$  и  $\mathbf{u}_X = \mathbf{v}_X$ . Тогда:*

- (i) множество  $L_A$  является подрешеткой решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ ;
- (ii) отображение  $\varphi_A$  является антигомоморфизмом решетки  $L_A$  на решетку  $\mathfrak{Cq}(A)$ ;
- (iii) для любого отношения эквивалентности  $\alpha \in \mathfrak{Cq}(A)$  существует надкоммутативное многообразие моноидов  $\mathbf{V} \in L_A$  такое, что  $\varphi_A(\mathbf{V}) = \alpha$ .  $\square$

**Лемма 4.12.** Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное многообразие моноидов, являющееся модулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ . Тогда многообразие  $\mathbf{V}$  является периодическим.

*Доказательство.* Рассуждая от противного, предположим, что многообразие  $\mathbf{V}$  не является периодическим. Тогда  $\mathbf{V}$  является надкоммутативным многообразием. В это случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $n = \text{occ}_a(\mathbf{u}) = \text{occ}_a(\mathbf{v})$  для всех  $a \in \text{alph}(\mathbf{u}\mathbf{v})$ . Найдутся две различные буквы  $x$  и  $y$  такие, что тождество, полученное из  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  вычеркиванием всех букв, кроме  $x$  и  $y$ , нетривиально. Поэтому можно считать, что слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  зависят только от этих двух букв.

Предположим, что  $\mathbf{LRB} \subseteq \mathbf{V}$ . В силу леммы 1.19, мы можем без ограничения общности считать, что  $\text{ini}(\mathbf{u}) = \text{ini}(\mathbf{v}) = xy$ . Обозначим через  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$  слова, получающиеся из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно заменой местам букв  $x$  и  $y$ . Тогда  $\text{ini}(\mathbf{u}') = \text{ini}(\mathbf{v}') = yx$ . Положим

$$A := \{\mathbf{w} \in \{x, y\}^+ \mid \text{occ}_x(\mathbf{w}) = n + 1, \text{occ}_y(\mathbf{w}) = n\}.$$

Возьмем произвольные  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in A$  и предположим, что  $\mathbf{w} \preceq \mathbf{w}'$ . Это означает, что  $\mathbf{w}' = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w})\mathbf{b}$  для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и некоторой подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^+$ . Поскольку слова  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{w}'$  имеют одинаковую длину, получаем, что  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ . Тогда  $\mathbf{w}' = \varphi(\mathbf{w})$ . Но это возможно лишь в том случае, когда  $\varphi(x) = x$  и  $\varphi(y) = y$ , так как  $\text{occ}_y(\mathbf{w}) < \text{occ}_x(\mathbf{w})$ . Откуда  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ . Таким образом, множество  $A$  образует антицепь относительно квазипорядка  $\preceq$ . Тогда множество  $L_A$  является подрешеткой решетки  $\mathbb{M}\text{on}$  по лемме 4.11(i) и  $\mathbf{V} \in L_A$ .

Ясно, что  $\mathbf{ux}, \mathbf{u}'x, \mathbf{vx}, \mathbf{v}'x \in A$ . Очевидно также, что  $\text{ini}(\mathbf{ux}) = \text{ini}(\mathbf{vx}) = xy$  и  $\text{ini}(\mathbf{u}'x) = \text{ini}(\mathbf{v}'x) = yx$ . В силу леммы 1.19, слова  $\mathbf{ux}$  и  $\mathbf{u}'x$  лежат в различных  $\text{FIC}(\mathbf{V})$ -классах. Тогда, поскольку  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальным тождествам  $\mathbf{ux} \approx \mathbf{vx}$  и  $\mathbf{u}'x \approx \mathbf{v}'x$ , отношение эквивалентности  $\alpha := \varphi(\mathbf{V})$  содержит по крайней мере два неоднородных класса. В [55, предложение 2.2] проверено, что отношение  $\rho \in \mathfrak{Cq}(X)$  является модулярным элементом решетки  $\mathfrak{Cq}(X)$  тогда и только тогда, когда  $\rho$  имеет не более одного неоднородного класса. Из этого результата следует, что отношение  $\alpha$  не является модулярным элементом решетки  $\mathfrak{Cq}(A)$ . Тогда найдутся отношения эквивалентности  $\alpha', \alpha'' \in \mathfrak{Cq}(A)$  такие, что  $\alpha \subset \alpha''$  и

$$(\alpha \wedge \alpha') \vee \alpha'' \subset (\alpha \vee \alpha'') \wedge \alpha'. \quad (4.1)$$

В силу леммы 4.11, можно найти надкоммутативное многообразие  $\mathbf{X} \in L_A$  такое, что  $\varphi(\mathbf{X}) = \alpha'$ . Положим

$$\mathbf{Y} := \mathbf{X} \wedge \text{var}\{\mathbf{w} \approx \mathbf{w}' \mid (\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \alpha''\}.$$

Ясно, что  $\mathbf{Y} \in L_A$  и  $\varphi(\mathbf{Y}) = \alpha''$ . Тогда

$$(\mathbf{V} \wedge \mathbf{X}) \vee \mathbf{Y} \subset (\mathbf{V} \vee \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{X},$$

так как в противном случае включение (4.1) будет нарушаться. Мы видим, что многообразие  $\mathbf{V}$  не является модулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ , что противоречит условию леммы.

Предложим теперь, что  $\mathbf{LRB} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Тогда лемма 1.19 позволяет считать, что слово  $\mathbf{u}$  начинается с буквы  $x$ , а слово  $\mathbf{v}$  — с буквы  $y$ . Положим

$$\mathbf{Z} := \text{var}\{x^{n+1} \approx x^{n+2}, x^n \mathbf{v} \approx x^{n+1} \mathbf{v}\}.$$

Заметим, что  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_{n+1, n+2} \subseteq \mathbf{Z}$ . В самом деле, в многообразии  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_{n+1, n+2}$  выполнены тождества

$$x^n \mathbf{v} \approx x^n \mathbf{u} \approx x^{n+1} \mathbf{u} \approx x^{n+1} \mathbf{v}.$$

Ясно, что слово  $x^n \mathbf{v}$  является изотермом для обоих многообразий  $\mathbf{V} \vee \mathbf{Z}$  и  $\mathbf{B}_{n+1, n+2}$ . Откуда следует, что слово  $x^n \mathbf{v}$  есть изотерм и для многообразия  $(\mathbf{V} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{B}_{n+1}$ . Однако это слово не является изотермом для многообразия  $\mathbf{Z}$ , так как  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет тождеству  $x^n \mathbf{v} \approx x^{n+1} \mathbf{v}$ . Следовательно,

$$(\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_{n+1, n+2}) \vee \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \subset (\mathbf{V} \vee \mathbf{Z}) \wedge \mathbf{B}_{n+1, n+2}.$$

Это означает, что  $\mathbf{V}$  не является модулярным элементом решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ , что противоречит условию леммы.  $\square$

Следующая лемма обобщает предложение 3.43(i).

**Лемма 4.13.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие, содержащее многообразие  $\mathbf{M}_\gamma(uxx^+)$ . Предположим, что существует такое  $n \geq 2$ , что  $\mathbf{V}$  не содержит многообразия  $\mathbf{M}(x^n)$ . Положим

$$\mathbf{X} := (\mathbf{V} \vee \mathbf{M}(x^n)) \wedge \text{var}\{x^k y \approx yx^k \mid k > n\},$$

$$\mathbf{Y} := (\mathbf{V} \vee \mathbf{M}(x^n)) \wedge \text{var}\{x^k y \approx yx^k \mid k \geq n\}.$$

Тогда  $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$  и многообразия  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  порождают 5-элементную немодулярную подрешетку решетки  $\mathbb{M}\text{on}$ . В частности, многообразие  $\mathbf{V}$  не является модулярным элементом в  $\mathbb{M}\text{on}$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ . Проверим, что это включение строгое. Если тождество  $ux^n \approx \mathbf{w}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{M}(x^n)$ , то оно должно быть следствием коммутативности. Отсюда и из включения  $\mathbf{M}(uxx^+) \subseteq \mathbf{V}$  вытекает, что слово  $ux^n$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{V} \vee \mathbf{M}(x^n)$ . Из леммы 1.3 следует, что  $M(ux^n) \in \mathbf{V} \vee \mathbf{M}(x^n)$ . Очевидно, что  $M(ux^n)$  удовлетворяет тождеству  $x^k y \approx yx^k$  при  $k > n$ . Отсюда вытекает, что  $M(ux^n) \in \mathbf{X}$ . При этом  $M(ux^n) \notin \mathbf{Y}$ , поскольку в моноиде  $M(ux^n)$  не выполнено тождество  $x^n y \approx yx^n$ . Таким образом,  $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ .

Поскольку  $M(x^n) \notin \mathbf{V}$ , из леммы 1.3 легко следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $x^n \approx x^{n+m}$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ . Отсюда и из сказанного в предыдущем абзаце следует, что в

многообразии  $\mathbf{V}$  не выполнено тождество  $x^{n+m}y \approx ux^{n+m}$ . Следовательно, это тождество не выполнено и в  $\mathbf{V} \vee \mathbf{M}(x^n)$ , откуда  $\mathbf{X} \subset \mathbf{V} \vee \mathbf{M}(x^n)$ .

Очевидно, что  $\mathbf{V} \vee \mathbf{X} = \mathbf{V} \vee \mathbf{M}(x^n) = \mathbf{V} \vee \mathbf{Y}$ . Для завершения доказательства леммы нам остается установить, что  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}$ . Действительно, многообразии  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $x^n y \approx ux^n$ , поскольку это тождество является следствием тождеств  $x^n \approx x^{n+m}$  и  $x^{n+m}y \approx ux^{n+m}$ , откуда следует требуемое равенство.  $\square$

*Доказательство предложения 4.9.* В силу леммы 4.12, многообразии  $\mathbf{V}$  является периодическим и потому удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+m}$  для некоторых  $n, m \in \mathbb{N}$ ; мы можем считать, что  $n$  и  $m$  являются наименьшими возможными числами с таким свойством.

Предположим сначала, что  $n = 1$ . Тогда, по лемме 1.11, многообразии  $\mathbf{V}$  является вполне регулярным. В этом случае из лемм 4.6 и 4.7 следует, что многообразии  $\mathbf{V}$  состоит из коммутативных аperiodических моноидов. Поскольку  $\mathbf{V}$  является также вполне регулярным многообразием, оно идемпотентно. Очевидно, что любое такое многообразие удовлетворяет тождествам  $x^2 \approx x^3$  и  $x^2y \approx ux^2$ .

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $n > 1$ . В этом случае  $M(x^{n-1}) \notin \mathbf{V}$ , но  $M(x^n) \in \mathbf{V}$ . Из леммы 4.13 и двойственного к ней утверждения вытекает, что  $M_\gamma(uxx^+) \notin \mathbf{V}$  и  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, в силу леммы 1.27 и двойственного к ней утверждения,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^k y \approx ux^k$  для некоторого  $k \geq n$ . Отсюда следует, что в пересечении  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_{2,3}$  выполнено тождество  $x^2y \approx ux^2$ . В этом случае легко видеть, что в  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_{2,3}$  выполнено тождество  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ , где

$$\mathbf{p} := y^2xt^2z^2y^2t^2xz^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{q} := y^2xt^2z^2xy^2t^2xz^2.$$

Иными словами,  $(\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{M} = \mathbf{M}$ , где  $\mathbf{M} := \text{var}\{\mathbf{p} \approx \mathbf{q}\}$ .

Предположим, что  $n > 2$  или  $m > 1$ . Рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{V} \vee \mathbf{M}$  такое, что

$$\mathbf{a} \in W_1 := \{y^{r_1}xt^{r_2}z^{r_3}y^{r_4}t^{r_5}xz^{r_6} \mid r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 \geq 2\}.$$

Если  $n > 2$ , то  $\text{occ}_x(\mathbf{b}) = 2$  и тогда, в силу леммы 4.10,  $\mathbf{b} \in W_1$ . Далее, ясно, что  $\mathbf{A}_m \subseteq \mathbf{V}$ . Хорошо известно и легко проверяется, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  выполнено в многообразии  $\mathbf{A}_m$  тогда и только тогда, когда  $\text{occ}_a(\mathbf{w}) \equiv \text{occ}_a(\mathbf{w}') \pmod{m}$  для любой буквы  $a \in X$ . Отсюда и из леммы 4.10 следует, что если  $m > 1$ , то  $\mathbf{b} \in W_1$ . Мы видим, что если  $n > 2$  или  $m > 1$ , то  $\mathbf{b} \in W_1$ . Очевидно, что множество  $W_1$  является стабильным относительно многообразия  $\mathbf{B}_{2,3}$ . Отсюда вытекает стабильность этого множества относительно пересечения  $(\mathbf{V} \vee \mathbf{M}) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ . В частности, из сказанного следует, что в многообразии  $(\mathbf{V} \vee \mathbf{M}) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$  нарушается тождество  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ . Следовательно,

$$(\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{M} = \mathbf{M} \subset (\mathbf{V} \vee \mathbf{M}) \wedge \mathbf{B}_{2,3}.$$

Это означает, что многообразии  $\mathbf{V}$  не является модулярным элементом решетки  $\text{Mon}$ . Отсюда вытекает, что  $n = 2$  и  $m = 1$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^2 \approx x^3$ . Кроме того, поскольку в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $x^k y \approx ux^k$ , это многообразие удовлетворяет и тождеству  $x^2y \approx ux^2$ , что и требовалось доказать.  $\square$

*Доказательство теоремы 4.8. Необходимость.* Пусть  $\mathbf{V}$  есть собственное многообразие моноидов, являющееся сократимым элементом решетки  $\mathbf{Mon}$ . Поскольку любой сократимый элемент решетки является ее модулярным элементом, из предложения 4.9 вытекает, что многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $x^2 \approx x^3$  и  $x^2y \approx yx^2$ . Если  $M(xux) \in \mathbf{V}$ , то из предложения 3.42 и того факта, что  $M(x^2) \notin \mathbf{V}$  следует, что  $\mathbf{V} \vee \mathbf{M}(x^2y) = \mathbf{V} \vee \mathbf{M}(yx^2)$  и  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}(x^2y) = \mathbf{V} \wedge \mathbf{M}(yx^2) = \mathbf{M}(xux)$ . Но это противоречит предположению о том, что  $\mathbf{V}$  — сократимый элемент решетки  $\mathbf{Mon}$ . Поэтому  $M(xux) \notin \mathbf{V}$ . В этом случае из леммы 1.26 следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет либо тождеству  $xux \approx xux^2$ , либо тождеству  $xux \approx x^2ux$ . Тогда в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $x^2y \approx xux$  и  $yx^2 \approx xux$ . В силу леммы 3.1 и леммы 4.5(ii) в [50],  $\mathbf{V} \in \{\mathbf{T}, \mathbf{M}(1), \mathbf{M}(x), \mathbf{M}(xy)\}$ , что и требовалось доказать.

*Достаточность.* Поскольку всякий костандартный элемент решетки является ее сократимым элементом, из теоремы 4.3 следует, что многообразия  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}(1)$ ,  $\mathbf{M}(x)$  и  $\mathbf{Mon}$  суть сократимые элементы решетки  $\mathbf{Mon}$ . Таким образом, остается установить сократимость для многообразия  $\mathbf{M}(xy)$ .

Заметим сначала, что  $\mathbf{M}(xy)$  является модулярным элементом решетки  $\mathbf{Mon}$ . Рассуждая от противного, предположим, что многообразие  $\mathbf{M}(xy)$  не является модулярным элементом этой решетки. Тогда из [55, предложение 2.1] следует, что существуют многообразия  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$  такие, что  $\mathbf{U} \subset \mathbf{W}$ , и эти многообразия порождают совместно с  $\mathbf{M}(xy)$  5-элементную немодулярную подрешетку в  $\mathbf{Mon}$ . Ясно, что  $\mathbf{M}(xy) \not\subseteq \mathbf{U}$  и  $\mathbf{M}(xy) \not\subseteq \mathbf{W}$ . В силу леммы 1.25, многообразие  $\mathbf{W}$  либо коммутативно, либо вполне регулярно. Однако многообразие многообразия  $\mathbf{W}$  не может быть коммутативным по предложению 4.5. Поэтому  $\mathbf{W}$  вполне регулярно. Тогда  $\mathbf{U}$  также обладает этим свойством. Далее рассуждения практически дословно повторяют рассуждения из последнего абзаца доказательства теоремы 4.3 и потому мы опускаем их. Таким образом, будем считать модулярность элемента  $\mathbf{M}(xy)$  доказанной.

Пусть теперь  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — произвольные многообразия моноидов такие, что  $\mathbf{M}(xy) \vee \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \vee \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{Y}$ . Если  $M(xy) \in \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{M}(xy) = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{Y}$ , т.е.  $M(xy) \in \mathbf{Y}$ , откуда  $\mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \vee \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \vee \mathbf{Y} = \mathbf{Y}$ . Следовательно, с учетом симметрии мы можем считать, что  $M(xy) \notin \mathbf{X}$  и  $M(xy) \notin \mathbf{Y}$ .

Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xy))$  образует цепь  $\mathbf{T} \subset \mathbf{M}(1) \subset \mathbf{M}(x) \subset \mathbf{M}(xy)$ ; см. рис. 3.1. Отсюда вытекает, что  $\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{Y} \in \{\mathbf{T}, \mathbf{M}(1), \mathbf{M}(x)\}$ . Если  $\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{T}$ , то  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  суть многообразия групп по лемме 1.10. Тогда  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  также является многообразием групп и потому  $\mathbf{M}(1) \notin \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ , откуда

$$\mathbf{M}(xy) \wedge (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{Y}. \quad (4.2)$$

Если  $\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{M}(1)$ , то  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  суть вполне регулярные многообразия по лемме 1.11. Тогда  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  снова является вполне регулярным многообразием и потому  $\mathbf{M}(x) \notin \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ , откуда получаем равенство (4.2). Наконец, если  $\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{M}(x)$ , то  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — коммутативные многообразия по лемме 1.25. Тогда многообразие  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  также является коммутативным и потому  $M(xy) \notin \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ , откуда снова получаем равенство (4.2). Итак, мы показали, что равенство (4.2) справедливо в любом случае.

Далее, ясно, что

$$\mathbf{M}(xy) \vee (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) = \mathbf{M}(xy) \vee \mathbf{X} = \mathbf{M}(xy) \vee \mathbf{Y}. \quad (4.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X}) \vee \mathbf{X} && \text{так как } \mathbf{M}(xy) \wedge \mathbf{X} \subset \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{M}(xy) \wedge (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})) \vee \mathbf{X} && \text{в силу (4.2)} \\ &= (\mathbf{M}(xy) \vee \mathbf{X}) \wedge (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) && \text{так как } \mathbf{M}(xy) \text{ — модулярный элемент} \\ &= (\mathbf{M}(xy) \vee (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})) \wedge (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) && \text{в силу (4.3)} \\ &= (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) && \text{так как } \mathbf{X} \vee \mathbf{Y} \subset \mathbf{M}(xy) \vee (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}). \end{aligned}$$

Мы видим, что  $\mathbf{X} = \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ . В силу симметрии,  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ , откуда  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ . Следовательно, многообразие  $\mathbf{M}(xy)$  является сократимым элементом решетки  $\mathbf{Mon}$ .  $\square$

## Глава 5

# Минимальные моноиды, порождающие многообразия со сложной решеткой подмногообразий

Данная глава посвящена изучению моноидов малых порядков, порождающих многообразия со сложной решеткой подмногообразий. В § 5.1 рассматривается условие сложности связанное с континуальностью решетки подмногообразий, а в § 5.2 — с вложимостью в решетку подмногообразий любой конечной решетки.

### § 5.1. Минимальные моноиды, порождающие многообразия с континуумом подмногообразий

#### 5.1.1. Основной результат

Как мы уже упоминали во введении, в 2018 году М.Джексон и Э.Ли [51] показали, что 6-элементный моноид Брандта  $B_2^1$  порождает многообразие с континуумом подмногообразий. Чуть раньше Э.Ли и В.Жанг [74] установили, что с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма любой не более чем 5-элементный моноид, за исключением моноида  $P_2^1$ , порождает многообразие с конечным числом подмногообразий. В предложении 5.24 ниже мы доказываем, что многообразии  $\mathbf{P}_2^1$  содержит счетное число подмногообразий и, тем самым, получаем следующий основной результат данного параграфа.

**Теорема 5.1.** *Наименьший порядок моноида, порождающего многообразие с континуумом подмногообразий равен 6.* □

В разделах 5.1.2 и 5.1.3 мы приводим ряд обозначений, определений и вспомогательных результатов, которые потребуются в разделе 5.1.4 для описания решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{P}_2^1)$ , а также в разделе 5.1.5, в котором мы приводим пример 6-элементного моноида, порождающего многообразие с континуумом подмногообразий, но не содержащего моноид Брандта  $B_2^1$ .

### 5.1.2. $k$ -разложение слова и связанные с ним понятия

В этом разделе мы введем ряд понятий, связанных со словами, и изучим их свойства. Часть из них появилась в кандидатской диссертации автора [11, раздел 1.2], сыграв ключевую роль в описании цепных многообразий апериодических моноидов.

Пусть  $\mathbf{w}$  — слово. Предположим, что  $\text{sim}(\mathbf{w}) = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $\mathbf{w}(t_1, t_2, \dots, t_m) = t_1 t_2 \cdots t_m$ . Тогда слово  $\mathbf{w}$  можно представить в виде  $t_0 \mathbf{w}_0 t_1 \mathbf{w}_1 \cdots t_m \mathbf{w}_m$ , где  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  — некоторые (возможно пустые) слова, а  $t_0 := 1$ . Слова  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  назовем  $0$ -блоками слова  $\mathbf{w}$ , а  $t_0, t_1, \dots, t_m$  —  $0$ -разделителями этого слова. Представление слова  $\mathbf{w}$  в виде произведения чередующихся  $0$ -разделителей и  $0$ -блоков, начиная с  $0$ -разделителя  $t_0$  и заканчивая  $0$ -блоком  $\mathbf{w}_m$ , будем называть  $0$ -разложением слова  $\mathbf{w}$ .<sup>1</sup>

Пусть  $k$  — натуральное число. Определим  $k$ -разложение слова  $\mathbf{w}$  индукцией по  $k$ . Пусть  $t_0 \mathbf{w}_0 t_1 \mathbf{w}_1 \cdots t_m \mathbf{w}_m$  —  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{w}$  с  $(k-1)$ -блоками  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  и  $(k-1)$ -разделителями  $t_0, t_1, \dots, t_m$ . Для каждого  $i = 0, 1, \dots, m$  обозначим через  $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ir_i}$  все простые буквы  $(k-1)$ -блока  $\mathbf{w}_i$ , не входящие в запись слова  $\mathbf{w}_0 t_1 \mathbf{w}_1 \cdots t_{i-1} \mathbf{w}_{i-1}$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $\mathbf{w}_i(s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ir_i}) = s_{i1} s_{i2} \cdots s_{ir_i}$ . Тогда

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_{i0} s_{i1} \mathbf{v}_{i1} s_{i2} \mathbf{v}_{i2} \cdots s_{ir_i} \mathbf{v}_{ir_i} \quad (5.1)$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{v}_{i0}, \mathbf{v}_{i1}, \dots, \mathbf{v}_{ir_i}$ . Положим  $s_{i0} := t_i$ . Слова  $\mathbf{v}_{i0}, \mathbf{v}_{i1}, \dots, \mathbf{v}_{ir_i}$  назовем  $k$ -блоками слова  $\mathbf{w}$ , а буквы  $s_{i0}, s_{i1}, \dots, s_{ir_i}$  —  $k$ -разделителями этого слова.

Как отмечается в [11, замечание 1.20], только первое вхождение буквы в слово может быть  $k$ -разделителем этого слова. Поэтому мы будем использовать ниже выражения вида «буква  $x$  является (или не является)  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ », имея в виду, что первое вхождение буквы  $x$  в  $\mathbf{w}$  обладает указанным свойством.

Для каждого  $i = 0, 1, \dots, m$  представим  $(k-1)$ -блок  $\mathbf{w}_i$  в виде (5.1). В результате мы получим представление слова  $\mathbf{w}$  в виде произведения чередующихся  $k$ -разделителей и  $k$ -блоков, начиная с  $k$ -разделителя  $s_{00} = t_0$  и заканчивая  $k$ -блоком  $\mathbf{v}_{mr_m}$ . Такое представление назовем  $k$ -разложением слова  $\mathbf{w}$ .

**Лемма 5.2** ([11, замечание 1.21]). *Для любого слова  $\mathbf{w} \in X^+$ , существует такое число  $k$ , что  $k$ -разложение слова  $\mathbf{w}$  совпадает с  $n$ -разложением этого слова для всех  $n > k$ .  $\square$*

Будем говорить, что  $k$ -разложение слова  $\mathbf{w}$  является *максимальным*, если оно совпадает с  $n$ -разложением этого слова для любого  $n > k$ .

Для данного слова  $\mathbf{w}$ , буквы  $x \in \text{alph}(\mathbf{w})$ , натурального числа  $i \leq \text{occ}_x(\mathbf{w})$  и  $k \geq 0$ , обозначим через  $h_i^k(\mathbf{w}, x)$  самый правый  $k$ -разделитель слова  $\mathbf{w}$ , предшествующий  $i$ -му вхождению  $x$  в  $\mathbf{w}$ .

<sup>1</sup>Отметим, что  $0$ -разложение слова  $\mathbf{w}$ , по сути, является ничем иным как обычным разложением слова  $\mathbf{w}$  (если не брать в расчет появление нового «фиктивного» разделителя  $t_0$ ), а блоки слова  $\mathbf{w}$  являются в точности  $0$ -блоками этого слова.

Для данного слова  $\mathbf{w}$  и буквы  $x \in \text{alph}(\mathbf{w})$  определим некоторое число, которое назовем *глубиной* буквы  $x$  в слове  $\mathbf{w}$ , и обозначим его через  $D(\mathbf{w}, x)$ . Если  $x \in \text{sim}(\mathbf{w})$ , то положим  $D(\mathbf{w}, x) := 0$ . Предположим, что  $x \in \text{mul}(\mathbf{w})$ . Если найдется такое натуральное  $k$ , что первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{w}$  лежат в различных  $(k-1)$ -блоках слова  $\mathbf{w}$ , то глубину буквы  $x$  в слове  $\mathbf{w}$  положим равной наименьшему числу с таким свойством. Если же для любого  $k$  первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{w}$  лежат в одном и том же  $k$ -блоке слова  $\mathbf{w}$ , то положим  $D(\mathbf{w}, x) := \infty$ . Иными словами,  $D(\mathbf{w}, x) = k$  тогда и только тогда, когда  $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$  и  $k$  — наименьшее число с таким свойством, а  $D(\mathbf{w}, x) = \infty$  тогда и только тогда, когда  $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x) = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$  для любого  $k$ .

**Лемма 5.3** ([11, лемма 1.26]). *Буква  $t$  является  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$  тогда и только тогда, когда  $D(\mathbf{w}, t) \leq k$ .*  $\square$

**Лемма 5.4** ([11, лемма 1.28]). *Пусть  $k$  — натуральное число,  $\mathbf{w}$  — слово,  $x$  — кратная в нем буква, а  $t$  —  $(k-1)$ -разделитель этого слова. Предположим, что  $D(\mathbf{w}, x) = k$ .*

(i) *Если  $t = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$ , то  $(1\mathbf{w}x) < (1\mathbf{w}t)$ .*

(ii) *Если  $(1\mathbf{w}x) < (1\mathbf{w}t) < (2\mathbf{w}x)$ , то  $D(\mathbf{w}, t) = k-1$ ; если, кроме того,  $k > 1$ , то  $(2\mathbf{w}x) < (2\mathbf{w}t)$ .*  $\square$

**Лемма 5.5** ([11, лемма 1.32]). *Пусть  $\mathbf{w}$  — слово,  $r > 1$  — натуральное число, а  $y$  — буква такая, что  $D(\mathbf{w}, y) = r-2$ . Тогда если  $(1\mathbf{w}z) < (1\mathbf{w}y)$  для некоторой буквы  $z$ , удовлетворяющей неравенству  $D(\mathbf{w}, z) \geq r$ , то  $(2\mathbf{w}z) < (1\mathbf{w}y)$ .*  $\square$

Ниже, чтобы облегчить понимание наших рассуждений, мы иногда будем писать над буквой в скобках число, равное номеру вхождения этой буквы в данное слово; например, мы можем написать  $\mathbf{w} = x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(2)} x_3^{(1)} x_2^{(2)} x_1^{(3)}$ .

**Лемма 5.6** ([11, лемма 1.33]). *Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, а  $\ell$  — натуральное число. Предположим, что*

$$\text{sim}(\mathbf{u}) = \text{sim}(\mathbf{v}) \text{ и } \text{mul}(\mathbf{u}) = \text{mul}(\mathbf{v}), \quad (5.2)$$

$$h_i^{\ell-1}(\mathbf{u}, x) = h_i^{\ell-1}(\mathbf{v}, x) \text{ для } i = 1, 2 \text{ и всех } x \in \text{alph}(\mathbf{u}), \quad (5.3)$$

*и существует такая буква  $x_\ell \in \text{alph}(\mathbf{u}) = \text{alph}(\mathbf{v})$ , что  $D(\mathbf{u}, x_\ell) = \ell$ . Тогда найдутся такие буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}$ , что  $D(\mathbf{u}, x_s) = D(\mathbf{v}, x_s) = s$  для всех  $0 \leq s < \ell$  и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид*

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2\ell+1} x_\ell^{(1)} \mathbf{u}_{2\ell} x_{\ell-1}^{(1)} \mathbf{u}_{2\ell-1} x_\ell^{(2)} \mathbf{u}_{2\ell-2} x_{\ell-2}^{(1)} \mathbf{u}_{2\ell-3} x_{\ell-1}^{(2)} \mathbf{u}_{2\ell-4} x_{\ell-3}^{(1)} \\ & \cdot \mathbf{u}_{2\ell-5} x_{\ell-2}^{(2)} \cdots \mathbf{u}_4 x_1^{(1)} \mathbf{u}_3 x_2^{(2)} \mathbf{u}_2 x_0^{(1)} \mathbf{u}_1 x_1^{(2)} \mathbf{u}_0 \\ & \approx \mathbf{v}_{2\ell+1} x_\ell^{(1)} \mathbf{v}_{2\ell} x_{\ell-1}^{(1)} \mathbf{v}_{2\ell-1} x_\ell^{(2)} \mathbf{v}_{2\ell-2} x_{\ell-2}^{(1)} \mathbf{v}_{2\ell-3} x_{\ell-1}^{(2)} \mathbf{v}_{2\ell-4} x_{\ell-3}^{(1)} \\ & \cdot \mathbf{v}_{2\ell-5} x_{\ell-2}^{(2)} \cdots \mathbf{v}_4 x_1^{(1)} \mathbf{v}_3 x_2^{(2)} \mathbf{v}_2 x_0^{(1)} \mathbf{v}_1 x_1^{(2)} \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

*для некоторых слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2\ell+1}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2\ell+1}$ .*

Анализируя доказательство леммы 1.33 в [11], можно заметить, что в лемме 5.6, буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}$  можно выбрать таким образом, что  $\mathbf{u}_{2s+2}$  и  $\mathbf{v}_{2s+2}$  не будут содержать  $s$ -разделителей слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно для любого  $s = 0, 1, \dots, \ell - 1$ .

Очевидно, что если  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , то условия (5.2) и (5.3) выполнены при любом  $\ell$ . Поэтому, учитывая сказанное в предыдущем абзаце, мы можем применить лемму 5.6 к тривиальному тождеству и получить

**Следствие 5.7.** Пусть  $\mathbf{u}$  — слово, а  $k$  — натуральное число. Предположим, что существует буква  $x_k$  такая, что  $D(\mathbf{u}, x_k) = k$ . Тогда найдутся такие буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ , что слово  $\mathbf{u}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2k+1} \overset{(1)}{x_k} \mathbf{u}_{2k} \overset{(1)}{x_{k-1}} \mathbf{u}_{2k-1} \overset{(2)}{x_k} \mathbf{u}_{2k-2} \overset{(1)}{x_{k-2}} \mathbf{u}_{2k-3} \overset{(2)}{x_{k-1}} \mathbf{u}_{2k-4} \overset{(1)}{x_{k-3}} \\ & \cdot \mathbf{u}_{2k-5} \overset{(2)}{x_{k-2}} \cdots \mathbf{u}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{u}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{u}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{u}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

для некоторых  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2k+1} \in X^*$ ,  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$  и  $\mathbf{u}_{2s+2}$  не содержит  $s$ -разделителей слов  $\mathbf{u}$  для любого  $s = 0, 1, \dots, k - 1$ .  $\square$

**Лемма 5.8.** Пусть  $k, m$  — натуральные числа, а  $\mathbf{u}$  — слово вида

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2k+2} \overset{(1)}{y_m} \mathbf{u}_{2k+1} \overset{(1)}{x_k} \mathbf{u}_{2k} \overset{(1)}{x_{k-1}} \mathbf{u}_{2k-1} \overset{(2)}{x_k} \mathbf{u}_{2k-2} \overset{(1)}{x_{k-2}} \mathbf{u}_{2k-3} \overset{(2)}{x_{k-1}} \\ & \cdot \mathbf{u}_{2k-4} \overset{(1)}{x_{k-3}} \mathbf{u}_{2k-5} \overset{(2)}{x_{k-2}} \cdots \mathbf{u}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{u}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{u}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{u}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{u}_0, \end{aligned}$$

где  $D(\mathbf{u}, y_m) = m$  и  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$  для любого  $0 \leq s \leq k$ . Если  $\mathbf{u}_{2k+1}$  не содержит  $(m - 1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ , то  $2\mathbf{u}y_m$  принадлежит одному из подслов  $\mathbf{u}_{2m}$ ,  $\mathbf{u}_{2m-1}$  и  $\mathbf{u}_{2m-2}$  слова  $\mathbf{u}$ .

*Доказательство.* Поскольку  $D(\mathbf{u}, y_m) = m > 0$ , имеем  $y_m \in \text{mul}(\mathbf{u})$ . Пусть  $y_{m-1} := h_2^{m-1}(\mathbf{u}, y_m)$ . Поскольку, в силу леммы 5.4(i),  $(1\mathbf{u}y_m) < (1\mathbf{u}y_{m-1}) < (2\mathbf{u}y_m)$ , буква  $1\mathbf{u}y_{m-1}$  не может входить в подслово  $\mathbf{u}_{2k+2}$ . Согласно условию, буква  $1\mathbf{u}y_{m-1}$  не входит и в подслово  $\mathbf{u}_{2k+1}$ . Поскольку  $(1\mathbf{u}y_{m-1}) < (2\mathbf{u}y_m)$ , буква  $2\mathbf{u}y_m$  не может принадлежать подсловам  $\mathbf{u}_{2k+2}$  и  $\mathbf{u}_{2k+1}$ . Тогда  $(1\mathbf{u}x_k) < (2\mathbf{u}y_m)$ . Отсюда следует, что  $m \leq k + 1$ . Если  $m = k + 1$ , то буква  $2\mathbf{u}y_m$  входит в подслово  $\mathbf{u}_{2m-2} = \mathbf{u}_{2k}$ , так как в противном случае  $h_1^k(\mathbf{u}, y_m) \neq h_2^k(\mathbf{u}, y_m)$ . Если  $m = k$ , то буква  $2\mathbf{u}y_m$  принадлежит одному из подслов  $\mathbf{u}_{2k}$ ,  $\mathbf{u}_{2k-1}$  и  $\mathbf{u}_{2k-2}$ , так как иначе  $h_1^{k-1}(\mathbf{u}, y_m) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{u}, y_m)$ . Если  $k > m$ , то буква  $1\mathbf{u}y_{m-1}$  и потому буква  $2\mathbf{u}y_m$  не входит в подслова  $\mathbf{u}_{2k}$  и  $\mathbf{u}_{2k-1}$ , поскольку в противном случае  $h_1^{m-1}(\mathbf{u}, x_k) \neq h_2^{m-1}(\mathbf{u}, x_k)$ . Далее, если  $k > m + 1$ , то  $1\mathbf{u}y_{m-1}$  и потому  $2\mathbf{u}y_m$  не принадлежит подсловам  $\mathbf{u}_{2r+1}$ ,  $\mathbf{u}_{2r}$  и  $\mathbf{u}_{2r-1}$  слова  $\mathbf{u}$  для любого  $r = m + 1, m + 2, \dots, k - 1$ , так как  $h_1^{r-2}(\mathbf{u}, x_r) \neq h_2^{r-2}(\mathbf{u}, x_r)$  в противном случае. Наконец, если  $m > 1$ , то  $(2\mathbf{u}y_m) < (1\mathbf{u}x_{m-2})$  по лемме 5.5. Это означает, что если  $m > 1$ , то буква  $2\mathbf{u}y_m$  не входит в подслова  $\mathbf{u}_{2m-3}$ ,  $\mathbf{u}_{2m-4}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{u}_0$ . Следовательно, буква  $2\mathbf{u}y_m$  принадлежит одному из подслов  $\mathbf{u}_{2m}$ ,  $\mathbf{u}_{2m-1}$  и  $\mathbf{u}_{2m-2}$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Лемма 5.9** ([11, лемма 1.34]). Пусть  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w})\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка. Если  $x \in \text{alph}(\mathbf{w})$  и  $D(\mathbf{w}, x) > 0$ , то слово  $\varphi(1\mathbf{w}x)$ , рассматриваемое как подслово слова  $\mathbf{u}$ , не содержит первых вхождений букв глубины меньше  $D(\mathbf{w}, x)$ .  $\square$

### 5.1.3. Вспомогательные результаты

Напомним определения следующих многообразий, введенных в § 1.5:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1 &:= \text{var}\{xux \approx xux^2, x^2y \approx x^2yx, x^2y^2 \approx y^2x^2\}, \\ \mathbf{F}_k &:= \mathbf{D}_1\{x_k y_k x_{k-1} x_k y_k \mathbf{b}_{k-1} \approx y_k x_k x_{k-1} x_k y_k \mathbf{b}_{k-1}\}, \\ \mathbf{H}_k &:= \mathbf{D}_1\{x x_k x \mathbf{b}_k \approx x_k x^2 \mathbf{b}_k\}, \\ \mathbf{I}_k &:= \mathbf{D}_1\{y_1 y_0 x_k y_1 \mathbf{b}_k \approx y_1 y_0 y_1 x_k \mathbf{b}_k\}, \\ \mathbf{J}_k^m &:= \mathbf{D}_1\{y_{m+1} y_m x_k y_{m+1} \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1} \approx y_{m+1} y_m y_{m+1} x_k \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1}\},\end{aligned}$$

где  $\mathbf{b}_{k,m} := x_{k-1} x_k x_{k-2} x_{k-1} \cdots x_{m-1} x_m$ ,  $\mathbf{b}_k := \mathbf{b}_{k,1}$  и  $\mathbf{b}_0 := 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq m \leq k$ .

**Лемма 5.10** ([11, предложение 3.23(i)]). *Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{F}_k$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (5.2) и (5.3) при  $\ell = k$ .*  $\square$

Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  будем называть  *$k$ -сбалансированным*, если множества  $k$ -разделителей слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  совпадают,  $k$ -разделители появляются в словах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  в одном и том же порядке и для любых  $x \in X$  и  $i \in \{1, 2\}$  буква  $i\mathbf{u}x$  входит в некоторый  $k$ -блок слова  $\mathbf{u}$  тогда и только тогда, когда буква  $i\mathbf{v}x$  входит в соответствующий  $k$ -блок слова  $\mathbf{v}$ .

**Следствие 5.11.** *Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{F}_k$ . Тогда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $(k-1)$ -сбалансированным.*

*Доказательство.* Пусть  $t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  —  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . Согласно лемме 5.10, условия (5.2) и (5.3) выполняются при  $\ell = k$ . Тогда  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид  $t_0 \mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  в силу [11, лемма 1.27]. Предположим, что буква  $i\mathbf{u}x$  входит в  $(k-1)$ -блок  $\mathbf{u}_j$  слова  $\mathbf{u}$ , где  $i \in \{1, 2\}$  и  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Тогда  $h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x) = t_j$ . Поскольку условие (5.3) выполняется при  $\ell = k$ , получаем, что  $h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x) = t_j$ . Отсюда вытекает, что буква  $i\mathbf{v}x$  входит в  $(k-1)$ -блок  $\mathbf{v}_j$  слова  $\mathbf{u}$ . Следовательно, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $(k-1)$ -сбалансированным.  $\square$

Обозначим через  $\mathbf{P}$  многообразие моноидов, заданное тождеством

$$xuxz \approx xuxzx. \quad (5.4)$$

Напомним, что через  $\text{ini}_2(\mathbf{w})$  мы обозначаем слово, получающееся из слова  $\mathbf{w}$  оставлением только первых и вторых вхождений каждой из букв, входящих в  $\mathbf{w}$ . Следующее утверждение очевидно.

**Лемма 5.12.** *Для любого  $\mathbf{w} \in X^*$  тождество  $\mathbf{w} \approx \text{ini}_2(\mathbf{w})$  выполнено в многообразии  $\mathbf{P}$ .*  $\square$

**Лемма 5.13.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{P}$ .*

(i) *Если  $\mathbf{LRB} \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_1$ .*

(ii) Если  $\mathbf{F}_1 \not\subseteq \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{LRB} \vee \mathbf{M}(x) = \text{var}\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx xux\}$ .

*Доказательство.* (i) Из леммы 1.30 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^2(y^2x^2)^2 \approx (y^2x^2)^2$ . Отсюда и из включения  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}$  легко следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $x^2y^2 \approx y^2x^2$ . Таким образом,  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_1$ .

(ii) Если  $\mathbf{M}(x) \not\subseteq \mathbf{V}$ , то, по лемме 1.11, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x \approx x^n$  для некоторого  $n \geq 2$ . Ясно, что это тождество вместе с (5.4) влечет  $xu \approx xux$ , откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{LRB}$ . Поэтому мы можем далее считать, что  $\mathbf{M}(x) \in \mathbf{V}$ . Согласно условию, существует тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{V}$ , но не выполненное в  $\mathbf{F}_1$ . Из леммы 5.10 следует, что это тождество удовлетворяет условию (5.2), но не удовлетворяет условию (5.3) при  $\ell = 1$ . Тогда  $h_i^0(\mathbf{u}, x) \neq h_i^0(\mathbf{v}, x)$  для некоторых  $x \in \text{alph}(\mathbf{u})$  и  $i \in \{1, 2\}$ . Если  $i = 1$ , то мы можем домножить обе части тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  слева на  $xt$ , где  $t$  — буква, не входящая в запись слова  $\mathbf{u}$ . Поэтому можно считать, что  $i = 2$ . Положим  $y := h_2^0(\mathbf{u}, x)$  и  $z := h_2^0(\mathbf{v}, x)$ . Если буквы  $y$  и  $z$  входят в слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  в различном порядке, то многообразие  $\mathbf{V}$  коммутативно и потому  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{M}(x)$ . Следовательно, мы можем без ограничения общности считать, что  $(1_{\mathbf{u}}z) < (1_{\mathbf{u}}y)$  и  $(1_{\mathbf{v}}z) < (1_{\mathbf{v}}y)$ . Тогда тождество  $\mathbf{u}(x, y) \approx \mathbf{v}(x, y)$  эквивалентно по модулю (5.4) тождеству  $x^2y \approx xux$ . В [66, лемма 3.3(iv)] доказано, что  $\mathbf{LRB} \vee \mathbf{M}(x) = \text{var}\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx xux\}$ , откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{LRB} \vee \mathbf{M}(x)$ , что и требовалось показать.  $\square$

**Лемма 5.14.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{P}$ . Если  $\mathbf{F}_{k+1} \not\subseteq \mathbf{V}$ , то в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество

$$\kappa_k : xx_kx\mathbf{b}_k \approx x^2x_k\mathbf{b}_k.$$

*Доказательство.* Если  $\mathbf{LRB} \not\subseteq \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_1$  по лемме 5.13(i). Поскольку  $\mathbf{F}_{k+1} \not\subseteq \mathbf{V}$ , из леммы 1.18 вытекает, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_k^k$ . В [11, лемма 3.17] проверено, что  $\mathbf{J}_k^k$  удовлетворяет  $\kappa_k$ . Тогда  $\mathbf{V}$  также удовлетворяет тождеству  $\kappa_k$ . Следовательно, мы можем считать, что  $\mathbf{LRB} \subseteq \mathbf{V}$ . Далее, если  $\mathbf{F}_1 \not\subseteq \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^2y \approx xux$  по лемме 5.13(ii). Ясно, что последнее тождество влечет тождество  $\kappa_k$ . Поэтому мы можем считать, что  $\mathbf{F}_1 \subseteq \mathbf{V}$ .

Пусть  $r$  — наименьшее число такое, что  $\mathbf{F}_r \subseteq \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{F}_{r+1} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Очевидно, что  $r \leq k$ . Согласно условию, найдется тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{V}$ , но не выполненное в  $\mathbf{F}_{r+1}$ . В силу леммы 5.10, это тождество удовлетворяет условиям (5.2) и (5.3) при  $\ell = 1, 2, \dots, r$ , но не удовлетворяет условию (5.3) при  $\ell = r+1$ . Тогда  $h_i^r(\mathbf{u}, x) \neq h_i^r(\mathbf{v}, x)$  для некоторых  $x \in \text{alph}(\mathbf{u})$  и  $i \in \{1, 2\}$ . Если  $i = 1$ , мы можем домножить обе части тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  слева на  $xt$ , где  $t$  — буква, не входящая в запись слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Поэтому мы можем считать, что  $i = 2$ . Положим  $a := h_2^r(\mathbf{u}, x)$  и  $b := h_2^r(\mathbf{v}, x)$ . Без ограничения общности можно предполагать, что  $(1_{\mathbf{u}}b) < (1_{\mathbf{u}}a)$ . Тогда  $(1_{\mathbf{v}}b) < (1_{\mathbf{v}}a)$  по лемме 1.19.

В силу леммы 5.3,  $D(\mathbf{u}, a) = s$  для некоторого  $s \leq r$ . Для удобства обозначений положим  $x_s := a$ . Тогда, согласно лемме 5.6, существуют буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{s-1}$  такие, что  $D(\mathbf{u}, x_j) =$

$D(\mathbf{v}, x_j) = j$  для любых  $0 \leq j < s$ , и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2s+1} \overset{(1)}{x_s} \mathbf{u}_{2s} \overset{(1)}{x_{s-1}} \mathbf{u}_{2s-1} \overset{(2)}{x_s} \mathbf{u}_{2s-2} \overset{(1)}{x_{s-2}} \mathbf{u}_{2s-3} \overset{(2)}{x_{s-1}} \mathbf{u}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{s-3}} \\ & \cdot \mathbf{u}_{2s-5} \overset{(2)}{x_{s-2}} \cdots \mathbf{u}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{u}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{u}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{u}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{u}_0 \\ \approx & \mathbf{v}_{2s+1} \overset{(1)}{x_s} \mathbf{v}_{2s} \overset{(1)}{x_{s-1}} \mathbf{v}_{2s-1} \overset{(2)}{x_s} \mathbf{v}_{2s-2} \overset{(1)}{x_{s-2}} \mathbf{v}_{2s-3} \overset{(2)}{x_{s-1}} \mathbf{v}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{s-3}} \\ & \cdot \mathbf{v}_{2s-5} \overset{(2)}{x_{s-2}} \cdots \mathbf{v}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{v}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{v}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{v}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

для некоторых  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2s+1}, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2s+1} \in X^*$ . Ясно, что буква  ${}_{1\mathbf{u}}x$  принадлежит подслову  $\mathbf{u}_{2s+1}$  слова  $\mathbf{u}$ , а буквы  ${}_{1\mathbf{v}}x$  и  ${}_{2\mathbf{v}}x$  входят в подслово  $\mathbf{v}_{2s+1}$  слова  $\mathbf{v}$ . Поскольку  $x_s = h_2^r(\mathbf{u}, x)$ , а буква  $x_{s-1}$  —  $r$ -разделитель слова  $\mathbf{u}$  по лемме 5.3, буква  ${}_{2\mathbf{u}}x$  принадлежит подслову  $\mathbf{u}_{2s}$ . Следовательно, тождество

$$\mathbf{u}(x, x_1, x_2, \dots, x_s) \approx \mathbf{v}(x, x_1, x_2, \dots, x_s)$$

эквивалентно по модулю (5.4) тождеству  $\kappa_s$ . Ясно, что  $\kappa_s$  влечет  $\kappa_k$ . Таким образом,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\kappa_k$ , что и требовалось показать.  $\square$

Для любого слова  $\mathbf{w}$  через  $\text{ini}^2(\mathbf{w})$  обозначим слово, получающееся из слова  $\text{ini}(\mathbf{w})$  заменой каждой буквы  $x$  на ее квадрат  $x^2$ . Например, если  $\mathbf{w} := x^3 y z u x$ , то  $\text{ini}(\mathbf{w}) = x y z$  и потому  $\text{ini}^2(\mathbf{w}) = x^2 y^2 z^2$ .

**Лемма 5.15.** Пусть  $\mathbf{w}$  — слово, не содержащее простых букв. Тогда тождество  $\mathbf{w} \approx \text{ini}^2(\mathbf{w})$  является следствием тождеств (5.4) и

$$(xy)^2 \approx x^2 y^2. \quad (5.5)$$

*Доказательство.* Заметим сначала, что  $\mathbf{P}\{(5.5)\}$  удовлетворяет тождеству

$$x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \approx (x_1 x_2 \cdots x_n)^2 \quad (5.6)$$

для любого  $n \geq 2$ , так как тождества

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^2 \approx x_1^2 (x_2 x_3 \cdots x_n)^2 \approx x_1^2 x_2^2 (x_3 x_4 \cdots x_n)^2 \approx \cdots \approx x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2$$

являются следствием тождества (5.5).

В силу леммы 5.12, мы можем считать, что слово  $\mathbf{w}$  является 2-ограниченным. Пусть  $k$  — число различных букв в слове  $\mathbf{w}$ , образующих более одного острова в этом слове. Докажем требуемое утверждение индукцией по  $k$ .

**База индукции:**  $k = 0$ . В этом случае  $\mathbf{w} = \text{ini}^2(\mathbf{w})$  и доказывать нечего.

**Шаг индукции:**  $k > 0$  и  $\mathbf{P}\{(5.5)\}$  удовлетворяет  $\mathbf{v}' \approx \text{ini}^2(\mathbf{v}')$  для любого 2-ограниченного слова  $\mathbf{v}'$ , в котором не более  $k - 1$  букв образуют более одного острова. Тогда, поскольку слово  $\mathbf{w}$  является 2-ограниченным, существует буква  $x$  такая, что  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 x y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_n^{k_n} x \mathbf{w}_2$ ,

где  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1, 2\}$  и, если  $k_i = 1$ , то  $y_i \in \text{alph}(\mathbf{w}_1)$ . Тогда тождества

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \mathbf{w}_1 x y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_n^{k_n} x \mathbf{w}_2 \\
&\stackrel{(5.4)}{\approx} \mathbf{w}_1 x y_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2 x y_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2 \mathbf{w}_2 \\
&\stackrel{(5.6)}{\approx} \mathbf{w}_1 x (y_1 y_2 \cdots y_n)^2 x (y_1 y_2 \cdots y_n)^2 \mathbf{w}_2 \\
&\stackrel{(5.5)}{\approx} \mathbf{w}_1 x^2 (y_1 y_2 \cdots y_n)^4 \mathbf{w}_2 \\
&\stackrel{(5.6)}{\approx} \mathbf{w}_1 x^2 y_1^4 y_2^4 \cdots y_n^4 \mathbf{w}_2 \\
&\stackrel{(5.4)}{\approx} \mathbf{w}_1 x^2 y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_n^{k_n} \mathbf{w}_2 =: \mathbf{w}'
\end{aligned}$$

выполнены в многообразии  $\mathbf{P}\{(5.5)\}$ . Ясно, в слове  $\mathbf{w}'$  в точности  $k - 1$  буква образует более одного острова. Согласно предположению индукции, тождество  $\mathbf{w}' \approx \text{ini}^2(\mathbf{w}')$  выполнено в многообразии  $\mathbf{P}\{(5.5)\}$ . Остается заметить, что  $\text{ini}^2(\mathbf{w}) = \text{ini}^2(\mathbf{w}')$ . Следовательно, в  $\mathbf{P}\{(5.5)\}$  выполнено тождество  $\mathbf{w} \approx \text{ini}^2(\mathbf{w})$ .  $\square$

**Следствие 5.16.** Пусть  $\mathbf{w}$  — слово,  $k$  — натуральное число такое, что  $k$ -разложение слова  $\mathbf{w}$  максимально, а  $\mathbf{a}$  — произвольный  $k$ -блок слова  $\mathbf{w}$ . Если  $\mathbf{w} = \mathbf{w}' \mathbf{a} \mathbf{w}''$ , то в многообразии  $\mathbf{P}\{(5.5)\}$  выполнено тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}' \text{ini}^2(\mathbf{a}) \mathbf{w}''$ .

*Доказательство.* Пусть  $x$  — произвольная буква такая, первое вхождение которой в слово  $\mathbf{w}$  принадлежит  $k$ -блоку  $\mathbf{a}$ . Если буква  ${}_2\mathbf{w}x$  не входит в  $k$ -блок  $\mathbf{a}$ , то  $h_1^k(\mathbf{w}, x) \neq h_2^k(\mathbf{w}, x)$  и потому буква  $x$  является  $(k + 1)$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ , что противоречит максимальнойности  $k$ -разложения слова  $\mathbf{w}$ . Следовательно,  ${}_2\mathbf{w}x$  принадлежит  $k$ -блоку  $\mathbf{a}$ . Мы видим, что  $\text{alph}(\mathbf{a}) \subseteq \text{mul}(\mathbf{w}'\mathbf{a})$ . Тогда, используя тождество (5.4), мы можем добавить вхождения букв в  $k$ -блок  $\mathbf{a}$  так, чтобы в получившийся в результате  $k$ -блок, который обозначим через  $\mathbf{b}$ , каждая буква входила ровно два раза. Тогда тождество  $\mathbf{b} \approx \text{ini}^2(\mathbf{b})$  является следствием тождеств (5.4) и (5.5) по лемме 5.15. Очевидно, что  $\text{ini}^2(\mathbf{a}) = \text{ini}^2(\mathbf{b})$ . Мы видим, что тождества

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' \mathbf{a} \mathbf{w}'' \approx \mathbf{w}' \mathbf{b} \mathbf{w}'' \approx \mathbf{w}' \text{ini}^2(\mathbf{b}) \mathbf{w}'' = \mathbf{w}' \text{ini}^2(\mathbf{a}) \mathbf{w}''$$

вытекают из тождеств (5.4) и (5.5), что и требовалось показать.  $\square$

Если  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, а  $\sigma$  обозначает тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , то для краткости будем обозначать тождество  $\varphi(\mathbf{u}) \approx \varphi(\mathbf{v})$  через  $\varphi(\sigma)$ .

Следующее утверждение обобщает лемму 3.17 в [11].

**Лемма 5.17.** Для любого  $k \in \mathbb{N}$ , тождества  $\kappa_k$  и  $\delta_k^k$  эквивалентны внутри многообразия  $\mathbf{P}$ .

*Доказательство.* Если  $\varphi$  — подстановка  $(y_k, y_{k+1}) \mapsto (1, x)$ , то тождество  $\varphi(\delta_k^k)$  есть не что иное как тождество  $\kappa_k$ . Следовательно,  $\delta_k^k$  влечет  $\kappa_k$ . Обратно,  $\delta_k^k$  вытекает из (5.4) и  $\kappa_k$ ,

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned}
y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}\mathbf{b}_{k,k}y_k\mathbf{b}_{k-1} &= y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}x_{k-1}x_ky_k\mathbf{b}_{k-1} \\
&\stackrel{(5.4)}{\approx} y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}x_{k-1}x_ky_kx_k\mathbf{c} \\
&\stackrel{\kappa_k}{\approx} y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}x_ky_kx_k\mathbf{c} \\
&\stackrel{(5.4)}{\approx} y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}x_ky_k\mathbf{d} \\
&\stackrel{\kappa_k}{\approx} y_{k+1}y_ky_{k+1}x_kx_{k-1}x_ky_k\mathbf{d} \\
&\stackrel{(5.4)}{\approx} y_{k+1}y_ky_{k+1}x_kx_{k-1}x_ky_k\mathbf{b}_{k-1} \\
&= y_{k+1}y_ky_{k+1}x_k\mathbf{b}_{k,k}y_k\mathbf{b}_{k-1},
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{c} := \begin{cases} 1, & \text{если } k = 1, \\ x_{k-2}x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-2}, & \text{если } k > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \mathbf{d} := \begin{cases} 1, & \text{если } k = 1, \\ x_{k-2}x_kx_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-2}, & \text{если } k > 1, \end{cases}$$

что и требовалось показать. □

Введем обозначение для следующей счетной серий тождеств:

$$\varepsilon_{k-1} : y_kx_{k-1}xy_kx\mathbf{b}_{k-1} \approx y_kx_{k-1}y_kx^2\mathbf{b}_{k-1},$$

где  $k \in \mathbb{N}$ .

**Лемма 5.18.** *Справедливы следующие включения:*

- (i)  $\mathbf{P}\{\gamma_1\} \subset \mathbf{P}\{\gamma_2\} \subset \dots \subset \mathbf{P}\{\gamma_k\} \subset \dots \subset \mathbf{P}\{\varepsilon_0\}$ ;
- (ii)  $\mathbf{P}\{\gamma_k\} \subset \mathbf{P}\{\delta_k^1\} \subset \mathbf{P}\{\delta_k^2\} \subset \dots \subset \mathbf{P}\{\delta_k^k\} \subset \mathbf{P}\{\delta_{k+1}^k\} \subset \dots \subset \mathbf{P}\{\delta_{k+m}^k\} \subset \dots \subset \mathbf{P}\{\varepsilon_k\}$ ;
- (iii)  $\mathbf{P}\{\varepsilon_0\} \subset \mathbf{P}\{\varepsilon_1\} \subset \dots \subset \mathbf{P}\{\varepsilon_k\} \subset \dots \subset \mathbf{P}\{(5.5)\}$ .

*Доказательство.* (i) Очевидно, что  $\mathbf{P}\{\gamma_1\} \subseteq \mathbf{P}\{\gamma_2\} \subseteq \dots \subseteq \mathbf{P}\{\gamma_k\} \subseteq \dots \subseteq \mathbf{P}\{\varepsilon_0\}$ . Все эти включения являются строгими, поскольку  $\mathbf{I}_{k+1} \subseteq \mathbf{P}\{\gamma_{k+1}\} \subseteq \mathbf{P}\{\varepsilon_0\}$  и  $\mathbf{I}_{k+1} \not\subseteq \mathbf{P}\{\gamma_k\}$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ .

(ii) Включение  $\mathbf{P}\{\gamma_k\} \subseteq \mathbf{P}\{\delta_k^1\}$  очевидно. Пусть  $\varphi_1 : X \rightarrow X^*$  и  $\varphi_2 : X \rightarrow X^*$  — подстановки

$$(x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_k) \mapsto (x_mx_{m+1}x_{m-1}x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{k+1})$$

$$\text{и } (x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{k-1}, x_k, y_m) \mapsto (xx_{m-1}, 1, 1, \dots, 1, x, x_m)$$

соответственно. Тогда тождества  $\varphi_1(\delta_k^m)$  и  $\varphi_2(\delta_k^m)$  эквивалентны по модулю (5.4) тождествам  $\delta_{k+1}^m$  и  $\varepsilon_m$ , соответственно. Следовательно,  $\mathbf{P}\{\delta_k^m\} \subseteq \mathbf{P}\{\delta_{k+1}^m\}$  и  $\mathbf{P}\{\delta_k^m\} \subseteq \mathbf{P}\{\varepsilon_m\}$ . Если  $1 \leq m < k$ , а  $\varphi_3 : X \rightarrow X^*$  — подстановка

$$(x_{m-1}, y_m, y_{m+1}) \mapsto (y_{m+1}x_{m-1}, y_{m+1}, y_{m+2}),$$

то тождество  $\varphi_3(\delta_k^m)$  эквивалентно по модулю (5.4) тождеству  $\delta_k^{m+1}$ , откуда  $\mathbf{P}\{\delta_k^m\} \subseteq \mathbf{P}\{\delta_k^{m+1}\}$ . Чтобы доказать строгость этого включения, достаточно заметить, что  $\mathbf{J}_k^m \subseteq \mathbf{P}\{\delta_k^m\} \subseteq \mathbf{P}\{\varepsilon_k\}$  и  $\mathbf{J}_k^1 \not\subseteq \mathbf{P}\{\gamma_k\}$ ,  $\mathbf{J}_{k+1}^m \not\subseteq \mathbf{P}\{\delta_k^m\}$  для любых  $1 \leq m \leq k$ , и, если  $m < k$ , то  $\mathbf{J}_k^{m+1} \not\subseteq \mathbf{P}\{\delta_k^m\}$ .

(iii) Очевидно, что  $\mathbf{P}\{\varepsilon_0\} \subseteq \mathbf{P}\{\varepsilon_1\} \subseteq \dots \subseteq \mathbf{P}\{\varepsilon_k\} \subseteq \dots \subseteq \mathbf{P}\{(5.5)\}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что в  $\mathbf{P}\{\varepsilon_k\}$  нарушается тождество  $\varepsilon_{k-1}$ . Следовательно, рассматриваемые включения являются строгими.  $\square$

**Лемма 5.19.** *Для любых  $1 \leq m \leq k$  справедливо включение  $\mathbf{P}\{\delta_k^m, \varepsilon_0\} \subseteq \mathbf{P}\{\gamma_{k+1}\}$ .*

*Доказательство.* В силу лемм 5.17 и 5.18(ii), многообразие  $\mathbf{P}\{\delta_k^m, \varepsilon_0\}$  удовлетворяет тождеству  $\kappa_k$ . Тогда в этом многообразии выполнено тождество  $\gamma_{k+1}$ , поскольку

$$\begin{aligned} & y_1 y_0 y_1 x_{k+1} x_k x_{k+1} \mathbf{b}_k \stackrel{\kappa_k}{\approx} y_1 y_0 y_1 x_{k+1}^2 x_k \mathbf{b}_k \stackrel{\varepsilon_0}{\approx} y_1 y_0 x_{k+1} y_1 x_{k+1} x_k \mathbf{b}_k \\ (5.4) \quad & \approx y_1 y_0 x_{k+1} y_1 x_{k+1} x_k \mathbf{b}_{k,m} y_1 \mathbf{b}_{m-1} \stackrel{\delta_k^m}{\approx} y_1 y_0 x_{k+1} y_1 x_k x_{k+1} \mathbf{b}_{k,m} y_1 \mathbf{b}_{m-1} \\ (1.1) \quad & \approx y_1 y_0 x_{k+1} y_1 x_k x_{k+1} \mathbf{b}_k, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Лемма 5.20.** *Для любых  $1 \leq m \leq \ell \leq k$  справедливо включение  $\mathbf{P}\{\delta_k^\ell, \varepsilon_m\} \subseteq \mathbf{P}\{\delta_{k+1}^m\}$ .*

*Доказательство.* Для удобства положим  $\mathbf{b}_{p-1,p} := 1$  для любого  $p \in \mathbb{N}$ . Отметим, что многообразие  $\mathbf{P}\{\delta_k^\ell, \varepsilon_m\}$  удовлетворяет тождеству  $\kappa_k$  по леммам 5.17 и 5.18(ii). Тогда в этом многообразии выполнено тождество  $\delta_{k+1}^m$ , поскольку

$$\begin{aligned} & y_{m+1} y_m y_{m+1} x_{k+1} x_k x_{k+1} \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1} \\ (5.4) \quad & \approx y_{m+1} y_m y_{m+1} x_{k+1} x_k x_{k+1} \mathbf{b}_{k,m} \mathbf{d}_1 \\ & \stackrel{\kappa_k}{\approx} y_{m+1} y_m y_{m+1} x_{k+1}^2 x_k \mathbf{b}_{k,m} \mathbf{d}_1 \\ (5.4) \quad & \approx y_{m+1} y_m y_{m+1} x_{k+1}^2 (x_k \mathbf{b}_{k,m}) \mathbf{d}_2 \\ & \stackrel{\varepsilon_m}{\approx} y_{m+1} y_m x_{k+1} y_{m+1} x_{k+1} (x_k \mathbf{b}_{k,m}) \mathbf{d}_2 \\ (5.4) \quad & \approx y_{m+1} y_m x_{k+1} y_{m+1} x_{k+1} x_k \mathbf{b}_{k,k} y_{m+1} \mathbf{b}_{k-1,m} \mathbf{d}_1 \\ & \stackrel{\delta_k^k}{\approx} y_{m+1} y_m x_{k+1} y_{m+1} x_k x_{k+1} \mathbf{b}_{k,k} y_{m+1} \mathbf{b}_{k-1,m} \mathbf{d}_1 \\ (5.4) \quad & \approx y_{m+1} y_m x_{k+1} y_{m+1} x_k x_{k+1} \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{d}_1 := \begin{cases} y_m, & \text{если } m = 1, \\ (y_m x_{m-2}) x_{m-1}, & \text{если } m = 2, \\ (y_m x_{m-2}) x_{m-1} x_{m-3} (y_m x_{m-2}) \mathbf{b}_{m-3}, & \text{если } m \geq 3, \end{cases}$$

$$\mathbf{d}_2 := \begin{cases} y_m, & \text{если } m = 1, \\ x_{m-2} (x_k \mathbf{b}_{k,m}) \mathbf{b}_{m-2}, & \text{если } m \geq 2. \end{cases}$$

Остается заметить, что, в силу леммы 5.18(ii),  $\mathbf{P}\{\delta_k^\ell, \varepsilon_m\} \subseteq \mathbf{P}\{\delta_k^k, \varepsilon_m\}$ .  $\square$

Следующая лемма является обобщением леммы 3.20(i),(ii) в [11].

**Лемма 5.21.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{P}$ , а  $\mathbf{u}$  — слово. Пусть, кроме того,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{c}\mathbf{u}''$ , где  $\mathbf{c} \in \{1_{\mathbf{u}}x_{2\mathbf{u}}, 2_{\mathbf{u}}y_{1\mathbf{u}}x\}$  и  $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in X^*$ . Предположим, что выполнено одно из следующих утверждений:

- (i)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\gamma_k$ ,  $D(\mathbf{u}, x) = k$  и  $D(\mathbf{u}, y) = 1$ ;
- (ii)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\delta_k^m$ ,  $D(\mathbf{u}, x) = k$  и  $D(\mathbf{u}, y) = m + 1$ ;
- (iii)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\varepsilon_k$ ,  $D(\mathbf{u}, x) = \infty$  и  $D(\mathbf{u}, y) = k + 1$ ;
- (iv)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (5.5),  $D(\mathbf{u}, x) = D(\mathbf{u}, y) = \infty$ .

Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}$  — слово, получающееся из слова  $\mathbf{u}$  перестановкой местами буквами  $1_{\mathbf{u}}x$  и  $2_{\mathbf{u}}y$ .

*Доказательство.* Мы рассмотрим только случай, когда  $\mathbf{c} = xy$ , поскольку случай, когда  $\mathbf{c} = yx$  вполне аналогичен. Мы также опустим доказательство п. (i), так как оно подобно (и, на самом деле, проще) доказательству п. (ii).

(ii) Положим  $x_k := x$  и  $y_{m+1} := y$ . Из следствия 5.7 вытекает, что существуют буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  такие, что  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$  для любого  $0 \leq s < k$  и

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{2k+2}y_{m+1}\mathbf{v}_{2k+1}x_k y_{m+1}\mathbf{p},$$

где

$$\mathbf{p} := \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}x_k\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0$$

для некоторых  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k+2} \in X^*$ . Ясно, что для любого  $s = 1, 2, \dots, k-1$ , найдутся такие слова  $\mathbf{v}'_{2s}, \mathbf{v}''_{2s} \in X^*$ , что  $\mathbf{v}_{2s} = \mathbf{v}'_{2s}\mathbf{v}''_{2s}$  и слово  $\mathbf{v}'_{2s}$  не содержит  $(s-1)$  разделителей слова  $\mathbf{u}$ , в то время как либо  $\mathbf{v}''_{2s} = 1$ , либо  $h(\mathbf{v}''_{2s})$  есть  $(s-1)$ -разделитель слова  $\mathbf{u}$ . Положим  $\mathbf{v}''_{2k} := \mathbf{v}_{2k}$  и  $\mathbf{v}'_0 := \mathbf{v}_0$ . Положим также

$$\mathbf{q}_s := \mathbf{v}''_{2s+2}x_s\mathbf{v}_{2s+1}x_{s+1}\mathbf{v}'_{2s}$$

для любого  $s = 0, 1, \dots, k-1$ . Пусть  $\varphi_1: X \rightarrow X^*$  есть подстановка

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, y_m, y_{m+1}) \mapsto (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{v}_{2k+1}, y_{m+1}).$$

Тогда тождество  $\varphi_1(\delta_k^m)$  совпадает с тождеством

$$y_{m+1}\mathbf{v}_{2k+1}x_k y_{m+1}\mathbf{q} \approx \mathbf{v}_{2k+2}y_{m+1}\mathbf{v}_{2k+1}y_{m+1}x_k\mathbf{q} \quad (5.7)$$

где

$$\mathbf{q} := \mathbf{q}_{k-1}x_k\mathbf{q}_{k-2}\mathbf{q}_{k-1} \cdots \mathbf{q}_{m-1}\mathbf{q}_m\mathbf{v}_{2k+1}\mathbf{q}_{m-2}\mathbf{q}_{m-1} \cdots \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1.$$

Заметим, что  $\mathbf{p} = \mathbf{q}_{k-1}\mathbf{q}_{k-2} \cdots \mathbf{q}_0$ . Поскольку  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$  и  $D(\mathbf{u}, x_{s+1}) = s + 1$ , из леммы 5.3 вытекает, что буквы  $x_s$  и  $x_{s+1}$  не являются  $(s-1)$ -разделителями слова  $\mathbf{u}$ . Если одно из подслов  $\mathbf{v}''_{2s+2}$  и  $\mathbf{v}_{2s+1}$  слова  $\mathbf{u}$  содержит некоторый  $(s-1)$ -разделитель  $d$  этого слова,

то  $(1_{\mathbf{u}}x_{s+1}) < (1_{\mathbf{u}}d) < (2_{\mathbf{u}}x_{s+1})$  и потому  $D(\mathbf{u}, x_{s+1}) \leq s$ , что противоречит тому факту, что  $D(\mathbf{u}, x_{s+1}) = s + 1$ . Следовательно, подслова  $\mathbf{v}''_{2s+2}$  и  $\mathbf{v}_{2s+1}$  не содержат  $(s - 1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ . Наконец, согласно определению, подслово  $\mathbf{v}'_{2s}$  слова  $\mathbf{u}$  не содержит  $(s - 1)$ -разделителей этого слова. Мы видим, что подслово  $\mathbf{q}_s$  слова  $\mathbf{u}$  не может содержать  $(s - 1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$  для любого  $s = 1, 2, \dots, k - 1$ .

Пусть  $z$  — произвольная буква, первое вхождение которой в слово  $\mathbf{u}$  принадлежит подслову  $\mathbf{v}_{2k+1}$ . Поскольку  $D(\mathbf{u}, y_{m+1}) = m + 1 > 1$ , имеем  $z \in \text{mul}(\mathbf{u})$ . Проверим, что  $z \in \text{mul}(\mathbf{v}_{2k+1}\mathbf{q}_{k-1} \cdots \mathbf{q}_m\mathbf{q}_{m-1})$ . Если  $m = 1$ , то требуемое утверждение очевидно, поскольку тогда слово  $\mathbf{v}_{2k+1}\mathbf{q}_{k-1} \cdots \mathbf{q}_m\mathbf{q}_{m-1}$  является суффиксом слова  $\mathbf{u}$ . Поэтому мы можем считать, что  $m > 1$ . Положим  $z' := h(\mathbf{q}_{m-2})$ . Ясно, что либо  $z' = h(\mathbf{v}''_{2m-2})$ , либо  $z' = x_{m-2}$ . Поэтому буква  $z'$  является  $(m - 2)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Если  $(1_{\mathbf{u}}z') < (2_{\mathbf{u}}z)$ , то  $h_1^{m-2}(\mathbf{u}, z) \neq h_2^{m-2}(\mathbf{u}, z)$  и потому  $D(\mathbf{u}, z) \leq m - 1$ . Тогда, по лемме 5.3, буква  $z$  является  $(m - 1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Однако, поскольку  $(1_{\mathbf{u}}y_{m+1}) < (1_{\mathbf{u}}z) < (2_{\mathbf{u}}y_{m+1})$ , это противоречит тому факту, что  $D(\mathbf{u}, y_{m+1}) = m + 1$ . Следовательно,  $(2_{\mathbf{u}}z) < (1_{\mathbf{u}}z')$ . Мы видим, что если некоторая буква принадлежит подслову  $\mathbf{v}_{2k+1}$ , то подслово  $\mathbf{v}_{2k+1}x_k y_{m+1}\mathbf{q}_{k-1} \cdots \mathbf{q}_m\mathbf{q}_{m-1}$  слова  $\mathbf{u}$  обязано содержать некоторое не первое вхождение этой буквы в  $\mathbf{u}$ .

Пусть  $z$  — буква, первое вхождение которой в слово  $\mathbf{u}$  принадлежит подслову  $\mathbf{q}_s$  для некоторого  $s \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ . Проверим, что  $z \in \text{mul}(\mathbf{q}_s\mathbf{q}_{s-1})$ . Если  $s = 1$ , то требуемое утверждение очевидно, поскольку подслово  $\mathbf{q}_1$  не содержит 0-разделителей слова  $\mathbf{u}$ , а  $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_0$  — суффикс слова  $\mathbf{u}$ . Потому мы можем считать, что  $s > 1$ . Ясно, что либо  $z = x_s$ , либо  $z \in \text{alph}(\mathbf{v}''_{2s+2}\mathbf{v}_{2s+1}\mathbf{v}'_{2s})$ . Очевидно, что если  $z = x_s$ , то  $z \in \text{alph}(\mathbf{q}_{s-1})$ . Предположим теперь, что  $z \in \text{alph}(\mathbf{v}''_{2s+2}\mathbf{v}_{2s+1}\mathbf{v}'_{2s})$ . Поскольку подслово  $\mathbf{q}_s$  слова  $\mathbf{u}$  не содержит  $(s - 1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ , это подслово не содержит и 0-разделителей слова  $\mathbf{u}$  по лемме 5.3. Следовательно,  $z \in \text{mul}(\mathbf{u})$ . Положим  $z' := h(\mathbf{q}_{s-2})$ . Ясно, что либо  $z' = h(\mathbf{v}''_{2s-2})$ , либо  $z' = x_{s-2}$ . Поэтому буква  $z'$  является  $(s - 2)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Если  $(1_{\mathbf{u}}z') < (2_{\mathbf{u}}z)$ , то  $h_1^{s-2}(\mathbf{u}, z) \neq h_2^{s-2}(\mathbf{u}, z)$  и потому  $D(\mathbf{u}, z) \leq s - 1$ . Тогда, по лемме 5.3, буква  $z$  является  $(s - 1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Однако  $\mathbf{q}_s$  не содержит  $(s - 1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ . Следовательно,  $(2_{\mathbf{u}}z) < (1_{\mathbf{u}}z')$ . Это означает, что буква  $2_{\mathbf{u}}z$  принадлежит подслову  $\mathbf{q}_s\mathbf{q}_{s-1}$  слова  $\mathbf{u}$ . Мы видим, что если некоторая буква принадлежит подслову  $\mathbf{q}_s$ , то подслово  $\mathbf{q}_s\mathbf{q}_{s-1}$  слова  $\mathbf{u}$  обязано содержать некоторое не первое вхождение этой буквы в  $\mathbf{u}$ .

Наконец, напомним, что буква  $2_{\mathbf{u}}x_k$  принадлежит подслову  $\mathbf{q}_{k-1}$  слова  $\mathbf{u}$ .

В силу сказанного в предыдущих трех абзацах, тождество (5.4) влечет тождество

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{2k+2}y_{m+1}\mathbf{v}_{2k+1}x_k y_{m+1}\mathbf{p} \approx \mathbf{v}_{2k+2}y_{m+1}\mathbf{v}_{2k+1}x_k y_{m+1}\mathbf{q}.$$

Аналогичным образом можно показать, что тождество (5.4) влечет

$$\mathbf{v}_{2k+2}y_{m+1}\mathbf{v}_{2k+1}y_{m+1}x_k\mathbf{p} \approx \mathbf{v}_{2k+2}y_{m+1}\mathbf{v}_{2k+1}y_{m+1}x_k\mathbf{q}.$$

Из этих тождеств совместно с тождеством (5.7) вытекает тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'\mathbf{u}\mathbf{u}''$ . Таким образом, последнее тождество выполнено в  $\mathbf{V}$ .

(iii) Возможны два случая.

**Случай 1:**  $h(\mathbf{u}'') = x$ . Если  $k = 0$ , то тождество  $\varepsilon_k$  является ничем иным как тождеством  $y_1x_0xy_1x \approx y_1x_0y_1x^2$ . Поскольку  $y \in \text{alph}(\mathbf{u}')$ , это тождество влечет  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'x\mathbf{u}''$ . Поэтому мы можем считать, что  $k > 0$ . Положим  $y_{k+1} := y$ . В силу следствия 5.7, существуют буквы  $x_0, x_1, \dots, x_k$  такие, что  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$  для любого  $0 \leq s \leq k$  и

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{2k+3}y_{k+1}\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}xy_{k+1}x\mathbf{p},$$

где

$$\mathbf{p} := \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}x_k \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0$$

для некоторых  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k+3} \in X^*$ . Ясно, что для любого  $s = 1, 2, \dots, k-1$ , найдутся такие слова  $\mathbf{v}'_{2s}, \mathbf{v}''_{2s} \in X^*$ , что  $\mathbf{v}_{2s} = \mathbf{v}'_{2s}\mathbf{v}''_{2s}$  и слово  $\mathbf{v}'_{2s}$  не содержит  $(s-1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ , в то время как либо  $\mathbf{v}''_{2s} = 1$ , либо  $h(\mathbf{v}''_{2s})$  есть  $(s-1)$ -разделитель слова  $\mathbf{u}$ . Положим  $\mathbf{v}''_{2k} := \mathbf{v}_{2k}$  и  $\mathbf{v}'_0 := \mathbf{v}_0$ . Пусть также

$$\mathbf{q}_s := \mathbf{v}''_{2s+2}x_s\mathbf{v}_{2s+1}x_{s+1}\mathbf{v}'_{2s}$$

для любого  $s = 0, 1, \dots, k-1$ . Если  $\varphi_2: X \rightarrow X^*$  есть подстановка

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \mapsto (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}),$$

то тождество  $\varphi_2(\varepsilon_k)$  совпадает с тождеством

$$y_{k+1}\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}xy_{k+1}x\mathbf{q} \approx y_{k+1}\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}y_{k+1}x^2\mathbf{q} \quad (5.8)$$

где

$$\mathbf{q} := \mathbf{q}_{k-1}\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}\mathbf{q}_{k-2}\mathbf{q}_{k-1} \cdots \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1.$$

Заметим, что  $\mathbf{p} = \mathbf{q}_{k-1}\mathbf{q}_{k-2} \cdots \mathbf{q}_0$ . Рассуждая как и в доказательстве п. (ii), можно показать, что

- если некоторая буква входит в слово  $\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}$ , то подслово  $\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}xy_{k+1}x\mathbf{q}_{k-1}$  слова  $\mathbf{u}$  обязано содержать некоторое не первое вхождение этой буквы в  $\mathbf{u}$ ;
- если некоторая буква входит в слово  $\mathbf{q}_s$ , то подслово  $\mathbf{q}_s\mathbf{q}_{s-1}$  слова  $\mathbf{u}$  обязано содержать некоторое не первое вхождение этой буквы в  $\mathbf{u}$ .

Тогда тождество (5.4) влечет тождество

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{2k+3}y_{k+1}\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}xy_{k+1}x\mathbf{p} \approx \mathbf{v}_{2k+3}y_{k+1}\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}xy_{k+1}x\mathbf{q}.$$

Аналогичным образом можно показать, что из (5.4) вытекает тождество

$$\mathbf{v}_{2k+3}y_{k+1}\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}y_{k+1}x^2\mathbf{p} \approx \mathbf{v}_{2k+3}y_{k+1}\mathbf{v}_{2k+2}x_k\mathbf{v}_{2k+1}y_{k+1}x^2\mathbf{q}.$$

Из последних полученных тождеств вместе с тождеством (5.8) вытекает тождество  $\mathbf{u} \approx$

$\mathbf{u}'\mathbf{u}x\mathbf{u}''$ . Таким образом, последнее тождество выполнено в  $\mathbf{V}$ .

**Случай 2:**  $h(\mathbf{u}'') \neq x$ . В силу леммы 5.2, существует такое  $r$ , что  $r$ -разложение слова  $\mathbf{u}$  максимально. Поскольку  $D(\mathbf{u}, x) = \infty$ , подслово  ${}_{1\mathbf{u}}x{}_{2\mathbf{u}}$  лежит в некотором  $r$ -блоке  $\mathbf{a}$  слова  $\mathbf{u}$ . Тогда  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 x \mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \mathbf{a} \mathbf{u}_2$  для некоторых  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in X^*$ .

Положим  $\mathbf{u}^\# := \mathbf{u}_1 \mathbf{a}_1 x \mathbf{u} \mathbf{a}_2 \mathbf{u}_2$ . Слово  $\mathbf{u}^\#$  отличается от слова  $\mathbf{u}$  только вхождением буквы  $x$ . Тогда, поскольку  $D(\mathbf{u}, x) = D(\mathbf{u}^\#, x) = \infty$ , тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\#$  является  $s$ -сбалансированным для любого  $s$ . В силу леммы 5.18(iii), тождество (5.5) является следствием тождества  $\varepsilon_k$ . Поэтому мы можем применить следствие 5.16, заключая, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_1 \text{ini}^2(\mathbf{a}_1 x \mathbf{u} \mathbf{a}_2) \mathbf{u}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{u}^\# \approx \mathbf{u}_1 \text{ini}^2(\mathbf{a}_1 x \mathbf{u} \mathbf{a}_2) \mathbf{u}_2.$$

Ясно, что  $\text{ini}^2(\mathbf{a}_1 x \mathbf{u} \mathbf{a}_2) = \text{ini}^2(\mathbf{a}_1 x \mathbf{u} \mathbf{a}_2)$ , так как  $x \in \text{alph}(\mathbf{a}_2) \setminus \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\#$ . Аналогичным образом можно показать, что в  $\mathbf{V}$  выполняется тождество  $\mathbf{u}_1 \mathbf{a}_1 x \mathbf{u} \mathbf{a}_2 \approx \mathbf{u}_1 \mathbf{a}_1 x^2 \mathbf{a}_2 \mathbf{u}_2$ . Тогда  $D(\mathbf{u}^\#, y) = k + 1$ , поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\#$  является  $s$ -сбалансированным для любого  $s$ . С учетом доказанного в случае 1, получаем, что тождество  $\mathbf{u}^\# \approx \mathbf{u}_1 \mathbf{a}_1 x^2 \mathbf{a}_2 \mathbf{u}_2$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Следовательно,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'\mathbf{u}x\mathbf{u}''$ , что и требовалось показать.

(iv) В силу леммы 5.2, существует такое  $r$ , что  $r$ -разложение слова  $\mathbf{u}$  максимально. Поскольку  $D(\mathbf{u}, x) = D(\mathbf{u}, y) = \infty$ , подслово  ${}_{1\mathbf{u}}x{}_{2\mathbf{u}}$  содержится в некотором  $r$ -блоке  $\mathbf{a}$  слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \mathbf{u} \mathbf{a}_2 x \mathbf{u} \mathbf{a}_3 x \mathbf{a}_4$  для некоторых  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \in X^*$ . Очевидно, что

$$\text{ini}^2(\mathbf{a}_1 \mathbf{u} \mathbf{a}_2 x \mathbf{u} \mathbf{a}_3 x \mathbf{a}_4) = \text{ini}^2(\mathbf{a}_1 \mathbf{u} \mathbf{a}_2 x \mathbf{u} \mathbf{a}_3 x \mathbf{a}_4).$$

Из этого факта и следствия 5.16 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'\mathbf{u}x\mathbf{u}''$ .

Лемма 5.21 доказана. □

**Лемма 5.22.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и  $\mathbf{a} \in X^*$ . Предположим, что  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \notin \text{alph}(\mathbf{a})$  и  $\text{sim}(\mathbf{a}) = \{x_k\}$ . Тогда многообразие  $\mathbf{P}_2^1\{x_k\}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \mathbf{b}_k &\approx \text{ini}(\mathbf{a}) \text{ini}(\mathbf{a}_{x_k}) \mathbf{b}_k, \\ y_m \mathbf{a} \mathbf{b}_{k,m+1} x_{m-1} \mathbf{c} \mathbf{b}_{m-1} &\approx y_m \text{ini}(\mathbf{a}) \text{ini}(\mathbf{a}_{x_k}) \mathbf{b}_{k,m+1} x_{m-1} \mathbf{c} \mathbf{b}_{m-1}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{c} \in \{x_m y_m, y_m x_m\}$ .

*Доказательство.* Легко проверить, что  $D(\mathbf{a} \mathbf{b}_k, x_s) = s$  для любого  $0 \leq s \leq k - 1$ . Пусть  $z$  — произвольная буква из  $\text{alph}(\mathbf{a})$ , имеющая минимальную глубину в слове  $\mathbf{a} \mathbf{b}_k$  (обозначим эту глубину через  $d$ ). Ясно, что  $d < \infty$ , так как  $h_1^{k-1}(\mathbf{a} \mathbf{b}_k, x_k) \neq x_{k-1} = h_2^{k-1}(\mathbf{a} \mathbf{b}_k, x_k)$  и потому  $D(\mathbf{a} \mathbf{b}_k, x_k) \leq k < \infty$ . Тогда, поскольку  $\text{alph}(\mathbf{a}) \subseteq \text{mul}(\mathbf{a} \mathbf{b}_k)$ , получаем, что  $d > 0$  и между первым и вторым вхождением буквы  $z$  в  $\mathbf{a} \mathbf{b}_k$  есть некоторый  $(d - 1)$ -разделитель  $t$ . В силу выбора буквы  $z$ ,  $t \notin \text{alph}(\mathbf{a})$ . Тогда  $z \in \text{sim}(\mathbf{a})$ . Отсюда  $z = x_k$ . Согласно лемме 5.3, буква  $x_{k-1}$  является  $(k - 1)$ -разделителем слова  $\mathbf{a} \mathbf{b}_k$ . Тогда применим лемму 5.4(ii) и получим, что  $D(\mathbf{a} \mathbf{b}_k, z) = k$ . В силу выбора буквы  $z$ ,  $D(\mathbf{a} \mathbf{b}_k, a) > k$  для любого  $a \in \text{alph}(\mathbf{a}) \setminus \{x_k\}$  и  $D(\mathbf{a} \mathbf{b}_k, x_k) =$

$k$ . Пусть  $\text{alph}(\mathbf{a}) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ . Без ограничения общности можем считать, что

$$\mathbf{a} = a_1^{(1)} \mathbf{a}_1 a_2^{(1)} \mathbf{a}_2 \cdots a_r^{(1)} \mathbf{a}_r$$

для некоторых  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in X^*$ . Тожество (5.4) позволяет нам удалить третьи и последующие вхождения букв из подслов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  слова  $\mathbf{a}$ . Поэтому мы можем считать, что эти подслова содержат только вторые вхождения букв в  $\mathbf{a}$ . Согласно леммам 5.17 и 5.18(ii),(iii), в многообразии  $\mathbf{P}\{\kappa_k\}$  выполнены тождества (5.5),  $\delta_p^q$  и  $\varepsilon_p$  для любых  $p \geq q \geq k$ . Тогда, поскольку  $D(\mathbf{ab}_k, x_k) = k$  и  $D(\mathbf{ab}_k, a) > k$  для любого  $a \in \text{alph}(\mathbf{a}) \setminus \{x_k\}$ , из пп. (ii)–(iv) леммы 5.21 следует, что  $\mathbf{P}\{\kappa_k\}$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{ab}_k = a_1 \mathbf{a}_1 a_2 \mathbf{a}_2 \cdots a_r \mathbf{a}_r \mathbf{b}_k \approx a_1 a_2 \cdots a_r \mathbf{a}_1 a_2 \cdots a_r \mathbf{b}_k = \text{ini}(\mathbf{a}) \mathbf{a}_1 a_2 \cdots a_r \mathbf{b}_k.$$

Очевидно, что  $\mathbf{P}_2^1$  удовлетворяет тождеству  $\text{ini}(\mathbf{a}) \mathbf{a}_1 a_2 \cdots a_{m+1} \mathbf{b}_k \approx \text{ini}(\mathbf{a}) \text{ini}(\mathbf{a}_{x_k}) \mathbf{b}_k$  и потому тождеству  $\mathbf{ab}_k \approx \text{ini}(\mathbf{a}) \text{ini}(\mathbf{a}_{x_k}) \mathbf{b}_k$ . Подставляя  $x_{m-1} \mathbf{c}$  вместо  $x_{m-1}$  в последнее тождество, получим тождество

$$\mathbf{ab}_{k,m+1} x_{m-1} \mathbf{c} x_m \mathbf{d} \approx \text{ini}(\mathbf{a}) \text{ini}(\mathbf{a}_{x_k}) \mathbf{b}_{k,m+1} x_{m-1} \mathbf{c} x_m \mathbf{d} \quad (5.9)$$

где

$$\mathbf{d} := \begin{cases} \mathbf{b}_0, & \text{если } m = 1, \\ \mathbf{b}_{m-1,m-1} \mathbf{c} \mathbf{b}_{m-2}, & \text{если } m > 1. \end{cases}$$

Тогда  $\mathbf{P}_2^1\{\kappa_k\}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} y_m \mathbf{ab}_{k,m+1} x_{m-1} \mathbf{c} \mathbf{b}_{m-1} &\stackrel{(5.4)}{\approx} y_m \mathbf{ab}_{k,m+1} x_{m-1} \mathbf{c} x_m \mathbf{d} \\ &\stackrel{(5.9)}{\approx} y_m \text{ini}(\mathbf{a}) \text{ini}(\mathbf{a}_{x_k}) \mathbf{b}_{k,m+1} x_{m-1} \mathbf{c} x_m \mathbf{d} \\ &\stackrel{(5.4)}{\approx} y_m \text{ini}(\mathbf{a}) \text{ini}(\mathbf{a}_{x_k}) \mathbf{b}_{k,m+1} x_{m-1} \mathbf{c} \mathbf{b}_{m-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать. □

Тожество, обе части которого являются 2-ограниченными словами, будем называть *2-ограниченным*. Положим

$$\Psi := \{(5.4), (5.5), \gamma_k, \delta_k^m, \varepsilon_{k-1}, \sigma_2 \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq k\}.$$

Для данного многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  и системы тождеств  $\Sigma$ , через  $\Sigma(\mathbf{V})$  будем обозначать множество всех тождеств из  $\Sigma$ , выполненных в  $\mathbf{V}$ .

**Предложение 5.23.** *Любое многообразие  $\mathbf{V}$  из интервала  $[\text{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1]$  может быть задано внутри многообразия  $\mathbf{P}_2^1$  некоторым подмножеством множества тождеств  $\Psi$ .*

*Доказательство.* Из включения  $\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{V}$  и леммы 5.10 вытекает, что любое 2-ограниченное тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{V}$ , является сбалансированным. В силу этого фак-

та и леммы 5.12, многообразие  $\mathbf{V}$  может быть задано внутри многообразия  $\mathbf{P}_2^1$  некоторым множеством 2-ограниченных сбалансированных тождеств.

Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное нетривиальное 2-ограниченное сбалансированное тождество, выполненное в  $\mathbf{V}$ . По лемме 1.2, это тождество является  $r$ -инвертируемым для некоторого  $r \in \mathbb{N}_0$ . Мы будем вести доказательство индукцией по  $r$ .

**База индукции.** Если  $r = 0$ , то  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  и доказывать нечего.

**Шаг индукции.** Пусть  $r > 0$ . Тогда существуют буквы  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{u})$  такие, что слово  $\mathbf{u}$  содержит  $i_{\mathbf{u}}xj_{\mathbf{u}}y$  в качестве подслова, а буква  $j_{\mathbf{u}}y$  предшествует букве  $i_{\mathbf{u}}x$  в слове  $\mathbf{v}$ . Обозначим через  $\mathbf{w}$  слово, получающееся из слова  $\mathbf{u}$  перестановкой местами букв  $i_{\mathbf{u}}x$  и  $j_{\mathbf{u}}y$ . Тождество  $\mathbf{v} \approx \mathbf{w}$  является  $(r - 1)$ -инвертируемым. Поэтому, в силу предположения индукции, нам остается показать, что  $\Psi(\mathbf{V})$  влечет  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$ .

Из включения  $\mathbf{LRB} \subset \mathbf{V}$  и леммы 1.19 вытекает, что  $(i, j) \neq (1, 1)$ . Отсюда  $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , так как тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является 2-ограниченным. Если  $(i, j) = (2, 2)$ , то  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  следует из  $\sigma_2 \in \Psi(\mathbf{V})$ . Пусть теперь  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ .

Заметим сначала, что тождество  $\mathbf{u}(x, y) \approx \mathbf{v}(x, y)$  эквивалентно по модулю (5.4) тождеству (5.5). Следовательно, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (5.5).

Предположим, что  $D(\mathbf{u}, y) = \infty$ . Тогда буква  $x$  не является  $r$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$  ни для какого  $r \in \mathbb{N}_0$ . Следовательно,  $D(\mathbf{u}, x) = \infty$  по лемме 5.3. Тогда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  вытекает из системы  $\{(5.4), (5.5)\} \subseteq \Psi(\mathbf{V})$  в силу леммы 5.21(iv). Поэтому мы можем считать, что  $D(\mathbf{u}, y) = s$  для некоторого  $s \in \mathbb{N}$ .

Возможны два случая.

**Случай 1:  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$ .** В силу леммы 5.2, существует такое  $k$ , что  $k$ -разложения слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  максимальны. Из следствия 5.11 и включения  $\mathbf{F}_{k+1} \subset \mathbf{D}_1$  вытекает, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $k$ -сбалансированным. Отсюда следует, что  $x$  не может быть  $r$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$  ни для какого  $r \geq 0$ . По лемме 5.3,  $D(\mathbf{u}, x) = \infty$ .

Теперь применим лемму 5.6 и получим, что существуют такие буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{s-1}$ , что  $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$  для любого  $0 \leq r < s$  и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2s+1} \overset{(1)}{y} \mathbf{u}_{2s} \overset{(1)}{x_{s-1}} \mathbf{u}_{2s-1} \overset{(2)}{y} \mathbf{u}_{2s-2} \overset{(1)}{x_{s-2}} \mathbf{u}_{2s-3} \overset{(2)}{x_{s-1}} \mathbf{u}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{s-3}} \\ & \cdot \mathbf{u}_{2s-5} \overset{(2)}{x_{s-2}} \cdots \mathbf{u}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{u}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{u}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{u}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{u}_0 \\ \approx & \mathbf{v}_{2s+1} \overset{(1)}{y} \mathbf{v}_{2s} \overset{(1)}{x_{s-1}} \mathbf{v}_{2s-1} \overset{(2)}{y} \mathbf{v}_{2s-2} \overset{(1)}{x_{s-2}} \mathbf{v}_{2s-3} \overset{(2)}{x_{s-1}} \mathbf{v}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{s-3}} \\ & \cdot \mathbf{v}_{2s-5} \overset{(2)}{x_{s-2}} \cdots \mathbf{v}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{v}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{v}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{v}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

для некоторых слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2s+1}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2s+1}$ . Ясно, что  $i_{\mathbf{u}}x$  — последняя буква слова  $\mathbf{u}_{2s-1}$ . Поскольку  $D(\mathbf{u}, x) = \infty$ , имеем  $(2_{\mathbf{u}}x) < (1_{\mathbf{u}}x_{s-2})$ . Отсюда следует, что  $2_{\mathbf{u}}x$  входит в подслово  $\mathbf{u}_{2s-2}$ . В силу следствия 5.11,  $D(\mathbf{v}, x) = \infty$ . Поскольку  $(2_{\mathbf{v}}y) < (1_{\mathbf{v}}x)$  и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является хорошо  $k$ -сбалансированным, обе буквы  $1_{\mathbf{v}}x$  и  $2_{\mathbf{v}}x$  лежат в  $\mathbf{v}_{2s-2}$ . Тогда подставим

$y_s$  вместо  $y$  в тождество

$$\mathbf{u}(x_0, x_1, \dots, x_{s-1}, x, y) \approx \mathbf{v}(x_0, x_1, \dots, x_{s-1}, x, y)$$

и получим тождество  $\varepsilon_{s-1}$ . Таким образом, последнее тождество выполнено в  $\mathbf{V}$ . Нам остается применить лемму 5.21(iii) и получить, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  является следствием системы  $\{(5.4), \varepsilon_{s-1}\} \subseteq \Psi(\mathbf{V})$ .

**Случай 2:**  $\mathbf{D}_1 \not\subseteq \mathbf{V}$ . В силу леммы 1.18, существует такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\mathbf{F}_{k+1} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Пусть  $k$  — наименьшее число с таким свойством. Тогда  $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{V}$ . В силу леммы 5.14,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\kappa_k$ . Тогда, по лемме 5.17,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\delta_k^k$ .

Предположим, что  $k < s$ . Тогда, в силу пп. (ii) и (iii) леммы 5.18, в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\varepsilon_{s-1}$  и  $\delta_r^s$  для любого  $r \geq s$ . Ясно, что  $D(\mathbf{u}, x) \geq k$ , так как в противном случае  $D(\mathbf{u}, y) \leq k < s$ . Если  $D(\mathbf{u}, x) = \infty$ , то примени лемму 5.21(iii) и получим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  является следствием системы  $\{(5.4), \varepsilon_{s-1}\} \subseteq \Psi(\mathbf{V})$ . Если  $D(\mathbf{u}, x) = r$  для некоторого  $k \leq r < \infty$ , то, в силу леммы 5.21(ii), тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  является следствием системы  $\{(5.4), \delta_r^s\} \subseteq \Psi(\mathbf{V})$ . Поэтому мы можем без ограничения общности считать, что  $s \leq k$ .

Если  $D(\mathbf{u}, x) = \infty$ , то, по лемме 5.10, условия (5.2) и (5.3) выполнены для любого  $\ell = 1, 2, \dots, k$ . Это позволяет нам дословно повторить рассуждения из второго параграфа случая 1 и получить, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  является следствием  $\{(5.4), \varepsilon_{s-1}\} \subseteq \Psi(\mathbf{V})$ . Поэтому мы можем без ограничения общности считать, что  $D(\mathbf{u}, x) = p$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ .

Тогда, в силу следствия 5.7, существуют буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$  такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{u}_{2p+1} \overset{(1)}{x} \mathbf{u}_{2p} \overset{(1)}{x_{p-1}} \mathbf{u}_{2s-1} \overset{(2)}{x} \mathbf{u}_{2p-2} \overset{(1)}{x_{p-2}} \mathbf{u}_{2p-3} \overset{(2)}{x_{p-1}} \mathbf{u}_{2p-4} \overset{(1)}{x_{p-3}} \\ & \cdot \mathbf{u}_{2p-5} \overset{(2)}{x_{p-2}} \cdots \mathbf{u}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{u}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{u}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{u}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

для некоторых  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2p+1} \in X^*$ ,  $D(\mathbf{u}, x_r) = r$  и подслово  $\mathbf{u}_{2r+2}$  не содержит  $r$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$  для любого  $r = 0, 1, \dots, k-1$ .

Ясно, что буква  $1_{\mathbf{u}}y$  входит в подслово  $\mathbf{u}_{2p+1}$ , а буква  $2_{\mathbf{u}}y$  есть первая буква подслова  $\mathbf{u}_{2p}$ . В силу леммы 5.4, существует такая буква  $y_{s-1}$ , что  $D(\mathbf{u}, y_{s-1}) = s-1$  и  $(1_{\mathbf{u}}y) < (1_{\mathbf{u}}y_{s-1}) < (2_{\mathbf{u}}y)$ . Положим

$$Z := \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x, y_{s-1}, y\}.$$

Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

**Случай 2.1:**  $s = 1$ . Тогда  $y_{s-1} = y_0 \in \text{sim}(\mathbf{u}) = \text{sim}(\mathbf{v})$  и

$$\mathbf{u}(Z) = y_0 x y x_{p-1} x \mathbf{b}_{p-1}.$$

Пусть  $p \leq k$ . Поскольку  $(2_{\mathbf{v}}y) < (1_{\mathbf{v}}x)$  и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $(k-1)$ -сбалансированным по следствию 5.11, имеем  $\mathbf{v}(Z) = y_0 x y x_{p-1} x \mathbf{b}_{p-1}$ . Если  $\varphi: X \rightarrow X^*$  есть подстановка  $(x, y) \mapsto (x_p, y_s)$ , то тождество  $\varphi(\mathbf{u}(Z)) \approx \varphi(\mathbf{v}(Z))$  совпадает с  $\gamma_p$ .

Пусть теперь  $p > k$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $(k-1)$ -сбалансированным по

следствию 5.11, получаем, что  $\mathbf{v}(Z) = uu_0 \mathbf{a}' \mathbf{b}_k$  для некоторого слова  $\mathbf{a}'$  такого, что  $\text{sim}(\mathbf{a}') = \{x_k, y\}$  и  $\text{mul}(\mathbf{a}') = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{p-1}, x\}$ . Из леммы 1.19 и того факта, что  $(2_{\mathbf{v}}y) < (1_{\mathbf{v}}x)$  вытекает, что  $\text{ini}(\mathbf{a}') = uxx_{p-1}x_{p-2} \cdots x_k$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{a}' = \mathbf{u}\mathbf{a}$  для некоторого  $\mathbf{a} \in X$ . Поскольку  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\kappa_k$ , из леммы 5.22 вытекает, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$\begin{aligned} uu_0 \mathbf{u} \mathbf{a} \mathbf{b}_k &\approx uu_0 u \text{ini}(\mathbf{a}) \text{ini}(\mathbf{a}_{x_k}) \mathbf{b}_k = uu_0 u x x_{p-1} x_{p-2} \cdots x_k x_{p-1} x_{p-2} \cdots x_{k+1} \mathbf{b}_k \\ &\approx uu_0 u x x_{p-1} x \mathbf{b}_{p-1, k+1} \mathbf{b}_k = uu_0 u x x_{p-1} x \mathbf{b}_{p-1} \end{aligned}$$

и потому тождество  $\gamma_p$ .

Мы видим, что тождество  $\gamma_p$  выполняется в  $\mathbf{V}$  в любом случае. Нам остается применить лемму 5.21(i), заключая, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  является следствием системы  $\{(5.4), \gamma_p\} \subseteq \Psi(\mathbf{V})$ .

**Случай 2.2:**  $s > 1$ . Ясно, что  $p \geq s - 1$ , так как в противном случае  $h_1^p(\mathbf{u}, y) \neq h_2^p(\mathbf{u}, y)$  и потому  $D(\mathbf{u}, y) < s$ . Предположим, что  $p = s - 1$ . Тогда  $p \leq k$ . В силу следствия 5.11, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $(k - 1)$ -сбалансированным. Откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \mathbf{v}_{2p+1} \overset{(1)}{x} \mathbf{v}_{2p} \overset{(1)}{x_{p-1}} \mathbf{v}_{2p-1} \overset{(2)}{x} \mathbf{v}_{2p-2} \overset{(1)}{x_{p-2}} \mathbf{v}_{2p-3} \overset{(2)}{x_{p-1}} \mathbf{v}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{p-3}} \\ & \cdot \mathbf{v}_{2p-5} \overset{(2)}{x_{p-2}} \cdots \mathbf{v}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{v}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{v}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{v}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

для некоторых  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2p+1} \in X^*$ . Если  $\varphi: X \rightarrow X^*$  есть подстановка  $(x, y) \mapsto (x_p, x)$ , то тождество

$$\varphi(\mathbf{u}(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x, y)) \approx \varphi(\mathbf{v}(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x, y))$$

совпадает с  $\kappa_{s-1}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\delta_{s-1}^{s-1}$  по лемме 5.17. Остается применить лемму 5.21(ii), заключая, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  является следствием системы  $\{(5.4), \delta_{s-1}^{s-1}\} \subseteq \Psi(\mathbf{V})$ . Поэтому мы можем считать, что  $p > s - 1$ . В частности,  $x \neq y_{s-1}$ .

Поскольку  $s > 1$ , буква  $y_{s-1}$  принадлежит множеству  $\text{mul}(\mathbf{u}) = \text{mul}(\mathbf{v})$ . Поскольку  $D(\mathbf{u}, y) = s$ , между буквами  $1_{\mathbf{u}}y$  и  $2_{\mathbf{u}}y$  не может находиться  $(s - 2)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ . Из этого факта и леммы 5.8 следует, что буква  $2_{\mathbf{u}}y_{s-1}$  принадлежит одному из подслов  $\mathbf{u}_{2s-2}$ ,  $\mathbf{u}_{2s-3}$  и  $\mathbf{u}_{2s-4}$ . Положим  $y_{s-2} := h_2^{s-1}(\mathbf{u}, y_{s-1})$ . Используя леммы 5.4 и 5.5, можно показать, что  $1_{\mathbf{u}}y_{s-2}$  следует за  $2_{\mathbf{u}}x_s$ . Поскольку подслово  $\mathbf{u}_{2s-2}$  не содержит  $(s - 2)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ , буква  $1_{\mathbf{u}}y_{s-2}$  не принадлежит этому подслову  $\mathbf{u}_{2s-2}$ . Следовательно,  $2_{\mathbf{u}}y_{s-1}$  входит в одно из подслов  $\mathbf{u}_{2s-3}$  и  $\mathbf{u}_{2s-4}$ . Поскольку  $s \leq k$  и, согласно следствию 5.11, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $(k - 1)$ -сбалансированным, буква  $2_{\mathbf{v}}y_{s-1}$  лежит между  $2_{\mathbf{v}}x_{s-2}$  и  $1_{\mathbf{v}}x_{s-3}$ . Это означает, что буква  $2_{\mathbf{v}}y_{s-1}$  входит в одно из подслов  $\mathbf{v}_{2s-3}$  и  $\mathbf{v}_{2s-4}$ .

Ясно, что

$$\mathbf{u}(Z) = uu_{s-1} x u x_{p-1} x \mathbf{b}_{p-1, s} x_{s-2} \mathbf{c} \mathbf{b}_{s-2},$$

где  $\mathbf{c} \in \{x_{s-1}y_{s-1}, y_{s-1}x_{s-1}\}$ .

Пусть  $p \leq k$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $(k - 1)$ -сбалансированным и  $(2_{\mathbf{v}}y) < (1_{\mathbf{v}}x)$ , имеем

$$\mathbf{v}(Z) = uu_{s-1} u x x_{p-1} x \mathbf{b}_{p-1, s} x_{s-2} \mathbf{d} \mathbf{b}_{s-2},$$

где  $\mathbf{d} \in \{x_{s-1}y_{s-1}, y_{s-1}x_{s-1}\}$ . Тогда тождество  $\mathbf{u}(Z) \approx \mathbf{v}(Z)$  совпадает с тождеством

$$yy_{s-1}xyx_{p-1}\mathbf{b}_{p-1,s}x_{s-2}\mathbf{c}\mathbf{b}_{s-2} \approx yy_{s-1}yx_{p-1}\mathbf{b}_{p-1,s}x_{s-2}\mathbf{d}\mathbf{b}_{s-2}. \quad (5.10)$$

Пусть теперь  $p > k$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $(k-1)$ -сбалансированным и  $({}_{2v}y) < ({}_{1v}x)$ , имеем

$$\mathbf{v}(Z) = yy_{s-1}\mathbf{a}'\mathbf{b}_{k,s}x_{s-2}\mathbf{d}\mathbf{b}_{s-2},$$

где  $\mathbf{d} \in \{x_{s-1}y_{s-1}, y_{s-1}x_{s-1}\}$ , а  $\mathbf{a}'$  — некоторое слово такое, что  $\text{sim}(\mathbf{a}') = \{x_k, y\}$  и  $\text{mul}(\mathbf{a}') = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{p-1}, x\}$ . Из леммы 1.19 и того факта, что  $({}_{2v}y) < ({}_{1v}x)$ , следует, что  $\text{ini}(\mathbf{a}') = yxx_{p-1}x_{p-2} \cdots x_k$ . Тогда  $\mathbf{a}' = \mathbf{y}\mathbf{a}$  для некоторого слова  $\mathbf{a}$ . Поскольку  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\kappa_k$ , из леммы 5.22 вытекает, что в  $\mathbf{V}$  выполнены также тождества

$$\begin{aligned} yy_{s-1}y\mathbf{a}\mathbf{b}_{k,s}x_{s-2}\mathbf{d}\mathbf{b}_{s-2} &\approx yy_{s-1}y\text{ini}(\mathbf{a})\text{ini}(\mathbf{a}_{x_k})\mathbf{b}_{k,s}x_{s-2}\mathbf{d}\mathbf{b}_{s-2} \\ &= yy_{s-1}yxx_{p-1} \cdots x_kxx_{p-1} \cdots x_{k+1}\mathbf{b}_{k,s}x_{s-2}\mathbf{d}\mathbf{b}_{s-2} \\ &\approx yy_{s-1}yxx_{p-1}x\mathbf{b}_{p-1,s}x_{s-2}\mathbf{d}\mathbf{b}_{s-2} \end{aligned}$$

и потому тождество (5.10).

Мы видим, что тождество (5.10) в любом случае выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\delta_p^{s-1}$ , поскольку

$$\begin{aligned} & y_s \overset{(1)}{y_{s-1}} x_p y_s \cdots x_{s-2} \overset{(2)}{x_{s-1}} \overset{(2)}{y_{s-1}} x_{s-3} x_{s-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \\ (5.4) \quad & \approx y_s \overset{(1)}{y_{s-1}} x_p y_s \cdots (x_{s-2} \overset{(2)}{x_{s-1}} \overset{(2)}{y_{s-1}}) \mathbf{c} x_{s-3} (x_{s-2} \overset{(4)}{x_{s-1}} \overset{(4)}{y_{s-1}}) \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \\ (5.10) \quad & \approx y_s \overset{(1)}{y_{s-1}} y_s x_p \cdots (x_{s-2} \overset{(2)}{x_{s-1}} \overset{(2)}{y_{s-1}}) \mathbf{d} x_{s-3} (x_{s-2} \overset{(4)}{x_{s-1}} \overset{(4)}{y_{s-1}}) \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \\ (5.4) \quad & \approx y_s \overset{(1)}{y_{s-1}} y_s x_p \cdots x_{s-2} \overset{(2)}{x_{s-1}} \overset{(2)}{y_{s-1}} x_{s-3} x_{s-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1. \end{aligned}$$

Осталось применить лемму 5.21(ii), получая, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  является следствием системы  $\{(5.4), \delta_p^{s-1}\} \subseteq \Psi(\mathbf{V})$ .  $\square$

#### 5.1.4. Описание решетки $\mathfrak{L}(\mathbf{P}_2^1)$

**Предложение 5.24.** Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{P}_2^1)$  имеет вид, изображенный на рисунке 5.1, где

$$\mathbf{K}_k := \mathbf{P}_2^1\{\gamma_k^3\}, \mathbf{L}_k := \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_{k-1}\}, \mathbf{L} := \mathbf{P}_2^1\{(5.5)\}, \mathbf{O}_k^m := \mathbf{P}_2^1\{\delta_k^m\}.$$

*Доказательство.* Напомним из предыдущего раздела, что

$$\Psi := \{(5.4), (5.5), \gamma_k, \delta_k^m, \varepsilon_{k-1}, \sigma_2 \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq k\}.$$

В силу леммы 5.13(ii), решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{P}_2^1)$  является дизъюнктивным объединением решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{M}(x))$  и интервала  $[\mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1]$ . Согласно лемме 1.16, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{M}(x))$  имеет

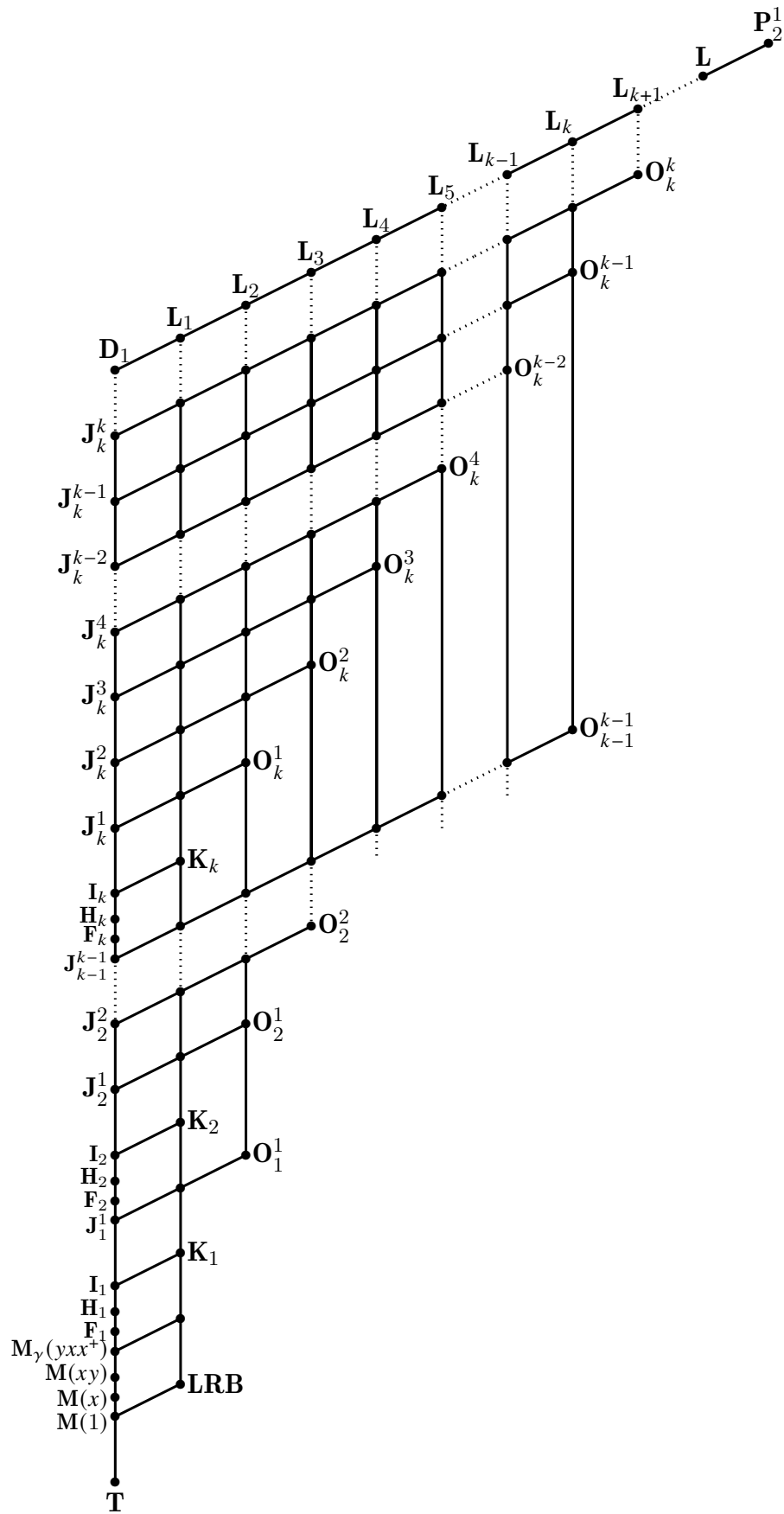


Рис. 5.1: решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{P}_2^1)$

вид, изображенный на рис. 5.1. По лемме 5.13(i), интервал  $[\mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1]$  есть дизъюнктивное объединение интервалов  $[\mathbf{F}_1, \mathbf{D}_1]$  и  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1]$ . В силу леммы 1.18, интервал  $[\mathbf{F}_1, \mathbf{D}_1]$  имеет вид, изображенный на рис. 5.1. Поскольку, в силу леммы 5.18, любое тождество из множества  $\Psi \setminus \{(5.4), \sigma_2\}$  вместе с (5.4) влечет (5.5), многообразии  $\mathbf{P}_2^1\{(5.5)\}$  является наибольшим собственным подмногообразием многообразия  $\mathbf{P}_2^1$  (этот результат также можно вывести из [73, лемма 6.7]). Пусть  $\mathbf{V}$  — произвольное многообразие из интервала  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1\{(5.5)\}]$ .

Предположим, что  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_1^1\} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Поскольку, в силу пп. (ii) и (iii) леммы 5.18,  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_1^1\}$  удовлетворяет тождествам (5.5),  $\delta_k^m$  и  $\varepsilon_k$  для любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $1 \leq m \leq k$ , из предложения 5.23 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\varepsilon_0$  или  $\gamma_\ell$  для некоторого  $\ell \in \mathbb{N}$ . Тогда применим лемму 5.18(i) и получим, что  $\mathbf{P}_2^1\{\gamma_\ell\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}$  для любого  $\ell \in \mathbb{N}$ . Откуда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\varepsilon_0$ . Иными словами,  $\mathbf{V}$  принадлежит интервалу  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}]$ .

Предположим теперь, что  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\} \subseteq \mathbf{V}$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда, поскольку в  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}$  нарушается тождество  $\varepsilon_{k-1}$ , из леммы 5.18 и предложения 5.23 следует, что  $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2^1\{(5.5)\}$ .

Наконец, предположим, что  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\} \subseteq \mathbf{V}$ , но  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_{k+1}^{k+1}\} \not\subseteq \mathbf{V}$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ . Заметим, что

- (а)  $\mathbf{J}_s^1 \not\subseteq \mathbf{P}_2^1\{\gamma_s\}$ , но  $\mathbf{J}_s^1 \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_s^1\}$  для любого  $s \in \mathbb{N}$ ;
- (б)  $\mathbf{I}_{s+1} \not\subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_s^s\}$ , но  $\mathbf{I}_{s+1} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\gamma_{s+1}\}$  для любого  $s \in \mathbb{N}$ ;
- (в)  $\mathbf{J}_s^{t+1} \not\subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_s^t\}$ , но  $\mathbf{J}_s^{t+1} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_s^{t+1}\}$  для любых  $1 \leq t < s$ ;
- (г)  $\mathbf{J}_{s+1}^t \not\subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_s^t\}$ , но  $\mathbf{J}_{s+1}^t \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_{s+1}^t\}$  для любых  $1 \leq t \leq s$ .

Из этих фактов и леммы 5.18(ii),(iii) вытекает, что в многообразии  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}$  нарушаются тождества  $\gamma_p$  и  $\delta_p^q$ , где  $p \in \mathbb{N}$  и  $1 \leq q < k$ . Снова применим лемму 5.18(ii),(iii) и получим, что  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_{k+1}^{k+1}\}$  удовлетворяет  $\delta_r^m$  и  $\varepsilon_r$  для всех  $r$  и  $m$  таких, что  $k+1 \leq m \leq r$ . Тогда, поскольку  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\} \subseteq \mathbf{V}$  и  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_{k+1}^{k+1}\} \not\subseteq \mathbf{V}$ , из предложения 5.23 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств  $\varepsilon_k$  и  $\delta_p^k$  для некоторого  $p \geq k$ . Еще раз применим лемму 5.18(ii) и получим, что  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^k\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}$ . Следовательно,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\varepsilon_k$ . Таким образом,  $\mathbf{V}$  принадлежит интервалу  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}]$ .

Мы видим, что интервал  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1\{(5.5)\}]$  является дизъюнктивным объединением интервалов  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}]$ ,  $\{\mathbf{P}_2^1\{(5.5)\}\}$  и  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}]$ , где  $k$  пробегает множество натуральных чисел. Таким образом, остается установить, что эти интервалы имеют вид, изображенный на рис. 5.1.

Проверим сначала требуемое утверждение для интервала  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}]$ . В силу леммы 5.18,  $\mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}$  удовлетворяет  $\{(5.5), \varepsilon_r \mid r \in \mathbb{N}\}$ . Тогда из предложения 5.23 вытекает, что любое многообразие из интервала  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}]$  может быть задано внутри  $\mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}$  некоторым подмножеством множества  $\{\gamma_p, \delta_p^q \mid 1 \leq q \leq p\}$ ; в частности,  $\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1 = \mathbf{P}_2^1\{\gamma_1\}$ . Из леммы 5.19 вытекает, что  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^q, \varepsilon_0\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\gamma_{p+1}\}$  для любых  $1 \leq q \leq p$ . Кроме того, согласно лемме 5.18(ii),  $\mathbf{P}_2^1\{\gamma_p\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_p^q, \varepsilon_0\}$ . Следовательно, интервал  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}]$  является объединением одноэлементного интервала  $\{\mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}\}$  и интервалов вида  $[\mathbf{P}_2^1\{\gamma_p\}, \mathbf{P}_2^1\{\gamma_{p+1}\}]$ , где  $p \in \mathbb{N}$ . В силу леммы 5.18,  $\mathbf{P}_2^1\{\gamma_{p+1}\}$  удовлетворяет тождествам  $\gamma_s$ ,  $\delta_s^t$  и  $\varepsilon_r$  для всех  $s$ ,  $t$  и  $r$  таких, что  $p+1 \leq s$ ,  $1 \leq t \leq s$  и  $r \geq 0$ . Из условий (а)–(г) вытекает, что в  $\mathbf{P}_2^1\{\gamma_p\}$

нарушаются тождества  $\gamma_s$  и  $\delta_s^t$  для всех  $s$  и  $t$  таких, что  $1 \leq t \leq s < p$ . В силу этого факта и предложения 5.23, любое многообразие из интервала  $[\mathbf{P}_2^1\{\gamma_p\}, \mathbf{P}_2^1\{\gamma_{p+1}\}]$  можно задать внутри многообразия  $\mathbf{P}_2^1\{\gamma_{p+1}\}$  некоторым подмножеством множества  $\{\gamma_p, \delta_p^1, \delta_p^2, \dots, \delta_p^p\}$ . Еще раз применим лемму 5.18 и получим, что интервал  $[\mathbf{P}_2^1\{\gamma_p\}, \mathbf{P}_2^1\{\gamma_{p+1}\}]$  является цепью

$$\mathbf{P}_2^1\{\gamma_p\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_p^1, \gamma_{p+1}\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_p^2, \gamma_{p+1}\} \subseteq \dots \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_p^p, \gamma_{p+1}\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\gamma_{p+1}\}.$$

Остается заметить, что все эти включения являются строгими в силу условий (а)–(г). Мы видим, что интервал  $[\mathbf{P}_2^1\{\gamma_p\}, \mathbf{P}_2^1\{\gamma_{p+1}\}]$  и потому весь интервал  $[\mathbf{LRB} \vee \mathbf{F}_1, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_0\}]$  имеют вид, изображенный на рис. 5.1.

Осталось показать, что для любого  $k \in \mathbb{N}$  интервал  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}]$  имеет вид как на рис. 5.1. Доказательство этого факта очень похоже на рассуждения из предыдущего параграфа, но мы приводим его для полноты изложения. Из условий (а)–(г) следует, что в  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}$  нарушаются тождества  $\gamma_r$ ,  $\delta_s^t$  и  $\varepsilon_t$  для всех  $r, s$  и  $t$  таких, что  $r \geq 0, s \geq 1, t \leq s$  и  $1 \leq t < k$ . В силу леммы 5.18,  $\mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}$  удовлетворяет  $\{(5.5), \varepsilon_r \mid r \geq k\}$ . Тогда из предложения 5.23 вытекает, что любое многообразие из интервала  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}]$  может быть задано внутри  $\mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}$  некоторым подмножеством множества  $\{\delta_p^q \mid k \leq q \leq p\}$ . Из леммы 5.20 вытекает, что  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^q, \varepsilon_k\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_{p+1}^k\}$  для любых  $k \leq q \leq p$ . Кроме того, из леммы 5.18 вытекает, что  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^k\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_p^q, \varepsilon_k\}$ . Следовательно, интервал  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}]$  является объединением одноэлементного интервала  $\{\mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}\}$  и интервалов вида  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\delta_{p+1}^k\}]$ , где  $p \geq k$ . Наконец, из леммы 5.18, предложения 5.23 и условий (а)–(г) вытекает, что всякое многообразие из интервала  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\delta_{p+1}^k\}]$  можно задать внутри  $\mathbf{P}_2^1\{\delta_{p+1}^k\}$  некоторым подмножеством множества  $\{\delta_p^k, \delta_p^{k+1}, \dots, \delta_p^p\}$ . Снова применим лемму 5.18 и получим, что интервал  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\delta_{p+1}^k\}]$  является цепью

$$\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^k\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_p^{k+1}, \delta_{p+1}^k\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_p^{k+2}, \delta_{p+1}^k\} \subseteq \dots \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_p^p, \delta_{p+1}^k\} \subseteq \mathbf{P}_2^1\{\delta_{p+1}^k\}.$$

Остается заметить, что все включения являются строгими в силу условий (а)–(г). Мы видим, что интервал  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_p^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\delta_{p+1}^k\}]$  и потому весь интервал  $[\mathbf{P}_2^1\{\delta_k^k\}, \mathbf{P}_2^1\{\varepsilon_k\}]$  имеют вид, изображенный на рис. 5.1.  $\square$

### 5.1.5. Пример 6-элементного моноида, порождающего многообразие с континуумом подмногообразий

В данном разделе мы укажем еще один 6-элементный моноид, порождающий многообразие с континуумом подмногообразий.

**Предложение 5.25.** *Моноид*

$$A^1 := \langle a, e \mid e = e^2, a^3 = ae = 0, ea^2 = a^2 \rangle \cup \{1\} = \{0, 1, a, e, a^2, ea\}$$

*порождает многообразие с континуумом подмногообразий.*

Для любого  $n \in \mathbb{N}$ , на протяжении всего данного раздела мы будем использовать следующее обозначение для счетной серии слов:

$$\mathbf{w}_n := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^n z_i y_i^{(n)} \right) x \left( \prod_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^n y_i^{(n-j)} y_i^{(n+1-j)} \right) \right).$$

Нам потребуется две вспомогательных леммы.

**Лемма 5.26.** *Для всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq n$  и  $0 \leq k \leq n$ , справедливы равенства  $D(\mathbf{w}_n, x) = n + 1$ ,  $D(\mathbf{w}_n, y_i^{(k)}) = k$ ,  $D(\mathbf{w}_n, t_i) = 0$  и  $D(\mathbf{w}_n, z_i) = 1$ .*

*Доказательство.* Ясно, что  $\text{sim}(\mathbf{w}_n) = \{t_1, t_2, \dots, t_n, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\}$ . Поэтому  $D(\mathbf{w}_n, t_i) = D(\mathbf{w}_n, y_i^{(0)}) = 0$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $z_i \in \text{mul}(\mathbf{w}_n)$ . Поскольку в слове  $\mathbf{w}_n$  между буквами  $1_{\mathbf{w}_n} z_i$  и  $2_{\mathbf{w}_n} z_i$  расположена простая буква  $t_i$ , имеем  $D(\mathbf{w}_n, z_i) = 1$ . Далее, предположим, что  $D(\mathbf{w}_n, y_i^{(j)}) = j$  для любого  $0 \leq j < k$ . Поскольку в слове  $\mathbf{w}_n$  между буквами  $1_{\mathbf{w}_n} y_i^{(k)}$  и  $2_{\mathbf{w}_n} y_i^{(k)}$  лежит буква  $1_{\mathbf{w}_n} y_i^{(k-1)}$  глубины  $k - 1$ , получаем, что  $D(\mathbf{w}_n, y_i^{(k)}) = k$ . Наконец, в слове  $\mathbf{w}_n$  между буквами  $1_{\mathbf{w}_n} x$  и  $2_{\mathbf{w}_n} x$  лежит буква  $1_{\mathbf{w}_n} y_1^{(n)}$  глубины  $n$ . Отсюда  $D(\mathbf{w}_n, x) = n + 1$ .  $\square$

Для любого  $N \subseteq \mathbb{N}$ , положим  $W_N := \{\mathbf{w}_n \mid n \in N\}$ .

**Лемма 5.27.** *Пусть  $N$  — подмножество множества  $\mathbb{N}$ . Если  $n \notin N$ , то в моноиде  $M(W_N)$  выполнено тождество  $\mathbf{w}_n \approx x^2(\mathbf{w}_n)_x$ .*

*Доказательство.* Лемма 1.6 сводит наши рассуждения к случаю, когда множество  $N$  одноэлементно, т.е.  $N = \{k\}$  для некоторого  $k \neq n$ . Рассмотрим произвольную подстановку  $\varphi: X \rightarrow M(\mathbf{w}_k)$ . Проверим, что  $\varphi(\mathbf{w}_n) = \varphi(x^2(\mathbf{w}_n)_x)$ . Если  $\varphi(x) = 1$ , то требуемое утверждение очевидно. Пусть теперь  $\varphi(x) \neq 1$ . Тогда  $\varphi(x^2(\mathbf{w}_n)_x) = 0$ , так как слово  $\mathbf{w}_k$  является бесквадратным. Рассуждая от противного, предположим, что  $\varphi(\mathbf{w}_n)$  — подслово слова  $\mathbf{w}_k$ , т.е. существуют слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  такие, что  $\mathbf{w}_k = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w}_n)\mathbf{b}$ .

Заметим, что любое подслово длины 2 слова  $\mathbf{w}_k$  имеет единственное вхождение в это слово. Поскольку слово  $\mathbf{w}_k$  является 2-ограниченным, отсюда следует, что

(\*) для любого  $c \in \text{mul}(\mathbf{w}_n)$ , либо  $\varphi(c) = 1$ , либо  $(\varphi(1_{\mathbf{w}_n} c), \varphi(2_{\mathbf{w}_n} c)) = (1_{\mathbf{w}_k} d, 2_{\mathbf{w}_k} d)$  для некоторого  $d \in \text{mul}(\mathbf{w}_k)$ .

В частности,  $\varphi(1_{\mathbf{w}_n} x)$  есть первое вхождение некоторой буквы в слово  $\mathbf{w}_k$ . Поскольку, по лемме 5.26,  $D(\mathbf{w}_n, x) = n + 1$  и глубина каждой буквы в слове  $\mathbf{w}_k$  не превышает  $k + 1$ , из этого факта и леммы 5.9 вытекает, что  $n \leq k$ .

Далее, очевидно, что слово  $\varphi(x z_1 y_1^{(n)} z_2 y_2^{(n)} \cdots z_n y_n^{(n)} x)$  не является линейным и не содержит простых букв слова  $\mathbf{w}_k$ . В силу условия (\*), длина этого слова не превышает  $2n + 2$ . Однако каждое подслово слова  $\mathbf{w}_k$  длины меньше  $2k + 2$ , не содержащее простых букв слова  $\mathbf{w}_k$ , является линейным. Отсюда  $k \leq n$ , что противоречит предположению, что  $n \neq k$ .  $\square$

*Доказательство предложения 5.25.* В [73, предложение 8.1] показано, что множество

$$\Sigma := \{x^3 \approx x^4, yzx^3 \approx x y x z x, x^3 y^3 \approx y^3 x^3, y t x^3 y \approx y t y x^3, \sigma_1, \sigma_2\}$$

является базисом тождеств для многообразия, порожденного моноидом  $A^1$ . Проверим, что каждое тождество из множества  $\Sigma$  выполнено в моноиде  $M(W_{\mathbb{N}})$ . Для этого рассмотрим произвольную подстановку  $\varphi: X \rightarrow M(W_{\mathbb{N}})$  и произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  из  $\Sigma$ . Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$ , поскольку в любом случае  $\mathbf{u}_x = \mathbf{v}_x$ . Поэтому далее мы можем считать, что  $\varphi(x) \neq 1$ . Тогда если  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — одно из первых четырех тождеств в  $\Sigma$ , то  $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}) = 0$ , поскольку все слова во множестве  $W_{\mathbb{N}}$  являются 2-ограниченными. Предположим теперь, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с одним из тождеств  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Если  $\varphi(y) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$ , так как в любом случае  $\mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y$ . Пусть теперь  $\varphi(y) \neq 1$ . Тогда ни одно из слов  $\varphi(xu)$  и  $\varphi(ux)$  не может входить ни в какое из слов из множества  $W_{\mathbb{N}}$  в качестве подслова, поскольку любое подслово длины 2 слова  $\mathbf{w}_n$  состоит из первого вхождения некоторой буквы и последнего вхождения некоторой буквы в  $\mathbf{w}_n$ . Отсюда  $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}) = 0$ . Таким образом,  $M(W_{\mathbb{N}})$  удовлетворяет  $\Sigma$ .

Остается проверить, что решетка  $\mathfrak{L}(M(W_{\mathbb{N}}))$  континуальна. Если  $N_1$  и  $N_2$  — различные подмножества множества  $\mathbb{N}$ , то без ограничения общности можно считать, что существует  $n \in N_1 \setminus N_2$ . Согласно лемме 5.27, моноид  $M(W_{N_2})$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_n \approx x^2(\mathbf{w}_n)_x$ . Однако это тождество не выполнено  $M(W_{N_1})$ . Следовательно, моноиды  $M(W_{N_1})$  и  $M(W_{N_2})$  порождают различные многообразия. Поскольку множество всех подмножеств счетного множества континуально и любой моноид вида  $M(W_{\mathbb{N}})$  является фактором моноида  $M(W_{\mathbb{N}})$ , моноид  $M(W_{\mathbb{N}})$ , а значит и моноид  $A^1$  порождает многообразие с континуумом подмногообразий.  $\square$

## § 5.2. Минимальные моноиды, порождающие конечно универсальные многообразия

### 5.2.1. Основной результат

Основным результатом данного параграфа является следующая

**Теорема 5.28.** *Наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие равен 6.*

*Доказательство.* Мы докажем теорему 5.28 по модулю предложения 5.29 ниже, которое утверждает, что моноид Брандта  $B_2^1$  порождает конечно универсальное многообразие. В силу этого результата, остается показать, что любой не более чем 5-элементный моноид порождает многообразие, не являющееся конечно универсальным.

Очевидно, что никакое многообразие с конечным числом подмногообразий не может быть конечно универсальным. Отсюда и из упоминавшихся ранее результатов работы [74] вытекает, что остается рассмотреть только 5-элементный моноид  $P_2^1$ . Из рис. 5.1 видно, что ни для каких трех попарно несравнимых подмногообразий  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  многообразия  $\mathbf{P}_2^1$  одновременно не могут выполняться равенства  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y} = \mathbf{X} \vee \mathbf{Z} = \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$  и  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}$ . Поэтому в решетку  $\mathfrak{L}(P_2^1)$  нельзя вложить 5-элементную модулярную недистрибутивную решетку  $\mathfrak{L}_5$ , изображенную на рис. 5.2. Таким образом, многообразие  $\mathbf{P}_2^1$  также не является конечно универсальным.  $\square$

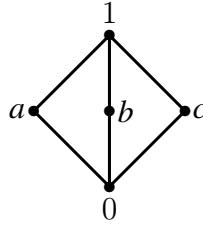


Рис. 5.2: Решетка  $\mathfrak{L}_5$

### 5.2.2. Многообразие $\mathbf{B}_2^1$ конечно универсально

Основным результатом данного раздела является

**Предложение 5.29.** *Моноид Брандта  $\mathbf{B}_2^1$  порождает конечно универсальное многообразие.*

Сначала сформулируем основной технический результат текущего параграфа и выведем из него предложение 5.29. Для того, чтобы это сделать нам потребуется ввести ряд обозначений. Напомним, что  $S_k^n$  обозначает  $n$ -ю прямую степень группы  $S_k$ . Если  $\xi \in S_k^n$ , то через  $\xi_i$  будем обозначать  $i$ -ю компоненту элемента  $\xi$ . Для любых  $n \geq 2$  и  $\xi \in S_2^n$  определим слово

$$\mathbf{w}_\xi := \mathbf{p} \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) a \left( \prod_{i=1}^n x_{1\xi_i}^{(i)} x_{2\xi_i}^{(i)} \right) b \left( \prod_{i=1}^n b_i \right) \mathbf{q}\mathbf{r}, \quad (5.11)$$

где

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^n z'_i t'_i \right) \left( \prod_{i=1}^n z''_i t''_i \right), \quad (5.12)$$

$$\mathbf{q} := \left( \prod_{i=0}^n s_i y_i \right) t, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{r} := b y_0 \left( \prod_{i=1}^n x_1^{(i)} z_i a_i z'_i b_i z''_i x_2^{(i)} y_i \right) a. \quad (5.14)$$

Через  $W_n$  будем обозначать множество всех слов вида  $\mathbf{w}_\xi$ , где  $\xi \in S_2^n$ . Очевидно, что  $|W_n| = |S_2^n| = 2^n$ . Следующее утверждение является техническим ядром всего текущего параграфа.

**Предложение 5.30.** *Для любого  $n \geq 2$  решетка  $\mathfrak{C}\mathfrak{q}(W_n)$  антиизоморфна интервалу  $[\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(v_{W_n})\}, \mathbf{M}(W_n)]$  решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(W_n))$ .*

Сначала мы быстро выведем предложение 5.29 из предложения 5.30, а затем, в разделе 5.2.3, докажем предложение 5.30. Нам потребуется еще одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 5.31.** *Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(xzytxy)$ . Предположим, что  $\mathbf{u} \in W_n$ . Тогда  $\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{v}'\mathbf{q}\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$  — слова, определяемые формулами (5.12), (5.13) и (5.14) соответственно, а  $\mathbf{v}'$  — линейное слово в алфавите  $\{a, a_i, b, b_i, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ .*

*Доказательство.* В силу леммы 1.21,  $\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{v}'\mathbf{q}\mathbf{r}'$ , где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  — слова, определяемые формулами (5.12) и (5.13), а  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{r}'$  — линейные слова такие, что  $\text{alph}(\mathbf{v}') = \{a, a_i, b, b_i, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$  и  $\text{alph}(\mathbf{r}) = \text{alph}(\mathbf{r}')$ . Поскольку  $\mathbf{u}(b, s_0, t, y_0) = bs_0y_0tb y_0$ , слово  $\mathbf{v}(b, s_0, t, y_0)$  обязано совпасть со словом  $bs_0y_0tb y_0$ . Следовательно,  $({}_{1\mathbf{r}'}b) < ({}_{1\mathbf{r}'}y_0)$ . Аналогичным образом мы можем показать, что все буквы встречаются в слове  $\mathbf{r}'$  в том же порядке, что и в слове  $\mathbf{r}$  и потому  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ .  $\square$

*Доказательство предложения 5.29.* Положим  $\mathbf{C} := \mathbf{M}(\{W_n \mid n \geq 2\})$ . Мы покажем сначала, что многообразие  $\mathbf{C}$  является конечно универсальным, а затем установим включение  $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}_2^1$ .

В самом деле, из включения  $\mathbf{M}(W_n) \subseteq \mathbf{C}$  и предложения 5.30 вытекает, что решетка  $\mathfrak{Cq}(W_n)$  антиизоморфна некоторой подрешетке решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{C})$ . Поскольку  $|W_n| = 2^n$ , легко видеть, что для любого  $k = 1, 2, \dots, 2^n$  решетка  $\mathfrak{Cq}(\{1, 2, \dots, k\})$  антиизоморфна некоторой подрешетке в  $\mathfrak{Cq}(W_n)$ . Следовательно, решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{C})$  содержит антиизоморфную копию любой решетки отношений эквивалентности на конечном множестве. Для завершения доказательства осталось сослаться на предложение 2.2. Таким образом, многообразие  $\mathbf{C}$  является конечно универсальным.

Нам осталось установить включение  $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}_2^1$ . Для этого возьмем  $n \geq 2$ ,  $\xi \in S_2^n$  и рассмотрим произвольное тождество  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $B_2^1$ . Нетрудно убедиться, что слова  $xuzxu$  и  $xuzux$  являются изотермами для моноида  $B_2^1$  (см. доказательство теоремы 10 в [80]). Из этого факта и леммы 1.3 вытекает, что  $M(xuzxu, xuzux) \in \mathbf{B}_2^1$ . Очевидно, что  $\mathbf{M}(xzytxu) \subseteq \mathbf{M}(xuzxu, xuzux)$ . По лемме 5.31,  $\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{v}'\mathbf{q}\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$  — слова, определяемые формулами (5.12), (5.13) и (5.14) соответственно, а  $\mathbf{v}'$  — линейное слово в алфавите  $\{a, a_i, b, b_i, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Теперь рассмотрим произвольные буквы  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{v}')$  такие, что  $({}_{1\mathbf{w}_\xi}x) < ({}_{1\mathbf{w}_\xi}y)$ . Тогда  $\mathbf{w}_\xi(x, y, t) = xyt\mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a} \in \{xy, yx\}$ . Поскольку при любом  $\mathbf{a}$  слово является изотермом для  $\mathbf{M}(xuzxu, xuzux)$ , отсюда следует, что  $({}_{1\mathbf{v}}x) < ({}_{1\mathbf{v}}y)$ . Таким образом,

$$\mathbf{v}' = \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) a \left( \prod_{i=1}^n x_{1\xi_i}^{(i)} x_{2\xi_i}^{(i)} \right) b \left( \prod_{i=1}^n b_i \right),$$

и потому  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_\xi$ . Итак, мы показали, что любое слово из  $W_n$  является изотермом для  $M(xuzxu, xuzux)$  и значит для  $B_2^1$ . По лемме 1.3,  $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}_2^1$ , что и требовалось доказать.  $\square$

### 5.2.3. Доказательство предложения 5.30

Теперь перейдем к доказательству предложения 5.30. Для этого нам потребуется серия вспомогательных результатов. Напомним, что если  $W \subseteq X^*$  и  $\pi \in \mathfrak{Cq}(W)$ , то

$$\text{Id}(\pi) := \{\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W\}.$$

**Лемма 5.32.** *Для каждого  $n \geq 2$ , слова  $xu$ ,  $xux$ ,  $xuzxty$ ,  $xzytxu$  и  $xytzszxy$  являются изотермами для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(v_{W_n})\}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим подстановку  $\varphi: X \rightarrow X^*$ , определяемую следующим образом:

$$(x, y, z, t, s) \mapsto (x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, y_1, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_1^{(4)}, x_2^{(4)} \cdots x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) bb_1 b_2 \cdots b_n s_0 y_0 s_1, \\ s_2 y_2 s_3 y_3 \cdots s_n y_n t b y_0 x_1^{(1)} z_1 a_1 z_1' b_1 z_1''$$

Очевидно, что слово  $\varphi(xytzxsxzy)$  является подсловом слова  $\mathbf{w}_\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — единица группы  $S_2^n$ . Отсюда следует, что любое нетривиальное тождество одной из частей которого является слово  $xytzxsxzy$ , влечет нетривиальное тождество вида  $\mathbf{w}_\varepsilon \approx \mathbf{w}$ . Поэтому слово  $xytzxsxzy$  является изотермом для  $\mathbf{M}(W_n)$ . Далее, несложно проверить, что моноид  $M(xytzxsxzy)$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta$  для любых  $\xi, \eta \in S_2^n$ . Тогда, по лемме 1.3, слово  $xytzxsxzy$  является изотермом для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ . С помощью аналогичных рассуждений мы можем показать, что слова  $xu$ ,  $xux$ ,  $xuzxtu$ ,  $xzytxu$  суть изотермы для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ .  $\square$

**Лемма 5.33.** Пусть  $n \geq 2$  и  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ . Предположим, что  $\mathbf{u} \in W_n$ . Тогда  $\mathbf{v} \in W_n$ .

*Доказательство.* В силу леммы 5.32, слова  $xytzxsxzy$  и  $xzytxu$  являются изотермами для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ . Тогда применим леммы 1.3 и 5.31, заключая, что  $\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{v}'\mathbf{q}\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$  — слова, определяемые формулами (5.12), (5.13) и (5.14) соответственно, а  $\mathbf{v}'$  — линейное слово в алфавите  $\{a, a_i, b, b_i, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Далее,  $(1_{\mathbf{v}}a_i) < (1_{\mathbf{v}}a_{i+1})$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , так как слово  $\mathbf{u}(a_i, a_{i+1}, s_i, t, y_i)$  совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $xytzxsxzy$ , которое является изотермом для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ . Подобным же образом мы можем показать, что

$$(1_{\mathbf{v}}a_n) < (1_{\mathbf{v}}a), \quad (1_{\mathbf{v}}a) < (1_{\mathbf{v}}x_1^{(1)}), \quad (1_{\mathbf{v}}a) < (1_{\mathbf{v}}x_2^{(1)}), \\ (1_{\mathbf{v}}x_1^{(i)}) < (1_{\mathbf{v}}x_1^{(i+1)}), \quad (1_{\mathbf{v}}x_1^{(i)}) < (1_{\mathbf{v}}x_2^{(i+1)}), \\ (1_{\mathbf{v}}x_2^{(i)}) < (1_{\mathbf{v}}x_1^{(i+1)}), \quad (1_{\mathbf{v}}x_2^{(i)}) < (1_{\mathbf{v}}x_2^{(i+1)}), \\ (1_{\mathbf{v}}x_1^{(n)}) < (1_{\mathbf{v}}b), \quad (1_{\mathbf{v}}x_2^{(n)}) < (1_{\mathbf{v}}b), \quad (1_{\mathbf{v}}b) < (1_{\mathbf{v}}b_1), \quad (1_{\mathbf{v}}b_i) < (1_{\mathbf{v}}b_{i+1})$$

для любого  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_\eta$  для некоторого  $\eta \in S_2^n$ . Следовательно,  $\mathbf{v} \in W_n$ .  $\square$

**Лемма 5.34.** Пусть  $n \geq 2$ ,  $\xi, \zeta, \eta \in S_2^n$  и  $\mathbf{w} \in X^*$ . Предположим, что  $\mathbf{w}_\zeta = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w}_\xi)\mathbf{b}$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w}_\eta)\mathbf{b}$  для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^*$ . Если тождество  $\mathbf{w}_\zeta \approx \mathbf{w}$  нетривиально, то подстановка  $\varphi$  действует тождественно на множестве  $\text{alph}(\mathbf{w}_\xi)$  и потому  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$  и  $(\mathbf{w}_\zeta, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}_\xi, \mathbf{w}_\eta)$ .

*Доказательство.* Поскольку тождество  $\mathbf{w}_\zeta \approx \mathbf{w}$  нетривиально, из предложения 1.1 и леммы 5.33 следует, что  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\nu$  для некоторого  $\nu \in S_2^n \setminus \{\zeta\}$ . Тогда найдется  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  такое, что  $(1_{\nu_j}, 2_{\nu_j}) = (2_{\zeta_j}, 1_{\zeta_j})$ . Это возможно лишь в том случае, когда  $x_{1_{\zeta_j}}^{(j)} \in \text{alph}(\varphi(x_{1_{\xi_k}}^{(k)}))$  и  $x_{2_{\zeta_j}}^{(j)} \in \text{alph}(\varphi(x_{2_{\xi_k}}^{(k)}))$  для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  такого, что  $(1_{\xi_k}, 2_{\xi_k}) \neq (1_{\eta_k}, 2_{\eta_k})$ . Заметим, что слово  $\mathbf{w}_\zeta$  является бесквадратным и всякое подслово длины  $> 1$  встречается в  $\mathbf{w}_\zeta$  не более одного раза. Отсюда вытекает, что

(\*) для любой буквы  $c \in \text{mul}(\mathbf{w}_\zeta)$ , слово  $\varphi(c)$  является либо пустым словом, либо буквой.

Отсюда вытекает, что  $x_{1\zeta_j}^{(j)} = \varphi(x_{1\xi_k}^{(k)})$  и  $x_{2\zeta_j}^{(j)} = \varphi(x_{2\xi_k}^{(k)})$ . Далее, поскольку  $(2_{\mathbf{w}_\zeta} x_1^{(j)}) < (2_{\mathbf{w}_\zeta} x_2^{(j)})$  и  $(2_{\mathbf{w}_\xi} x_1^{(k)}) < (2_{\mathbf{w}_\xi} x_2^{(k)})$ , мы имеем, что  $x_1^{(j)} = \varphi(x_1^{(k)})$  и  $x_2^{(j)} = \varphi(x_2^{(k)})$  (это означает, что  $\xi_k = \zeta_j$ ). Отсюда

$$\varphi(z_k a_k z'_k b_k z''_k) = z_j a_j z'_j b_j z''_j.$$

Из условия (\*) следует, что  $\varphi(a_k) = a_j$ ,  $\varphi(b_k) = b_j$ ,  $\varphi(z_k) = z_j$ ,  $\varphi(z'_k) = z'_j$  и  $\varphi(z''_k) = z''_j$ . Тогда

$$\varphi\left(\left(\prod_{i=k+1}^n a_i\right) a \left(\prod_{i=1}^n x_{1\xi_i}^{(i)} x_{2\xi_i}^{(i)}\right) b \left(\prod_{i=1}^{k-1} b_i\right)\right) = \left(\prod_{i=j+1}^n a_i\right) a \left(\prod_{i=1}^n x_{1\zeta_i}^{(i)} x_{2\zeta_i}^{(i)}\right) b \left(\prod_{i=1}^{j-1} b_i\right).$$

Если  $k > j + 1$ , то  $\varphi(b_{k-j}) = x_{2\zeta_n}^{(n)}$  и  $\varphi(b_{k-j+1}) = b_1$ , что противоречит тому, что  $(2_{\mathbf{w}_\xi} b_{k-j}) < (2_{\mathbf{w}_\xi} b_{k-j+1})$  и  $(2_{\mathbf{w}_\zeta} b_1) < (2_{\mathbf{w}_\zeta} x_{2\zeta_n}^{(n)})$ . Если  $k = j + 1$ , то  $\varphi(b) = x_{2\zeta_n}^{(n)}$  и  $\varphi(b_1) = b$ , что противоречит тому, что  $(2_{\mathbf{w}_\xi} b) < (2_{\mathbf{w}_\xi} b_1)$  и  $(2_{\mathbf{w}_\zeta} b_1) < (2_{\mathbf{w}_\zeta} x_{2\zeta_n}^{(n)})$ . Отсюда  $k \leq j$ . Подобным же образом мы можем показать, что  $j \leq k$  и потому  $k = j$ . Тогда, в силу условия (\*),  $\varphi(x_{1\xi_i}^{(i)}) = x_{1\zeta_i}^{(i)}$  и  $\varphi(x_{2\xi_i}^{(i)}) = x_{2\zeta_i}^{(i)}$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Поскольку  $(2_{\mathbf{w}_\zeta} x_1^{(i)}) < (2_{\mathbf{w}_\zeta} x_2^{(i)})$  и  $(2_{\mathbf{w}_\xi} x_1^{(i)}) < (2_{\mathbf{w}_\xi} x_2^{(i)})$ , отсюда следует, что  $\xi = \zeta$  и

$$\varphi(z_i a_i z'_i b_i z''_i) = z_i a_i z'_i b_i z''_i$$

для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Применим условие (\*) еще раз, заключая, что  $\varphi(a_i) = a_i$ ,  $\varphi(b_i) = b_i$ ,  $\varphi(z_i) = z_i$ ,  $\varphi(z'_i) = z'_i$ ,  $\varphi(z''_i) = z''_i$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Отсюда вытекает, что  $\varphi(a) = a$ ,  $\varphi(b) = b$  и  $\varphi(y_i) = y_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Следовательно,  $\varphi(y_0) = y_0$ ,  $\varphi(y_n) = y_n$  и потому  $\varphi(t) = t$ ,  $\varphi(t_i) = t_i$ ,  $\varphi(t'_i) = t'_i$ ,  $\varphi(t''_i) = t''_i$ ,  $\varphi(s_i) = s_i$ . Таким образом, подстановка  $\varphi$  действует тождественно на множестве  $\text{alph}(\mathbf{w}_\xi)$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$  и потому  $(\mathbf{w}_\zeta, \mathbf{w}) = (\varphi(\mathbf{w}_\xi), \varphi(\mathbf{w}_\eta)) = (\mathbf{w}_\xi, \mathbf{w}_\eta)$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие 5.35.** Пусть  $n \geq 2$ ,  $\pi \in \mathfrak{Cq}(W_n)$ , а  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\pi)\}$ . Предположим, что  $\mathbf{u} \in W_n$ . Тогда  $\mathbf{v} \in W_n$  и  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$ .

*Доказательство.* В силу предложения 1.1, найдется конечная последовательность (попарно различных) слов  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m = \mathbf{v}$  такая, что тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  либо выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , либо непосредственно вытекает из некоторого тождества системы  $\text{ld}(\pi)$ . Согласно лемме 5.33, слово  $\mathbf{v}_i$  принадлежит множеству  $W_n$  для некоторого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Тогда из леммы 1.3 и предположения, что все слова  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  являются попарно различными, следует, что тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  не выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ . Следовательно, тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(\pi)$ . Остается применить лемму 5.34, заключая, что  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) \in \pi$ , откуда  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$ .  $\square$

**Лемма 5.36.** Пусть  $n \geq 2$  и  $\zeta \in S_2^n$ . Слово  $\mathbf{w}$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\nu_{\mathbf{w}_n})\}$ , если выполнено одно из следующих утверждений:

- (i)  $\mathbf{w}$  получается из  $\mathbf{w}_\zeta$  заменой некоторого вхождения кратной буквы некоторой буквой  $h \notin \text{alph}(\mathbf{w}_\zeta)$ ;

- (ii)  $\mathbf{w}$  получается из  $\mathbf{w}_\zeta$  заменой некоторого подслова длины  $> 1$  некоторой буквой  $h \notin \text{alph}(\mathbf{w}_\zeta)$ ;
- (iii)  $\mathbf{w}$  — собственное подслово слова  $\mathbf{w}_\zeta$ .

*Доказательство.* (i) Слово  $\mathbf{w}$  получается из  $\mathbf{w}_\zeta$  заменой некоторого вхождения кратной буквы  $c$  некоторой буквой  $h \notin \text{alph}(\mathbf{w}_\zeta)$ . Ясно, что  $\psi(\mathbf{w}) = \mathbf{w}_\zeta$ , где  $\psi: X \rightarrow X^*$  — подстановка  $(h) \mapsto (c)$ . Поскольку, по лемме 5.32, слово  $hu$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)$  и  $c, h \in \text{sim}(\mathbf{w})$ , отсюда вытекает, что слово  $\mathbf{w}$  — изотерм для  $\mathbf{M}(W_n)$ . Предположим, что слово  $\mathbf{w}$  не является изотермом для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(v_{W_n})\}$ . Тогда, с учетом сказанного и предложения 1.1, получаем, что некоторое нетривиальное тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  непосредственно вытекает из некоторого тождества вида  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta$ . В силу симметрии можно считать, что  $\mathbf{w} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w}_\xi)\mathbf{b}$  и  $\mathbf{w}' = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w}_\eta)\mathbf{b}$  для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^*$ . Отсюда  $\mathbf{w}_\zeta = \psi(\mathbf{w}) = \psi(\mathbf{a})\psi(\varphi(\mathbf{w}_\xi))\psi(\mathbf{b})$ . Тогда  $\psi(\mathbf{w}') \neq \psi(\mathbf{w})$ , поскольку  $c, h \in \text{sim}(\mathbf{w})$ , тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  нетривиально, и, в силу леммы 5.32, слово  $hu$  является изотермом для многообразия  $\text{var}\{\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta\}$ . Теперь применим лемму 5.34, заключая, что подстановка  $\psi\varphi$  действует тождественно на множестве  $\text{alph}(\mathbf{w}_\xi)$  и потому  $\psi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{b}) = 1$  и  $\mathbf{w}_\zeta = \mathbf{w}_\xi$ . Тогда  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$  по определению подстановки  $\psi$ . Следовательно,  $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{w}_\xi)$ . Поскольку  $c \in \text{sim}(\mathbf{w})$ , найдется буква  $c' \in \text{sim}(\mathbf{w}_\xi)$  такая, что  $c \in \text{alph}(\varphi(c'))$ . Ясно, что  $\psi(c) = c$ . Отсюда вытекает, что  $c \in \text{alph}(\psi(\varphi(c')))$ . Поскольку отображение  $\psi\varphi$  действует тождественно на  $\text{alph}(\mathbf{w}_\xi)$ , мы имеем, что  $c = c'$ . Но это противоречит тому факту, что  $c \in \text{mul}(\mathbf{w}_\zeta) = \text{mul}(\mathbf{w}_\xi)$  и  $c' \in \text{sim}(\mathbf{w}_\xi)$ .

(ii) Слово  $\mathbf{w}$  получается из  $\mathbf{w}_\zeta$  заменой подслова  $cd$  некоторой буквой  $h \notin \text{alph}(\mathbf{w}_\zeta)$ . Поскольку любое подслово длины  $> 1$  слова  $\mathbf{w}_\zeta$  содержит букву, кратную в этом слове, мы можем считать без ограничения общности, что  $c \in \text{mul}(\mathbf{w}_\zeta)$ . Тогда слово  $\psi(\mathbf{w})$ , где  $\psi: X \rightarrow X^*$  — подстановка  $(h) \mapsto (hd)$ , получается из слова  $\mathbf{w}_\zeta$  заменой одного вхождения буквы  $c$  буквой  $h$ . В силу п. (i), слово  $\psi(\mathbf{w})$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(v_{W_n})\}$ . Следовательно, слово  $\mathbf{w}$  также является изотермом для этого многообразия.

(iii) Пусть  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$  — слова, получающиеся из слова  $\mathbf{w}_\zeta$  заменой букв  ${}_{1\mathbf{w}_\zeta}z_1$  и  ${}_{2\mathbf{w}_\zeta}a$  на букву  $h$  соответственно. Ясно, что если некоторое собственное подслово слова  $\mathbf{w}_\zeta$  не является изотермом для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(v_{W_n})\}$ , то по крайней мере одно из слов  $\mathbf{w}_1$  или  $\mathbf{w}_2$  также не является изотермом для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(v_{W_n})\}$ . В силу п. (i), отсюда вытекает, что  $\mathbf{w}$  — изотерм для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(v_{W_n})\}$ .  $\square$

**Лемма 5.37.** Пусть  $n \geq 2$ , а  $\mathbf{u}$  — слово такое, что  $\mathbf{u}_C = \mathbf{w}_\zeta$  для некоторого  $\zeta \in S_2^n$  и некоторого  $C \subseteq \text{alph}(\mathbf{u})$ . Предположим, что выполнены следующие три утверждения:

- (а) любое подслово слова  $\mathbf{u}$  длины  $> 1$  имеет единственное вхождение в слово  $\mathbf{u}$ ;
- (б) в слове  $\mathbf{u}$  между  ${}_{1\mathbf{u}}a_1$  и  ${}_{1\mathbf{u}}b_n$  и между  ${}_{2\mathbf{u}}b$  и  ${}_{2\mathbf{u}}a$  нет простых букв;
- (в) существует  $c \in C$  такое, что либо  $({}_{1\mathbf{u}}a_1) < ({}_{1\mathbf{u}}c) < ({}_{1\mathbf{u}}b_n)$ , либо  $({}_{2\mathbf{u}}b) < ({}_{2\mathbf{u}}c) < ({}_{2\mathbf{u}}a)$ .

Если  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — нетривиальное тождество, непосредственно следующее из некоторого тождества вида  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta$ , где  $\xi, \eta \in S_2^n$ , то  $\mathbf{v}_C = \mathbf{w}_\zeta$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w}_\xi)\mathbf{b}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{w}_\eta)\mathbf{b}$  для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и некоторой подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^*$ . Тогда  $\mathbf{w}_\zeta = \psi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{a})\psi(\varphi(\mathbf{w}_\xi))\psi(\mathbf{b})$ , где  $\psi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, определяемая формулой

$$\psi(v) := \begin{cases} 1, & \text{если } v \in C, \\ v, & \text{если } v \notin C. \end{cases}$$

Рассуждая от противного, предположим, что  $\mathbf{v}_C = \psi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{w}_\zeta$ . Тогда, по лемме 5.34, подстановка  $\psi\varphi$  действует тождественно на множестве  $\text{alph}(\mathbf{w}_\xi)$  и потому  $\psi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{b}) = 1$  и  $\mathbf{w}_\zeta = \mathbf{w}_\xi$ . Отсюда вытекает, что  $\text{alph}(\mathbf{ab}) \subseteq C$ . Предположим, что  $(1_{\mathbf{u}}a_1) < (1_{\mathbf{u}}c) < (1_{\mathbf{u}}b_n)$  для некоторого  $c \in C$ . Тогда найдется буква  $c' \in \text{alph}(\mathbf{w}_\xi)$  такая, что  $\varphi$  отображает некоторое вхождение буквы  $c'$  в подслово слова  $\mathbf{u}$ , содержащее  $1_{\mathbf{u}}c$ . Из того факта, что  $\psi(\varphi(c')) = c'$ , следует, что  $\varphi(c')$  — слово длины  $> 1$ . Согласно условию леммы, слово  $\mathbf{u}$  может содержать не более одного вхождения слова  $\varphi(c')$  в качестве подслова. Это возможно лишь в том случае когда  $c' \in \text{sim}(\mathbf{w}_\xi)$ . Поскольку между  $1_{\mathbf{u}}a_1$  и  $1_{\mathbf{u}}b_n$  в слове  $\mathbf{u}$  нет простых букв, отсюда следует, что множество  $\text{alph}(\varphi(c'))$  содержит либо  $a_1$ , либо  $b_n$ , что противоречит тому, что  $\psi(\varphi(c')) = c'$ . Следовательно,  $\mathbf{v}_C = \psi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_\zeta$ . Аналогичным образом мы можем показать, что если  $(2_{\mathbf{u}}b) < (2_{\mathbf{u}}c) < (2_{\mathbf{u}}a)$  для некоторого  $c \in C$ , то  $\mathbf{v}_C = \psi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_\zeta$ .  $\square$

**Лемма 5.38.** Пусть  $n \geq 2$ , а  $\mathbf{u}$  — блочно-линейное слово такое, что  $\mathbf{u}_{\{c,h\}} = \mathbf{w}_\zeta$  для некоторого  $\zeta \in S_2^n$  и некоторых  $c, h \in X$  таких, что  $h \in \text{sim}(\mathbf{u})$  и  $\text{occ}_c(\mathbf{u}) = 2$ . Предположим, что для некоторых  $x, y \in \text{mul}(\mathbf{w}_\zeta)$  и  $i, j$  таких, что  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ , слово  $i_{\mathbf{u}}x i_{\mathbf{u}}c i_{\mathbf{u}}y$  является подсловом слова  $\mathbf{u}$ , а слово  $j_{\mathbf{u}}c$  образует блок слова  $\mathbf{u}$ . Если многообразие  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , то  $\mathbf{v}_{\{c,h\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .

*Доказательство.* В силу предложения 1.1, найдется последовательность попарно различных слов  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  либо выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , либо непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ . Докажем требуемое утверждение индукцией по  $m$ .

**База индукции:**  $m = 1$ . Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , то требуемое утверждение следует из леммы 1.3. Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ , то из условия леммы следует, что выполнены условия (а), (б) и (в) леммы 5.37. Поэтому мы можем применить лемму 5.37, заключая, что  $\mathbf{v}_{\{c,h\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .

**Шаг индукции:**  $m > 1$ . В силу лемм 1.3 и 5.37,  $(\mathbf{v}_1)_{\{c,h\}} = \mathbf{w}_\zeta$ . Поскольку, в силу леммы 5.32, слово  $hux$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , буква  $j_{\mathbf{u}}c$  образует блок слова  $\mathbf{v}_1$ . Отсюда следует, что буквы  $j_{\mathbf{v}_1}x$  и  $j_{\mathbf{v}_1}y$  не входят в блок слова  $\mathbf{v}_1$ , содержащий  $j_{\mathbf{v}_1}c$ . Тогда, поскольку, в силу леммы 5.32, слова  $huxxtu$  и  $xzytux$  являются изотермами для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , мы имеем, что  $(i_{\mathbf{v}_1}x) < (i_{\mathbf{v}_1}c) < (i_{\mathbf{v}_1}y)$  и потому слово  $i_{\mathbf{v}_1}x i_{\mathbf{v}_1}c i_{\mathbf{v}_1}y$  является подсловом слова  $\mathbf{v}_1$ . Таким образом, мы можем применить предположение индукции, заключая, что  $\mathbf{v}_{\{c,h\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .  $\square$

**Лемма 5.39.** Пусть  $n \geq 2$ , а  $\mathbf{u}$  — блочно-линейное слово такое, что  $\mathbf{u}_c = \mathbf{w}_\zeta$  для некоторого  $\zeta \in S_2^n$  и некоторого  $c \in \text{mul}(\mathbf{u})$  такого, что  $\text{occ}_c(\mathbf{u}) = 2$ . Предположим, что для некоторых  $x, y \in \text{mul}(\mathbf{w}_\zeta)$  слово  ${}_{2\mathbf{u}}x {}_{2\mathbf{u}}c {}_{2\mathbf{u}}y$  является подсловом слова  $\mathbf{u}$  и выполняется одно из следующих утверждений:

- (i)  $x \neq b$ ,  $y \neq a$  и буква  ${}_{1\mathbf{u}}c$  не является смежной с буквами  ${}_{1\mathbf{u}}x$  и  ${}_{1\mathbf{u}}y$  в слове  $\mathbf{u}$ ;
- (ii)  $x = b$ , буквы  ${}_{1\mathbf{u}}c$  и  ${}_{1\mathbf{u}}x$  входят в различные блоки слова  $\mathbf{u}$  и буква  ${}_{1\mathbf{u}}c$  не является смежной с буквой  ${}_{1\mathbf{u}}y$  в слове  $\mathbf{u}$ ;
- (iii)  $y = a$ , буквы  ${}_{1\mathbf{u}}c$  и  ${}_{1\mathbf{u}}y$  входят в различные блоки слова  $\mathbf{u}$  и буква  ${}_{1\mathbf{u}}c$  не является смежной с буквой  ${}_{1\mathbf{u}}x$  в слове  $\mathbf{u}$ .

Если многообразие  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\nu_{W_n})\}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , то  $\mathbf{v}_c = \mathbf{w}_\zeta$ .

*Доказательство.* В силу предложения 1.1, найдется последовательность (попарно различных) слов  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  либо выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , либо непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(\nu_{W_n})$ . Докажем требуемое утверждение индукцией по  $m$ .

**База индукции:**  $m = 1$ . Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , то требуемое утверждение следует из леммы 1.3. Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(\nu_{W_n})$ , то из условия леммы следует, что любое подслово слова  $\mathbf{u}$  длины  $> 1$  входит в слово  $\mathbf{u}$  только один раз и  $({}_{2\mathbf{u}}b) < ({}_{2\mathbf{u}}c) < ({}_{2\mathbf{u}}a)$ . Поэтому мы можем применить лемму 5.37, заключая, что  $\mathbf{v}_c = \mathbf{w}_\zeta$ .

**Шаг индукции:**  $m > 1$ . В силу лемм 1.3 и 5.37,  $(\mathbf{v}_1)_c = \mathbf{w}_\zeta$ . В силу симметрии достаточно проверить только пп. (i) и (ii). Доказательство п. (ii) очень похоже на доказательство п. (i), но несколько проще, и потому мы его опускаем. Итак, ниже мы предполагаем, что мы находимся в условиях п. (i).

В силу симметрии мы можем без ограничения общности считать, что  $x \in \{a, a_i, b, b_i, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$  и  $y \in \{y_0, y_i, z_i, z'_i, z''_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Тогда буквы  ${}_{1\mathbf{u}}c$  и  ${}_{1\mathbf{u}}y$  не лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}$ , так как они не являются смежными в этом слове. Буквы  ${}_{1\mathbf{u}}c$  и  ${}_{2\mathbf{u}}c$  также не лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}$ , так как это слово является блочно-линейным. Поскольку, в силу леммы 5.32, слово  $xzytxu$  и потому слово  $xzytux$  суть изотермы для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\nu_{W_n})\}$  и  $\text{occ}_c(\mathbf{u}) = 2$ , отсюда вытекает, что  $\text{occ}_c(\mathbf{v}_1) = 2$  и  $({}_{2\mathbf{v}_1}c) < ({}_{2\mathbf{v}_1}y)$ . Далее, если буквы  ${}_{1\mathbf{u}}c$  и  ${}_{1\mathbf{u}}x$  не лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}$ , то  $({}_{2\mathbf{v}_1}x) < ({}_{2\mathbf{v}_1}c)$  и потому слово  ${}_{2\mathbf{v}_1}x {}_{2\mathbf{v}_1}c {}_{2\mathbf{v}_1}y$  является подсловом слова  $\mathbf{v}_1$ . Если буквы  ${}_{1\mathbf{u}}c$  и  ${}_{1\mathbf{u}}x$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}$ , то  $({}_{2\mathbf{v}_1}z) < ({}_{2\mathbf{v}_1}c)$ , где  $z \in \{y_0, y_i, z_i, z'_i, z''_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  — буква такая, что  ${}_{2\mathbf{w}_\zeta}z {}_{2\mathbf{w}_\zeta}x$  есть подслово слова  $\mathbf{w}_\zeta$  и, следовательно, либо  ${}_{2\mathbf{v}_1}x {}_{2\mathbf{v}_1}c {}_{2\mathbf{v}_1}y$ , либо  ${}_{2\mathbf{v}_1}z {}_{2\mathbf{v}_1}c {}_{2\mathbf{v}_1}x$  есть подслово слова  $\mathbf{v}_1$ .

Предположим, что буквы  ${}_{1\mathbf{v}_1}c$  и  ${}_{1\mathbf{v}_1}x$  смежны друг с другом в слове  $\mathbf{v}_1$ . Если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}_1$  выполнено в многообразии  $\mathbf{M}(W_n)$ , то слово  $(\mathbf{v}_1)_x$  совпадает (с точностью до переименования переменных) со словом  $\mathbf{w}_\zeta$  и  $\mathbf{u}_x \neq (\mathbf{v}_1)_x$ , что противоречит тому факту, что слово

$\mathbf{w}_\zeta$  есть изотерм для  $\mathbf{M}(W_n)$ . Следовательно, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}_1$  непосредственно вытекает из некоторого тождества  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta$  из  $\text{ld}(v_{W_n})$ . Тогда  $(\mathbf{v}'_1)_c = \mathbf{w}_\zeta \neq \mathbf{u}'_c$ , где  $\mathbf{u}' := \psi(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{v}'_1 := \psi(\mathbf{v}_1)$  и  $\psi: X \rightarrow X^* — подстановка  $(c, x) \mapsto (x, c)$ . В силу леммы 5.33,  $\mathbf{u}'_c = \mathbf{w}_\nu$  для некоторого  $\nu \in S_2^n \setminus \{\zeta\}$ . В частности, буквы  $1_{\mathbf{u}'x}$  и  $1_{\mathbf{u}'c}$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}'$ . Очевидно, что тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'_1$  непосредственно следует из тождества  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta$ , слово  $2_{\mathbf{u}'z} 2_{\mathbf{u}'c} 2_{\mathbf{u}'x}$  — подслово слова  $\mathbf{u}'$ , а буква  $1_{\mathbf{u}'c}$  не является смежной с буквами  $1_{\mathbf{u}'x}$  и  $1_{\mathbf{u}'z}$  в  $\mathbf{u}'$ . Тогда, в силу леммы 5.37,  $(\mathbf{v}'_1)_c = \mathbf{w}_\nu$ , что противоречит тому факту, что  $\zeta \neq \nu$ . Таким образом, буква  $1_{\mathbf{v}_1c}$  в любом случае не может быть смежной с буквой  $1_{\mathbf{v}_1x}$  в слове  $\mathbf{v}_1$ .$

Далее, поскольку, в силу леммы 5.32, слово  $\mathbf{u}x\mathbf{u}$  есть изотерм для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , а буквы  $1_{\mathbf{u}u}$  и  $1_{\mathbf{u}c}$  лежат в различных блоках слова  $\mathbf{u}$ , буквы  $1_{\mathbf{v}_1u}$  и  $1_{\mathbf{v}_1c}$  не могут лежать в одном блоке слова  $\mathbf{v}_1$ . Откуда следует, что буква  $1_{\mathbf{v}_1c}$  не является смежной с буквой  $1_{\mathbf{v}_1u}$  в слове  $\mathbf{v}_1$ . Таким образом, если слово  $2_{\mathbf{v}_1x} 2_{\mathbf{v}_1c} 2_{\mathbf{v}_1u}$  является подсловом слова  $\mathbf{v}_1$ , то мы можем применить предположение индукции, заключая, что  $\mathbf{v}_c = \mathbf{w}_\zeta$ . Если слово  $2_{\mathbf{v}_1z} 2_{\mathbf{v}_1c} 2_{\mathbf{v}_1x}$  есть подслово слова  $\mathbf{v}_1$ , то буквы  $1_{\mathbf{v}_1c}$  и  $1_{\mathbf{v}_1x}$  должны лежать в одном блоке слова  $\mathbf{v}_1$ , поскольку слово  $xz\mathbf{u}x\mathbf{u}$  — изотерм для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ . В этом случае буквы  $1_{\mathbf{v}_1c}$  и  $1_{\mathbf{v}_1z}$  входят в различные блоки слова  $\mathbf{v}_1$  и потому буква  $1_{\mathbf{v}_1c}$  не может быть смежной с буквой  $1_{\mathbf{v}_1z}$  в слове  $\mathbf{v}_1$ . Следовательно, мы можем снова применить предположение индукции и получить, что  $\mathbf{v}_c = \mathbf{w}_\zeta$ .  $\square$

**Лемма 5.40.** Пусть  $n \geq 2$ , а  $\mathbf{u}$  — блочно-линейное слово такое, что  $\mathbf{u}_c = \mathbf{w}_\zeta$  для некоторого  $\zeta \in S_2^n$  и некоторого  $c \in \text{mul}(\mathbf{u})$  такого, что  $\text{occ}_c(\mathbf{u}) = 2$ . Предположим, что для некоторых  $x, y \in \text{mul}(\mathbf{u}_\zeta)$  слово  $1_{\mathbf{u}x} 1_{\mathbf{u}c} 1_{\mathbf{u}y}$  является подсловом слова  $\mathbf{u}$ , а буква  $2_{\mathbf{u}c}$  не соседствует с буквами  $2_{\mathbf{u}x}$  и  $2_{\mathbf{u}y}$  в  $\mathbf{u}$ . Если многообразие  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , то  $\mathbf{v}_c = \mathbf{w}_\zeta$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $x, y \in \{a, a_i, b, b_i, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Если  $(2_{\mathbf{u}y0}) < (2_{\mathbf{u}c}) < (2_{\mathbf{u}y_n})$ , то требуемое утверждение следует из леммы 5.39(i). Таким образом, поскольку слово  $\mathbf{u}$  является блочно-линейным, осталось рассмотреть случай, когда одно из слов

$$2_{\mathbf{u}c} 2_{\mathbf{u}b}, 2_{\mathbf{u}b} 2_{\mathbf{u}c}, 2_{\mathbf{u}c} 2_{\mathbf{u}a}, 2_{\mathbf{u}a} 2_{\mathbf{u}c}, 2_{\mathbf{u}c} 1_{\mathbf{u}y}j \quad \text{или} \quad 1_{\mathbf{u}y}j 2_{\mathbf{u}c},$$

где  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , является подсловом слова  $\mathbf{u}$ .

В силу предложения 1.1, найдется конечная последовательность попарно различных слов  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  либо выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , либо непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ . Мы будем вести индукцию по  $m$ .

**База индукции:**  $m = 1$ . Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{M}(W_n)$ , то требуемое утверждение следует из леммы 1.3. Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  непосредственно вытекает из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ , то из условия текущей леммы следует, что любое подслово слова  $\mathbf{u}$  длины  $> 1$  входит в  $\mathbf{u}$  в точности один раз и  $(1_{\mathbf{u}a_1}) < (1_{\mathbf{u}c}) < (1_{\mathbf{u}b_n})$ . Тогда мы можем применить лемму 5.37, заключая, что  $\mathbf{v}_c = \mathbf{w}_\zeta$ .

**Шаг индукции:**  $m > 1$ . Заметим сначала, что как базе индукции  $(\mathbf{v}_1)_c = \mathbf{w}_\zeta$  в силу лемм 1.3

и 5.37. Если одно из слов  $2_{\mathbf{u}}c1_{\mathbf{u}}y_j$  или  $1_{\mathbf{u}}y_j2_{\mathbf{u}}c$  является подсловом слова  $\mathbf{u}$  для некоторого  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , то  $\mathbf{u}(c, s_j, t, x) = xcs_jctx$  и  $\mathbf{u}(c, s_j, t, y) = cys_jcty$ . Поскольку, в силу леммы 5.32, слова  $xuzxtu$  и  $uxzxtu$  суть изотермы для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , отсюда следует, что  $\mathbf{v}_1(c, s_j, t, x) = xcs_jctx$  и  $\mathbf{v}_1(c, s_j, t, y) = cys_jcty$ . Если одно из слов  $2_{\mathbf{u}}c2_{\mathbf{u}}b$  или  $2_{\mathbf{u}}b2_{\mathbf{u}}c$  является подсловом слова  $\mathbf{u}$ , то  $x \neq b$ ,  $y \neq b$  и потому  $\mathbf{u}(c, s_0, t, x, y_0) = xcs_0y_0tcy_0x$  и  $\mathbf{u}(c, s_0, t, y, y_0) = cys_0y_0tcy_0y$ . Поскольку, в силу леммы 5.32, слова  $xytzxszy$  и  $yxtzxszy$  суть изотермы для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , отсюда вытекает, что  $\mathbf{v}_1(c, s_0, t, x, y_0) = xcs_0y_0tcy_0x$  и  $\mathbf{v}_1(c, s_0, t, y, y_0) = cys_0y_0tcy_0y$ . Аналогичным образом мы можем показать, что если одно из слов  $2_{\mathbf{u}}c2_{\mathbf{u}}a$  или  $2_{\mathbf{u}}a2_{\mathbf{u}}c$  есть подслово слова  $\mathbf{u}$ , то  $\mathbf{v}_1(c, s_n, t, x, y_n) = xcs_ny_ntxy_nx$  и  $\mathbf{v}_1(c, s_n, t, y, y_n) = cys_ny_nty_ny_n$ . Итак, мы доказали, что  $\text{occ}_c(\mathbf{v}_1) = 2$ , слово  $1_{\mathbf{v}_1}x1_{\mathbf{v}_1}c1_{\mathbf{v}_1}y$  является подсловом слова  $\mathbf{v}_1$ , а буква  $2_{\mathbf{v}_1}c$  не соседствует с буквами  $2_{\mathbf{v}_1}x$  и  $2_{\mathbf{v}_1}y$  в  $\mathbf{v}_1$ . Следовательно, мы можем применить предположение индукции, заключая, что  $\mathbf{v}_c = \mathbf{w}_\zeta$ .  $\square$

**Следствие 5.41.** Пусть  $n \geq 2$ , а  $\mathbf{u}$  — слово такое, что  $\mathbf{u}_h = \mathbf{w}_\zeta$  для некоторого  $\zeta \in S_2^n$  и некоторого  $h \in \text{sim}(\mathbf{u})$ . Предположим, что буква  $h$  смежна с двумя различными кратными буквами слова  $\mathbf{u}$ . Если многообразие  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$  удовлетворяет тождеству вида  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , то  $\mathbf{v}_h = \mathbf{w}_\zeta$ .

*Доказательство.* Очевидно, что найдется  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  такое, что буква  $2_{\mathbf{u}}y_j$  не является смежной с буквой  $1_{\mathbf{u}}h$  в слове  $\mathbf{u}$ . Тогда из лемм 5.39 и 5.40 следует, что  $(\varphi(\mathbf{v}))_h = (\varphi(\mathbf{u}))_h = \mathbf{w}_\zeta$ , где  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка  $(s_j) \mapsto (s_jh)$ . Остается отметить, что  $\mathbf{v}_h = (\varphi(\mathbf{v}))_h$ .  $\square$

**Лемма 5.42.** Пусть  $n \geq 2$ , а  $\mathbf{u}$  — слово такое, что  $\mathbf{u}_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$  для некоторого  $\zeta \in S_2^n$  и некоторых  $c_1, c_2 \in \text{mul}(\mathbf{u})$  таких, что  $\text{occ}_{c_1}(\mathbf{u}) = \text{occ}_{c_2}(\mathbf{u}) = 2$ . Предположим, что для некоторых  $x, y \in \text{mul}(\mathbf{w}_\zeta)$ , слово  $2_{\mathbf{u}}x2_{\mathbf{u}}c_12_{\mathbf{u}}c_22_{\mathbf{u}}y$  является подсловом слова  $\mathbf{u}$ , а буквы  $1_{\mathbf{u}}c_1$  и  $1_{\mathbf{u}}c_2$  лежат в том же блоке, что и буквы  $1_{\mathbf{u}}y$  и  $1_{\mathbf{u}}x$  соответственно. Если  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , то  $\mathbf{v}_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .

*Доказательство.* В силу предложения 1.1, существует последовательность попарно различных слов  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  либо выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , либо непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ . Мы будем вести индукцию по  $m$ .

**База индукции:**  $m = 1$ . Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , то требуемое утверждение следует из леммы 1.3. Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ , то из условия доказываемой леммы вытекает, что любое подслово слова  $\mathbf{u}$  длины  $> 1$  имеет единственное вхождение в  $\mathbf{u}$  и  $(2_{\mathbf{u}}b) < (2_{\mathbf{u}}c_1) < (2_{\mathbf{u}}a)$ . Тогда мы можем применить лемму 5.37, заключая, что  $\mathbf{v}_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .

**Шаг индукции:**  $m > 1$ . Заметим сначала, что как и в базе индукции  $(\mathbf{v}_1)_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$  по леммам 1.3 и 5.37. Поскольку, по лемме 5.32,  $xux$  — изотерм для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , буквы  $1_{\mathbf{v}_1}c_1$  и  $1_{\mathbf{v}_1}c_2$  лежат в том же блоке слова  $\mathbf{v}_1$ , что и буквы  $1_{\mathbf{v}_1}y$  и  $1_{\mathbf{v}_1}x$  соответственно и  $\text{occ}_{c_1}(\mathbf{v}_1) = \text{occ}_{c_2}(\mathbf{v}_1) = 2$ . Далее, буквы  $1_{\mathbf{u}}y$  и  $1_{\mathbf{u}}x$  входят в различные блоки слова  $\mathbf{u}$ . Поскольку, в силу леммы 5.32,  $xzytx$  — изотерм для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , отсюда вытекает, что

слово  ${}_{2v_1}x {}_{2v_1}c_1 {}_{2v_1}c_2 {}_{2v_1}y$  должно быть подсловом слова  $\mathbf{v}_1$ . Таким образом, мы можем применить предположение индукции, заключая, что  $\mathbf{v}_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .  $\square$

**Лемма 5.43.** Пусть  $n \geq 2$ , а  $\mathbf{u}$  — слово, такое что  $\mathbf{u}_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$  для некоторого  $\zeta \in S_2^n$  и некоторых  $c_1, c_2 \in \text{mul}(\mathbf{u})$  таких, что  $\text{occ}_{c_1}(\mathbf{u}) = \text{occ}_{c_2}(\mathbf{u}) = 2$ . Предположим, что для некоторых  $x, y \in \text{mul}(\mathbf{w}_\zeta)$  слово  ${}_{1u}x {}_{1u}c_1 {}_{1u}c_2 {}_{1u}y$  является подсловом слова  $\mathbf{u}$ , а буквы  ${}_{2u}c_1$  и  ${}_{2u}c_2$  соседствуют в слове  $\mathbf{u}$  с буквами  ${}_{2u}y$  и  ${}_{2u}x$  соответственно. Если  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , то  $\mathbf{v}_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .

*Доказательство.* В силу предложения 1.1, существует последовательность попарно различных слов  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m = \mathbf{v}$  такая, что каждое тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  либо выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , либо непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ . Мы будем вести индукцию по  $m$ .

**База индукции:**  $m = 1$ . Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , то требуемое утверждение следует из леммы 1.3. Если тождество  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  непосредственно следует из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ , то из условия доказываемой леммы вытекает, что любое подслово слова  $\mathbf{u}$  длины  $> 1$  имеет единственное вхождение в  $\mathbf{u}$  и  $({}_{1u}a_1) < ({}_{1u}c_1) < ({}_{1u}b_n)$ . Тогда мы можем применить лемму 5.37, заключая, что  $\mathbf{v}_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .

**Шаг индукции:**  $m > 1$ . Заметим сначала, что как и в базе индукции  $(\mathbf{v}_1)_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$  по леммам 1.3 и 5.37. Поскольку, по лемме 5.32, слово  $xzytxu$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , легко показать, что  $\text{occ}_{c_1}(\mathbf{v}_1) = \text{occ}_{c_2}(\mathbf{v}_1) = 2$  и буквы  ${}_{2v_1}c_1$  и  ${}_{2v_1}c_2$  соседствуют в слове  $\mathbf{v}_1$  с буквами  ${}_{2v_1}y$  и  ${}_{2v_1}x$  соответственно. Предположим сначала, что  $\{x, y\} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}$  для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Очевидно, что слова  $\mathbf{u}_{\{x, c_1\}}$  и  $\mathbf{u}_{\{c_2, y\}}$  совпадают (с точностью до переименования букв) с  $\mathbf{w}_\zeta$ , а слово  $\mathbf{u}_{\{x_1, x_2\}}$  совпадает (с точностью до переименования букв) с  $\mathbf{w}_{\bar{\zeta}}$ , где  $\bar{\zeta} := (\zeta_1, \dots, \zeta_{k-1}, \zeta_k^2, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n)$ . Откуда следует, что если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}_1$  выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , то, по лемме 1.3, слово  ${}_{1v_1}x {}_{1v_1}c_1 {}_{1v_1}c_2 {}_{1v_1}y$  является подсловом слова  $\mathbf{v}_1$ , а если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}_1$  непосредственно вытекает из некоторого тождества системы  $\text{ld}(v_{W_n})$ , то мы можем трижды применить лемму 5.37, заключая, что  $({}_{1v_1}x) < ({}_{1v_1}c_1) < ({}_{1v_1}c_2) < ({}_{1v_1}y)$  и потому слово  ${}_{1v_1}x {}_{1v_1}c_1 {}_{1v_1}c_2 {}_{1v_1}y$  есть подслово слова  $\mathbf{v}_1$ . Предположим теперь, что  $\{x, y\} \neq \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . В этом случае найдется  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  такое, что  ${}_{2u}y_j$  лежит между  ${}_{2u}x$  и  ${}_{2u}y$  в  $\mathbf{u}$ . Тогда каждое из слов  $\mathbf{u}(c_1, s_j, t, x, y_j)$ ,  $\mathbf{u}(c_1, c_2, s_j, t, y_j)$  и  $\mathbf{u}(c_2, s_j, t, y, y_j)$  совпадает (с точностью до переименования букв) с одним из слов  $xysztxzu$  и  $uxsztxzu$ . Поскольку, в силу леммы 5.32, последние два слова суть изотермы для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , имеем, что  $\mathbf{u}(c_1, s_j, t, x, y_j) = \mathbf{v}_1(c_1, s_j, t, x, y_j)$ ,  $\mathbf{u}(c_1, c_2, s_j, t, y_j) = \mathbf{v}_1(c_1, c_2, s_j, t, y_j)$  и  $\mathbf{u}(c_2, s_j, t, y, y_j) = \mathbf{v}_1(c_2, s_j, t, y, y_j)$ . Отсюда вытекает, что  $({}_{1v_1}x) < ({}_{1v_1}c_1) < ({}_{1v_1}c_2) < ({}_{1v_1}y)$ . Мы видим, что слово  ${}_{1v_1}x {}_{1v_1}c_1 {}_{1v_1}c_2 {}_{1v_1}y$  является подсловом слова  $\mathbf{v}_1$  в любом случае. Таким образом, мы можем применить предположение индукции, заключая, что  $\mathbf{v}_{\{c_1, c_2\}} = \mathbf{w}_\zeta$ .  $\square$

Положим

$$\mathbf{O}_1 := \text{var}\{yxzxtx \approx x^2yzt, \sigma_3, \mathbf{d}_{n,m,k}[\rho] \approx \mathbf{d}'_{n,m,k}[\rho] \mid n, m, k \in \mathbb{N}, \rho \in S_{n+m+k}\}.$$

Линейно-сбалансированное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  будем называть *редуцированным*, если все соответствующие блоки слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  имеют вид  $\mathbf{ac}$  и  $\mathbf{bc}$ , где слова  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  состоят из первых вхождений букв в слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно, а слово  $\mathbf{c}$  состоит из вторых вхождений букв в слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Очевидно, что если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  редуцированное, то любая буква входит в каждое из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  не более двух раз.

**Лемма 5.44.** *Любое многообразие из интервала  $[\mathbf{M}(xzytxy), \mathbf{O}_1]$  может быть задано внутри многообразия  $\mathbf{O}_1$  некоторым множеством редуцированных тождеств.*

*Доказательство.* Отметим сначала, что  $\{x^2y \approx yx^2, \sigma_3\}$  влечет  $\Phi_3$ . Этот факт позволяет нам применять к многообразию  $\mathbf{O}_1$  лемму 3.85 и утверждение, двойственное к лемме 3.86.

Нам необходимо показать, что произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(xzytxy)$ , эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{O}_1$  некоторому редуцированному тождеству. Положим

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \text{mul}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u}(x, y) = xux \text{ для некоторой буквы } y \in \text{sim}(\mathbf{u})\} \text{ и} \\ B &:= \text{mul}(\mathbf{u}) \setminus A \\ &= \{x \in \text{mul}(\mathbf{u}) \mid \text{occ}_x(\mathbf{u}) > 2 \text{ или } {}_{1\mathbf{u}}x \text{ и } {}_{2\mathbf{u}}x \text{ лежат в одном блоке слова } \mathbf{u}\}. \end{aligned}$$

Поскольку слово  $xux$  есть изотерм для  $\mathbf{M}(xzytxy)$ , легко проверить, что

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \text{mul}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v}(x, y) = xux \text{ для некоторой буквы } y \in \text{sim}(\mathbf{v})\} \text{ и} \\ B &= \text{mul}(\mathbf{v}) \setminus A \\ &= \{x \in \text{mul}(\mathbf{v}) \mid \text{occ}_x(\mathbf{v}) > 2 \text{ или } {}_{1\mathbf{v}}x \text{ и } {}_{2\mathbf{v}}x \text{ лежат в одном блоке слова } \mathbf{v}\}. \end{aligned}$$

Пусть  $B := \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ .

С учетом леммы 3.85, легко видеть, что в многообразии  $\mathbf{O}_1$  выполнены тождества  $\mathbf{u} \approx b_1^2 b_2^2 \dots b_r^2 \mathbf{u}_B$  и  $\mathbf{v} \approx b_1^2 b_2^2 \dots b_r^2 \mathbf{v}_B$ . Откуда  $\mathbf{O}_1\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{O}_1\{\mathbf{u}_B \approx \mathbf{v}_B\}$ . Тождество  $\mathbf{u}_B \approx \mathbf{v}_B$  является линейно-сбалансированным и любая буква входит в слова  $\mathbf{u}_B$  и  $\mathbf{v}_B$  не более двух раз. Далее, тождество  $\sigma_3$  позволяет нам поменять местами смежные первое и второе вхождения двух кратных букв. Учитывая этот факт, получаем, что многообразие  $\mathbf{O}_1$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u}_B \approx \mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{v}_B \approx \mathbf{w}_2$  для некоторых слов  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$  таких, что любой блок в каждом из этих двух слов есть произведение двух слов, состоящих из первых и вторых вхождений букв соответственно. Это означает, что  $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_0^{(i)} \mathbf{c}_0^{(i)} t_1 \mathbf{a}_1^{(i)} \mathbf{c}_1^{(i)} \dots t_k \mathbf{a}_k^{(i)} \mathbf{c}_k^{(i)}$ , где  $\text{sim}(\mathbf{w}_i) = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ , а слово  $\mathbf{a}_j^{(i)}$  [соответственно  $\mathbf{c}_j^{(i)}$ ] состоит из первых [вторых] вхождений букв в  $\mathbf{w}_i$  для любого  $j = 0, 1, \dots, k$ . Ясно, что слово  $\mathbf{c}_j^{(i)}$  можно представить в виде произведения некоторых максимальных подслов  $\mathbf{c}_{j_1}^{(i)}, \mathbf{c}_{j_2}^{(i)}, \dots, \mathbf{c}_{j_{r_j}^{(i)}}^{(i)}$ , состоящих из вторых вхождений букв в слово  $\mathbf{w}_i$ , чьи первые вхождения лежат в одном блоке этого слова. Поскольку тождество  $\mathbf{w}_1 \approx \mathbf{w}_2$  выполнено в  $\mathbf{M}(xzytxy)$ , из леммы 1.3 легко вывести, что  $r_j := r_j^{(1)} = r_j^{(2)}$  и  $\text{alph}(\mathbf{c}_{j\ell}^{(1)}) = \text{alph}(\mathbf{c}_{j\ell}^{(2)})$  для любых  $j = 0, 1, \dots, k$  и  $\ell = 1, 2, \dots, r_j$ . Теперь применим лемму, двойственную к лемме 3.86, заключая, что  $\mathbf{O}_1$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_1 \approx \mathbf{w}'_1$ , где  $\mathbf{w}'_1 := \mathbf{a}_0^{(1)} \mathbf{c}_0^{(2)} t_1 \mathbf{a}_1^{(1)} \mathbf{c}_1^{(2)} \dots t_k \mathbf{a}_k^{(1)} \mathbf{c}_k^{(2)}$ . Ясно, что тождество  $\mathbf{w}'_1 \approx \mathbf{w}_2$  является редуцированным и  $\mathbf{O}_1\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{O}_1\{\mathbf{w}'_1 \approx \mathbf{w}_2\}$ , что и

требовалось доказать. □

Максимальное подслово слова  $\mathbf{w}$ , состоящее только из первых [вторых] вхождений кратных букв, чьи вторые [первые] вхождения лежат в одном блоке слова  $\mathbf{w}$ , будем называть *1-отрезком* [2-отрезком] этого слова.

В оставшейся части этого раздела мы показываем, что отображение  $\varphi: \mathfrak{Eq}(W_n) \rightarrow [\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(u_{W_n})\}, \mathbf{M}(W_n)]$ , заданное формулой

$$\varphi(\pi) := \mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\pi)\},$$

есть антиизоморфизм. Это завершает доказательство предложения 5.30.

**Отображение  $\varphi$  инъективно.** Предположим, что  $\varphi(\pi) = \varphi(\rho)$  для некоторых  $\pi, \rho \in \mathfrak{Eq}(W_n)$ , т.е.  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\pi)\} = \mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\rho)\}$ . Если  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \rho$ , то многообразие  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\pi)\}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , откуда, в силу следствия 5.35,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$ . Следовательно,  $\rho \subseteq \pi$ ; аналогично,  $\rho \supseteq \pi$  и потому  $\pi = \rho$ .

**Отображение  $\varphi$  сюръективно.** Достаточно показать, что для любого многообразия  $\mathbf{V}$  из интервала  $[\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(u_{W_n})\}, \mathbf{M}(W_n)]$ , существует отношение эквивалентности  $\pi \in \mathfrak{Eq}(W_n)$  такое, что  $\varphi(\pi) = \mathbf{V}$ . Поскольку  $\varphi(\varepsilon_{W_n}) = \mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\varepsilon_{W_n})\} = \mathbf{M}(W_n)$ , где  $\varepsilon_{W_n}$  — отношение равенства на множестве  $W_n$ , мы можем считать, что  $\mathbf{V} \neq \mathbf{M}(W_n)$ . Тогда существует непустое множество тождеств  $\Sigma$  такое, что  $\mathbf{V} = \mathbf{M}(W_n)\{\Sigma\}$ ; в силу включений  $\mathbf{M}(xzytxy) \subseteq \mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(u_{W_n})\} \subseteq \mathbf{M}(W_n) \subseteq \mathbf{O}_1$  и леммы 5.44, тождества в  $\Sigma$  можно считать редуцированными. Ниже показано, что любое тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  из  $\Sigma$  эквивалентно в многообразии  $\mathbf{M}(W_n)$  некоторому подмножеству множества  $\text{ld}(u_{W_n})$ . В силу леммы 2.4, найдется отношение эквивалентности  $\pi \in \mathfrak{Eq}(W_n)$  такое, что  $\mathbf{V} = \mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\pi)\}$ . Иными словами,  $\varphi(\pi) = \mathbf{V}$ , что и требовалось показать.

Нам осталось проверить эквивалентность тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  внутри многообразия  $\mathbf{M}(W_n)$  некоторому подмножеству множества  $\text{ld}(u_{W_n})$ . В силу леммы 1.2, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $r$ -инвертируемым для некоторого  $r \in \mathbb{N}_0$ . Мы будем вести индукцию по  $r$ .

**База индукции:**  $r = 0$ . Тогда  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , откуда  $\mathbf{M}(W_n)\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{M}(W_n)\{\emptyset\}$ .

**Шаг индукции:**  $r > 0$ . Если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ , то  $\mathbf{M}(W_n)\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{M}(W_n)\{\emptyset\}$ . Таким образом, мы можем далее считать, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  не выполнено в  $\mathbf{M}(W_n)$ . Тогда найдется подстановка  $\psi: X \rightarrow \mathbf{M}(W_n)$  такая, что  $\psi(\mathbf{u}) \neq \psi(\mathbf{v})$  в  $\mathbf{M}(W_n)$ . Это возможно лишь в том случае, когда одно из слов  $\psi(\mathbf{u})$  или  $\psi(\mathbf{v})$ , скажем  $\psi(\mathbf{u})$ , является непустым подсловом некоторого слова  $\mathbf{w}_\xi$  из  $W_n$ . В силу леммы 5.36(iii), любое собственное подслово слова  $\mathbf{w}_\xi$  является изотермом для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(u_{W_n})\}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{w}_\xi = \psi(\mathbf{u})$ . Ясно, что  $\psi(\mathbf{v})$  представляет некоторое непустое слово, не совпадающее с  $\psi(\mathbf{u})$ . В силу леммы 5.33,  $\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_\eta$  для некоторого  $\eta \in S_2^n \setminus \{\xi\}$ . Положим  $V := \{x \in X \mid \psi(x) \neq 1\}$ . Очевидно, что  $\mathbf{w}_\xi = \psi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u}(V))$  и  $\mathbf{w}_\eta = \psi(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}(V))$ .

Отметим, что любое подслово слова  $\mathbf{w}_\xi$  длины  $> 1$  входит в  $\mathbf{w}_\xi$  ровно один раз. Отсюда вытекает, что  $\psi(v)$  — буква для любого  $v \in V \cap \text{mul}(\mathbf{u})$ . Теперь рассмотрим произвольную букву  $c \in V \cap \text{sim}(\mathbf{u})$ . Если слово  $\psi(c)$  не является буквой, то  $\psi_c(\mathbf{u}(V))$  получается из  $\mathbf{w}_\xi$  заменой некоторого подслова длины  $> 1$  на букву  $c$ , где  $\psi_c: X \rightarrow X^*$  — подстановка, определяемая формулой

$$\psi_c(v) := \begin{cases} \psi(v), & \text{если } v \neq c, \\ c, & \text{если } v = c. \end{cases}$$

В силу леммы 5.36(ii), слово  $\psi_c(\mathbf{u}(V))$  является изотермом для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(\nu_{W_n})\}$ , что противоречит тому факту, что  $\psi(\mathbf{u}(V)) \approx \psi(\mathbf{v}(V))$  — нетривиальное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(\nu_{W_n})\}$ . Таким образом,  $\psi(c)$  — буква. Далее, если  $\psi(c) \in \text{mul}(\mathbf{w}_\xi)$ , то слово  $\psi_c(\mathbf{u}(V))$  получается из слова  $\mathbf{w}_\xi$  заменой некоторого вхождения кратной буквы  $\psi(c)$  на букву  $c$ . В силу леммы 5.36(i), слово  $\psi_c(\mathbf{u}(V))$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(\nu_{W_n})\}$ , что снова противоречит тому факту, что  $\psi(\mathbf{u}(V)) \approx \psi(\mathbf{v}(V))$  — нетривиальное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{Id}(\nu_{W_n})\}$ . Следовательно,  $\psi(c) \in \text{sim}(\mathbf{w}_\xi)$ . Поскольку тождество  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta$  является редуцированным, слова  $\psi(v_1)$  и  $\psi(v_2)$  не могут совпадать друг с другом для различных  $v_1, v_2 \in V$ . Следовательно, слова  $\mathbf{u}(V)$  и  $\mathbf{v}(V)$  совпадают (с точностью до переименования букв) со словами  $\mathbf{w}_\xi$  и  $\mathbf{w}_\eta$  соответственно. Мы можем считать без ограничения общности  $\mathbf{u}(V) = \mathbf{w}_\xi$  и  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$ .

Положим  $V' := V \cap \text{mul}(\mathbf{u})$ . Для любого  $c \in V'$  через  $\check{c}$  обозначим 2-отрезок слова  $\mathbf{u}$ , содержащий букву  ${}_{2\mathbf{u}}c$ . Рассмотрим произвольные  $x, y \in V'$  такие, что  ${}_{2\mathbf{w}_\xi}x {}_{2\mathbf{w}_\xi}y$  является подсловом слова  $\mathbf{w}_\xi$ . Ясно, что буквы  ${}_{1\mathbf{u}}x$  и  ${}_{1\mathbf{u}}y$  лежат в различных блоках слова  $\mathbf{u}$ , откуда следует, что  $\text{alph}(\check{x}) \cap \text{alph}(\check{y}) = \emptyset$ . Через  $\mathbf{c}$  обозначим подслово слова  $\mathbf{u}$ , лежащее между подсловами  $\check{x}$  и  $\check{y}$ . Предположим, что слово  $\mathbf{c}$  не является пустым. Из следствия 5.41 и того факта, что  $\mathbf{u}(V) = \mathbf{w}_\xi$  и  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$  следует, что  $\text{alph}(\mathbf{c}) \subseteq \text{mul}(\mathbf{u})$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является редуцированным, отсюда следует, что  $\mathbf{c}$  состоит из вторых вхождений букв в  $\mathbf{u}$ . Обозначим через  $c_1$  первую букву слова  $\mathbf{c}$ . Буквы  ${}_{1\mathbf{u}}c_1$  и  ${}_{1\mathbf{u}}x$  не лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}$ , так как буква  ${}_{1\mathbf{u}}c_1$  принадлежит 2-отрезку  $\check{x}$  в противном случае. Следовательно, существует буква  $h \in \text{sim}(\mathbf{u})$  такая, что  ${}_{1\mathbf{u}}h$  лежит между  ${}_{1\mathbf{u}}x$  и  ${}_{1\mathbf{u}}c_1$  в  $\mathbf{u}$ . Если буквы  ${}_{1\mathbf{u}_1}c_1$  и  ${}_{1\mathbf{u}_1}x$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}_1 := \mathbf{u}(V \cup \{c_1\})$ , то, учитывая следствие 5.41 и тот факт, что  $\mathbf{u}(V) = \mathbf{w}_\xi$  и  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$ , получаем, что  $h \notin V$  и в слове  $\mathbf{u}_2 := \mathbf{u}(V \cup \{h, c_1\})$  буква  ${}_{1\mathbf{u}_2}h$  не лежит между  ${}_{1\mathbf{u}_2}a_1$  и  ${}_{1\mathbf{u}_2}b_n$ . Следовательно, буква  ${}_{1\mathbf{u}_2}c_1$  образует блок слова  $\mathbf{u}_2$ , что противоречит лемме 5.38. Таким образом, буквы  ${}_{1\mathbf{u}_1}c_1$  и  ${}_{1\mathbf{u}_1}x$  лежат в разных блоках слова  $\mathbf{u}_1$ . Тогда, в силу леммы 5.39, буквы  ${}_{1\mathbf{u}_1}y$  и  ${}_{1\mathbf{u}_1}c_1$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}_1$ . Аналогичными рассуждениями мы можем показать, что если  $c_2$  — последняя буква слова  $\mathbf{c}$ , то  ${}_{1\mathbf{u}_3}x$  и  ${}_{1\mathbf{u}_3}c_2$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}_3 := \mathbf{u}(V \cup \{c_2\})$  (и потому  $c_1 \neq c_2$ ). Отсюда вытекает, что слово  $\mathbf{u}_4 := \mathbf{u}(V \cup \{c_1, c_2\})$  содержит слово  ${}_{2\mathbf{u}_4}x {}_{2\mathbf{u}_4}c_1 {}_{2\mathbf{u}_4}c_2 {}_{2\mathbf{u}_4}y$  в качестве подслова, а буквы  ${}_{1\mathbf{u}_4}c_1$  и  ${}_{1\mathbf{u}_4}c_2$  лежат в тех же блоках, что и буквы  ${}_{1\mathbf{u}_1}y$  и  ${}_{1\mathbf{u}_1}x$  соответственно. Это противоречит лемме 5.42, так как  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\xi$  и  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$ . Следовательно, слово  $\mathbf{c}$  должно быть пустым. Поскольку буквы  $x$  и  $y$  мы выбрали

произвольными, мы доказали, что слово

$$\mathbf{r} := \check{\mathbf{b}} \check{\mathbf{y}}_0 \left( \prod_{i=1}^n \check{\mathbf{x}}_1^{(i)} \check{\mathbf{z}}_i \check{\mathbf{a}}_i \check{\mathbf{z}}_i' \check{\mathbf{b}}_i \check{\mathbf{z}}_i'' \check{\mathbf{x}}_2^{(i)} \check{\mathbf{y}}_i \right) \check{\mathbf{a}}$$

является подсловом слова  $\mathbf{u}$ .

Далее, для любой буквы  $c \in V' \setminus \{a, b\}$  через  $\hat{\mathbf{c}}$  обозначим минимальное подслово слова  $\mathbf{u}$ , содержащее все первые вхождения букв из  $\text{alph}(\hat{\mathbf{c}})$ . Рассмотрим произвольную букву  $x \in V' \setminus \{a, b\}$ . Пусть  $d$  — последняя буква слова  $\hat{\mathbf{x}}$ . По определению  $\hat{\mathbf{x}}$ , имеем  $d \in \text{alph}(\check{\mathbf{x}})$ . Рассмотрим произвольную букву  $e \in \text{alph}(\hat{\mathbf{x}}) \setminus \text{alph}(\check{\mathbf{x}})$  такую, что некоторое вхождение этой буквы лежит между  $1_{\mathbf{u}}x$  и  $1_{\mathbf{u}}d$  в  $\mathbf{u}$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является редуцированным, это вхождение буквы  $e$  должно быть первым ее вхождением в  $\mathbf{u}$ . По определению 2-отрезка  $\check{\mathbf{x}}$ , буква  $e$  является кратной в  $\mathbf{u}$ . Через  $y$  обозначим букву, отличную от  $x$ , которая соседствует со вторым вхождением буквы  $d$  в слове  $\mathbf{u}_5 := \mathbf{u}(V \cup \{d\})$ . Тогда, поскольку  $x \in V' \setminus \{a, b\}$  и слово  $\mathbf{u}$  является блочно-линейным,  $y \in V'$  и либо  $2_{\mathbf{u}_5}x \ 2_{\mathbf{u}_5}d \ 2_{\mathbf{u}_5}y$ , либо  $2_{\mathbf{u}_5}y \ 2_{\mathbf{u}_5}d \ 2_{\mathbf{u}_5}x$  есть подслово слова  $\mathbf{u}_5$ . Далее, поскольку буквы  $1_{\mathbf{u}_5}x$  и  $1_{\mathbf{u}_5}y$  лежат в разных блоках слова  $\mathbf{u}_5$ , буква  $1_{\mathbf{u}_5}d$  также не может соседствовать с буквой  $1_{\mathbf{u}_5}y$  в  $\mathbf{u}_5$ . Если  $e \in V$ , то буква  $1_{\mathbf{u}_5}d$  не соседствует с буквой  $1_{\mathbf{u}_5}x$  в слове  $\mathbf{u}_5$ , так как  $(1_{\mathbf{u}}x) < (1_{\mathbf{u}}e) < (1_{\mathbf{u}}d)$ . Тогда, в силу леммы 5.39(i),  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\xi$ , что противоречит равенству  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$ . Следовательно,  $e \notin V$ . Поскольку букву  $e$  мы взяли произвольной, мы доказали, что в  $V$  нет букв, лежащих между  $1_{\mathbf{u}}x$  и  $1_{\mathbf{u}}d$  в слове  $\mathbf{u}$ .

Предположим, что  $x = b_n$ . В этом случае буква  $2_{\mathbf{u}}d$  лежит между буквами  $2_{\mathbf{u}}z'_n$  и  $2_{\mathbf{u}}z''_n$  в  $\mathbf{u}$ , а буква  $2_{\mathbf{u}}e$  не лежит. Из того факта, что  $\mathbf{u}(V) = \mathbf{w}_\xi$ ,  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$  и леммы 5.39(i) следует, что либо  $(2_{\mathbf{u}}e) < (2_{\mathbf{u}}y_0)$ , либо  $(2_{\mathbf{u}}y_n) < (2_{\mathbf{u}}e)$ . Легко видеть, что слово  $\mathbf{u}_6 := \mathbf{u}((V \setminus \{x\}) \cup \{d\})$  совпадает (с точностью до переименования букв) со словом  $\mathbf{u}(V) = \mathbf{w}_\xi$ . Поскольку, в силу леммы 5.32, слова  $xzytux$  и  $xzytux$  суть изотермы для  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(v_{W_n})\}$ , имеем  $(2_{\mathbf{v}}z'_n) < (2_{\mathbf{v}}d) < (2_{\mathbf{v}}z''_n)$ . Далее, поскольку

$$\mathbf{u}(b_{n-1}, d, s_{n-1}, t, y_{n-1}) = b_{n-1}ds_{n-1}y_{n-1}tb_{n-1}y_{n-1}d,$$

мы снова можем применить лемму 5.32, заключая, что

$$\mathbf{v}(b_{n-1}, d, s_{n-1}, t, y_{n-1}) = b_{n-1}ds_{n-1}y_{n-1}tb_{n-1}y_{n-1}d.$$

Откуда  $(1_{\mathbf{v}}b_{n-1}) < (1_{\mathbf{v}}d)$ . Отсюда следует, что слово  $\mathbf{v}((V \setminus \{x\}) \cup \{d\})$  совпадает (с точностью до переименования переменных) со словом  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$ . Однако, поскольку слово  $1_{\mathbf{u}_7}b_{n-1} \ 1_{\mathbf{u}_7}e \ 1_{\mathbf{u}_7}d$  является подсловом слова  $\mathbf{u}_7 := \mathbf{u}((V \setminus \{x\}) \cup \{d, e\})$  и либо  $(2_{\mathbf{u}_7}e) < (2_{\mathbf{u}_7}y_0)$ , либо  $(2_{\mathbf{u}_7}y_n) < (2_{\mathbf{u}_7}e)$ , из леммы 5.40 вытекает, что слово  $\mathbf{v}((V \setminus \{x\}) \cup \{d\})$  должно совпадать (с точностью до переименования переменных) со словом  $\mathbf{w}_\xi$ . Противоречие.

Предположим теперь, что  $x \neq b_n$ . Через  $z$  обозначим букву, которая следует непосредственно за буквой  $1_{\mathbf{w}_\xi}x$  в слове  $\mathbf{w}_\xi$ . С учетом сказанного выше,  $(1_{\mathbf{u}}d) < (1_{\mathbf{u}}z)$ , откуда следует, что  $1_{\mathbf{u}_8}x \ 1_{\mathbf{u}_8}e \ 1_{\mathbf{u}_8}z$  является подсловом слова  $\mathbf{u}_8 := \mathbf{u}(V \cup \{e\})$ . Ясно, что буква  $2_{\mathbf{u}_8}e$  не соседствует с буквой  $2_{\mathbf{u}_8}x$  в  $\mathbf{u}_8$ . Тогда из леммы 5.40 и того факта, что  $\mathbf{u}(V) = \mathbf{w}_\xi$  и  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$ ,

следует, что буква  ${}_{2\mathbf{u}_8}e$  соседствует с буквой  ${}_{2\mathbf{u}_8}z$  в слове  $\mathbf{u}_8$ , что противоречит лемме 5.43.

Таким образом, мы доказали, что если  $e$  — буква, лежащая между  ${}_{1\mathbf{u}}x$  и  ${}_{1\mathbf{u}}d$  в  $\mathbf{u}$ , то  $e \in \text{alph}(\check{\mathbf{x}})$ . Аналогичными рассуждениями мы можем показать, что если  $d'$  — первая буква слова  $\hat{\mathbf{x}}$ , то любая буква, лежащая между  ${}_{1\mathbf{u}}d'$  и  ${}_{1\mathbf{u}}x$  в  $\mathbf{u}$  должна принадлежать  $\text{alph}(\check{\mathbf{x}})$ . Таким образом, мы доказали, что  $\text{alph}(\hat{\mathbf{c}}) = \text{alph}(\check{\mathbf{c}})$  для некоторого  $c \in V' \setminus \{a, b\}$ .

Теперь рассмотрим произвольные буквы  $x, y \in V' \setminus \{a, b\}$  такие, что слово  ${}_{1\mathbf{w}_\xi}x {}_{1\mathbf{w}_\xi}y$  образует подслово слова  $\mathbf{w}_\xi$ . Обозначим через  $\mathbf{c}$  подслово слова  $\mathbf{u}$ , лежащее между подсловами  $\hat{\mathbf{x}}$  и  $\hat{\mathbf{y}}$ . Предположим, что подслово  $\mathbf{c}$  не является пустым. Возьмем  $c \in \text{alph}(\mathbf{c})$ . Из следствия 5.41 и того факта, что  $\mathbf{u}(V) = \mathbf{w}_\xi$  и  $\mathbf{v}(V) = \mathbf{w}_\eta$  следует, что  $c \in \text{mul}(\mathbf{u})$ . Ясно, что буква  ${}_{2\mathbf{u}}c$  не входит в 2-отрезки  $\check{\mathbf{x}}$  и  $\check{\mathbf{y}}$  слова  $\mathbf{u}$ . Отсюда следует, что второе вхождение буквы  $c$  не соседствует со вторыми вхождениями букв  $x$  и  $y$  в слове  $\mathbf{u}(V \cup \{c\})$ , что противоречит лемме 5.40. Следовательно, слово  $\mathbf{c}$  должно быть пустым. Поскольку буквы  $x$  и  $y$  мы брали произвольными, получаем, что

$$\mathbf{h} := \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{a}}_i \right) \hat{\mathbf{a}} \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{x}}_{1\xi_i}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{2\xi_i}^{(i)} \right) \hat{\mathbf{b}} \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{b}}_i \right)$$

образует подслово слова  $\mathbf{u}$ , где  $\hat{\mathbf{a}}$  [соответственно  $\hat{\mathbf{b}}$ ] обозначает подслово слова  $\mathbf{u}$ , лежащее между подсловами  $\hat{\mathbf{a}}_n$  и  $\hat{\mathbf{x}}_{1\xi_1}^{(1)}$  [соответственно  $\hat{\mathbf{x}}_{2\xi_n}^{(2)}$  и  $\hat{\mathbf{b}}_1$ ]. Очевидно, что  $a \in \text{alph}(\hat{\mathbf{a}})$  и  $b \in \text{alph}(\hat{\mathbf{b}})$ .

Рассмотрим произвольную букву  $c \in \text{alph}(\hat{\mathbf{a}}) \setminus \text{alph}(\check{\mathbf{a}})$ . Из следствия 5.41 вытекает, что  $c \in \text{mul}(\mathbf{u})$ . Далее, поскольку  $\text{alph}(\hat{\mathbf{a}}_n) = \text{alph}(\check{\mathbf{a}}_n)$  и  $\text{alph}(\hat{\mathbf{x}}_{1\xi_1}^{(1)}) = \text{alph}(\check{\mathbf{x}}_{1\xi_1}^{(1)})$ , из леммы 5.40 следует, что второе вхождение буквы  $c$  смежно со вторым вхождением буквы  $a$  в  $\mathbf{u}(V \cup \{c\})$ . По определению 2-отрезка  $\check{\mathbf{a}}$ , буквы  ${}_{2\mathbf{u}}c$  и  ${}_{2\mathbf{u}}a$  либо лежат в различных блоках слова  $\mathbf{u}$ , либо находятся в одном блоке слова  $\mathbf{u}$ , но в различных 2-отрезках этого блока. Если  ${}_{2\mathbf{u}}c$  и  ${}_{2\mathbf{u}}a$  лежат в различных блоках слова  $\mathbf{u}$ , то существует буква  $h \in \text{sim}(\mathbf{u})$  такая, что  $({}_{2\mathbf{u}}a) < ({}_{1\mathbf{u}}h) < ({}_{2\mathbf{u}}c)$ , чего быть не может в силу леммы 5.38, поскольку второе вхождение буквы  $c$  в слово  $\mathbf{u}(V \cup \{c, h\})$  образует блок в этом слове. Если  ${}_{2\mathbf{u}}c$  и  ${}_{2\mathbf{u}}a$  лежат в одном блоке слова  $\mathbf{u}$ , но в различных 2-отрезках этого блока, то существует буква  $c_1 \in \text{mul}(\mathbf{u})$  такая, что  $({}_{2\mathbf{u}}a) < ({}_{2\mathbf{u}}c_1) < ({}_{2\mathbf{u}}c)$ , а  ${}_{1\mathbf{u}}c_1$  не принадлежит блоку слова  $\mathbf{u}$ , содержащему  ${}_{1\mathbf{u}}a$  и  ${}_{1\mathbf{u}}c$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u}((V \setminus \{a\}) \cup \{c\}) \approx \mathbf{v}((V \setminus \{a\}) \cup \{c\})$  совпадает (с точностью до переименования переменных) с  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta$ , а  ${}_{2\mathbf{u}_9}y_n {}_{2\mathbf{u}_9}c_1 {}_{2\mathbf{u}_9}c$  — подслово слова  $\mathbf{u}_9 := \mathbf{u}((V \setminus \{a\}) \cup \{c, c_1\})$ , из леммы 5.39(iii) вытекает, что буква  ${}_{1\mathbf{u}_9}c_1$  смежна с буквой  ${}_{1\mathbf{u}_9}y_n$  в  $\mathbf{u}_9$ , что противоречит лемме 5.42. Следовательно,  $\text{alph}(\hat{\mathbf{a}}) \subseteq \text{alph}(\check{\mathbf{a}})$ . Аналогичными рассуждениями мы можем показать, что  $\text{alph}(\hat{\mathbf{b}}) \subseteq \text{alph}(\check{\mathbf{b}})$ .

В силу сказанного, найдутся слова  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{t}_i$ ,  $\mathbf{t}'_i$ ,  $\mathbf{t}''_i$  и  $\mathbf{s}_i$  такие, что слово  $\mathbf{phqr}$  является подсловом слова  $\mathbf{u}$ , где

$$\mathbf{p} := \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{z}}_i \mathbf{t}_i \right) \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{z}}'_i \mathbf{t}'_i \right) \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{z}}''_i \mathbf{t}''_i \right), \quad \mathbf{q} := \left( \prod_{i=0}^n \mathbf{s}_i \hat{\mathbf{y}}_i \right) \mathbf{t}.$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что слово  $\mathbf{v}$  содержит подслово

$$\bar{\mathbf{p}} \cdot \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{a}}_i \right) \hat{\mathbf{a}} \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{x}}_{1\eta_i}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{2\eta_i}^{(i)} \right) \hat{\mathbf{b}} \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{b}}_i \right) \cdot \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{r}},$$

где

$$\bar{\mathbf{p}} := \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{z}}_i \bar{\mathbf{t}}_i \right) \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{z}}'_i \bar{\mathbf{t}}'_i \right) \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{z}}''_i \bar{\mathbf{t}}''_i \right), \quad \bar{\mathbf{q}} := \left( \prod_{i=0}^n \bar{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{y}}_i \right) \bar{\mathbf{t}}, \quad \bar{\mathbf{r}} := \check{\mathbf{b}}\check{\mathbf{y}}_0 \left( \prod_{i=1}^n \check{\mathbf{x}}_1^{(i)} \check{\mathbf{z}}_i \check{\mathbf{a}}_i \check{\mathbf{z}}'_i \check{\mathbf{b}}_i \check{\mathbf{z}}''_i \check{\mathbf{x}}_2^{(i)} \check{\mathbf{y}}_i \right) \check{\mathbf{a}},$$

и справедливы следующие утверждения:

- для любого  $c \in V'$  слово  $\check{\mathbf{c}}$  является 2-отрезком слова  $\mathbf{v}$ , содержащим  $2_{\mathbf{v}}c$ ;
- $\text{alph}(\hat{\mathbf{c}}) = \text{alph}(\check{\mathbf{c}})$  для любого  $c \in V' \setminus \{a, b\}$ ;
- $c \in \text{alph}(\hat{\mathbf{c}}) \subseteq \text{alph}(\check{\mathbf{c}})$  для любого  $c \in \{a, b\}$ .

Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является редуцированным,  $\text{alph}(\check{\mathbf{c}}) = \text{alph}(\hat{\mathbf{c}})$  для любого  $c \in V'$ . Откуда  $\text{alph}(\hat{\mathbf{c}}) = \text{alph}(\check{\mathbf{c}})$  для любого  $c \in V' \setminus \{a, b\}$ . Далее, из леммы 5.33 можно вывести, что  $\text{alph}(\hat{\mathbf{c}}) = \text{alph}(\check{\mathbf{c}})$  для любого  $c \in \{a, b\}$ .

Ясно, что  $\mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\mathbf{h}\mathbf{q}\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}$  для некоторых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$ . Положим  $\mathbf{w} := \mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{h}}\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}$ , где

$$\tilde{\mathbf{h}} := \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{a}}_i \right) \hat{\mathbf{a}} \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{x}}_{1\eta_i}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{2\eta_i}^{(i)} \right) \hat{\mathbf{b}} \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{b}}_i \right).$$

Поскольку  $\text{alph}(\hat{\mathbf{c}}) = \text{alph}(\check{\mathbf{c}})$  для любой буквы  $c \in V'$  и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является редуцированным, тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  является  $(r - r')$ -инвертируемым, где

$$r' := \sum_{i \in \{j | \xi_j \neq \eta_j\}} |\hat{\mathbf{x}}_{1\xi_i}^{(i)}| \cdot |\hat{\mathbf{x}}_{2\xi_i}^{(i)}| > 0.$$

Ясно, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  также является редуцированным. Поэтому мы можем применить предположение индукции, заключая, что  $\mathbf{M}(W_n)\{\mathbf{w} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{M}(W_n)\{\Gamma\}$  для некоторого  $\Gamma \subseteq \text{ld}(v_{W_n})$ . Далее,  $\mathbf{M}(W_n)\{\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta\}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\mathbf{h}\mathbf{q}\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} \\ &\approx \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\mathbf{h}\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b} && \text{в силу леммы, двойственной к лемме 3.86} \\ &\approx \mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{h}}\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b} && \text{в силу тождества } \mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta \\ &\approx \mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{h}}\mathbf{q}\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} && \text{в силу леммы, двойственной к лемме 3.86} \\ &= \mathbf{w}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mathbf{r}} := (\check{\mathbf{b}})_{\text{alph}(\hat{\mathbf{b}})} \check{\mathbf{b}}\check{\mathbf{y}}_0 \left( \prod_{i=1}^n \hat{\mathbf{x}}_1^{(i)} \hat{\mathbf{z}}_i \hat{\mathbf{a}}_i \hat{\mathbf{z}}'_i \hat{\mathbf{b}}_i \hat{\mathbf{z}}''_i \hat{\mathbf{x}}_2^{(i)} \hat{\mathbf{y}}_i \right) \hat{\mathbf{a}}(\check{\mathbf{a}})_{\text{alph}(\hat{\mathbf{a}})}.$$

Поскольку тождество  $\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta$  является следствием тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{M}(W_n)\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{M}(W_n)\{\mathbf{u} \approx \mathbf{w} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{M}(W_n)\{\mathbf{w}_\xi \approx \mathbf{w}_\eta, \Gamma\}.$$

**Отображение  $\varphi$  является антиизоморфизмом.** Пусть  $\pi, \rho \in \mathfrak{Cq}(W_n)$ . Если  $\pi \subseteq \rho$ , то  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\rho)\} \subseteq \mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\pi)\}$ , т.е.  $\varphi(\rho) \subseteq \varphi(\pi)$ . Обратно, предположим, что  $\varphi(\rho) \subseteq \varphi(\pi)$ , т.е.  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\rho)\} \subseteq \mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\pi)\}$ . Тогда для любой пары  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \pi$  тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполняется многообразии  $\mathbf{M}(W_n)\{\text{ld}(\rho)\}$ , откуда, в силу следствия 5.35, получаем, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \rho$ . Таким образом,  $\pi \subseteq \rho$ . □

## Глава 6

# Два маленьких многообразия с большим объединением

В данной главе мы построим пример двух многообразий моноидов, каждое из которых имеет прозрачно устроенную решетку подмногообразий (в обоих случаях эта решетка является конечной цепью), однако решетка подмногообразий объединения этих двух многообразий, напротив, устроена чрезвычайно сложно. В частности, она континуальна и содержит изоморфную копию любой конечной решетки. Существование такого примера не только выглядит весьма контринтуитивно само по себе, но и резко контрастирует со случаем многообразий полугрупп, в котором подобного сорта примеры неизвестны.

### § 6.1. Формулировки основных результатов

Основным результатом данной главы является следующая

#### Теорема 6.1.

- (i) По модулю интервала  $[\mathbf{M}(xyzxtu, xzytxu), \mathbf{M}(xzytxu) \vee \mathbf{N}]$  решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xzytxu) \vee \mathbf{N})$  имеет вид, изображенный на рис. 6.1.
- (ii) Интервал  $[\mathbf{M}(xyzxtu, xzytxu), \mathbf{M}(xzytxu) \vee \mathbf{N}]$  решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xzytxu) \vee \mathbf{N})$  континуален и содержит изоморфную копию любой конечной решетки.

Из теоремы 6.1 следует, что объединение двух кроссовых многообразий моноидов может быть конечно универсальным многообразием с континуумом подмногообразий. Несмотря на контринтуитивность этого утверждения, следующее следствие показывает, что можно построить бесконечно много подобных примеров.

**Следствие 6.2.** Пусть  $G$  — группа конечной экспоненты, не удовлетворяющая тождествам

$$xyzxu \approx uxzux, \tag{6.1}$$

$$xuzux \approx uxzxu. \tag{6.2}$$

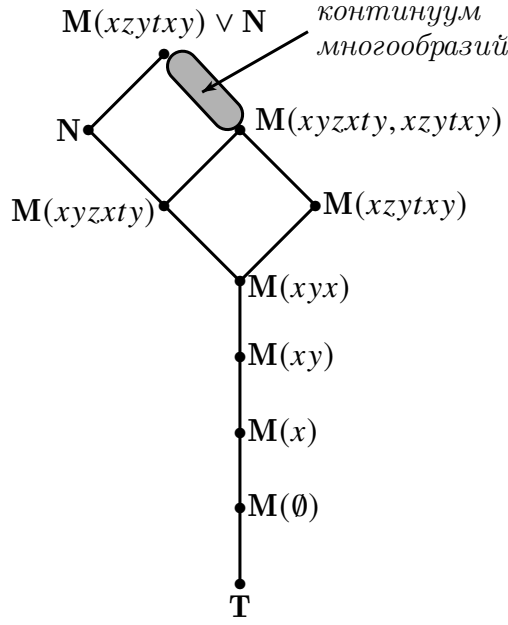


Рис. 6.1: Решетка  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N})$

Тогда  $\mathbf{M}(xux) \vee \text{var } G$  — конечно универсальное многообразие с континуумом подмногообразий.

Напомним, что любая конечная группа порождает крессово многообразие [77]. Поэтому следствие 6.2 позволяет строить множество примеров конечно универсальных многообразий моноидов с континуумом подмногообразий, являющихся объединением двух крессовых многообразий. А именно, такими примерами являются все многообразия вида  $\mathbf{M}(xux) \vee \text{var } G$ , где  $G$  — конечная группа, не удовлетворяющий тождествам (6.1) и (6.2). Например, для каждого простого  $p > 2$  рассмотрим группу диэдра

$$D_p := \langle a, b \mid a^p = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle.$$

В этой группе нарушаются оба тождества (6.1) и (6.2). В самом деле, если  $\varphi: X \rightarrow D_p$  и  $\psi: X \rightarrow D_p$  — подстановки, определяемые правилами

$$\varphi(v) := \begin{cases} ab, & \text{если } v = x, \\ b, & \text{если } v = y, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \text{и} \quad \psi(v) := \begin{cases} a, & \text{если } v = x, \\ b, & \text{если } v = y, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то  $\varphi(xuzxu) = \psi(xuzxu) = a^2$  и  $\varphi(uxzux) = \psi(uxzux) = a^{p-2}$ . Поскольку  $p > 2$  и  $p$  — простое число,  $a^2 \neq a^{p-2}$ . Следовательно, в  $D_p$  не выполнены тождества (6.1) и (6.2). Хорошо известно, что  $D_p$  — минимальная неабелева группа порядка  $2p$  (см. [23, раздел 1.9]). Отсюда легко вывести, что решетка  $\mathfrak{L}(\text{var } D_p)$  имеет вид, изображенный на рис. 6.2. Таким образом, мы имеем счётную серию конечно универсальных многообразий моноидов с континуумом подмногообразий, являющихся объединением двух крессовых многообразий с 5-элементными

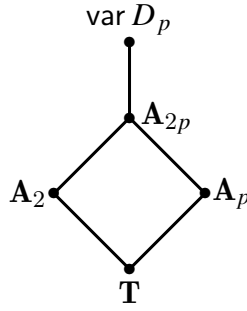


Рис. 6.2: решетка  $\mathfrak{L}(\text{var } D_p)$

решетками подмногообразий.

В § 6.2 собраны необходимые определения, обозначения и вспомогательные результаты. Доказательству теоремы 6.1 и следствия 6.2 посвящен § 6.3.

## § 6.2. Предварительные результаты

Блок слова  $\mathbf{w}$  будем называть  $k$ -однородным, если он состоит только из  $k$ -х вхождений букв в слово  $\mathbf{w}$ . Слово, каждый блок которого является 1-однородным или 2-однородным, называется *распавшимся*. Напомним, что максимальное подслово слова  $\mathbf{w}$ , состоящее только из первых [вторых] вхождений кратных букв, чьи вторые [первые] вхождения лежат в одном блоке слова  $\mathbf{w}$ , называется *1-отрезком* [2-отрезком] этого слова. Если  $k \in \{1, 2\}$ , то представление  $k$ -однородного блока в виде произведения  $k$ -отрезков назовем *разложением* этого блока. Представление распавшегося слова  $\mathbf{w}$  в виде произведения чередующихся простых букв и разложений блоков будем называть *полным разложением* слова  $\mathbf{w}$ . Ниже при записи полных разложений конкретных слов мы будем подчеркивать простые буквы, чтобы отличать их от блоков, а символом  $|$  будем разделять отрезки внутри одного блока.

Тождество, обе части которого являются распавшимися словами, мы также будем называть *распавшимся*. Слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  будем называть *эквивалентными*, если их разложения имеют вид  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  соответственно и  $\text{alph}(\mathbf{u}_i) = \text{alph}(\mathbf{v}_i)$  для любого  $0 \leq i \leq m$ . Пусть  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — эквивалентные друг другу распавшиеся слова с разложениями  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  соответственно. Напомним, что в этом случае мы называем блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  *соответствующими* друг другу. Будем говорить, что соответствующие блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  *эквивалентны*, если их разложения имеют вид  $\mathbf{u}_{i1} \mathbf{u}_{i2} \dots \mathbf{u}_{ik_i}$  и  $\mathbf{v}_{i1} \mathbf{v}_{i2} \dots \mathbf{v}_{ik_i}$  соответственно (т.е. содержат равное число отрезков) и  $\text{alph}(\mathbf{u}_{ij}) = \text{alph}(\mathbf{v}_{ij})$  для всех  $1 \leq j \leq k_i$ . В этом случае отрезки  $\mathbf{u}_{ij}$  и  $\mathbf{v}_{ij}$  будем называть *соответствующими* друг другу. Если  $k \in \{1, 2\}$ , то эквивалентные слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  будем называть  $k$ -эквивалентными, если любые два соответствующих  $k$ -однородных блока этих слов эквивалентны друг другу.

**Лемма 6.3.** *Распавшееся тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{M}(\text{xyzxt})$  тогда и только тогда, когда слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются 1-эквивалентными.*

*Доказательство. Необходимость.* Предположим, что распавшееся тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{M}(\text{xyzxt})$ . Из леммы 1.21 вытекает эквивалентность слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Пусть

разложения слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  имеют вид  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  соответственно.

Предположим, что  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  не являются 1-эквивалентными. Тогда в некотором 1-однородном блоке  $\mathbf{u}_i$  слова  $\mathbf{u}$  найдутся буквы  $x$  и  $y$ , вторые вхождения которых лежат в различных блоках, скажем  $\mathbf{u}_j$  и  $\mathbf{u}_k$ , а первое вхождение  $x$  предшествует первому вхождению  $y$  в  $\mathbf{u}$ , но первое вхождение  $y$  предшествует первому вхождению  $x$  в  $\mathbf{v}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $j < k$ . Ясно, также что  $i < j$ . Поскольку слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  эквивалентны,  $x \in \text{alph}(\mathbf{v}_j) \cap \text{alph}(\mathbf{v}_k)$  и  $y \in \text{alph}(\mathbf{v}_i) \cap \text{alph}(\mathbf{v}_k)$ . Подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , кроме  $x, y, t_{i+1}$  и  $t_{j+1}$ . Мы получим, что  $\mathbf{M}(xyzxtu)$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u}(x, y, t_{i+1}, t_{j+1}) = xy t_{i+1} x t_{j+1} y \approx yx t_{i+1} x t_{j+1} y = \mathbf{v}(x, y, t_{i+1}, t_{j+1}),$$

чего быть не может. Следовательно, слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  1-эквивалентны.

*Достаточность.* Пусть  $\varphi: X \rightarrow M(xyzxtu)$  — произвольная подстановка. Если  $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}) = 0$ , то доказывать нечего. Предположим, что один из элементов  $\varphi(\mathbf{u})$  и  $\varphi(\mathbf{v})$ , скажем  $\varphi(\mathbf{u})$ , не равен 0. Тогда  $\varphi(\mathbf{u})$  является подсловом слова  $xyzxtu$ . В этом случае домножив тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  слева или справа, если это необходимо, мы можем сделать так, чтобы образ левой части тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  относительно  $\varphi$  совпадал с  $xyzxtu$ . Таким образом, можно считать, что  $\varphi(\mathbf{u}) = xyzxtu$ . Очевидно, что слово  $xyzxtu$  может быть 1-эквивалентно только самому себе, поскольку все его отрезки одноэлементны. Следовательно,  $\varphi(\mathbf{v}) = xyzxtu$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Лемма 6.4.** *Распавшееся тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{N}$  тогда и только тогда, когда слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются 1-эквивалентными и соответствующие 1-однородные блоки слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  равны между собой.*

*Доказательство. Необходимость.* Предположим, что распавшееся тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{N}$ . Из включения  $\mathbf{M}(xyzxtu) \subset \mathbf{N}$  и леммы 6.3 вытекает, что слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  1-эквивалентны. Соответствующие 1-однородные блоки слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  обязаны совпадать, поскольку в  $\mathbf{N}$  нарушаются тождества (6.1), (6.2) и  $xyzxu \approx uxzxy$ .

*Достаточность.* Пусть  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  — разложение слова  $\mathbf{u}$ . Из эквивалентности  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  следует, что разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  и  $\text{alph}(\mathbf{u}_i) = \text{alph}(\mathbf{v}_i)$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Возьмем произвольные соответствующие 2-однородные блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$ . Слова  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  линейны и зависят от одних и тех же букв. Тождество  $\sigma_2$  позволяет переставлять местами любые два смежных вторых вхождения букв в слово. Следовательно, используя это тождество, мы можем преобразовать 2-однородные блоки  $\mathbf{u}_i$  слова  $\mathbf{u}$  к соответствующим 2-однородным блокам  $\mathbf{v}_i$  слова  $\mathbf{v}$ . По условию соответствующие 1-однородные блоки слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  равны между собой. Следовательно, многообразию  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m \stackrel{\sigma_2}{\approx} t_0 \mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m = \mathbf{v},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Если  $n, k \in \mathbb{N}$ , то обозначим через  $\mathcal{M}_n^k$  множество всех упорядоченных последователь-

ностей из  $k$  натуральных чисел, в которых первое число равно 1 и все числа не превосходят  $n$ . Пусть  $\mathbf{a} := (1, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}) \in \mathcal{M}_n^k$  и  $j \leq n$ . Тогда положим

$$\mathbf{a} + j := (1, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, j) \in \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

На множестве  $\mathcal{M}_n^k$  определен обычный лексикографический порядок. Поэтому выражения вида

$$\left( \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_n^k} \mathbf{w}_{\mathbf{a}} \right)$$

договоримся понимать как сокращенную запись произведения слов вида  $\mathbf{w}_{\mathbf{a}}$  в порядке возрастания  $\mathbf{a}$ . Положим

$$\mathbf{e}_n := \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_n^n} \left( \prod_{j=1}^n s_{\mathbf{a}}^{(j)} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{f}_n^{(k)} := s_k \cdot \left( \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_n^k} \left( \prod_{j=1}^n x_{\mathbf{a}}^{(j)} \left( \prod_{\ell=1}^n x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)} \right) \right) \right)$$

для всех  $n, k \in \mathbb{N}$ . Далее, для любого натурального  $n$  положим

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_n &:= xy \cdot \left( \prod_{i=1}^n \mathbf{f}_{2n}^{(2i-1)} \right) \cdot \mathbf{e}_{2n} \cdot \left( \prod_{i=n-1}^1 \mathbf{f}_{2n}^{(2i)} \right) \cdot sx \cdot \left( \prod_{i=1}^{2n} x_1^{(i)} \right) \cdot y, \\ \mathbf{g}'_n &:= yx \cdot \left( \prod_{i=1}^n \mathbf{f}_{2n}^{(2i-1)} \right) \cdot \mathbf{e}_{2n} \cdot \left( \prod_{i=n-1}^1 \mathbf{f}_{2n}^{(2i)} \right) \cdot sx \cdot \left( \prod_{i=1}^{2n} x_1^{(i)} \right) \cdot y. \end{aligned}$$

Следующий простой факт проверяется непосредственно.

**Лемма 6.5.** *Выражение*

$$\begin{aligned} & \mathbf{g} \cdot \left( \prod_{i=1}^{n-1} \underline{s}_i \left( \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2i-1}} \left( \prod_{j=1}^{2n} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \left| \prod_{\ell=1}^{2n} x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)} \right| \right) \right) \right) \\ & \cdot \left( \underline{s}_{2n-1} \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2n-1}} \left( \prod_{j=1}^{2n} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \left( \prod_{\ell=1}^{2n} |x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)}| \right) \right) \right) \left( \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2n}} \left( \prod_{j=1}^{2n} \underline{s}_{\mathbf{a}}^{(j)} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \right) \right) \\ & \cdot \left( \prod_{i=n-1}^1 \underline{s}_i \left( \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2i}} \left( \prod_{j=1}^{2n} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \left| \prod_{\ell=1}^{2n} x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)} \right| \right) \right) \right) \cdot \underline{s}x \cdot \left| \prod_{i=1}^{2n} x_1^{(i)} \right| \cdot y. \end{aligned} \tag{6.3}$$

является полным разложением слова  $\mathbf{g}_n$  при  $\mathbf{g} = xy$  и слова  $\mathbf{g}'_n$  при  $\mathbf{g} = yx$ .

Два следующих наблюдения играют важную роль в последующих рассуждениях.

**Лемма 6.6.** *Пусть для всякого  $0 \leq \ell \leq n-1$  выполняется равенство*

$$\{\psi_{\ell}(x_{2\ell+1}), \psi_{\ell}(y_{2\ell+1})\} = \{x_{2\ell+1}, y_{2\ell+1}\}. \tag{6.4}$$

Тогда любое подслово длины  $> 1$  слова

$$x_0 y_0 \left( \prod_{i=1}^n s_{2i-1} x_{2i-1} x_{2i} y_{2i} y_{2i-1} \right) s_{2i} x_{2i} t_{2i} y_{2i} \left( \prod_{i=n-1}^0 s_{2i} x_{2i} \psi_i(x_{2i+1}) \psi_i(y_{2i+1}) y_{2i} \right) \quad (6.5)$$

имеет ровно одно вхождение в это слово.  $\square$

**Лемма 6.7.** Пусть для всякого нечетного  $1 \leq \ell \leq 2n-1$  и для всякого  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^\ell$  выполняется равенство

$$\{\psi_\alpha(x_{\mathbf{a}}^{(i)}) \mid 1 \leq i \leq 2n\} = \{x_{\mathbf{a}}^{(i)} \mid 1 \leq i \leq 2n\}. \quad (6.6)$$

Тогда любое подслово длины  $> 1$  слова

$$\begin{aligned} & x y \cdot \left( \prod_{i=1}^{n-1} \underline{s}_i \left( \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2i-1}} \left( \prod_{j=1}^{2n} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \mid \prod_{\ell=1}^{2n} x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)} \mid \right) \right) \right) \\ & \cdot \left( \underline{s}_{2n-1} \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2n-1}} \left( \prod_{j=1}^{2n} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \mid \prod_{\ell=1}^{2n} x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)} \mid \right) \right) \cdot \left( \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2n}} \left( \prod_{j=1}^{2n} \underline{s}_{\mathbf{a}}^{(j)} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \right) \right) \\ & \cdot \left( \prod_{i=n-1}^1 \underline{s}_i \left( \prod_{\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2i}} \left( \prod_{j=1}^{2n} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \mid \prod_{\ell=1}^{2n} \psi_{\mathbf{a}+j}(x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)}) \mid \right) \right) \right) \cdot \underline{s}x \cdot \left| \prod_{i=1}^{2n} \psi_1(x_1^{(i)}) \right| \cdot y \end{aligned} \quad (6.7)$$

имеет ровно одно вхождение в это слово.  $\square$

Леммы 6.6 и 6.7 следуют из того непосредственно проверяемого факта, что если  $\mathbf{w}$  — одно из слов (6.5) или (6.7), то любое подслово длины 2 слова  $\mathbf{w}$  имеет ровно одно вхождение в это слово.

**Лемма 6.8.** Пусть  $n$  — натуральное число,  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, а  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  — нетривиальное тождество. Предположим, что для всякого  $0 \leq \ell \leq n-1$  найдется такая подстановка  $\psi_\ell: X \rightarrow X^*$ , что выполняется равенство (6.4) и слово  $\mathbf{w}$  совпадает со словом (6.5). Тогда если  $\mathbf{w} = \mathbf{u}\varphi(\mathbf{g}_k)\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}' = \mathbf{u}\varphi(\mathbf{g}'_k)\mathbf{v}$  для некоторых слов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^*$  и некоторого  $k \geq n$ , то  $n = k$ .

*Доказательство.* Заметим, что подстановка  $\varphi$  не отображает буквы  $x$  и  $y$  в пустое слово, так как тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  нетривиально. Отсюда вытекает, что слово  $\varphi(xy)$  имеет длину  $\geq 2$ . В силу леммы 6.6, слова  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  обязаны быть буквами. Из леммы 6.5 следует, что слова  $\mathbf{g}_k$  и  $\mathbf{g}'_k$  являются 1-эквивалентными. Тогда, по лемме 6.3, тождество  $\mathbf{g}_k \approx \mathbf{g}'_k$  выполнено в  $\mathbf{M}(xuzxy)$ . Следовательно, в  $\mathbf{M}(xuzxy)$  выполняется и тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$ . Поскольку первые вхождения букв  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  входят в слова  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{w}'$  в противоположном порядке, из леммы 6.3 следует, что некоторый отрезок 1-однородного блока слова  $\mathbf{w}$  содержит подслово  $\varphi(xy)$ . Легко видеть, что полное разложение слова  $\mathbf{w}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & x_0 y_0 \cdot \left( \prod_{i=1}^{n-1} \underline{s}_{2i-1} x_{2i-1} \mid x_{2i} y_{2i} \mid y_{2i-1} \right) \cdot \underline{s}_{2n-1} x_{2n-1} \mid x_{2n} \mid y_{2n} \mid y_{2n-1} \\ & \cdot \underline{s}_{2n} x_{2n} t_{2n} y_{2n} \cdot \left( \prod_{i=n-1}^0 \underline{s}_{2i} x_{2i} \mid \psi_i(x_{2i+1} y_{2i+1}) \mid y_{2i} \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Тогда  $\varphi(xy) = x_{2p}y_{2p}$  для некоторого  $0 \leq p < n$ , откуда следуют равенства  $\varphi(x) = x_{2p}$  и  $\varphi(y) = y_{2p}$ . Таким образом,

$$\psi_p(x_{2p+1}y_{2p+1}) = \left( \prod_{i=1}^{2k} \varphi(x_1^{(i)}) \right).$$

Учитывая лемму 6.6 и равенство (6.4), получаем, что найдутся такие  $c_1 < d_1$ , что  $\varphi(x_1^{(c_1)}) = \psi_p(x_{2p+1})$  и  $\varphi(x_1^{(d_1)}) = \psi_p(y_{2p+1})$ . В слове  $\mathbf{g}_k$  первое вхождение  $x_1^{(c_1)}$  предшествует первому вхождению  $x_1^{(d_1)}$ . Отсюда вытекает, что в слове  $\mathbf{w}$  первое вхождение буквы  $\varphi(x_1^{(c_1)})$  предшествует первому вхождению буквы  $\varphi(x_1^{(d_1)})$ . Следовательно,  $\varphi(x_1^{(c_1)}) = x_{2p+1}$  и  $\varphi(x_1^{(d_1)}) = y_{2p+1}$ .

Далее, докажем по индукции, что для любого  $1 \leq q \leq 2n - 2p$  выполняются равенства

$$x_{2p+q} = \varphi(x_{\mathbf{a}_q}^{c_q}) \text{ и } y_{2p+q} = \varphi(x_{\mathbf{b}_q}^{d_q}) \quad (6.9)$$

для некоторых букв  $x_{\mathbf{a}_q}^{c_q}$  и  $x_{\mathbf{b}_q}^{d_q}$  таких, что  $\mathbf{a}_q, \mathbf{b}_q \in \mathcal{M}_{2k}^q$  и первое вхождение  $x_{\mathbf{a}_q}^{c_q}$  в слово  $\mathbf{w}$  предшествует первому вхождению  $x_{\mathbf{b}_q}^{d_q}$  в это слово, т.е. выполняется следующее условие

$$\mathbf{a}_q \leq \mathbf{b}_q \text{ и если } \mathbf{a}_q = \mathbf{b}_q, \text{ то } c_q < d_q. \quad (6.10)$$

База индукции рассмотрена в предыдущем абзаце. Предположим, что для всех  $1 \leq r < q \leq 2n - 2p$  существуют буквы  $x_{\mathbf{a}_r}^{c_r}$  и  $x_{\mathbf{b}_r}^{d_r}$  такие, что  $\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r \in \mathcal{M}_{2k}^r$ ,  $\mathbf{a}_r \leq \mathbf{b}_r$  и если  $\mathbf{a}_r = \mathbf{b}_r$  то  $c_r \leq d_r$ ,  $x_{2p+r} = \varphi(x_{\mathbf{a}_r}^{c_r})$  и  $y_{2p+r} = \varphi(x_{\mathbf{b}_r}^{d_r})$ . Необходимо проверить, что для некоторых букв  $x_{\mathbf{a}_q}^{c_q}$  и  $x_{\mathbf{b}_q}^{d_q}$  таких, что  $\mathbf{a}_q, \mathbf{b}_q \in \mathcal{M}_{2k}^q$ , выполняются условия (6.9) и (6.10).

Если буквы  $a$  и  $b$  — кратные буквы слова  $\mathbf{w}$  и  $i \in \{1, 2\}$ , то через  $\mathbf{w}_i[a, b]$  обозначим подслово слова  $\mathbf{w}$ , лежащее между  $i$ -ми вхождениями букв  $a$  и  $b$ .

Предположим сначала, что  $q$  нечетно. Тогда

$$\psi_{\frac{2p+q-1}{2}}(x_{2p+q}y_{2p+q}) = \varphi(\mathbf{w}_2[x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{c_{q-1}}, x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{d_{q-1}}]).$$

Заметим, что при  $i = 2$ , если  $\mathbf{a}_{q-1} = \mathbf{b}_{q-1}$ , то

$$\mathbf{w}_2[x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{c_{q-1}}, x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{d_{q-1}}] = \left( \prod_{\ell=1}^{2k} x_{\mathbf{a}_{q-1}+c_{q-1}}^{(\ell)} \right) \cdot \left( \prod_{j=c_{q-1}+1}^{d_{q-1}-1} x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{(j)} \left( \prod_{\ell=1}^{2k} x_{\mathbf{a}_{q-1}+j}^{(\ell)} \right) \right), \quad (6.11)$$

а если  $\mathbf{a}_{q-1} < \mathbf{b}_{q-1}$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2[x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{c_{q-1}}, x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{d_{q-1}}] &= \left( \prod_{\ell=1}^{2k} x_{\mathbf{a}_{q-1}+c_{q-1}}^{(\ell)} \right) \cdot \left( \prod_{j=c_{q-1}+1}^{2k} x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{(j)} \left( \prod_{\ell=1}^{2k} x_{\mathbf{a}_{q-1}+j}^{(\ell)} \right) \right) \\ &\cdot \left( \prod_{\mathbf{a}_{q-1} < \mathbf{a} < \mathbf{b}_{q-1}} \left( \prod_{j=1}^{2k} x_{\mathbf{a}}^{(j)} \left( \prod_{\ell=1}^{2k} x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)} \right) \right) \right) \cdot \left( \prod_{j=1}^{d_{q-1}-1} x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{(j)} \left( \prod_{\ell=1}^{2k} x_{\mathbf{b}_{q-1}+j}^{(\ell)} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

В силу предположения индукции, подстановка  $\varphi$  отображает в пустое слово все буквы, лежащие между первыми вхождениями букв  $x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{(c_{q-1})}$  и  $x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{(d_{q-1})}$  в  $\mathbf{w}$ , т.е.  $\varphi(\mathbf{w}_1[x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{(c_{q-1})}, x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{(d_{q-1})}]) = 1$ .

Тогда, учитывая равенства (6.11) и (6.12), мы имеем, что если  $\mathbf{a}_{q-1} = \mathbf{b}_{q-1}$ , то справедливо равенство

$$\varphi(\mathbf{w}_i[x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{c_{q-1}}, x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{d_{q-1}}]) = \prod_{j=c_{q-1}}^{d_{q-1}-1} \left( \prod_{\ell=1}^{2k} \varphi(x_{\mathbf{a}_{q-1}+j}^{(\ell)}) \right) \quad (6.13)$$

при  $i = 2$ , а если  $\mathbf{a}_{q-1} < \mathbf{b}_{q-1}$ , то выполняется равенство

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{w}_i[x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{c_{q-1}}, x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{d_{q-1}}]) &= \left( \prod_{j=c_{q-1}}^{2k} \left( \prod_{\ell=1}^{2k} \xi(x_{\mathbf{a}_{q-1}+j}^{(\ell)}) \right) \right) \\ &\cdot \left( \prod_{\mathbf{a}_{q-1} < \mathbf{a} < \mathbf{b}_{q-1}} \left( \prod_{j=1}^{2k} \left( \prod_{\ell=1}^{2k} \varphi(x_{\mathbf{a}+j}^{(\ell)}) \right) \right) \right) \cdot \left( \prod_{j=1}^{d_{q-1}-1} \left( \prod_{\ell=1}^{2k} \xi(x_{\mathbf{b}_{q-1}+j}^{(\ell)}) \right) \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

при  $i = 2$ . Отсюда и из леммы 6.6 вытекает, что существуют такие  $\mathbf{a}_q, \mathbf{b}_q \in \mathcal{M}_{2k}^q$  и  $1 \leq c_q, d_q \leq 2k$ , что выполняется условие (6.10),  $\psi_{\frac{2p+q-1}{2}}(x_{2p+q}) = \varphi(x_{\mathbf{a}_q}^{c_q})$  и  $\psi_{\frac{2p+q-1}{2}}(y_{2p+q}) = \varphi(x_{\mathbf{b}_q}^{d_q})$ . Поскольку в слове  $\mathbf{g}_k$  первое вхождение  $x_{\mathbf{a}_q}^{c_q}$  предшествует первому вхождению  $x_{\mathbf{b}_q}^{d_q}$ , мы получаем, что в слове  $\mathbf{w}$  первое вхождение буквы  $\varphi(x_{\mathbf{a}_q}^{c_q})$  предшествует первому вхождению буквы  $\varphi(x_{\mathbf{b}_q}^{d_q})$ , откуда следует, что  $\varphi(x_{\mathbf{a}_q}^{c_q}) = \psi_{\frac{2p+q-1}{2}}(x_{2p+q}) = x_{2p+q}$  и  $\varphi(x_{\mathbf{b}_q}^{d_q}) = \psi_{\frac{2p+q-1}{2}}(y_{2p+q}) = y_{2p+q}$ . Таким образом, для нечетного  $q$  равенства (6.9) доказаны.

Предположим теперь, что  $q$  четно. Тогда  $x_{2p+q}y_{2p+q} = \varphi(\mathbf{w}_1[x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{c_{q-1}}, x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{d_{q-1}}])$ . Заметим, что если  $\mathbf{a}_{q-1} = \mathbf{b}_{q-1}$ , то выполняется равенство (6.11) при  $i = 1$ , а если  $\mathbf{a}_{q-1} < \mathbf{b}_{q-1}$ , то имеет место равенство (6.12) при  $i = 1$ . В силу предположения индукции, подстановка  $\varphi$  отображает в пустое слово все буквы, лежащие между вторыми вхождениями букв  $x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{(c_{q-1})}$  и  $x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{(d_{q-1})}$  в  $\mathbf{w}$ , т.е.  $\varphi(\mathbf{w}_2[x_{\mathbf{a}_{q-1}}^{(c_{q-1})}, x_{\mathbf{b}_{q-1}}^{(d_{q-1})}]) = 1$ . Тогда, учитывая равенства (6.11) и (6.12), мы имеем, что если  $\mathbf{a}_{q-1} = \mathbf{b}_{q-1}$ , то справедливо равенство (6.13) при  $i = 1$ , а если  $\mathbf{a}_{q-1} < \mathbf{b}_{q-1}$ , то выполняется равенство (6.14) при  $i = 1$ . Отсюда и из леммы 6.6 вытекает, что существуют такие  $\mathbf{a}_q, \mathbf{b}_q \in \mathcal{M}_{2k}^q$  и  $1 \leq c_q, d_q \leq 2k$ , что выполняется условие (6.10),  $x_{2p+q} = \varphi(x_{\mathbf{a}_q}^{c_q})$  и  $y_{2p+q} = \varphi(x_{\mathbf{b}_q}^{d_q})$ .

Таким образом, мы показали, что для любого  $1 \leq q \leq 2n-2p$  найдутся такие буквы  $x_{\mathbf{a}_q}^{c_q}$  и  $x_{\mathbf{b}_q}^{d_q}$ , что  $\mathbf{a}_q, \mathbf{b}_q \in \mathcal{M}_{2k}^q$  и выполняются условия (6.9) и (6.10). В частности, из сказанного следует, что  $x_{2n} = \varphi(x_{\mathbf{a}_{2n-2p}}^{c_{2n-2p}})$  и  $y_{2n} = \varphi(x_{\mathbf{b}_{2n-2p}}^{d_{2n-2p}})$ . Отсюда вытекает, что  $\varphi(\mathbf{w}_2[x_{\mathbf{a}_{2n-2p}}^{c_{2n-2p}}, x_{\mathbf{b}_{2n-2p}}^{d_{2n-2p}}]) = t_{2n}$ . Тогда если  $k > n$ , то все буквы из  $\text{alph}(\mathbf{w}_2[x_{\mathbf{a}_{2n-2p}}^{c_{2n-2p}}, x_{\mathbf{b}_{2n-2p}}^{d_{2n-2p}}])$  являются кратными в  $\mathbf{g}_k$ , что противоречит тому, что буква  $t_{2n}$  является простой в  $\mathbf{w}$ .  $\square$

### § 6.3. Доказательство основных результатов

*Доказательство теоремы 6.1.* В [11, предложение 3.14] и [50, рис. 1] соответственно показано, что решетки  $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xuzxtu, xzytxu))$  и  $\mathfrak{L}(\mathbf{N})$  имеют вид, изображенный на рис 6.1. Поэтому рассмотрим собственное подмногообразие  $\mathbf{V}$  многообразия  $\mathbf{M}(xzytxu) \vee \mathbf{N}$ , не содержащееся в многообразиях  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{M}(xuzxtu, xzytxu)$ . Нам необходимо показать, что  $\mathbf{V}$  принадлежит интервалу  $[\mathbf{M}(xzytxu, xuzxtu), \mathbf{M}(xzytxu) \vee \mathbf{N}]$ .

Отметим сначала, что в многообразии  $\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}$  выполнены тождества  $x^2 \approx x^3$ ,  $xuxzx \approx x^2yz$ ,  $x^2y \approx ux^2$  и  $\sigma_3$ . Поэтому если  $M(xux) \notin \mathbf{V}$ , то из [50, лемма 4.5] и леммы 1.26 следует, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{M}(xy) \subset \mathbf{N}$ . Следовательно,  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Тогда если  $M(xzytxy) \notin \mathbf{V}$ , то, согласно лемме 1.23,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\sigma_2$ . Следовательно,  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{N}^\delta$ . Решетка  $L(\mathbf{N}^\delta)$  изоморфна решетке  $L(\mathbf{N})$  и  $\mathbf{V} \neq \mathbf{N}^\delta$ . Из сказанного получаем неверное включение  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{M}(xzytxy) \subset \mathbf{M}(xyzxty, xzytxy)$ . В силу симметрии, если  $M(xzytxy) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{N}$ , что также невозможно. Таким образом, мы показали, что  $M(xyzxty, xzytxy) \in \mathbf{V}$ . Следовательно,  $\mathbf{V} \in [\mathbf{M}(xzytxy, xyzxty), \mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}]$ . Таким образом остается установить, что интервал  $[\mathbf{M}(xzytxy, xyzxty), \mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}]$  континуален и содержит изоморфную копию любой конечной решетки.

**Интервал  $[\mathbf{M}(xzytxy, xyzxty), \mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}]$  содержит изоморфную копию любой конечной решетки.** Выведем требуемое утверждение из предложения 5.30. С учетом леммы 1.3, для этого достаточно установить, что если  $n \geq 2$  и  $\xi \in S_2^n$ , а  $w_\xi$  — слово, определяемое формулой (5.11), то  $w_\xi$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}$ .

Пусть  $w_\xi \approx \mathbf{w}$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}$ . Из леммы 5.31 следует  $\mathbf{w} = \mathbf{pw}'\mathbf{qr}$ , где слова  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$  определяются формулами (5.12), (5.13) и (5.14) соответственно, а  $\mathbf{w}'$  — линейное слово такое, что  $\text{alph}(\mathbf{w}') = \{a, a_i, b, b_i, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Возьмем произвольные буквы  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{w}')$  и предположим, что  $(1_{w_\xi}x) < (1_{w_\xi}y)$ . Тогда  $w_\xi(x, y, t) = xuta$  для некоторого  $\mathbf{a} \in \{xy, ux\}$ . Поскольку в многообразии  $\mathbf{N}$  нарушается тождество  $xuta \approx uxta$ , отсюда следует, что  $(1_{\mathbf{w}}x) < (1_{\mathbf{w}}y)$ . Таким образом,

$$\mathbf{w}' = \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) a \left( \prod_{i=1}^n x_{1\xi_i}^{(i)} x_{2\xi_i}^{(i)} \right) b \left( \prod_{i=1}^n b_i \right)$$

и потому  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\xi$ , что и требовалось показать.

**Интервал  $[\mathbf{M}(xzytxy, xyzxty), \mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}]$  континуален.** Обозначим базис тождеств многообразия  $\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}$  через  $\Sigma$ . Пусть  $K$  — некоторое подмножество множества  $\mathbb{N}$ . Положим  $\Sigma_K := \{\mathbf{g}_n \approx \mathbf{g}'_n \mid n \in K\}$ . Покажем, что различные подмножества вида  $\Sigma_K$  задают различные подмногообразия внутри многообразия  $\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}$ . Рассуждая от противного, предположим, что найдутся такие  $n$  и  $K \subseteq \mathbb{N}$ , что  $n \notin K$  и тождество  $\mathbf{g}_n \approx \mathbf{g}'_n$  является следствием системы тождеств  $\Sigma \cup \Sigma_K$ . Тогда, в силу предложения 1.1, существует такая последовательность попарно различных слов  $\mathbf{g}_n = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m = \mathbf{g}'_n$ , что для любого  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  найдутся слова  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in X^*$ , подстановка  $\varphi_i: X \rightarrow X^*$  и тождество  $\mathbf{p}_i \approx \mathbf{q}_i \in \Sigma \cup \Sigma_K$ , для которых  $\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i\varphi_i(\mathbf{p}_i)\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{u}_i\varphi_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{v}_i$ . Из леммы 6.5 вытекает, что слова  $\mathbf{g}_n$  и  $\mathbf{g}'_n$  являются 1-эквивалентными, но 1-однородный блок  $xu$  слова  $\mathbf{g}_n$  не совпадает с соответствующим ему 1-однородным блоком  $ux$  слова  $\mathbf{g}'_n$ . Тогда из леммы 6.4 следует, что тождество  $\mathbf{g}_n \approx \mathbf{g}'_n$  не выполнено в многообразии  $\mathbf{N}$ , откуда вытекает, что существует такое  $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , что  $\{\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r\} = \{\mathbf{g}_k, \mathbf{g}'_k\}$  для некоторого  $k \neq n$ . Пусть  $r$  — наименьшее число с таким свойством. Тогда тождество  $\mathbf{g}_n \approx \mathbf{w}_r$  выполнено в многообразии  $\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}$ . В

силу леммы 6.5, полное разложение слова  $\mathbf{g}_n$  имеет вид (6.3) при  $\mathbf{g} = xy$ . Тогда из леммы 6.4 и утверждения, двойственного к лемме 6.3 следует, что для всех нечетных  $1 \leq \ell \leq 2n - 1$  и для всех  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^\ell$  найдутся подстановки  $\psi_{\mathbf{a}}: X \rightarrow X^*$  такие, что слово  $\mathbf{w}_r$  совпадает с (6.7) и выполняются равенства (6.6).

Заметим, что подстановка  $\varphi_r$  не отображает буквы  $x$  и  $y$  в пустое слово, так как тождество  $\mathbf{w}_r \approx \mathbf{w}_{r+1}$  нетривиальны. Отсюда вытекает, что слово  $\varphi_r(xy)$  имеет длину  $\geq 2$ . В силу леммы 6.7, никакое подслово длины  $> 1$  не входит в слово (6.7) в двух различных позициях. Следовательно, слова  $\varphi_r(x)$  и  $\varphi_r(y)$  обязаны быть буквами. Поскольку первые вхождения букв  $\varphi_r(x)$  и  $\varphi_r(y)$  входят в слова  $\mathbf{w}_r$  и  $\mathbf{w}_{r+1}$  в противоположном порядке, из леммы 6.3 следует, что некоторый отрезок 1-однородного блока слова  $\mathbf{w}_r$  содержит подслово  $\varphi_r(xy)$ , если  $\mathbf{p}_r = \mathbf{g}_k$ , и подслово  $\varphi_r(yx)$ , если  $\mathbf{p}_r = \mathbf{g}'_k$ . Напомним, что полное разложение слова  $\mathbf{w}_r$  имеет вид (6.7). Поэтому если  $(\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r) = (\mathbf{g}'_k, \mathbf{g}_k)$ , то либо  $\varphi_r(yx) = xy$ , либо  $\varphi_r(yx) = x_a^{(p)} x_a^{(p+1)}$  для некоторых  $1 \leq p < 2n$ ,  $1 \leq h < n$  и  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2h}$ . Тогда либо  $\varphi_r(y) = x$  и  $\varphi_r(x) = y$ , либо  $\varphi_r(y) = x_a^{(p)}$  и  $\varphi_r(x) = x_a^{(p+1)}$ . Поскольку в слове  $\mathbf{g}'_k$  второе вхождение  $x$  предшествует второму вхождению  $y$ , в слове  $\mathbf{w}_r$  второе вхождение  $\varphi_r(x)$  должно предшествовать второму вхождению  $\varphi_r(y)$ . Но это невозможно, поскольку в слове  $\mathbf{w}_r$  второе вхождение  $y$  стоит после второго вхождения  $x$ , а второе вхождение  $x_a^{(p+1)}$  стоит после второго вхождения  $x_a^{(p)}$ . Таким образом,  $(\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r) \neq (\mathbf{g}'_k, \mathbf{g}_k)$  и, следовательно,  $(\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r) = (\mathbf{g}_k, \mathbf{g}'_k)$ .

Предположим сначала, что  $k < n$ . Тогда, поскольку полное разложение слова  $\mathbf{w}_r$  имеет вид (6.7), либо  $\varphi_r(xy) = xy$ , либо  $\varphi_r(xy) = x_a^{(p)} x_a^{(p+1)}$  для некоторых  $1 \leq p < 2n$ ,  $1 \leq h < n$  и  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2h}$ . Если  $\varphi_r(xy) = xy$ , то

$$\left( \prod_{i=1}^{2k} \varphi_r(x_1^{(i)}) \right) = \left( \prod_{i=1}^{2n} \psi_1(x_1^{(i)}) \right).$$

Тогда, поскольку  $k < n$ , существует  $1 \leq i \leq 2k$ , для которого длина слова  $\varphi_r(x_1^{(i)})$  превышает 1, что невозможно в силу условия (6.6) и леммы 6.7. Если же  $\varphi_r(xy) = x_a^{(p)} x_a^{(p+1)}$  для некоторых  $1 \leq p < 2n$ ,  $1 \leq h < n$  и  $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{2n}^{2h}$ , то

$$\left( \prod_{i=1}^{2k} \varphi_r(x_1^{(i)}) \right) = \left( \prod_{i=1}^{2n} \psi_{\mathbf{a}+p}(x_{\mathbf{a}+p}^{(i)}) \right),$$

откуда, учитывая условие (6.6), снова получаем противоречие с леммой 6.7.

Предположим теперь, что  $k > n$ . Нам потребуется еще несколько обозначений. Наименьший элемент множества  $\mathcal{M}_s^t$  будем обозначать через  $\mathbf{a}_s^t$ . Далее, пусть  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, определяемая следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_0, \quad \varphi(y) = y_0, \quad \varphi(s) = s_0, \quad \varphi(s_{q'}) = s_{q'}, \\ \varphi(x_{\mathbf{a}_q^{(1)}}^{(1)}) &= x_q, \quad \varphi(x_{\mathbf{a}_{2n}^{(2)}}^{(2)}) = y_q, \quad \varphi(s_{\mathbf{a}_{2n}^{(1)}}^{(1)}) = s_{2n}, \quad \varphi(s_{\mathbf{a}_{2n}^{(2)}}^{(2)}) = t_{2n}, \\ \varphi(v) &= 1, \end{aligned}$$

где  $1 \leq q \leq 2n$  и  $1 \leq q' \leq 2n - 1$ , а  $v$  — произвольная буква, отличная от  $x, y, s, s_{q'}$ ,  $x_{a_{2n}}^{(1)}$ ,  $x_{a_{2n}}^{(2)}$ ,  $s_{a_{2n}}^{(1)}$  и  $s_{a_{2n}}^{(2)}$ . Подстановка  $\varphi$  построена таким образом, что слово  $\varphi(\mathbf{w}_r)$  совпадает со словом (6.5) для некоторой подстановки  $\psi_\ell$ , где  $0 \leq \ell \leq n - 1$ , для которой выполняется равенство (6.4). Очевидно, что  $\varphi(\mathbf{w}_r) = \varphi(\mathbf{u}_r)\varphi(\varphi_r(\mathbf{p}_r))\varphi(\mathbf{v}_r)$  и  $\varphi(\mathbf{w}_{r+1}) = \varphi(\mathbf{u}_r)\varphi(\varphi_r(\mathbf{q}_r))\varphi(\mathbf{v}_r)$ . Заметим, что тождество  $\varphi(\mathbf{w}_r) \approx \varphi(\mathbf{w}_{r+1})$  не является тривиальным, поскольку в словах  $\varphi(\varphi_r(\mathbf{p}_r))$  и  $\varphi(\varphi_r(\mathbf{q}_r))$  первые вхождения букв  $\varphi(\varphi_r(x))$  и  $\varphi(\varphi_r(y))$  входят в противоположном порядке. Следовательно, мы можем применить лемму 6.8 и получить противоречие с неравенством  $n < k$ . Таким образом, мы доказали, что различные множества вида  $\Sigma_K$  задают различные подмногообразия внутри многообразия  $\mathbf{M}(xyzxtu) \vee \mathbf{N}$ . В силу леммы 6.3 и двойственного к ней утверждения, а также леммы 6.5, все эти многообразия принадлежат интервалу  $[\mathbf{M}(xyzxtu, xzytxu), \mathbf{M}(xyzxtu) \vee \mathbf{N}]$ . Отсюда следует, что в данный интервал вкладывается (как упорядоченное множество) решетка, антиизоморфная решетке всех подмножеств множества  $\mathbf{N}$ . Хорошо известно, что последняя решетка континуальна и, более того, не удовлетворяет ни условию минимальности, ни условию максимальности.  $\square$

*Доказательство следствия 6.2.* Пусть  $xuzxu \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в многообразии  $\mathbf{M}(xux) \vee \text{var } G$ . Поскольку слово  $xux$  — изотерм для  $\mathbf{M}(xux) \vee \text{var } G$ , имеем  $\mathbf{v} \in \{xuzxu, xuzux, uxzxu, uxzux\}$ . Слово  $\mathbf{v}$  не может совпадать с  $uxzux$ , так как в группе  $G$  нарушается тождество (6.1). Пусть  $m$  — экспонента группы  $G$ . Если  $\mathbf{v} = xuzux$ , то в  $G$  выполнены тождества

$$xu \approx (xy)^{m+1} \approx (xy)^m(yx) \approx ux,$$

что противоречит предположению, что группа  $G$  не является абелевой. Если же  $\mathbf{v} = uxzxu$ , то  $G$  удовлетворяет тождествам

$$xu \approx (xy)^{m+1} \approx (yx)(xy)^m \approx ux,$$

что снова влечет противоречие с тем, что группа  $G$  не является абелевой. Следовательно,  $\mathbf{v} = xuzxu$ . Мы видим, что слово  $xuzxu$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{M}(xux) \vee \text{var } G$ . Аналогичным образом можно установить, что слово  $xuzux$  есть изотерм для  $\mathbf{M}(xux) \vee \text{var } G$ . Отсюда и из леммы 1.3 следует, что  $\mathbf{M}(xuzxu, xuzux) \subseteq \mathbf{M}(xux) \vee \text{var } G$ .

Проверим, что  $\mathbf{M}(xzytxu) \vee \mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}(xuzxu, xuzux)$ . Заметим сначала очевидность включения  $\mathbf{M}(xzytxu) \subseteq \mathbf{M}(xuzxu, xuzux)$ . Далее, в доказательстве леммы 3.27 показано, что если некоторое многообразие содержит  $\mathbf{M}(xux)$ , но не содержит  $\mathbf{N}$ , то оно удовлетворяет одному из тождеств (6.2), (6.1) и  $xuzxu \approx uxzxu$ . Поскольку эти три тождества не выполнены в  $\mathbf{M}(xuzxu, xuzux)$ , отсюда следует, что  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}(xuzxu, xuzux)$ . Следовательно, многообразие  $\mathbf{M}(xzytxu) \vee \mathbf{N}$  является подмногообразием многообразия  $\mathbf{M}(xuzxu, xuzux)$ . Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 6.1.  $\square$

## Глава 7

# Предельные и кроссовы многообразия

Данная глава состоит из двух параграфов. В § 7.1 изучаются предельные многообразия моноидов, а в § 7.2 — кроссовы многообразия моноидов.

В процессе доказательства наших результатов будут часто возникать многие пронумерованные тождества из предыдущих глав (преимущественно из главы 3). Для удобства читателя присвоим этим тождествам новые номера:

$$x^2y \approx xux, \quad (7.1)$$

$$yx^2 \approx xux, \quad (7.2)$$

$$x^2y \approx x^2yx, \quad (7.3)$$

$$xux \approx xux^2, \quad (7.4)$$

$$xux \approx x^2yx, \quad (7.5)$$

$$xux^2 \approx x^2yx^2, \quad (7.6)$$

$$x^2y^2 \approx y^2x^2, \quad (7.7)$$

$$(xy)^2 \approx (yx)^2, \quad (7.8)$$

$$xuxz \approx xuxzx, \quad (7.9)$$

$$xuzxy \approx yxzxy, \quad (7.10)$$

$$xxyty \approx xyxty, \quad (7.11)$$

$$yxxyty \approx xyxty, \quad (7.12)$$

$$xty^2x \approx xtxy^2x, \quad (7.13)$$

$$xy^2tx \approx xy^2xtx, \quad (7.14)$$

$$x^2yzx \approx x^2yxzx, \quad (7.15)$$

$$xzyxty \approx xzxyxty. \quad (7.16)$$

## § 7.1. Предельные многообразия

### 7.1.1. Формулировки результатов

Первым основным результатом данного параграфа является описание предельных многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами.

**Теорема 7.1.** *Предельными многообразиями апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами являются многообразия*

$$\mathbf{M}(xyzxtu, xzytxu), \mathbf{M}(xzxytu), \mathbf{M}_\lambda(xzux^+tu^+), \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+zy^+xtu) \quad (7.17)$$

*и только они.*

Вторым основным результатом данного параграфа является описание предельных многообразий  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов.

**Теорема 7.2.** *Предельными многообразиями  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов являются многообразия*

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}(xyzxtu, xzytxu), \mathbf{M}(xzxytu), \mathbf{M}_\lambda(xzux^+tu^+), \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+zy^+xtu), \\ &\mathbf{M}_\gamma(x^+yy^+tx^+, x^+tyy^+x^+), \mathbf{M}_\lambda(xtyy^+x^+), \mathbf{M}_{\bar{\lambda}}(x^+yy^+tx) \end{aligned} \quad (7.18)$$

*и только они.*

Для доказательства теорем 7.1 и 7.2 потребуется ряд вспомогательных результатов в разделах 7.1.2–7.1.4. Непосредственному доказательству теорем 7.1 и 7.2 посвящен раздел 7.1.5.

### 7.1.2. Достаточное условие конечной базлируемости многообразия

Основным результатом этого раздела является

**Предложение 7.3.** *Любое многообразие моноидов, в котором выполнены тождества*

$$xzytux \approx xzytxu \quad (7.19)$$

*и (7.16) наследственно конечно базлируемо.*

Для доказательства предложения 7.3 нам потребуется несколько вспомогательных результатов. Следующий факт мы будем часто использовать без явных ссылок.

**Лемма 7.4.** *Тождество (7.19) влечет тождества (7.4) и*

$$xzytxu \approx xzytxu. \quad (7.20)$$

*Доказательство.* Тождество (7.4) получается из тождества (7.19) применением подстановки  $(y, z, t) \mapsto (1, 1, y)$ . Отсюда следует, что тождество (7.20) следует из тождества (7.19), поскольку  $xzytxu \stackrel{(7.4)}{\approx} xzytx^2y \stackrel{(7.19)}{\approx} xzyt(xy)^2 \stackrel{(7.19)}{\approx} xzytxu$ .  $\square$

**Лемма 7.5.** Пусть  $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{x} \mathbf{v}_3$ , где  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in X^*$ . Если  $x \in \text{alph}(\mathbf{v}_1)$  и  $\text{alph}(\mathbf{v}_2) \cap \text{sim}(\mathbf{w}) = \emptyset$ , то  $\{(7.16), (7.19)\}$  влечет  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}_1 \mathbf{x} \mathbf{v}_2 \mathbf{x} \mathbf{v}_3$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $\mathbf{v}_2 = x_1 x_2 \cdots x_n$ . Тогда, с учетом леммы 7.4, легко видеть, что  $\{(7.16), (7.19)\}$  влечет тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &\approx \mathbf{v}_1 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x x_n \mathbf{v}_3 \approx \cdots \approx \mathbf{v}_1 x x_1 x x_2 x \cdots x_{n-1} x x_n \mathbf{v}_3 \\ &\approx \mathbf{v}_1 x x_1 x_2 x \cdots x_{n-1} x x_n \mathbf{v}_3 \approx \cdots \approx \mathbf{v}_1 \mathbf{x} \mathbf{v}_2 \mathbf{x} \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

что и требовалось показать. □

Если  $x \in \text{mul}(\mathbf{u})$ , а  $\mathbf{b}$  — блок слова  $\mathbf{u}$ , содержащий первое вхождение буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$ , то будем говорить, что слово  $\mathbf{u}$  является *x-компактным*, если блок  $\mathbf{b}$  содержит не более двух вхождений буквы  $x$ , а все остальные блоки слова  $\mathbf{u}$  — не более одного вхождения этой буквы. Будем говорить, что слово  $\mathbf{u}$  является *компактным*, если оно *x-компактно* для любой буквы  $x \in \text{mul}(\mathbf{u})$ . Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  будем называть *компактным*, если оба слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  компактны и  $\mathbf{u}(\text{sim}(\mathbf{u})) = \mathbf{v}(\text{sim}(\mathbf{v}))$ . Напомним, что слово  $\mathbf{u}$  называется *почти линейным*, если оно содержит не более одной кратной буквы. Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  будем называть *почти линейным*, если оба слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются почти линейными и  $\mathbf{u}(\text{sim}(\mathbf{u})) = \mathbf{v}(\text{sim}(\mathbf{v}))$ . Через  $\Lambda(\mathbf{V})$  будем обозначать множество всех почти линейных тождеств многообразия  $\mathbf{V}$ .

Пусть  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — слова, а  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$  — их разложения соответственно. Будем говорить, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является *x-сбалансированным*, если  $\text{occ}_x(\mathbf{u}_i) = \text{occ}_x(\mathbf{v}_i)$  для любого  $i = 0, 1, \dots, m$ . Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  назовем *хорошо сбалансированным*, если оно *x-сбалансировано* для любого  $x \in \text{mul}(\mathbf{u}) \cup \text{mul}(\mathbf{v})$ .

**Лемма 7.6.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам (7.16) и (7.19) такое, что  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Тогда любое выполненное в многообразии  $\mathbf{V}$  тождество следует из некоторого компактного хорошо сбалансированного тождества, выполненного в  $\mathbf{V}$ , и тождеств из множества  $\{(7.16), (7.19)\} \cup \Lambda(\mathbf{V})$ .

*Доказательство.* Для краткости положим  $\Sigma := \{(7.16), (7.19)\}$ . Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{V}$ . В силу леммы 1.20,  $\text{mul}(\mathbf{u}) = \text{mul}(\mathbf{v})$  и  $\mathbf{u}(\text{sim}(\mathbf{u})) = \mathbf{v}(\text{sim}(\mathbf{v}))$ . Предположим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  не является хорошо сбалансированным из-за различных  $k$  букв. Будем вести доказательство индукцией по  $k$ .

**База индукции:**  $k = 0$ . Тогда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  хорошо сбалансировано. В силу леммы 7.5, мы можем удалить некоторые вхождения букв в каждом из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , получив компактное хорошо сбалансированное тождество тождество, эквивалентное по модулю  $\Sigma$  тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ .

**Шаг индукции:**  $k > 0$ . Тогда  $\mathbf{u}' := \mathbf{u}(x, \text{sim}(\mathbf{u})) \neq \mathbf{v}(x, \text{sim}(\mathbf{v})) =: \mathbf{v}'$  для некоторой буквы  $x \in \text{mul}(\mathbf{u})$ .

Предположим, что каждый блок слова  $\mathbf{u}$  содержит не более одного вхождения буквы  $x$ . Тогда применим тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  к слову  $\mathbf{u}$  и получим слово  $\mathbf{w}$  такое, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  является *x-сбалансированным*. По предположению индукции, тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  выводимо

из некоторого компактного хорошо сбалансированного тождества  $\sigma$ , выполненного в  $\mathbf{V}$ , и тождеств из множества  $\Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ . Тогда, поскольку  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}' \in \Lambda(\mathbf{V})$ , тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из  $\{\sigma\} \cup \Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ , что и требовалось показать. Аналогичным образом можно показать, что если каждый блок слова  $\mathbf{v}$  содержит не более одного вхождения буквы  $x$ , то  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из некоторого компактного хорошо сбалансированного тождества, выполненного в  $\mathbf{V}$ , вместе с  $\Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ . Таким образом, с учетом леммы 7.5, мы можем считать, что некоторый блок  $\mathbf{a}$  слова  $\mathbf{u}$  содержит первые два вхождения буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$ , а некоторый блок  $\mathbf{b}$  слова  $\mathbf{v}$  содержит первые два вхождения буквы  $x$  в  $\mathbf{v}$ . Возможны два случая.

**Случай 1:** блоки  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  являются соответствующими. Лемма 7.5 позволяет удалить некоторые вхождения букв в каждом из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , получив компактное хорошо сбалансированное тождество, эквивалентное по модулю  $\Sigma$  тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Это позволяет нам считать, что уже слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  компактны. Тогда, в силу симметрии можно предположить, что некоторый блок  $\mathbf{b}'$  слова  $\mathbf{v}$  содержит  $x$ , а соответствующий ему блок  $\mathbf{a}'$  слова  $\mathbf{u}$  — нет. Блоки  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b}'$  можно считать самыми правыми блоками в словах  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$  с таким свойством. Пусть  $t$  — простая буква, непосредственно предшествующая блоку  $\mathbf{a}'$  в слове  $\mathbf{u}$ . Дальнейшие рассуждения делятся на два случая.

**Случай 1.1:** последнее вхождение буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$  предшествует блоку  $\mathbf{a}'$ . Тогда тождество  $\mathbf{u}(x, t) \approx \mathbf{v}(x, t)$  эквивалентно по модулю  $\Sigma$  тождеству (7.3), откуда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$xuxz \stackrel{(7.4)}{\approx} xux^2z \stackrel{(7.3)}{\approx} xux^2zx \stackrel{(7.4)}{\approx} xuxzx.$$

Применим тождество (7.9) к слову  $\mathbf{u}$ , преобразовав его к некоторому слову  $\mathbf{w}$  такому, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  является хорошо  $x$ -сбалансированным. По предположению индукции, тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  вытекает из некоторого компактного хорошо сбалансированного тождества  $\sigma$ , выполненного в  $\mathbf{V}$ , и тождеств из множества  $\Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из  $\{\sigma\} \cup \Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ , поскольку (7.9)  $\in \Lambda(\mathbf{V})$ , что и требовалось показать.

**Случай 1.2:** последнее вхождение буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$  следует за блоком  $\mathbf{a}'$ . Пусть  $s$  — простая буква, непосредственно следующая за блоком  $\mathbf{a}'$  в  $\mathbf{u}$ . Тогда тождество  $\mathbf{u}(x, t, s) \approx \mathbf{v}(x, t, s)$  эквивалентно по модулю  $\Sigma$  тождеству (7.15), откуда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$xuxzxtx \stackrel{(7.4)}{\approx} xux^2zxtx \stackrel{(7.15)}{\approx} xux^2ztx \stackrel{(7.4)}{\approx} xuxztx.$$

Применим тождество

$$xyxztx \approx xyxzxtx \tag{7.21}$$

к слову  $\mathbf{u}$ , преобразовав его к некоторому слову  $\mathbf{w}$  такому, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  является хорошо  $x$ -сбалансированным. По предположению индукции, тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  вытекает из некоторого компактного хорошо сбалансированного тождества  $\sigma$ , выполненного в  $\mathbf{V}$ , и системы тождеств  $\Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из  $\{\sigma\} \cup \Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ , поскольку (7.21)  $\in \Lambda(\mathbf{V})$ , что и требовалось показать.

**Случай 2:** блоки  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не являются соответствующими. Пусть  $\mathbf{a}'$  — блок, соответствующий

блоку  $\mathbf{b}$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $\mathbf{a}'$  предшествует блоку  $\mathbf{a}$  в слове  $\mathbf{u}$ . Пусть  $t$  — простая буква, непосредственно следующая за блоком  $\mathbf{a}'$  в слове  $\mathbf{u}$ . Ясно, что тождество  $\mathbf{u}(x, t)x \approx \mathbf{v}(x, t)x$  эквивалентно по модулю  $\Sigma$  тождеству

$$ux^2 \approx x^2ux, \quad (7.22)$$

откуда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет

$$uxzx \stackrel{(7.4)}{\approx} uxzx^2 \stackrel{(7.22)}{\approx} x^2uxzx \stackrel{(7.4)}{\approx} x^3uxzx \stackrel{(7.22)}{\approx} xuxzx^2 \stackrel{(7.4)}{\approx} xuxzx.$$

Применим тождество  $uxzx \approx xuxzx$  к слову  $\mathbf{u}$ , преобразовав его к некоторому слову  $\mathbf{w}$  такому, что блок слова  $\mathbf{w}$ , соответствующий блоку  $\mathbf{b}$  слова  $\mathbf{v}$  содержит первые два вхождения буквы  $x$  в слово  $\mathbf{w}$ . В силу доказанного в случае 1, тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{v}$  вытекает из некоторого компактного хорошо сбалансированного тождества  $\sigma$ , выполненного в  $\mathbf{V}$ , и тождеств из множества  $\Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из  $\{\sigma\} \cup \Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ , поскольку  $uxzx \approx xuxzx \in \Lambda(\mathbf{V})$ , что и требовалось показать.  $\square$

*Доказательство предложения 7.3.* Положим  $\Sigma := \{(7.16), (7.19)\}$ . Будем обозначать через  $\Gamma$  множество всех компактных хорошо сбалансированных тождеств вида  $\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}$  и  $u\mathbf{spc} \approx u\mathbf{sqc}$ , где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  — слова в алфавите  $\{x, y\}$  такие, что

$$1 \leq \text{осс}_x(\mathbf{p}) = \text{осс}_x(\mathbf{q}), \text{осс}_y(\mathbf{p}) = \text{осс}_y(\mathbf{q}) \leq 2,$$

а  $\mathbf{c}$  — слово из множества

$$\{1, txy, t_1\mathbf{e}_1t_2\mathbf{e}_2 \cdots t_k\mathbf{e}_k \mid k \geq 1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k \in \{1, x, y\}\}.$$

Если слово  $xu$  не является изотермом для  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  либо коммутативно, либо идемпотентно по леммам 1.3 и 1.25. В этом случае многообразие  $\mathbf{V}$  конечно базлируемо в силу предложений 1.13 и 1.14. Поэтому можно считать, что  $xu$  — изотерм для  $\mathbf{V}$ . В силу леммы 7.6, любое тождество, выполненное в  $\mathbf{V}$ , можно вывести из некоторого компактного хорошо сбалансированного тождества, выполненного в  $\mathbf{V}$ , вместе с  $\Sigma \cup \Lambda(\mathbf{V})$ . В [106, следствие 2] доказано, что любое множество почти линейных тождеств задает конечно базлируемое многообразие. Следовательно, многообразие  $\text{var } \Lambda(\mathbf{V})$  конечно базлируемо. Легко видеть, что любое подмножество множества  $\Gamma$  задает конечно базлируемое многообразие внутри  $\text{var } \Sigma$ . Таким образом, остается проверить, что любое компактное хорошо сбалансированное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{V}$ , следует из  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$ .

По лемме 1.2, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является  $r$ -инвертируемым для некоторого  $r \in \mathbb{N}_0$ . Мы будем вести доказательство индукцией по  $r$ .

**База индукции.** Если  $r = 0$ , то  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  и доказывать нечего.

**Шаг индукции.** Пусть  $r > 0$ . Тогда существуют буквы  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{u})$  такие, что слово  $\mathbf{u}$  содержит  $i_{\mathbf{u}}xj_{\mathbf{u}}y$  в качестве подслова, а буква  $j_{\mathbf{u}}y$  предшествует букве  $i_{\mathbf{u}}x$  в слове  $\mathbf{v}$ . Обозначим

через  $\mathbf{w}$  слово, получающееся из слова  $\mathbf{u}$  перестановкой местами букв  $i_{\mathbf{u}}x$  и  $j_{\mathbf{u}}y$ . Тождество  $\mathbf{v} \approx \mathbf{w}$  является  $(r-1)$ -инвертируемым. Поэтому, в силу предположения индукции, нам остается показать, что  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$  влечет  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$ .

Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  хорошо сбалансировано, обе буквы  $x$  и  $y$  являются кратными и  $\mathbf{u}(\text{sim}(\mathbf{u})) = \mathbf{v}(\text{sim}(\mathbf{v}))$ . Обозначим через  $\mathbf{a}$  блок слова  $\mathbf{u}$ , содержащий подслово  $i_{\mathbf{u}}x j_{\mathbf{u}}y$ , а через  $\mathbf{a}'$  — соответствующий ему блок слова  $\mathbf{v}$ . Тогда  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 i_{\mathbf{u}}x j_{\mathbf{u}}y \mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{a}\mathbf{u}''$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'\mathbf{a}'\mathbf{v}''$  для некоторых  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{u}', \mathbf{u}'', \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \in X^*$ . Наши рассуждения разбиваются на четыре случая.

**Случай 1:** блок  $\mathbf{a}$  не содержит первые вхождения обеих букв  $x$  и  $y$ . В этом случае  $\mathbf{a}(x, y) = xy$  и  $\mathbf{a}'(x, y) = yx$ , так как тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  компактно и хорошо сбалансировано. Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

**Случай 1.1:** некоторый блок  $\mathbf{b}$ , лежащий в подслове  $\mathbf{u}''$ , содержит обе буквы  $x$  и  $y$ . Тогда  $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}_1\mathbf{b}\mathbf{u}_2$  для некоторых  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in X^*$ . Пусть  $t$  — простая буква, непосредственно следующая за блоком  $\mathbf{a}$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  влечет тождество

$$\mathbf{u}'(x, y)xyt\mathbf{u}''(x, y)xy \approx \mathbf{v}'(x, y)yxt\mathbf{v}''(x, y)xy.$$

Последнее тождество эквивалентно по модулю  $\Sigma$  тождеству

$$\mathbf{p}xytxy \approx \mathbf{q}yxtxy, \quad (7.23)$$

где  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \{xy, yx\}$ , поскольку, в силу леммы 7.5, мы можем удалить все не первые вхождения букв  $x$  и  $y$  в словах  $\mathbf{u}'(x, y)$  и  $\mathbf{v}'(x, y)$ , а также слова  $\mathbf{u}''(x, y)$  и  $\mathbf{v}''(x, y)$ . Ясно, что (7.23)  $\in \Gamma(\mathbf{V})$ . Тогда, с учетом леммы 7.5, получаем, что  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$  влечет

$$\mathbf{u} \stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}xy\mathbf{a}_2\mathbf{u}_1xy\mathbf{b}\mathbf{u}_2 \stackrel{(7.23)}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{q}yxt\mathbf{a}_2\mathbf{u}_1xy\mathbf{b}\mathbf{u}_2 \stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{w},$$

что и требовалось доказать.

**Случай 1.2:** никакой блок, содержащийся в подслове  $\mathbf{u}''$  слова  $\mathbf{u}$ , не содержит одновременно букв  $x$  и  $y$ . Пусть  $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$  — множество (возможно пустое) простых букв слова  $\mathbf{u}$ , лежащих в  $\mathbf{u}''$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  влечет

$$\mathbf{u}'(x, y)xy\mathbf{u}''(x, y, t_1, t_2, \dots, t_k) \approx \mathbf{v}'(x, y)yx\mathbf{v}''(x, y, t_1, t_2, \dots, t_k). \quad (7.24)$$

Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  хорошо сбалансировано и компактно,

$$\mathbf{u}''(x, y, t_1, t_2, \dots, t_k) = \mathbf{v}''(x, y, t_1, t_2, \dots, t_k) = \left( \prod_{\ell=1}^k t_{\ell} \mathbf{e}_{\ell} \right), \quad (7.25)$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k \in \{1, x, y\}$ . Тождество (7.24) эквивалентно по модулю  $\Sigma$  тождеству

$$\mathbf{p}xy \left( \prod_{\ell=1}^k t_{\ell} \mathbf{e}_{\ell} \right) \approx \mathbf{q}yx \left( \prod_{\ell=1}^k t_{\ell} \mathbf{e}_{\ell} \right), \quad (7.26)$$

где  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \{xy, yx\}$ , поскольку, в силу леммы 7.5, мы можем удалить все не первые вхождения букв  $x$  и  $y$  в словах  $\mathbf{u}'(x, y)$  и  $\mathbf{v}'(x, y)$ . Ясно, что (7.26)  $\in \Gamma(\mathbf{V})$ . Тогда, с учетом леммы 7.5, получаем, что  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$  влечет

$$\mathbf{u} \stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{a}_2\mathbf{u}'' \stackrel{(7.26)}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{q}y\mathbf{x}\mathbf{a}_2\mathbf{u}'' \stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{w},$$

что и требовалось показать.

**Случай 2:** блок  $\mathbf{a}$  содержит первые вхождения обеих букв  $x$  и  $y$ . В этом случае  $1 \leq \text{осс}_x(\mathbf{a}), \text{осс}_y(\mathbf{a}) \leq 2$ , так как слово  $\mathbf{u}$  компактно. Тогда  $\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{p}i\mathbf{u}xj\mathbf{u}\mathbf{y}\mathbf{q}$  и  $\mathbf{a}'(x, y) = \mathbf{p}'j\mathbf{v}y\mathbf{q}'i\mathbf{v}x\mathbf{r}'$  для некоторых слов  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}' \in \{x, y\}^*$ . Дальнейшие рассуждения делятся на два случая.

**Случай 2.1:** некоторый блок  $\mathbf{b}$ , лежащий в подслове  $\mathbf{u}''$ , содержит обе буквы  $x$  и  $y$ . Пусть  $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}_1\mathbf{b}\mathbf{u}_2$  для некоторых  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in X^*$ . Пусть  $t$  — простая буква, непосредственно следующая за блоком  $\mathbf{a}$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  влечет тождество

$$\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{u}''(x, y) \approx \mathbf{p}'y\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{v}''(x, y)$$

и потому тождество

$$\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{u}''(x, y)x\mathbf{y} \approx \mathbf{p}'y\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{v}''(x, y)x\mathbf{y}.$$

Последнее тождество эквивалентно по модулю  $\Sigma$  тождеству

$$\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{x}\mathbf{y} \approx \mathbf{p}'y\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{x}\mathbf{y} \tag{7.27}$$

поскольку, в силу леммы 7.5, мы можем удалить слова  $\mathbf{u}''(x, y)$  и  $\mathbf{v}''(x, y)$ . Ясно, что (7.27)  $\in \Gamma(\mathbf{V})$ . Тогда, с учетом леммы 7.5, получаем, что  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$  влечет

$$\mathbf{u} \stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q}\mathbf{a}_2\mathbf{u}_1x\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{u}_2 \stackrel{(7.27)}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}'y\mathbf{q}'x\mathbf{r}'\mathbf{a}_2\mathbf{u}_1x\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{u}_2.$$

Очевидно, что если  $\mathbf{p}' = 1$ , то  $\text{alph}(\mathbf{p}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ . Пусть теперь  $\mathbf{p}' \neq 1$ . Если  $x \in \text{alph}(\mathbf{p}')$ , то  $i = 2$  и потому  $x \in \text{alph}(\mathbf{p})$ . Если  $y \in \text{alph}(\mathbf{p}')$ , то  $j = 2$  и потому  $y \in \text{alph}(\mathbf{p})$ . Мы видим, что в любом случае  $\text{alph}(\mathbf{p}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{p}) \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\text{alph}(\mathbf{r}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_2)$ . Далее, если  $x \in \text{alph}(\mathbf{q}')$ , то  $i = 2$  и потому  $x \in \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ , а если  $y \in \text{alph}(\mathbf{q}')$ , то  $j = 1$  и потому  $y \in \text{alph}(\mathbf{a}_2)$ , так как слово  $\mathbf{u}$  компактно. Из сказанного и леммы 7.5 следует, что  $\Sigma$  влечет  $\mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}'y\mathbf{q}'x\mathbf{r}'\mathbf{a}_2\mathbf{u}_1x\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{u}_2 \approx \mathbf{w}$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  следует из  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$ , что и требовалось показать.

**Случай 2.2:** никакой блок, содержащийся в подслове  $\mathbf{u}''$  слова  $\mathbf{u}$ , не содержит одновременно букв  $x$  и  $y$ . Пусть  $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$  — множество (возможно пустое) простых букв слова  $\mathbf{u}$  принадлежащих подслову  $\mathbf{u}''$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  хорошо сбалансировано и компактно,

справедливо равенство (7.25), где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k \in \{1, x, y\}$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  влечет

$$\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q}\left(\prod_{\ell=1}^k t_\ell \mathbf{e}_\ell\right) \approx \mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'\left(\prod_{\ell=1}^k t_\ell \mathbf{e}_\ell\right). \quad (7.28)$$

Ясно, что (7.28)  $\in \Gamma(\mathbf{V})$ . Тогда, с учетом леммы 7.5, получаем, что  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$  влечет

$$\mathbf{u} \stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}x\mathbf{y}\mathbf{q}\mathbf{a}_2\mathbf{u}'' \stackrel{(7.28)}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'\mathbf{a}_2\mathbf{u}''.$$

Очевидно, что если  $\mathbf{p}' = 1$ , то  $\text{alph}(\mathbf{p}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ . Пусть теперь  $\mathbf{p}' \neq 1$ . Если  $x \in \text{alph}(\mathbf{p}')$ , то  $i = 2$  и потому  $x \in \text{alph}(\mathbf{p})$ . Если  $y \in \text{alph}(\mathbf{p}')$ , то  $j = 2$  и потому  $y \in \text{alph}(\mathbf{p})$ . Мы видим, что в любом случае  $\text{alph}(\mathbf{p}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{p}) \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\text{alph}(\mathbf{r}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_2)$ . Далее, если  $x \in \text{alph}(\mathbf{q}')$ , то  $i = 2$  и потому  $x \in \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ , а если  $y \in \text{alph}(\mathbf{q}')$ , то  $j = 1$  и потому  $y \in \text{alph}(\mathbf{a}_2)$ , так как слово  $\mathbf{u}$  компактно. Из сказанного и леммы 7.5 следует, что  $\Sigma$  влечет  $\mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'\mathbf{a}_2\mathbf{u}'' \approx \mathbf{w}$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  следует из  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$ , что и требовалось показать.

**Случай 3:** блок  $\mathbf{a}$  содержит первое вхождение буквы  $x$ , но не содержит первого вхождения буквы  $y$ . В этом случае  $1 \leq \text{occ}_x(\mathbf{a}) \leq 2$  и  $\text{occ}_y(\mathbf{a}) = 1$ , так как слово  $\mathbf{u}$  компактно. Тогда  $\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{p}_{i\mathbf{u}x} \mathbf{j}\mathbf{u}\mathbf{y}\mathbf{q}$  и  $\mathbf{a}'(x, y) = \mathbf{p}'_{j\mathbf{v}y} \mathbf{q}'_{i\mathbf{v}x}\mathbf{r}'$  для некоторых слов  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}' \in \{1, x, y\}$ . Через  $s$  обозначим простую букву, непосредственно предшествующую блоку  $\mathbf{a}$  в слове  $\mathbf{u}$ . Дальнейшие рассуждения делятся на два случая.

**Случай 3.1:** некоторый блок  $\mathbf{b}$ , лежащий в подслове  $\mathbf{u}''$ , содержит обе буквы  $x$  и  $y$ . Пусть  $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}_1\mathbf{b}\mathbf{u}_2$  для некоторых  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in X^*$ . Через  $t$  обозначим простую букву, непосредственно следующую за блоком  $\mathbf{a}$  в  $\mathbf{u}$ . Тогда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  влечет тождество

$$y^m \mathbf{s}p\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{u}''(x, y) \approx y^m \mathbf{s}\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{v}''(x, y)$$

и потому тождество

$$y^m \mathbf{s}p\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{u}''(x, y)xy \approx y^m \mathbf{s}\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{v}''(x, y)xy,$$

где  $m := \text{occ}_y(\mathbf{u}')$ . Последнее тождество эквивалентно по модулю  $\Sigma$  тождеству

$$y^m \mathbf{s}p\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{x}y \approx y^m \mathbf{s}\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{x}y \quad (7.29)$$

поскольку, в силу леммы 7.5, мы можем удалить слова  $\mathbf{u}''(x, y)$  и  $\mathbf{v}''(x, y)$ . Если  $m > 1$ , то, с учетом леммы 7.5, получаем, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$y\mathbf{s}p\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{x}y \stackrel{\Sigma}{\approx} y\mathbf{s}y^m\mathbf{p}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{x}y \stackrel{(7.29)}{\approx} y\mathbf{s}y^m\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{x}y \stackrel{\Sigma}{\approx} y\mathbf{s}\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{x}y.$$

Таким образом, тождество

$$y\mathbf{s}p\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}t\mathbf{x}y \approx y\mathbf{s}\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'x\mathbf{r}'t\mathbf{x}y \quad (7.30)$$

выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$  в любом случае. Ясно, что (7.30)  $\in \Gamma(\mathbf{V})$ . Тогда, с учетом

леммы 7.5, получаем, что  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$  влечет

$$\mathbf{u} \stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}\mathbf{a}_2\mathbf{u}_1\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{u}_2 \stackrel{(7.30)}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'\mathbf{x}\mathbf{r}'\mathbf{a}_2\mathbf{u}_1\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{u}_2.$$

Поскольку  $\mathbf{p}'\mathbf{q}'\mathbf{r}' \in \{1, x\}$ , если  $\mathbf{p}'\mathbf{q}' \neq 1$ , то  $i = 2$ , откуда  $\text{alph}(\mathbf{p}'\mathbf{q}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{p})$  и потому  $\text{alph}(\mathbf{p}'\mathbf{q}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\text{alph}(\mathbf{r}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_2)$ . Отсюда и из леммы 7.5 следует, что  $\Sigma$  влечет  $\mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'\mathbf{x}\mathbf{r}'\mathbf{a}_2\mathbf{u}_1\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{u}_2 \approx \mathbf{w}$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  следует из  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$ , что и требовалось показать.

**Случай 3.2:** никакой блок, содержащийся в подслове  $\mathbf{u}''$  слова  $\mathbf{u}$ , не содержит одновременно букв  $x$  и  $y$ . Пусть  $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$  — множество (возможно пустое) простых букв слова  $\mathbf{u}$ , входящих в подслово  $\mathbf{u}''$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  хорошо сбалансировано и компактно, выполняется равенство (7.25), где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k \in \{1, x, y\}$ . Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  влечет

$$y^m \mathbf{s}\mathbf{p}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}\mathbf{c} \approx y^m \mathbf{s}\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'\mathbf{x}\mathbf{r}'\mathbf{c}, \quad (7.31)$$

где  $m := \text{occ}_y(\mathbf{u}')$  и  $\mathbf{c} := t_1\mathbf{e}_1 t_2\mathbf{e}_2 \cdots t_k\mathbf{e}_k$ . Если  $m > 1$ , то, с учетом леммы 7.5, получаем, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$y\mathbf{s}\mathbf{p}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}\mathbf{c} \stackrel{\Sigma}{\approx} y\mathbf{s}y^m\mathbf{p}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}\mathbf{c} \stackrel{(7.31)}{\approx} y\mathbf{s}y^m\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'\mathbf{x}\mathbf{r}'\mathbf{c} \stackrel{\Sigma}{\approx} y\mathbf{s}\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'\mathbf{x}\mathbf{r}'\mathbf{c}.$$

Таким образом, тождество

$$y\mathbf{s}\mathbf{p}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}\mathbf{c} \approx y\mathbf{s}\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'\mathbf{x}\mathbf{r}'\mathbf{c} \quad (7.32)$$

выполнено в многообразии  $\mathbf{V}$  в любом случае. Ясно, что (7.32)  $\in \Gamma(\mathbf{V})$ . Тогда  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$  влечет

$$\mathbf{u} \stackrel{\Sigma}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{q}\mathbf{a}_2\mathbf{u}'' \stackrel{(7.32)}{\approx} \mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'\mathbf{x}\mathbf{r}'\mathbf{a}_2\mathbf{u}''.$$

Поскольку  $\mathbf{p}'\mathbf{q}'\mathbf{r}' \in \{1, x\}$ , если  $\mathbf{p}'\mathbf{q}' \neq 1$ , то  $i = 2$ , откуда  $\text{alph}(\mathbf{p}'\mathbf{q}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{p})$  и потому  $\text{alph}(\mathbf{p}'\mathbf{q}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_1)$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\text{alph}(\mathbf{r}') \subseteq \text{alph}(\mathbf{a}_2)$ . Отсюда следует, что  $\Sigma$  влечет  $\mathbf{u}'\mathbf{a}_1\mathbf{p}'\mathbf{y}\mathbf{q}'\mathbf{x}\mathbf{r}'\mathbf{a}_2\mathbf{u}'' \approx \mathbf{w}$  по лемме 7.5. Тогда  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}$  следует из  $\Sigma \cup \Gamma(\mathbf{V})$ , что и требовалось показать.

**Случай 4:** блок  $\mathbf{a}$  содержит первое вхождение буквы  $y$ , но не содержит первого вхождения буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$ . Этот случай аналогичен случаю 3 и мы опустим соответствующие выкладки.  $\square$

**Следствие 7.7.** Любое многообразие моноидов  $\mathbf{V}$ , удовлетворяющее тождествам (7.4) и (7.14), является наследственно конечно базирваемым.

*Доказательство.* В многообразии  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$\begin{aligned} xzyxtu &\stackrel{(7.4)}{\approx} xzyx^2ty \stackrel{(7.14)}{\approx} xzyx^2yty \stackrel{(7.5)}{\approx} xzyxyty, \\ xyzytx &\stackrel{(7.5)}{\approx} xy^2zytx \stackrel{(7.14)}{\approx} xy^2xzytx \stackrel{(7.5)}{\approx} xyxzytx. \end{aligned}$$

Применяем утверждение, двойственное к предложению 7.3.  $\square$

### 7.1.3. Сортирующие леммы

**Лемма 7.8.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие аperiodических моноидов. Тогда либо многообразие  $\mathbf{V}$  наследственно конечно базлируемо, либо выполняется одно из следующих двух условий:

- (i)  $\mathbf{V}$  содержит одно из многообразий  $\mathbf{M}(xyzxtu, xzytxu)$  и  $\mathbf{M}(xzxytu)$ ;
- (ii)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств (7.4) и (7.5).

*Доказательство.* Если  $M(xux) \in \mathbf{V}$ , то требуемое утверждение следует из [65, теорема 3.2]. Если же  $M(xux) \notin \mathbf{V}$ , то из лемм 1.3 и 1.26 легко вывести, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств (7.1), (7.2), (7.4) и (7.5). Остается сослаться на результат Д.Поллака [85], согласно которому каждое из последних двух тождеств задает наследственно конечно базлируемое многообразие.  $\square$

**Лемма 7.9.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождествам (7.4) и (7.8) такое, что  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\lambda(xtyu^+x^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (7.13).

*Доказательство.* В силу следствия 1.8(ii),  $\lambda$ -класс  $xtyu^+x^+$  нестабилен относительно  $\mathbf{V}$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xtyu^+x^+$  и  $\mathbf{v} \notin xtyu^+x^+$ . Поскольку  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ , из леммы 1.5 вытекает, что  $\mathbf{v}(x, t) \in txt^+$  и  $\mathbf{v}(y, t) \in tyu^+$ , откуда  $\mathbf{v} = xt\mathbf{v}'$  для некоторого слова  $\mathbf{v}' \in \overline{y^+x^+}$ . Тогда в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$xty^2x \stackrel{(7.4)}{\approx} xty^4x^2 \approx xty^2\mathbf{v}'x \stackrel{(7.4)}{\approx} xt(y^2x^2)^2 \stackrel{(7.8)}{\approx} xt(x^2y^2)^2$$

и, следовательно, тождества

$$xty^2x \approx xt(x^2y^2)^2 \stackrel{(7.4)}{\approx} txt(x^2y^2)^2 \approx txtx^2y^2,$$

что и требовалось показать.  $\square$

Следующее утверждение хорошо известно и легко проверяется (см., например, [29, § 8.2]).

**Лемма 7.10.** Многообразие  $\mathbf{V}$  является многообразием  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов тогда и только тогда, когда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $x^n \approx x^{n+1}$  и  $(xy)^n \approx (yx)^n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Лемма 7.11.** Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов. Тогда либо многообразие  $\mathbf{V}$  наследственно конечно базлируемо, либо  $\mathbf{V}$  содержит одно из многообразий из списка (7.18).

*Доказательство.* Предположим, что многообразие  $\mathbf{V}$  не является наследственно конечно базлируемым, но не содержит ни одного многообразия из списка (7.18). Из леммы 7.8 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств (7.4) и (7.5). В силу симметрии можно считать, что

в  $\mathbf{V}$  выполнено первое из этих двух тождеств. Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет также тождеству (7.8) по лемме 7.10. Если  $M(xy) \notin \mathbf{V}$ , то требуемое утверждение следует из предложения 1.13 и леммы 1.25. Предположим, что  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Если  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{V}$ , то, в силу утверждения, двойственного к лемме 1.27,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (7.3) и потому тождествам  $xuxz \stackrel{(7.4)}{\approx} xux^2z \stackrel{(7.3)}{\approx} xux^2zx \stackrel{(7.4)}{\approx} xuxzx$  и  $x^2y^2 \stackrel{(7.9)}{\approx} (x^2y^2)^2 \stackrel{(7.8)}{\approx} (x^2y^2)^2 \stackrel{(7.9)}{\approx} y^2x^2$ . В этом случае многообразие  $\mathbf{V}$  конечно базлируемо по лемме 1.18. Таким образом, мы можем считать, что  $M_\gamma(xx^+y) \in \mathbf{V}$ . Дальнейшие рассуждения делятся на два случая.

**Случай 1:**  $M_\lambda(xux^+) \in \mathbf{V}$ . Поскольку  $M_\lambda(xzux^+ty^+) \notin \mathbf{V}$ , из леммы 1.29 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (7.16). Поскольку  $M_\lambda(xtyu^+x^+) \in \mathbf{V}$ , многообразие  $\mathbf{V}$  также удовлетворяет тождеству (7.13) по лемме 7.9. Поэтому в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества

$$xzytux \stackrel{(7.4)}{\approx} xzyty^2x \stackrel{(7.13)}{\approx} xzytxy^2x \stackrel{(7.4)}{\approx} xzytxux,$$

что, однако, противоречит предложению 7.3.

**Случай 2:**  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{V}$ . В этом случае из леммы 1.28 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (7.5). Поскольку  $\mathbf{M}_\gamma(x^+yu^+tx^+, x^+tyu^+x^+) \notin \mathbf{V}$ , из леммы 3.24 и двойственной к ней леммы следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнено одно из тождеств (7.13) или (7.14). Но это невозможно в силу следствия 7.7 и двойственного к нему утверждения.  $\square$

#### 7.1.4. Два предельных многообразия

**Предложение 7.12.** *Многообразие  $\mathbf{M}_\lambda(xzux^+ty^+)$  является предельным.*

*Доказательство.* Заметим сначала, что тождества (7.4), (7.8), (7.10) (7.7) и (7.19) выполнены в моноиде  $M_\lambda(xzux^+ty^+)$ . Отсюда, в частности, следует, что многообразие  $\mathbf{M}_\lambda(xzux^+ty^+)$  не содержит никакого другого многообразия из списка (7.18), кроме самого себя. Тогда из лемм 7.10 и 7.11 вытекает, что любое собственное подмногообразие многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(xzux^+ty^+)$  конечно базлируемо.

Итак, остается установить бесконечную базлируемость многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(xzux^+ty^+)$ . Рассуждая от противного, предположим, что это многообразие имеет конечный базис тождеств  $\Sigma$ . Пусть  $k$  — максимум длин всех слов, образующих тождества в  $\Sigma$ . Проверим, что если  $n > k + 2$ , то из системы тождеств  $\Sigma$  нельзя вывести тождество  $\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\varepsilon] \approx x^2(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\varepsilon])_x$ , где  $\varepsilon$  — тривиальная перестановка на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ , которое, как нетрудно видеть, выполнено в  $M_\lambda(xzux^+ty^+)$ . В силу предложения 1.1, достаточно установить, что если  $\mathbf{u} \in [\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\varepsilon]]^\lambda$  и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  непосредственно следует из некоторого тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t} \in \Sigma$ , то  $\mathbf{v} \in [\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\varepsilon]]^\lambda$ . Существуют такие слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$ , что  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{t})\mathbf{b}$ . Поскольку  $\mathbf{u} = \psi(asb)$  и  $\mathbf{v} = \psi(atb)$ , где  $a, b$  — буквы, не входящие в запись слов  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{t}$ , а

$\psi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, определяемая формулой

$$\psi(v) := \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } v = a, \\ \mathbf{b}, & \text{если } v = b, \\ \varphi(v), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

мы можем сразу считать, что  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ .

Заметим, что если  $v_1$  и  $v_2$  — различные буквы, то слово  $v_1v_2$  может входить в слово  $\mathbf{u}$  в качестве подслоа не более одного раза. Отсюда следует, что

(★)  $\varphi(v)$  является пустым словом или степенью некоторой буквы для любой буквы  $v \in \text{mul}(\mathbf{s}) = \text{mul}(\mathbf{t})$ .

В силу леммы 3.28,  $\lambda$ -классы  $xzyx^+ty^+$  и  $uxx^+ty^+$  стабильны относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$ . Отсюда легко следует, что  $\mathbf{v}_x \in [(\hat{\mathbf{a}}_{0,n}[\varepsilon])_x]^\lambda$  и  $\mathbf{v}(x, z_1, t_1) \in x^+z_1x^*t_1z_1^+$ . Тогда  $\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{t}) \in \mathbf{w}t_1z_1^+t_2z_2^+\cdots t_nz_n^+$  для некоторого слова  $\mathbf{w}$  такого, что  $\text{sim}(\mathbf{w}) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ ,  $\text{mul}(\mathbf{w}) = \{x\}$  и  $\text{ini}(\mathbf{w}) = xz_1z_2\cdots z_n$ . Далее, если  $\varphi(\mathbf{s}) = xz_1z_2\cdots z_j$  для некоторого  $0 \leq j \leq n$ , то буквы  $x, z_1, z_2, \dots, z_j$  являются образами простых букв слова  $\mathbf{s}$  относительно  $\varphi$ . Тогда  $\varphi(\mathbf{t}) = xz_1z_2\cdots z_j$  по лемме 1.20. Поэтому мы можем считать, что  $xz_1z_2\cdots z_nx$  — префикс слова  $\varphi(\mathbf{s})$ .

Пусть  $e_0\mathbf{s}_0e_1\mathbf{s}_1\cdots e_m\mathbf{s}_m$  — разложение слова  $\mathbf{s}$ . Тогда разложение слова  $\mathbf{t}$  имеет вид  $e_0\mathbf{t}_0e_1\mathbf{t}_1\cdots e_m\mathbf{t}_m$  по лемме 1.20. Из условия (★) и того факта, что  $|\mathbf{s}| < n$  следует, что существует  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  такое, что  $z_j \in \text{alph}(\varphi(e_i))$  для некоторого  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Можно считать, что  $j$  — наибольшее число с таким свойством. Пусть  $j'$  — наименьшее число такое, что  $z_{j'} \in \text{alph}(\varphi(e_i))$ . Тогда  $xz_1z_2\cdots z_{j'-1} = \varphi(e_0\mathbf{s}_0e_1\mathbf{s}_1\cdots e_{i-1}\mathbf{s}_{i-1})$  и слово  $z_{j'}z_{j'+1}\cdots z_j$  является префиксом слова  $\varphi(e_i)$ . Тогда  $xz_1z_2\cdots z_{j'-1} = \varphi(e_0\mathbf{t}_0e_1\mathbf{t}_1\cdots e_{i-1}\mathbf{t}_{i-1})$ . Если  $j = n$ , то доказывать больше нечего. Поэтому предположим, что  $j < n$ . Тогда  $z_n \in \text{alph}(\varphi(c))$  для некоторой буквы  $c \in \text{mul}(\mathbf{s})$ . Отсюда следует, что существует такое  $r$ , что  $i < r$ ,  $(1_{\mathbf{s}}e_r) < (2_{\mathbf{s}}c)$  и  $t_1 \in \text{alph}(\varphi(e_r))$ . Согласно условию (★),  $\varphi(c) = z_n$ .

Предположим, что  $(2_{\mathbf{w}}x) < (1_{\mathbf{w}}z_n)$ . Ясно, что  $(1_{\mathbf{w}}z_j) < (2_{\mathbf{w}}x)$ . Тогда существует  $d \in \text{mul}(\mathbf{t}) = \text{mul}(\mathbf{s})$  такое, что  $x \in \text{alph}(\varphi(d))$ . Из условия (★) следует, что  $\varphi(d) \in x^+$ . Ясно, что буква  $d$  не входит в слова  $\mathbf{s}_r, \mathbf{t}_r, \mathbf{s}_{r+1}, \mathbf{t}_{r+1}, \dots, \mathbf{s}_m, \mathbf{t}_m$ . Если  $(1_{\mathbf{s}}c) < (1_{\mathbf{s}}d)$ , то  $\mathbf{s}(c, d, e_r) \in cdd^+e_r c^+$  и  $\mathbf{t}(c, d, e_r) = d^+cd^*e_r c^+$ , что противоречит стабильности множества  $uxx^+ty^+$  относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$ . Если  $(1_{\mathbf{s}}d) < (1_{\mathbf{s}}c)$ , то  $d \in \text{sim}(\mathbf{s}_0\mathbf{s}_1\cdots\mathbf{s}_{i-1})$ , откуда следует, что  $d \in \text{sim}(\mathbf{t}_0\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_{i-1})$ . Тогда  $\mathbf{s}(c, d, e_i, e_r) = de_i cd^+e_r c^+$  и  $\mathbf{t}(c, d, e_i, e_r) = de_i d^+cd^*e_r c^+$ , что невозможно, поскольку множество  $xzyx^+ty^+$  стабильно относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$ . Следовательно,  $(1_{\mathbf{w}}z_n) < (2_{\mathbf{w}}x)$  и потому  $\mathbf{v} \in xz_1z_2\cdots z_nx^+$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Если  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in X^*$  и  $\mathbf{w} = \psi(\mathbf{w}')$  для некоторой подстановки  $\psi: X \rightarrow X^*$ , то через  $\psi_{\mathbf{w}'}^{-1}(i_{\mathbf{w}}x)$  будем обозначать такое вхождение  $j_{\mathbf{w}'}z$  буквы  $z$  в слово  $\mathbf{w}'$ , что слово  $\psi(j_{\mathbf{w}'}z)$ , рассматриваемое как подслово слова  $\mathbf{w}$ , содержит  $i_{\mathbf{w}}x$ .

**Предложение 7.13.** *Многообразие  $\mathbf{M}_\lambda(xtyu^+x^+)$  является предельным.*

*Доказательство предложения 7.13.* Заметим сначала, что в  $M_\lambda(xtyu^+x^+)$  выполнены тождества (7.4), (7.8), (7.15) и (7.16). Отсюда, в частности, следует, что многообразие  $\mathbf{M}_\lambda(xtyu^+x^+)$  не содержит никакого другого многообразия из списка (7.18), кроме самого себя. Тогда из лемм 7.10 и 7.11 вытекает, что любое собственное подмногообразие многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(xtyu^+x^+)$  конечно базлируемо.

Итак, остается установить бесконечную базлируемость многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(xtyu^+x^+)$ . Рассуждая от противного, предположим, что это многообразие имеет конечный базис тождеств  $\Sigma$ . Пусть  $k$  — максимум длин всех слов, образующих тождества в  $\Sigma$ . Проверим, что если  $n > k + 2$ , то из системы тождеств  $\Sigma$  нельзя вывести тождество

$$\mathbf{u}_n := xy_1^2y_2^2 \cdots y_{n-1}^2y_n^2x \approx xy_1^2y_2^2 \cdots y_{n-1}^2y_nx y_n =: \mathbf{v}_n,$$

которое, как нетрудно видеть, выполнено в  $M_\lambda(xtyu^+x^+)$ . В силу предложения 1.1, достаточно установить, что если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  непосредственно следует из некоторого тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t} \in \Sigma$  и  $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}_n]^\lambda$ , то  $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_n]^\lambda$ . Существуют такие слова  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$  и подстановка  $\varphi: X \rightarrow X^*$ , что  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{t})\mathbf{b}$ . Как и в доказательстве предложения 7.12, можно без ограничения общности считать, что  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ .

Заметим сначала, что

$$(\mathbf{1u}x) < (\ell\mathbf{u}y_1) < (\mathbf{1u}y_2) < (\ell\mathbf{u}y_2) < \cdots < (\mathbf{1u}y_n) < (\ell\mathbf{u}y_n) < (\mathbf{2u}x). \quad (7.33)$$

Из леммы 1.20 следует, что  $\text{sim}(\mathbf{s}) = \text{sim}(\mathbf{t})$ ,  $\text{mul}(\mathbf{s}) = \text{mul}(\mathbf{t})$ ,  $\text{sim}(\mathbf{u}) = \text{sim}(\mathbf{v})$  и  $\text{mul}(\mathbf{u}) = \text{mul}(\mathbf{v})$ . Мы много раз будем использовать эти факты без явных ссылок на них.

Рассуждая от противного, предположим, что  $(\mathbf{2v}x) < (\ell\mathbf{v}y_n)$ . Тогда  $(\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}(\mathbf{2v}x)) \leq (\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}(\ell\mathbf{v}y_n))$ , где  $\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}(\mathbf{2v}x)$  — либо первое или второе вхождение некоторой буквы  $z$  в слово  $\mathbf{t}$ , а  $\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}(\ell\mathbf{v}y_n)$  — последнее вхождение некоторой буквы  $y$  в слово  $\mathbf{v}$ . Если  $y = z$ , то  $y = z \in \text{sim}(\mathbf{s})$  в силу условия (7.33). В этом случае  $\mathbf{1s}y = \mathbf{1s}z = \varphi_{\mathbf{s}}^{-1}(\mathbf{1u}x)$  и  $\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}(\mathbf{1v}x) = \mathbf{1t}z'$  для некоторой буквы  $z'$ , отличной от  $y = z$ . Ясно, что  $(\mathbf{1t}z') < (\mathbf{t}z)$  и  $(\mathbf{1s}z) < (\mathbf{1s}z')$ . Но это невозможно, так как любой  $\lambda$ -класс из  $\{xx^+yy^+\}^{\leq \lambda}$  стабилен относительно  $\mathbf{M}_\lambda(xtyu^+x^+)$ . Поэтому мы можем считать, что  $y \neq z$ .

Поскольку каждый  $\lambda$ -класс из  $\{xx^+yy^+\}^{\leq \lambda}$  является стабильным относительно многообразия  $\mathbf{M}_\lambda(xtyu^+x^+)$ ,  $\mathbf{s}(z, y) \notin y^+z^+$ . Отсюда следует, что  $(\mathbf{1s}z) < (\ell\mathbf{s}y)$ . Используя условие (7.33) и тот факт, что  $\varphi(y)$  содержит  $y_n$ , получаем, что

$$(\mathbf{1s}z) < (\ell\mathbf{s}y) \leq (\varphi_{\mathbf{s}}^{-1}(\ell\mathbf{u}y_n)) \leq (\varphi_{\mathbf{s}}^{-1}(\mathbf{2u}x)).$$

Поскольку  $\varphi(z)$  содержит  $x$ , из условия (7.33) вытекает, что

$$\varphi_{\mathbf{s}}^{-1}(\mathbf{1u}x) = \mathbf{1s}z \quad \text{и} \quad x \in \text{sim}(\varphi(z)). \quad (7.34)$$

Из условия (7.33) и того факта, что  $|\mathbf{s}| < n$  следует, что в слове  $\mathbf{s}$  есть некоторая буква  $c$  такая, что  $\varphi(c)$  содержит  $y_i y_{i+1}$  в качестве подслова для некоторого  $1 \leq i < n$ . Буква  $c$  является

простой в слове  $\mathbf{s}$ , так как для каждого  $1 \leq i < n$  подслово  $y_i y_{i+1}$  появляется в  $\mathbf{u}$  ровно один раз. Используя условия (7.33) и (7.34), получаем, что

$$({}_1\mathbf{s}z) \leq ({}_1\mathbf{s}c) \leq (\varphi_{\mathbf{s}}^{-1}({}_1\mathbf{u}y_n)) \leq ({}_1\mathbf{s}y) \leq ({}_{\ell}\mathbf{s}y) \leq (\varphi_{\mathbf{s}}^{-1}({}_{\ell}\mathbf{u}y_n)) \leq (\varphi_{\mathbf{s}}^{-1}({}_2\mathbf{u}x)). \quad (7.35)$$

Дальнейшие рассуждения делятся на два случая.

**Случай 1:**  $\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}({}_2\mathbf{v}x) = {}_2\mathbf{t}z$ . В этом случае буква  $z$  является кратной в  $\mathbf{t}$ . Тогда  $(\varphi_{\mathbf{s}}^{-1}({}_2\mathbf{u}x)) \leq ({}_2\mathbf{s}z)$ , так как  $\varphi(z)$  содержит  $x$ . Поскольку буква  $c$  является простой в слове  $\mathbf{t}$ ,  $z \neq c$ . Используя условие (7.35) и тот факт, что  $z \neq y$ , имеем

$$({}_1\mathbf{s}z) < ({}_1\mathbf{s}c) \leq ({}_1\mathbf{s}y) \leq ({}_{\ell}\mathbf{s}y) < ({}_2\mathbf{s}z).$$

Поскольку  $\lambda$ -класс  $x\mathbf{t}y\mathbf{u}^+x^+$  стабилен относительно  $\mathbf{V}$ , легко видеть, что  $\lambda$ -классы  $x\mathbf{t}x^+$  и  $x\mathbf{t}y\mathbf{u}^+$  также стабильны относительно  $\mathbf{V}$ . Отсюда следует, что

$$({}_1\mathbf{t}z) < ({}_1\mathbf{t}c) \leq ({}_1\mathbf{t}y) \leq ({}_{\ell}\mathbf{t}y) < ({}_2\mathbf{t}z).$$

Однако из предположения  $({}_2\mathbf{v}x) < ({}_{\ell}\mathbf{v}y_n)$  следует, что

$$({}_2\mathbf{t}z) = (\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}({}_2\mathbf{v}x)) \leq (\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}({}_{\ell}\mathbf{v}y_n)) = ({}_{\ell}\mathbf{t}y),$$

что противоречит сказанному в предыдущем предложении.

**Случай 2:**  $\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}({}_2\mathbf{v}x) = {}_1\mathbf{t}z$ . Используя условие (7.35) и тот факт, что все  $\lambda$ -классы из множества  $\{xx^+yy^+\}^{\leq \lambda}$  стабильны относительно  $\mathbf{V}$ , получаем, что

$$({}_1\mathbf{t}z) \leq ({}_{\ell}\mathbf{t}c) \leq ({}_1\mathbf{t}y). \quad (7.36)$$

Тогда  $\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}({}_1\mathbf{v}x) = {}_1\mathbf{t}d$  для некоторой буквы  $d \in \text{alph}(\mathbf{t}) = \text{alph}(\mathbf{s})$ . В этом случае  $({}_1\mathbf{t}d) = (\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}({}_1\mathbf{v}x)) \stackrel{(7.34)}{<} (\varphi_{\mathbf{t}}^{-1}({}_2\mathbf{v}x)) = ({}_1\mathbf{t}z) \stackrel{(7.36)}{\leq} ({}_{\ell}\mathbf{t}c)$  и, следовательно,  $c \neq d$ .

Предположим, что  $({}_1\mathbf{s}d) < ({}_{\ell}\mathbf{s}c)$ . Поскольку, в силу условия (7.35), и оба слова  $\varphi(z)$  и  $\varphi(d)$  содержат  $x$  и  $({}_1\mathbf{s}z) \leq ({}_1\mathbf{s}c) \leq (\varphi_{\mathbf{s}}^{-1}({}_1\mathbf{u}y_n))$ , получаем, что  $({}_2\mathbf{u}x) \leq ({}_{\ell}\mathbf{u}y_n)$ , чего быть не может в силу условия (7.33).

Предположим, что  $({}_{\ell}\mathbf{s}c) < ({}_1\mathbf{s}d)$ . Тогда  $\mathbf{s}(c, d) \in cd^+$  и  $\mathbf{t}(c, d) \in d^+cd^*$ , что противоречит стабильности множества  $xx^+yy^+$  относительно  $\mathbf{V}$ .

Итак, мы показали, что в любом случае  $({}_{\ell}\mathbf{v}y_n) < ({}_2\mathbf{v}x)$  и, следовательно, многообразие  $\mathbf{V}$  бесконечно базисуемо.  $\square$

### 7.1.5. Доказательства теорем 7.1 и 7.2

*Доказательство теоремы 7.2.* В [50] установлено, что предельными являются многообразия  $\mathbf{M}(xuzxty, xzytxy)$  и  $\mathbf{M}(xzxyty)$ . Тот факт, что многообразие  $\mathbf{M}_{\gamma}(x^+yy^+tx^+, x^+zty^+x^+)$  предельно, получается комбинацией основного результата работы [113] и леммы 1.17. Многообразие

$\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$  и  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$  являются предельными в силу предложений 7.12 и 7.13 соответственно. Наконец, из двойственных утверждений следует предельность многообразий  $\mathbf{M}_\lambda(x^+zy^+xty)$  и  $\mathbf{M}_\lambda(x^+yy^+tx)$ . Других предельных многообразий  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов нет в силу леммы 7.11.  $\square$

*Доказательство теоремы 7.1.* Согласно теореме 7.2, все многообразия из списка (7.17) являются предельными. Пусть  $\mathbf{V}$  — предельное многообразие аperiодических моноидов, не содержащее ни одного многообразия из списка (7.17). Тогда, по лемме 7.8, в  $\mathbf{V}$  выполнено одно из тождеств (7.4) и (7.5), скажем (7.4). Поскольку в любом моноиде из  $\mathbf{V}$  идемпотенты перестановочны, отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $(xy)^2 \stackrel{(7.4)}{\approx} xux^2y^2 \approx xy^2x^2 \approx x^2y^2 \approx y^2x^2$  и потому тождеству (7.8). Тогда, в силу леммы 7.10, многообразие  $\mathbf{V}$  является многообразием  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов. Для получения противоречия остается еще раз сослаться на теорему 7.2.  $\square$

## § 7.2. Кроссовы многообразия

### 7.2.1. Формулировка результата

Положим

$$\mathbf{P} := \text{var}\{(7.4), (7.7), (7.10), (7.11), (7.12)\}.$$

Основным результатом данного параграфа является следующее описание кроссовых многообразий аperiодических моноидов с коммутирующими идемпотентами.

**Теорема 7.14.** *Многообразие аperiодических моноидов с коммутирующими идемпотентами является кроссовым тогда и только тогда, когда оно не содержит 4 многообразия из списка (7.17), а также 5 следующих многообразий:*

$$\mathbf{M}(\{xt_1x \cdots t_nx \mid n \in \mathbb{N}\}), \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_1^\delta, \mathbf{P}, \mathbf{P}^\delta.$$

Для доказательства теоремы 7.14 потребуется ряд вспомогательных результатов в разделах 7.2.2–7.2.4. Непосредственному доказательству теоремы 7.14 посвящен раздел 7.2.5.

### 7.2.2. Тождества, задающие многообразия

Положим  $\mathbf{O}_2 := \text{var}\{(7.7), (7.16)\}$ . Для любого  $n \in \mathbb{N}$  положим также

$$\mathbf{e}_n := \begin{cases} x, & \text{если } n \text{ — нечетное число,} \\ y, & \text{если } n \text{ — четное число.} \end{cases}$$

**Лемма 7.15.** *Любое многообразие  $\mathbf{V}$  из интервала  $[\mathbf{M}(xy), \mathbf{O}_2]$  можно задать внутри мно-*

гооморазия  $\mathbf{O}_2$  некоторыми из следующих тождеств: (7.1), (7.2), (7.6), (7.10), (7.15),

$$yx^2txy \approx xyxtxy, \quad (7.37)$$

$$x^2ytxy \approx xyxtxy, \quad (7.38)$$

$$\beta_n^1 : xy \left( \prod_{i=1}^{n+1} t_i \mathbf{e}_i \right) \approx yx \left( \prod_{i=1}^{n+1} t_i \mathbf{e}_i \right),$$

$$\beta_n^2 : yx^2 \left( \prod_{i=2}^{n+1} t_i \mathbf{e}_i \right) \approx xyx \left( \prod_{i=2}^{n+1} t_i \mathbf{e}_i \right),$$

$$\beta_n^3 : x^2y \left( \prod_{i=1}^{n+1} t_i \mathbf{e}_i \right) \approx xyx \left( \prod_{i=1}^{n+1} t_i \mathbf{e}_i \right),$$

$$\beta_n^4 : x^2y \left( \prod_{i=2}^{n+1} t_i \mathbf{e}_i \right) \approx xyx \left( \prod_{i=2}^{n+1} t_i \mathbf{e}_i \right),$$

где  $n \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Легко видеть, что многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (7.19). Это позволяет нам воспользоваться предложением 7.3, в доказательстве которого мы показали, что многообразие  $\mathbf{V}$  может быть задано тождествами вида (1.1), где  $r, e_0, f_0, \dots, e_r, f_r \in \mathbb{N}_0$  и  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ , а также тождествами вида  $\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}$  и  $x\mathbf{spc} \approx x\mathbf{sqc}$ , где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  — слова в алфавите  $\{x, y\}$  такие, что  $\text{occ}_x(\mathbf{p}) = \text{occ}_x(\mathbf{q}), \text{occ}_y(\mathbf{p}) = \text{occ}_y(\mathbf{q}) \leq 2$  и

$$\mathbf{c} \in \{1, txy, t_1 \mathbf{f}_1 t_2 \mathbf{f}_2 \cdots t_k \mathbf{f}_k \mid k \in \mathbb{N}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k \in \{1, x, y\}\}.$$

При этом можно считать, что буквы  $x$  и  $y$  являются кратными в каждой из частей последних двух тождеств. Таким образом, нам достаточно показать, что всякое тождество, приведенное выше, эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{O}_2$  одному из тождеств, перечисленных в формулировке доказываемого предложения.

Поскольку многообразие  $\mathbf{O}_2$  удовлетворяет тождествам

$$u_k : xt_1x \cdots t_kx \approx xt_1x \cdots xt_kx^2,$$

$$u'_{k+1} : xt_1x \cdots t_kx^2 t_{k+1}x \approx xt_1x \cdots t_kx t_{k+1}x^2.$$

при любом  $k \in \mathbb{N}$ , из леммы 3.75 вытекает, что если тождество (1.1) не выполнено в  $\mathbf{V}$ , то оно эквивалентно одному из тождеств (7.1), (7.2), (7.6) и (7.15).

Таким образом, остается рассмотреть тождества вида  $\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}$  и  $x\mathbf{spc} \approx x\mathbf{sqc}$ . Если обе буквы  $x$  и  $y$  являются кратными в словах  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , то эти тождества являются следствием тождеств  $x^2 \approx x^3$  и (7.7). Это позволяет далее считать, что  $y \in \text{sim}(\mathbf{p}) = \text{sim}(\mathbf{q})$ . В этом случае тождество  $x\mathbf{spc} \approx x\mathbf{sqc}$  эквивалентно по модулю (7.16) тождеству  $x\mathbf{p}'\mathbf{c} \approx x\mathbf{q}'\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{q}'$  — слова, получающиеся из слов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  соответственно удалением всех за исключением последнего вхождения буквы  $x$ . В силу сказанного, нам остается проверить, что тождество  $\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}$  эквивалентно внутри  $\mathbf{O}_2$  одному из тождеств, перечисленных в формулировке доказываемого

го предложения. Можно считать, что это тождество не выполнено в  $\mathbf{O}_2$ , так как в противном случае доказывать нечего.

Далее, очевидно, что если  $\text{осс}_x(\mathbf{p}) = \text{осс}_y(\mathbf{q}) = 1$ , то  $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} = \{xy, ux\}$ . Если же  $\text{осс}_x(\mathbf{p}) = 2$  и  $\text{осс}_y(\mathbf{q}) = 1$ , то  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \{x^2y, xux, ux^2\}$ . В случае, когда  $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} = \{x^2y, ux^2\}$ , тождество  $\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}$  эквивалентно по модулю (7.4) паре тождеств  $\{x^2yc \approx xuxc, ux^2c \approx xuxc\}$ , поскольку

$$ux^2c \stackrel{\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}}{\approx} x^2yc \stackrel{(7.4)}{\approx} x^3yc \stackrel{\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}}{\approx} xux^2c \stackrel{(7.4)}{\approx} xuxc.$$

Таким образом, можно считать, что

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} \in \{\{xy, ux\}, \{x^2y, xux\}, \{ux^2, xux\}\}.$$

С учетом сказанного в предыдущем абзаце, если  $\mathbf{c} = txy$ , то  $\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}$  совпадает с одним из тождеств (7.10), (7.37) и (7.38) и доказывать нечего. Пусть теперь  $\mathbf{c} = t_1\mathbf{f}_1t_2\mathbf{f}_2 \cdots t_k\mathbf{f}_k$  для некоторых  $k \in \mathbb{N}$  и  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k \in \{1, x, y\}$ . Тогда существует подпоследовательность  $k_1, k_2, \dots, k_r$  последовательности  $1, 2, \dots, k$  такая, что  $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_{k_1-1} = 1$  и для любого  $i = 2, \dots, k$  слово  $\mathbf{c}_{k_{i-1}}\mathbf{c}_{k_{i-1}+1} \cdots \mathbf{c}_{k_i-1}$  является степенью одной из букв  $x$  и  $y$ , в то время как слово  $\mathbf{c}_{k_i}\mathbf{c}_{k_i+1} \cdots \mathbf{c}_{k_{i+1}-1}$  — степенью другой из этих двух букв (для удобства полагаем  $k_{r+1} := k + 1$ ). Тогда слово  $\mathbf{c}(x, y, t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_r})$  совпадает со словом  $t_{k_1+\ell}\mathbf{e}_{k_1+\ell}^{g_{1+\ell}}t_{k_2+\ell}\mathbf{e}_{k_2+\ell}^{g_{2+\ell}} \cdots t_{k_r+\ell}\mathbf{e}_{k_r+\ell}^{g_{r+\ell}}$  для некоторых  $\ell \in \{0, 1\}$  и  $g_{1+\ell}, g_{2+\ell}, \dots, g_{r+\ell} \in \mathbb{N}$ . Отсюда вытекает, что тождество  $\mathbf{pc} \approx \mathbf{qc}$  эквивалентно по модулю (1.4) тождеству  $\mathbf{pc}' \approx \mathbf{qc}'$ , где  $\mathbf{c}' := t_{1+\ell}\mathbf{e}_{1+\ell}t_{2+\ell}\mathbf{e}_{2+\ell} \cdots t_{r+\ell}\mathbf{e}_{r+\ell}$ . Для завершения доказательства остается заметить, что последнее тождество совпадает с одним из тождеств  $\beta_{r-1}^1, \beta_r^2, \beta_{r-1}^3$  и  $\beta_r^4$ .  $\square$

**Лемма 7.16.** *Любое малое конечно базлируемое многообразие, удовлетворяющее тождеству (7.4), является кроссовым.*

*Доказательство.* Из фундаментального результата М.Сапира [17] следует, что любое многообразие, удовлетворяющее тождеству (7.4), локально конечно. Хорошо известно, что любое малое локально конечное многообразие является конечно порожденным (см., например, [51, лемма 2.1]). Таким образом, лемма 7.16 доказана.  $\square$

**Следствие 7.17.** *Любое многообразие  $\mathbf{V}$ , удовлетворяющее тождествам (7.16), (7.7) и  $\beta_n^1$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , является кроссовым.*

*Доказательство.* Если  $M(xy) \notin \mathbf{V}$ , то требуемое утверждение следует из леммы 1.25 и предложений 1.13 и 1.14. Пусть теперь  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Тогда, в силу леммы 7.15, любое подмногообразие многообразия  $\mathbf{V}$ , содержащее  $M(xy)$ , может быть задано внутри  $\mathbf{V}$  некоторым подмножеством множества

$$\{(7.1), (7.2), (7.6), (7.10), (7.15), (7.37), (7.38), \beta_i^j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\}.$$

Поскольку это множество конечно, отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  является малым и, более того, в силу леммы 7.16, кроссовым многообразием.  $\square$

### 7.2.3. Два почти кроссовых многообразия

**Предложение 7.18.** *Многообразие  $M_\lambda(xzux^+ty^+)$  является почти кроссовым.*

*Доказательство.* В силу предложения 7.12, многообразие  $M_\lambda(xzux^+ty^+)$  не является кроссовым (поскольку оно бесконечно базирuемо), но все его подмногообразия конечно базирuемы. Поскольку  $M_\lambda(xzux^+ty^+)$  удовлетворяет тождествам (7.7) и  $\beta_2^1$ , в силу следствия 7.17, достаточно установить, что в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (1.5). В коммутативном и идемпотентном случаях требуемое утверждение очевидно. Если же многообразие  $\mathbf{V}$  не является ни коммутативным, ни идемпотентным, то  $M(xy) \in \mathbf{V}$  по лемме 1.25. В этом случае, используя леммы 1.28 и 1.29, а также утверждение, двойственное к лемме 1.27, легко показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет (7.16).  $\square$

**Предложение 7.19.** *Многообразие  $\mathbf{P}$  является почти кроссовым.*

Нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 7.20.** *Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеет место строгое включение  $\mathbf{P}\{\beta_n^1\} \subset \mathbf{P}\{\beta_{n+1}^1\}$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $\beta_{n+1}^1$  является следствием  $\beta_n^1$ , имеем  $\mathbf{P}\{\beta_n^1\} \subseteq \mathbf{P}\{\beta_{n+1}^1\}$ . Поэтому остается установить, что если  $\mathbf{P}\{\beta_{n+1}^1\}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  такому, что  $\mathbf{u} \in xyt_1e_1^+t_2e_2^+\cdots t_{n+1}e_{n+1}^+$ , то  $\mathbf{v} \in xyt_1e_1^+t_2e_2^+\cdots t_{n+1}e_{n+1}^+$ . В силу предложения 1.1, нам достаточно рассмотреть случай, когда  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \{\mathbf{a}\varphi(\mathbf{s})\mathbf{b}, \mathbf{a}\varphi(\mathbf{t})\mathbf{b}\}$  для некоторых слов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$ , подстановки  $\varphi: X \rightarrow X^*$  и тождества

$$\mathbf{s} \approx \mathbf{t} \in \Sigma := \{(7.4), (7.7), (7.10), (7.11), (7.12), \beta_{n+1}^1\}.$$

Далее, заметим, что

- (\*) если  $ab$  — подслово слова  $\mathbf{u}$ , где  $a$  и  $b$  — различные буквы, то это подслово имеет единственное вхождение в  $\mathbf{u}$  и, кроме того, слово  $ba$  не является подсловом слова  $\mathbf{u}$ .

Если  $\varphi(x) = 1$ , то  $\varphi(\mathbf{s}) = \varphi(\mathbf{t})$  и доказывать нечего. Пусть теперь  $\varphi(x) \neq 1$ . Тогда, поскольку  $\text{alph}(\varphi(x)) \subseteq \text{mul}(\varphi(\mathbf{s})) \subseteq \text{mul}(\mathbf{u})$ , из условия (\*) следует, что  $\varphi(x) = c^k$  для некоторых  $k \in \mathbb{N}$  и  $c \in \{x, y\}$ .

Требуемое утверждение очевидно в случае, когда  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$  совпадает с (7.4). Пусть теперь  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t} \in \Sigma \setminus \{(7.4)\}$ . Заметим, что как и в случае с буквой  $x$ , можно считать, что  $\varphi(y) \neq 1$ , так как в противном случае требуемое утверждение очевидно. Тогда, в силу условия (\*),  $\varphi(y) = d^r$  для некоторых  $d \in \{x, y\}$  и  $r \in \mathbb{N}$ . Мы можем также считать, что  $c \neq d$ , так как в противном случае требуемое утверждение очевидно. Следовательно,  $\{c, d\} = \{x, y\}$ . Применим еще раз условие (\*) и получим, что тождество  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$  не может совпадать с тождеством (7.10). Далее,  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t} \notin \{(7.7), (7.11), (7.12)\}$ , так как слово  $\mathbf{u}$  не содержит подслов вида  $c^{2k}d^r$ ,  $d^rc^{2k}$  и  $c^kd^rc^k$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$  совпадает с тождеством  $\beta_{n+1}^1$ . В этом случае, существует  $j \in \{1, 2, \dots, n+2\}$  такое, что  $t_i \notin \text{alph}(\varphi(t_j))$  для любого  $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ . Отсюда следует, что  $\text{alph}(\varphi(t_j)) \subseteq \{x, y\}$ . Тогда слово  $\varphi(\mathbf{s})$  и потому слово  $\mathbf{u}$  содержит по

крайней мере два различных вхождения  $xu$  или  $ux$  в качестве подслова, что невозможно в силу условия (\*).  $\square$

*Доказательство предложения 7.19.* Из леммы 7.20 следует, что многообразие  $\mathbf{P}$  не является кроссовым. Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное подмногообразие многообразия  $\mathbf{P}$ . Требуется доказать, что  $\mathbf{V}$  — кроссово многообразие. Поскольку  $\mathbf{P}$  удовлетворяет тождествам (7.16) и (7.7), в силу следствия 7.17, достаточно установить, что в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\beta_n^1$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . В коммутативном и идемпотентном случаях требуемое утверждение очевидно. Если же многообразие  $\mathbf{V}$  не является ни коммутативным, ни идемпотентным, то  $M(xu) \in \mathbf{V}$  по лемме 1.25.

Если  $M_\gamma(x^+uzx^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (7.15) по лемме 3.10. Тогда в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\beta_2^1$ , поскольку

$$\begin{aligned} xyt_1xt_2yt_3x &\stackrel{(7.4)}{\approx} xyt_1x^2t_2yt_3x \stackrel{(7.15)}{\approx} xyt_1x^2t_2xyt_3x \\ &\stackrel{(7.10)}{\approx} yxt_1x^2t_2xyt_3x \stackrel{(7.15)}{\approx} yxt_1x^2t_2yt_3x \stackrel{(7.4)}{\approx} yxt_1xt_2yt_3x. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (7.6) и потому тождествам

$$xuzxtu \stackrel{\{(7.4),(7.6)\}}{\approx} x^2y^2zx^2ty^2 \stackrel{(7.7)}{\approx} y^2x^2zx^2ty^2 \stackrel{\{(7.4),(7.6)\}}{\approx} uxzxtu. \quad (7.40)$$

Наконец, если  $M_\lambda(xux^+) \vee M_\gamma(x^+uzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ , то из леммы 7.15 и того факта, что в  $M_\lambda(xux^+) \vee M_\gamma(x^+uzx^+)$  нарушаются тождества (7.2), (7.1), (7.6) и (7.21) следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\beta_n^1$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , что и требовалось показать.  $\square$

#### 7.2.4. Кроссовы подмногообразия многообразия $\mathbf{O}$

Напомним, что  $\mathbf{O} = \text{var}\{\sigma_2, \sigma_3\}$ . Пусть  $k \geq 2$ . Слово  $\mathbf{w}$  будем называть  $k$ -свободным, если для любых  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in X^*$  из того, что  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2^k\mathbf{w}_3$  следует, что  $\mathbf{w}_2 = 1$ .

Основным результатом данного раздела является следующее описание почти кроссовых аperiодических подмногообразий многообразия  $\mathbf{O}$ .

**Предложение 7.21.** *Многообразия  $\mathbf{M}(\{xt_1x \cdots t_nx \mid n \in \mathbb{N}\})$ ,  $\mathbf{P}$  и только они являются почти кроссовыми аperiодическими подмногообразиями многообразия  $\mathbf{O}$ .*

Напомним обозначение для следующего тождества:

$$\iota_{n,m} : xt_1x \cdots t_nx \approx xt_1x \cdots xt_mx^2t_{m+1}x \cdots t_nx,$$

где  $0 \leq m \leq n$ . Нам потребуются два вспомогательных утверждения.

**Лемма 7.22.** *Пусть  $\mathbf{w}$  — слово, а  $\mathbf{V}$  — многообразие, удовлетворяющее тождествам  $x^n \approx x^{n+1}$  и  $\iota_{n,j}$  для некоторых  $n \in \mathbb{N}$  и  $0 \leq j \leq n$ . Если  $M_\gamma(x^+uzx^+) \notin \mathbf{V}$ , то существует  $(2n+2)$ -ограниченное слово  $\mathbf{w}'$  такое, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  выполнено в  $\mathbf{V}$ .*

*Доказательство.* Из доказательства леммы 5.3 в [70] следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество

$$x^n y z x^n \approx x^n y x z x^n. \quad (7.41)$$

Отсюда вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} & x \left( \prod_{i=1}^n t_i x \right) y z x \left( \prod_{i=1}^n h_i x \right) \\ & \stackrel{\iota_{n,j}}{\approx} x \left( \prod_{i=1}^{j-1} t_i x \right) t_j x^n \left( \prod_{i=j+1}^n t_i x \right) y z x \left( \prod_{i=1}^{j-1} h_i x \right) h_j x^n \left( \prod_{i=j+1}^n h_i x \right) \\ (7.41) \quad & \approx x \left( \prod_{i=1}^{j-1} t_i x \right) t_j x^n \left( \prod_{i=j+1}^n t_i x \right) y x z x \left( \prod_{i=1}^{j-1} h_i x \right) h_j x^n \left( \prod_{i=j+1}^n h_i x \right) \\ & \stackrel{\iota_{n,j}}{\approx} x \left( \prod_{i=1}^n t_i x \right) y x z x \left( \prod_{i=1}^n h_i x \right) \end{aligned}$$

и потому тождеству

$$x \left( \prod_{i=1}^n t_i x \right) y z x \left( \prod_{i=1}^n h_i x \right) \approx x \left( \prod_{i=1}^n t_i x \right) y x z x \left( \prod_{i=1}^n h_i x \right).$$

Заметим, что последнее тождество позволяет удалить вхождение буквы  $x$ , если и справа и слева от него имеется  $n + 1$  вхождение этой буквы. Отсюда вытекает, что для любого слова  $\mathbf{w} \in X^*$ , найдется  $(2n + 2)$ -ограниченное слово  $\mathbf{w}'$  такое, что тождество  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$  выполнено в  $\mathbf{V}$ .  $\square$

**Лемма 7.23.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ , а  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, удовлетворяющее тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Предположим, что  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\beta_{k,n}^1 : xy \left( \prod_{i=1}^{k+1} t_i e_i^n \right) \approx yx \left( \prod_{i=1}^{k+1} t_i e_i^n \right)$$

тогда и только тогда, когда  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\} \not\subseteq \mathbf{V}$ .

*Доказательство.* Поскольку

$$xy \left( \prod_{i=1}^{k+1} t_i e_i \right) \stackrel{(1.4)}{\approx} xy \left( \prod_{i=1}^{k+1} t_i e_i^n \right) \stackrel{\beta_{k,n}^1}{\approx} yx \left( \prod_{i=1}^{k+1} t_i e_i^n \right) \stackrel{(1.4)}{\approx} yx \left( \prod_{i=1}^{k+1} t_i e_i \right),$$

для любого  $k \in \mathbb{N}$  имеем  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1, \beta_{k,n}^1\} = \mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1, \beta_k^1\} = \mathbf{P}\{\beta_k^1\}$ . Из этого факта и леммы 7.20 следует, что если  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\beta_{k,n}^1$ , то  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\} \not\subseteq \mathbf{V}$ .

Обратно, предположим, что  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Тогда существует тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{V}$ , но не выполненное в  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\}$ . Пусть  $\mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m$  — разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда, по лемме 1.20, разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид  $\mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m$ .

Для каждого  $i = 0, 1, \dots, m$ , положим

$$Z_i := \{z \in \text{sim}(\mathbf{u}_i) \mid z \notin \text{alph}(\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{i-1})\} \quad \text{и} \quad Y_i := \text{alph}(\mathbf{u}_i) \setminus Z_i.$$

Из включения  $\mathbf{M}_\lambda(xux^+) \vee \mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \subseteq \mathbf{V}$  следует, что

$$Z_i = \{z \in \text{sim}(\mathbf{v}_i) \mid z \notin \text{alph}(\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_{i-1})\} \quad \text{и} \quad Y_i = \text{alph}(\mathbf{v}_i) \setminus Z_i.$$

Пусть  $Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ir_i}\}$ . Рутинными вычислениями можно проверить, что  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'_0 t_1 \mathbf{u}'_1 \cdots t_m \mathbf{u}'_m$  и  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}'_0 t_1 \mathbf{v}'_1 \cdots t_m \mathbf{v}'_m$ , где  $\mathbf{u}'_i := (\mathbf{u}_i)_{Y_i} \mathbf{h}_i$ ,  $\mathbf{v}'_i := (\mathbf{v}_i)_{Y_i} \mathbf{h}_i$  и  $\mathbf{h}_i := y_{i1}^2 y_{i2}^2 \cdots y_{ir_i}^2$ .

Для любого  $s = 0, 1, \dots, m+1$ , положим

$$\mathbf{w}_s := \mathbf{v}'_0 t_1 \mathbf{v}'_1 \cdots t_{s-1} \mathbf{v}'_{s-1} t_s \mathbf{u}'_s \cdots t_m \mathbf{u}'_m.$$

Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  нарушается в  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\}$ , найдется  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$  такое, что в  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\}$  не выполнено тождество  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}_{j+1}$ . Ясно, что слова  $(\mathbf{u}_j)_{Y_j}$  и  $(\mathbf{v}_j)_{Y_j}$  линейны. В силу очевидной индукции, мы можем считать, что существуют буквы  $x, y$  такие, что  $1_{\mathbf{u}_j, x}$  предшествует  $1_{\mathbf{u}_j, y}$  в  $\mathbf{u}_j$ , но  $(\mathbf{v}_j)_{Y_j} = \mathbf{a}x\mathbf{y}\mathbf{b}$ , а в  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\}$  нарушается тождество

$$\mathbf{w}_{j+1} \approx \left( \prod_{i=0}^{j-1} \mathbf{v}'_i t_{i+1} \right) (\mathbf{a}x\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{h}_j) \left( \prod_{i=j+1}^m t_i \mathbf{u}'_i \right). \quad (7.42)$$

Если  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{u}'_\ell)$  для некоторого  $\ell > j$ , то тождество (7.42) выполняется в многообразии  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\}$ , так как

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{j+1} &\stackrel{\{(7.4), (7.7), \sigma_3\}}{\approx} \left( \prod_{i=0}^j \mathbf{v}'_i t_{i+1} \right) \left( \prod_{i=j+1}^{\ell-1} \mathbf{u}'_i t_{i+1} \right) (\mathbf{u}'_\ell x y) \left( \prod_{i=\ell+1}^m t_i \mathbf{u}'_i \right) \stackrel{(7.10)}{\approx} \\ &\left( \prod_{i=0}^{j-1} \mathbf{v}'_i t_{i+1} \right) (\mathbf{a}x\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{h}_j) \left( \prod_{i=j+1}^{\ell-1} \mathbf{u}'_i t_{i+1} \right) (t_\ell \mathbf{u}'_\ell x y) \left( \prod_{i=\ell+1}^m t_i \mathbf{u}'_i \right) \stackrel{\{(7.4), (7.7), \sigma_3\}}{\approx} \\ &\left( \prod_{i=0}^{j-1} \mathbf{v}'_i t_{i+1} \right) (\mathbf{a}x\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{h}_j) \left( \prod_{i=j+1}^m t_i \mathbf{u}'_i \right), \end{aligned}$$

чего быть не может. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда  $|\text{alph}(\mathbf{u}'_\ell) \cap \{x, y\}| \leq 1$  для любого  $\ell > j$ . Тогда без ограничения общности мы можем считать, что существует подпоследовательность  $k_1, k_2, \dots, k_r = m+1$  последовательности  $j+1, j+2, \dots, m+1$  такая, что

- $\text{alph}(\mathbf{u}_{j+1} \mathbf{u}_{j+2} \cdots \mathbf{u}_{k_1-1}) \cap \{x, y\} = \emptyset$ ;
- если  $s \leq r-1$ , то  $\text{alph}(\mathbf{u}_{k_s} \mathbf{u}_{k_s+1} \cdots \mathbf{u}_{k_{s+1}-1}) \cap \{x, y\} = \text{alph}(\mathbf{e}_s)$ .

Ясно, что  $r > 2$ , так как  $x, y \in \text{alph}(\mathbf{u}'_{j+1} \mathbf{u}'_{j+2} \cdots \mathbf{u}'_m) = \text{alph}(\mathbf{u}'_{j+1} \mathbf{u}'_{j+2} \cdots \mathbf{u}'_m)$ . Если  $r > k+1$ , то мы снова получим противоречие с предположением, что тождество (7.42) нарушается в

$\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\}$ , поскольку это тождество является следствием  $\beta_k^1$ . Таким образом, можно считать, что  $r \leq k + 1$ . Если  $\varphi: X \rightarrow X^*$  — подстановка, задаваемая формулой

$$(x, y, t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_{r-1}}) \mapsto (x, y, t_1, t_2, \dots, t_{r-1}),$$

то

$$\varphi(\mathbf{u}) = xy \left( \prod_{i=1}^{r-1} t_i e_i^{p_i} \right) \quad \text{и} \quad \varphi(\mathbf{v}) = yx \left( \prod_{i=1}^{r-1} t_i e_i^{q_i} \right)$$

для некоторых  $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_{r-1}, q_{r-1} > n$ . Тогда тождество  $\varphi(\mathbf{u}) \approx \varphi(\mathbf{v})$  эквивалентно по модулю  $x^n \approx x^{n+1}$  тождеству  $\beta_{r-2,n}^1$ . Это означает, что последнее тождество выполнено в  $\mathbf{V}$ . Остается заметить, что  $\beta_{r-2,n}^1$  влечет  $\beta_{k,n}^1$ .  $\square$

*Доказательство предложения 7.21.* Пусть  $\mathbf{V}$  — апериодическое подмножество многообразия  $\mathbf{O}$ , не содержащее многообразий  $\mathbf{M}(\{xt_1x \cdots t_nx \mid n \in \mathbb{N}\})$  и  $\mathbf{P}$ . Нужно проверить, что многообразие  $\mathbf{V}$  является кроссовым. Согласно лемме 1.12,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^s \approx x^{s+1}$  для некоторого  $s \in \mathbb{N}$ , а, по лемме 1.26, в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\iota_{s',j}$  для некоторых  $s'$  и  $j$  таких, что  $s \leq s'$  и  $0 \leq j \leq s'$ . Если мы домножим тождество  $\iota_{s',j}$  справа на  $t_{s'+1}x$ , то получим тождество  $\iota_{s'+1,j}$ . Очевидно, что  $x^s \approx x^{s+1}$  влечет  $x^{s+1} \approx x^{s+2}$ . Сказанное позволяет нам без ограничения общности считать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $x^n \approx x^{n+1}$  и  $\iota_{n,j}$  для некоторых  $0 \leq j \leq n$ . В силу предложений 1.13 и 1.14, можно считать, что многообразие  $\mathbf{V}$  не является ни коммутативным, ни идемпотентным. Тогда  $M(xy) \in \mathbf{V}$  по лемме 1.25.

В [67, лемма 7] показано, что любое малое подмножество многообразия  $\mathbf{O}$  является кроссовым. Поэтому достаточно проверить, что  $\mathbf{V}$  — малое многообразие. Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, не выполненное в  $\mathbf{V}$ . Проверим, что существует тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  такое, что  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'\}$  и  $|\mathbf{u}'|, |\mathbf{v}'| \leq 50n^2$ . В этом случае любое подмножество многообразия  $\mathbf{V}$  может быть задано внутри  $\mathbf{V}$  тождествами из некоторой фиксированной конечной системы тождеств и потому многообразие  $\mathbf{V}$  является малым.

Тождество  $x^n \approx x^{n+1}$  позволяет нам предположить, что слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются  $(n+1)$ -свободными. Согласно предложению 1.15, мы можем без ограничения общности считать, что выполнено одно из следующих утверждений:

- (а)  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с эффективным тождеством вида (1.1) для некоторых  $r \geq 0$ ,  $0 \leq e_0, f_0, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r \leq n$ ;
- (б)  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с эффективным тождеством вида (1.2) для некоторых  $r \geq 0$ ,  $e_0, f_0 \geq 1$ ,  $0 \leq e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r \leq n$  и  $\sum_{i=0}^r e_i, \sum_{i=0}^r f_i \geq 2$ .

Дальнейшие рассуждения делятся на два случая, соответствующие утверждениям (а) и (б).

**Выполняется утверждение (а).** Предположим, что  $\mathbf{M}_\gamma(x^+yzx^+) \notin \mathbf{V}$ . Из лемм 1.20 и 7.22 следует, что найдутся  $(2n+2)$ -ограниченные слова  $\mathbf{u}_1 := x^{e'_0}t_1x^{e'_1} \cdots t_r x^{e'_r}$  и  $\mathbf{v}_1 := x^{f'_0}t_1x^{f'_1} \cdots t_r x^{f'_r}$  такие, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_1$ . Положим  $\mathbf{u}' := (\mathbf{u}_1)_Z$  и  $\mathbf{v}' := (\mathbf{v}_1)_Z$ , где

$$Z := \{t_i \mid 1 \leq i \leq r \text{ и } e'_i = f'_i = 0\}.$$

Ясно, что тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{V}$  тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  является эффективным, а слова  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{v}'$  —  $(2n+2)$ -ограниченными, оба слова  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$  имеют не более  $(4n+3)$  простых букв. Отсюда  $|\mathbf{u}'|, |\mathbf{v}'| \leq 6n+5 < 50n^2$ . Таким образом, мы можем считать ниже, что  $\mathbf{M}_\gamma(x^+uzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ .

Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эффективно, из леммы 1.22 вытекает, что  $e_i, f_i > 0$  для любого  $i = 0, 1, \dots, r$ . Если  $r \leq 2n$ , то  $|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}| \leq n + 2n(n+1) < 50n^2$ , так как слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются  $(n+1)$ -свободными. Поэтому мы можем считать, что  $r > 2n$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{v}_1$ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &:= x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^{n-1} t_i x^{e_i} \right) \left( \prod_{i=n}^{r-n} t_i x^n \right) \left( \prod_{i=r-n+1}^r t_i x^{e_i} \right), \\ \mathbf{v}_1 &:= x^{f_0} \left( \prod_{i=1}^{n-1} t_i x^{f_i} \right) \left( \prod_{i=n}^{r-n} t_i x^n \right) \left( \prod_{i=r-n+1}^r t_i x^{f_i} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что тождество  $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1$  эквивалентно внутри  $\mathbf{V}$  тождеству  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &:= x^{e_0} \left( \prod_{i=1}^{n-1} t_i x^{e_i} \right) (t_n x^n) \left( \prod_{i=r-n+1}^r t_i x^{e_i} \right), \\ \mathbf{v}' &:= x^{f_0} \left( \prod_{i=1}^{n-1} t_i x^{f_i} \right) (t_n x^n) \left( \prod_{i=r-n+1}^r t_i x^{f_i} \right). \end{aligned}$$

Тогда  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'\}$ . Поскольку слова  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$  являются  $(n+1)$ -свободными,

$$|\mathbf{u}'|, |\mathbf{v}'| \leq n + (n^2 - 1) + (n+1) + n(n+1) < 50n^2,$$

что и требовалось показать.

**Выполняется утверждение (б).** Предположим, что  $\mathbf{M}_\gamma(x^+uzx^+) \not\subseteq \mathbf{V}$ . Из леммы 1.20, леммы 7.22 и ее доказательства следует, что существуют  $(2n+2)$ -ограниченные слова

$$\mathbf{u}_1 := x^{e'_0} y^{f'_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e'_i} y^{f'_i} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_1 := y^{f'_0} x^{e'_0} \left( \prod_{i=1}^r t_i x^{e'_i} y^{f'_i} \right)$$

такие, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_1$ . Положим  $\mathbf{u}' := (\mathbf{u}_1)_Z$  и  $\mathbf{v}' := (\mathbf{v}_1)_Z$ , где

$$Z := \{t_i \mid 1 \leq i \leq r \text{ и } e'_i = f'_i = 0\}.$$

Ясно, что тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  эквивалентно внутри  $\mathbf{V}$  тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Поскольку тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  является эффективным, а слова  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{v}'$  —  $(2n+2)$ -ограниченными, оба слова  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$  имеют не более  $(4n+2)$  простых букв. Откуда  $|\mathbf{u}'|, |\mathbf{v}'| \leq 8n+6 < 50n^2$ . Поэтому далее мы можем считать, что  $\mathbf{M}_\gamma(x^+uzx^+) \subseteq \mathbf{V}$ . Тогда  $(e_i, f_i) \neq (0, 0)$  для любого  $i = 0, 1, \dots, r$ , так как тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эффективно. Если  $r \leq 8n$ , то  $|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}| \leq 2n + 8n(2n+1) < 50n^2$ , так как слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются  $(n+1)$ -свободными. Поэтому мы можем считать, что  $r > 8n$ . Тогда либо  $e := \sum_{i=0}^r e_i > 2n$ , либо  $f := \sum_{i=0}^r f_i > 2n$ , поскольку  $(e_i, f_i) \neq (0, 0)$  для любого  $i = 0, 1, \dots, r$ .

В силу симметрии мы можем считать, что  $e > 2n$ . Дальнейшие рассуждения делятся на два случая.

**Случай 1:**  $f \leq 2n$ . В этом случае существуют  $\ell \leq 2n$  и максимальная подпоследовательность  $k_1, k_2, \dots, k_\ell$  последовательности  $4n, 2n + 1, \dots, r - 4n$  такие, что  $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_\ell} > 0$ . Для удобства положим  $k_{\ell+1} := r - 4n + 1$ . Тогда  $\mathbf{u} = x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{w}$  и  $\mathbf{v} = y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{w}$ , где

$$\mathbf{w} := \left( \prod_{i=1}^{4n-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) \left( \prod_{i=4n}^{k_1-1} t_i x^{e_i} \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} \left( \prod_{i=k_s+1}^{k_{s+1}-1} t_i x^{e_i} \right) \right) \left( \prod_{i=k_{\ell+1}}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).$$

Следовательно,  $\sum_{i=0}^{4n-1} e_i, \sum_{i=r-4n+1}^m e_i > n$ , поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эффективно и  $f \leq 2n$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{v}_1$ , где  $\mathbf{u}_1 := x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{v}_1 := y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{w}_1$  и

$$\mathbf{w}_1 := \left( \prod_{i=1}^{4n-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) \left( \prod_{i=4n}^{k_1-1} t_i x^n \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} \left( \prod_{i=k_s+1}^{k_{s+1}-1} t_i x^n \right) \right) \left( \prod_{i=k_{\ell+1}}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).$$

Очевидно, что тождество  $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1$  эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{V}$  тождеству  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ , где  $\mathbf{u}' := x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{w}'$ ,  $\mathbf{v}' := y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{w}'$  и

$$\mathbf{w}' := \left( \prod_{i=1}^{4n-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) (t_{4n} x^n) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} t_{k_{s+1}} x^n \right) \left( \prod_{i=r-4n+1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).$$

Тогда  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'\}$ . Поскольку слова  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$  являются  $(n+1)$ -свободными и  $\ell \leq 2n$ , имеем

$$|\mathbf{u}'|, |\mathbf{v}'| \leq 2n + (4n-1)(2n+1) + (n+1) + 2n(3n+2) + 4n(2n+1) \leq 50n^2,$$

что и требовалось показать.

**Случай 2:**  $f > 2n$ . Тогда  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\}$  удовлетворяет тождеству

$$x^{e_0} y^{f_0} t x^n y^n \approx y^{f_0} x^{e_0} t x^n y^n, \quad (7.43)$$

поскольку

$$\begin{aligned} x^{e_0} y^{f_0} t x^n y^n \stackrel{x^n \approx x^{n+1}}{\approx} x^{e_0} y^{f_0} t x^{n+e} y^{n+f} \stackrel{\sigma_2}{\approx} x^{e_0} y^{f_0} t x^n y^n \left( \prod_{i=1}^r x^{e_i} y^{f_i} \right) \stackrel{(1,2)}{\approx} \\ y^{f_0} x^{e_0} t x^n y^n \left( \prod_{i=1}^r x^{e_i} y^{f_i} \right) \stackrel{\sigma_2}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} t x^{n+e} y^{n+f} \stackrel{x^n \approx x^{n+1}}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} t x^n y^n. \end{aligned}$$

Предположим, что  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (1.3) по лемме 1.28. Поскольку  $e, f > 2n$ , найдутся такие  $c$  и  $d$ , что  $e_c, f_d > 0$  и  $n \leq \sum_{i=1}^c e_i, \sum_{i=c}^r e_i, \sum_{i=1}^d f_i, \sum_{i=d}^r f_i$ .

В силу симметрии мы можем считать, что  $c \leq d$ . Тогда  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{V}\{(1.3), (7.43)\}$ , так как

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\stackrel{t_{n,j}}{\approx} x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{w} \stackrel{(1.3)}{\approx} x^{n-1+e_0} y^{n-1+f_0} \mathbf{w} \stackrel{x^n \approx x^{n+1}}{\approx} x^{n+e_0} y^{n+f_0} \mathbf{w} \stackrel{\sigma_3}{\approx} x^{e_0} y^{f_0} x^n y^n \mathbf{w} \stackrel{(7.43)}{\approx} \\ &y^{f_0} x^{e_0} x^n y^n \mathbf{w} \stackrel{\sigma_3}{\approx} y^{n+f_0} x^{n+e_0} \mathbf{w} \stackrel{x^n \approx x^{n+1}}{\approx} y^{n-1+f_0} x^{n-1+e_0} \mathbf{w} \stackrel{(1.3)}{\approx} y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{w} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{w} := \left( \prod_{i=1}^{c-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) (t_c x^n y^{f_c}) \left( \prod_{i=c+1}^{d-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) (t_d x^{e_d} y^{f_d}) \left( \prod_{i=d+1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).$$

Поэтому ниже будем считать, что  $\mathbf{M}_1(xux^+) \subseteq \mathbf{V}$ . Тогда, в согласно предложению 7.19, лемме 7.23 и тому факту, что  $\mathbf{P} \not\subseteq \mathbf{V}$ , многообразию  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\beta_{s,s'}^1$  для некоторых  $s, s' \geq 1$ . Ясно, что  $\beta_{s,s'}^1$  влечет  $\beta_{s+1,s'}^1$  и  $\beta_{s,s'+1}^1$ . Это позволяет считать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\beta_{n,n}^1$ .

Поскольку тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эффективно, либо  $\sum_{i=0}^{4n-1} e_i \geq n$ , либо  $\sum_{i=0}^{4n-1} f_i \geq n$  и либо  $\sum_{i=r-4n+1}^r e_i \geq n$ , либо  $\sum_{i=r-4n+1}^r f_i \geq n$ . В силу симметрии, мы можем считать, что  $\sum_{i=0}^{4n-1} e_i \geq n$ . Дальнейшие рассуждения делятся на два случая.

**Случай 2.1:**  $\sum_{i=r-4n+1}^r e_i \geq n$ . Пусть

$$Y_1 := \{s \mid 4n \leq s \leq r - 4n, n \leq \sum_{i=0}^s f_i\} \text{ и } Y_2 := \{s \mid 4n \leq s \leq r - 4n, n \leq \sum_{i=s}^r f_i\}.$$

Положим

$$p := \begin{cases} \min Y_1, & \text{если } Y_1 \neq \emptyset, \\ r - 4n, & \text{иначе;} \end{cases} \text{ и } q := \begin{cases} \max Y_2, & \text{если } Y_2 \neq \emptyset, \\ 4n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что  $p \leq q$ , поскольку  $f > 2n$ . Существуют  $\ell, r \leq n$ , максимальная подпоследовательность  $k_1, k_2, \dots, k_\ell$  последовательности  $4n, 4n+1, \dots, p-1$  и максимальная подпоследовательность  $h_1, h_2, \dots, h_{\ell'}$  последовательности  $q+1, q+2, \dots, r-4n$  такие, что  $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_\ell} > 0$  и  $f_{h_1}, f_{h_2}, \dots, f_{h_{\ell'}} > 0$ . Для удобства положим  $k_{\ell+1} := p$  и  $k_{r+1} := r - 4n + 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=4n}^{p-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) &= \left( \prod_{i=4n}^{k_1-1} t_i x^{e_i} \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} \left( \prod_{i=k_s+1}^{k_{s+1}-1} t_i x^{e_i} \right) \right) \\ \left( \prod_{i=q+1}^{r-4n} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) &= \left( \prod_{i=q+1}^{h_1-1} t_i x^{e_i} \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell'} t_{h_s} x^{e_{h_s}} y^{f_{h_s}} \left( \prod_{i=h_s+1}^{h_{s+1}-1} t_i x^{e_i} \right) \right). \end{aligned}$$

Для любого  $i = p, p+1, \dots, q$  положим

$$e'_i := \begin{cases} n & \text{если } e_i > 0, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \text{ и } f'_i := \begin{cases} n & \text{если } f_i > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\mathbf{u} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{v}_1$ , где  $\mathbf{u}_1 := x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{v}_1 := y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &:= \left( \prod_{i=1}^{4n-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) \left( \prod_{i=4n}^{k_1-1} t_i x^n \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} \left( \prod_{i=k_s+1}^{k_{s+1}-1} t_i x^n \right) \right), \\ \mathbf{w}_2 &:= \left( \prod_{i=p}^q t_i x^{e'_i} y^{f'_i} \right), \\ \mathbf{w}_3 &:= \left( \prod_{i=q+1}^{h_1-1} t_i x^n \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell'} t_{h_s} x^{e_{h_s}} y^{f_{h_s}} \left( \prod_{i=h_s+1}^{h_{s+1}-1} t_i x^n \right) \right) \left( \prod_{i=r-4n+1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).\end{aligned}$$

Если  $e'_s = f'_s$  для некоторых  $p \leq s \leq q$ , то  $e'_s = f'_s = n$ , так как тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  эффективно. Тогда  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{V}\{(7.43)\}$ , поскольку  $\mathbf{u} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{u}_1 \stackrel{(7.43)}{\approx} \mathbf{v}_1 \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{v}$ , что и требовалось доказать. Поэтому мы можем предполагать, что  $(e'_i, f'_i) \in \{(n, 0), (0, n)\}$  для любого  $i = p, p+1, \dots, q$ . В силу симметрии можно считать, что существуют  $b \geq 0$  и подпоследовательность  $g_1 = p, g_2, \dots, g_{b+1} = q+1$  последовательности  $p, p+1, \dots, q+1$  такие, что

$$\mathbf{w}_2 = \left( \prod_{i=1}^b \left( \prod_{s=g_i}^{g_{i+1}-1} (t_s \mathbf{e}_i^n) \right) \right).$$

Если  $b > n$ , то  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{V}$ , так как  $\mathbf{u} \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{u}_1 \stackrel{\beta_{n,n}^1}{\approx} \mathbf{v}_1 \stackrel{t_{n,j}}{\approx} \mathbf{v}$ , что и требовалось показать. Таким образом, мы можем считать, что  $b \leq n$ .

Очевидно, что тождество  $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1$  эквивалентно внутри многообразия  $\mathbf{V}$  тождеству  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ , где  $\mathbf{u}' := x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{w}'_1 \mathbf{w}'_2 \mathbf{w}'_3$ ,  $\mathbf{v}' := y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{w}'_1 \mathbf{w}'_2 \mathbf{w}'_3$  и

$$\begin{aligned}\mathbf{w}'_1 &:= \left( \prod_{i=1}^{4n-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) (t_{2n} x^n) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} t_{k_s+1} x^n \right), \\ \mathbf{w}'_2 &:= \left( \prod_{i=1}^b t_{g_i} \mathbf{e}_i^n \right), \\ \mathbf{w}'_3 &:= (t_{q+1} x^n) \left( \prod_{s=1}^{\ell'} t_{h_s} x^{e_{h_s}} y^{f_{h_s}} t_{h_s+1} x^n \right) \left( \prod_{i=r-4n+1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right).\end{aligned}$$

Тогда  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'\}$ . Поскольку слова  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{v}'$  являются  $(n+1)$ -свободными и  $\ell, \ell', b \leq n$ , имеем

$$\begin{aligned}|\mathbf{w}'_1| &\leq (4n-1)(2n+1) + (n+1) + n(3n+2) < 20n^2, \\ |\mathbf{w}'_2| &\leq n(n+1) \leq 2n^2, \\ |\mathbf{w}'_3| &\leq (n+1) + n(3n+2) + 4n(2n+1) < 20n^2.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $|\mathbf{u}'|, |\mathbf{v}'| < 50n^2$ , что и требовалось показать.

**Случай 2.2:**  $\sum_{i=r-4n+1}^r f_i \geq n$ . Положим

$$p := \begin{cases} \min Y_1, & \text{если } Y_1 \neq \emptyset, \\ r - 4n, & \text{иначе;} \end{cases} \quad \text{и} \quad q := \begin{cases} \max Y_2, & \text{если } Y_2 \neq \emptyset, \\ 4n, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$Y_1 := \{s \mid 4n \leq s \leq r - 4n, n \leq \sum_{i=0}^s f_i\} \quad \text{и} \quad Y_2 := \{s \mid 4n \leq s \leq r - 4n, n \leq \sum_{i=s}^r e_i\}.$$

**Случай 2.2.1:**  $q < p$ . Тогда существуют  $\ell, \ell' \leq n$ , максимальная подпоследовательность  $k_1, k_2, \dots, k_\ell$  последовательности  $4n, 4n + 1, \dots, q$ , а также максимальная подпоследовательность  $h_1, h_2, \dots, h_{\ell'}$  последовательности  $p, p + 1, \dots, r - 4n$  такие, что  $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_\ell} > 0$  и  $e_{h_1}, e_{h_2}, \dots, e_{h_{\ell'}} > 0$ . Для удобства положим  $k_{\ell+1} := q + 1$  и  $h_{\ell'+1} := r - 4n + 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=4n}^q t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) &= \left( \prod_{i=4n}^{k_1-1} t_i x^{e_i} \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} \left( \prod_{i=k_s+1}^{k_{s+1}-1} t_i x^{e_i} \right) \right) \\ \left( \prod_{i=p}^{r-4n} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) &= \left( \prod_{i=p}^{h_1-1} t_i y^{f_i} \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell'} t_{h_s} x^{e_{h_s}} y^{f_{h_s}} \left( \prod_{i=h_s+1}^{h_{s+1}-1} t_i y^{f_i} \right) \right). \end{aligned}$$

В этом случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \stackrel{\kappa_{n,j}}{\approx} \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v} \stackrel{\kappa_{n,j}}{\approx} \mathbf{v}_1$ , где  $\mathbf{u}_1 := x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{v}_1 := y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &:= \left( \prod_{i=1}^{4n-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) \left( \prod_{i=4n}^{k_1-1} t_i x^n \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} \left( \prod_{i=k_s+1}^{k_{s+1}-1} t_i x^n \right) \right), \\ \mathbf{w}_2 &:= \left( \prod_{i=q+1}^{p-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right), \\ \mathbf{w}_3 &:= \left( \prod_{i=p+1}^{h_1-1} t_i y^n \right) \left( \prod_{s=1}^{\ell'} t_{h_s} x^{e_{h_s}} y^{f_{h_s}} \left( \prod_{i=h_s+1}^{h_{s+1}-1} t_i y^n \right) \right) \prod_{i=r-4n+1}^r (t_i x^{e_i} y^{f_i}). \end{aligned}$$

Очевидно, что тождество  $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1$  эквивалентно тождеству  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ , где  $\mathbf{u}' := x^{e_0} y^{f_0} \mathbf{w}'_1 \mathbf{w}'_2 \mathbf{w}'_3$ ,  $\mathbf{v}' := y^{f_0} x^{e_0} \mathbf{w}'_1 \mathbf{w}'_2 \mathbf{w}'_3$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_1 &:= \left( \prod_{i=1}^{4n-1} t_i x^{e_i} y^{f_i} \right) (t_{4n} x^n) \left( \prod_{s=1}^{\ell} t_{k_s} x^{e_{k_s}} y^{f_{k_s}} t_{k_s+1} x^n \right), \\ \mathbf{w}'_3 &:= (t_{p+1} y^n) \left( \prod_{s=1}^{\ell'} t_{h_s} x^{e_{h_s}} y^{f_{h_s}} t_{h_s+1} y^n \right) \left( \prod_{i=r-4n+1}^r t_i x^{e_i} y^{f_i} \right). \end{aligned}$$

Тогда  $\mathbf{V}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{v}_1\} = \mathbf{V}\{\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'\}$ . Поскольку  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$  суть  $(n+1)$ -свободные слова и  $\ell, \ell' \leq n$ , имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}'_1| &\leq (4n-1)(2n+1) + (n+1) + n(3n+2) < 20n^2, \\ |\mathbf{w}'_3| &\leq (n+1) + n(3n+2) + 4n(2n+1) < 20n^2. \end{aligned}$$

Согласно определению чисел  $p$  и  $q$ , имеем  $|\mathbf{w}_2| \leq 4n$ . Отсюда следует, что  $|\mathbf{u}'|, |\mathbf{v}'| < 50n^2$ .

**Случай 2.2.2:**  $p \leq q$ . Этот случай рассматривается подобно случаю 2.1.

Итак, мы показали, что каждое подмногообразие многообразия  $\mathbf{V}$  может быть задано тождествами из некоторого фиксированного множества тождеств, каждая из частей которых имеет длину  $\leq 50n^2$ . Отсюда следует, что многообразие  $\mathbf{V}$  является малым и, с учетом леммы 7 в [67], кроссовым, что и требовалось показать.  $\square$

### 7.2.5. Доказательство теоремы 7.14

Все многообразия, перечисленные в теореме 7.14, являются почти кроссовыми:

- $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$  и  $\mathbf{M}_\lambda(xzyx^+ty^+)$  в силу предложения 7.18 и двойственного к нему;
- $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_1^\delta$  в силу лемм 1.18, 7.16 и утверждений, двойственных к ним;
- $\mathbf{M}(\{xt_1x \cdots t_nx \mid n \in \mathbb{N}\})$  в силу [67, теорема 2];
- $\mathbf{M}(xzxty)$  и  $\mathbf{M}(xyzxty, xzytxy)$  в силу [50, предложение 5.1];
- $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}^\delta$  в силу предложения 7.19 и двойственного предложения.

Для завершения доказательства остается показать, что если  $\mathbf{V}$  — многообразие аperiodических моноидов с коммутирующими идемпотентами, не содержащее многообразий, перечисленных в теореме 7.14, то  $\mathbf{V}$  является кроссовым многообразием.

Предположим, что  $M(xux) \in \mathbf{V}$ . Поскольку  $M(xyzxty, xzytxy) \notin \mathbf{V}$  и  $M(xzxty) \notin \mathbf{V}$ , согласно лемме 1.23,  $\mathbf{V}$  содержится в одном из многообразий  $\mathbf{O}$  и  $\mathbf{O}^\delta$ . В этом случае многообразие  $\mathbf{V}$  является кроссовым в силу предложения 7.21 или двойственного утверждения.

Предположим теперь, что  $M(xux) \notin \mathbf{V}$ . Предложения 1.13, 1.14 и лемма 1.25 позволяют считать, что  $M(xy) \in \mathbf{V}$ . Из лемм 1.3 и 1.26 легко вывести, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств (7.1), (7.2), (7.4) и (7.5). Согласно следствию 3.6 в [70] и двойственному к нему утверждению, всякое периодическое многообразие, удовлетворяющее одному из последних двух тождеств, является кроссовым. Поэтому, в силу симметрии мы можем далее считать, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (7.4). Тогда в этом многообразии выполнено и тождество (7.7), так как оно является многообразием с коммутирующими идемпотентами.

Рассмотрим произвольное подмногообразие  $\mathbf{X}$  многообразия  $\mathbf{V}$ . Если  $M_\gamma(xx^+y) \notin \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{D}_1$  по лемме, двойственной к лемме 1.27. Поскольку  $\mathbf{V} \neq \mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_1$  — почти кроссово многообразие, получаем, что многообразие  $\mathbf{X}$  является кроссовым. Если  $M_\lambda(xux^+) \notin \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству (7.6) в силу леммы 1.28. С учетом [73, предложение 4.3] и [93, теорема 4.3], получаем, что  $\mathbf{X} \subseteq M_\gamma(x^+uzx^+)$ . В этом случае многообразие  $\mathbf{X}$  является кроссовым по лемме 1.17.

Из сказанного, в частности, следует, что нам остается рассмотреть случай, когда  $M_\lambda(xux^+) \vee M_\gamma(xx^+y) \subseteq \mathbf{X}$ . Поскольку  $\mathbf{V} \neq M_\lambda(xzyx^+ty^+)$ , из леммы 1.29 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (7.16), откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{O}_2$ . С учетом следствия 7.17, остается установить, что в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\beta_n^1$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .

Предположим, что  $M_\gamma(x^+yzx^+) \notin \mathbf{V}$ . Тогда, по лемме 3.10, в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (7.15) и потому тождества (7.39), что и требовалось доказать. Пусть теперь  $M_\gamma(x^+yzx^+) \in \mathbf{V}$ . Тогда поскольку  $\mathbf{V} \neq \mathbf{P}$ , из доказательства предложения 7.19 следует, что многообразие  $\mathbf{P}$  является объединением всех многообразий вида  $\mathbf{P}\{\beta_i^1\}$ . Поэтому  $\mathbf{P}\{\beta_{k+1}^1\} \not\subseteq \mathbf{V}$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}_0$ . Отсюда и из леммы 7.23 вытекает, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\beta_{k,2}^1$ . Для завершения доказательства остается заметить, что тождество  $\beta_{k,2}^1$  эквивалентно внутри  $\mathbf{V}$  тождеству  $\beta_k^1$ .  $\square$

# Заключение

Диссертация посвящена систематическому изучению решетки многообразий моноидов, о которой ранее почти ничего известно не было. В ней рассмотрен ряд ограничений на решетки моноидных многообразий, связанных с решеточными тождествами; центральное место занимают рассмотрения связанные с тождеством дистрибутивности. Вторым направлением диссертации является изучение многообразий моноидов со сложной решеткой подмногообразий. Кроме того, наработанная техника, а также накопленная информация о решетке многообразий моноидов позволили существенно продвинуться в двух направлениях, родственных к решеткам многообразия, а именно, в изучении предельных и кроссовых многообразий моноидов.

Итогом проведенного исследования являются следующие результаты:

- 1) утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке многообразий моноидов; первые примеры конечно универсальных многообразий моноидов (теоремы 2.1 и 2.7);
- 2) описание дистрибутивных многообразий аperiodических моноидов (теорема 3.1);
- 3) описание нейтральных, стандартных, костандартных, дистрибутивных, нижнемодулярных и сократимых элементов решетки многообразий моноидов (теоремы 4.1, 4.3 и 4.8);
- 4) утверждение о том, что наименьший порядок моноида, порождающего многообразие с континуальной решеткой подмногообразий равен 6 (теорема 5.1);
- 5) утверждение о том, что наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие равен 6 (теорема 5.28);
- 6) пример двух кроссовых многообразий моноидов, объединение которых является конечно универсальным многообразием с континуумом подмногообразий (теорема 6.1);
- 7) описание предельных многообразий аperiodических моноидов с коммутирующими идемпотентами и предельных многообразий  $\mathcal{F}$ -тривиальных моноидов (теоремы 7.1 и 7.2);
- 8) описание кроссовых многообразий аperiodических моноидов с коммутирующими идемпотентами (теорема 7.14).

Несмотря на существенный прогресс в изучении решетки многообразий моноидов, эта тематика только начала развиваться и еще далеко не так хорошо разработана по сравнению с решеткой многообразий полугрупп. Многие естественные вопросы все еще остаются открытыми. Одной из наиболее интересных и перспективных открытых проблем в этом направлении представляется задача описания модулярных многообразий моноидов.

## Список литературы

- [1] Айзенштат, А. Я. *О решетке многообразий полугрупп* / А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1979. – С. 3–46.
- [2] Артамонов, В. А. *Цепные многообразия групп* / В. А. Артамонов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1978. – Вып. 3. – С. 3–8.
- [3] Бахтурин, Ю. А. *Тождества в алгебрах Ли* / Ю. А. Бахтурин. – М: Наука, 1985. – 448 с.
- [4] Бахтурин, Ю. А. *Тождественные соотношения в конечных кольцах Ли* / Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский // Матем. сб. – 1975. – Т. 96(138), No. 4. – С. 543–559.
- [5] Бирюков, А. П. *Многообразия идемпотентных полугрупп* / А. П. Бирюков // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9, No. 3. – С. 255–273.
- [6] Будкин, А. И. *К теории квазимногообразий алгебраических систем* / А. И. Будкин, В. А. Горбунов // Алгебра и логика. – 1975. – Т. 14, No. 2. – С. 123–143.
- [7] Важенин, Ю. М. *Разрешимость теорий первого порядка классов полугрупп* / Ю. М. Важенин // Алгебраические системы и их многообразия. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1988. – С. 23–40.
- [8] Верников, Б. М. *Почти цепные многообразия альтернативных колец* / Б. М. Верников, М. В. Волков // Исследования по современной алгебре. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1979. – С. 22–39.
- [9] Волков, М. В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* / М. В. Волков // Докл. Акад. наук. – 1992. – Т. 326, No. 3. – С. 409–413.
- [10] Волков, М. В. *Тождества в решетках многообразий полугрупп: дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.06* / М. В. Волков – Екатеринбург, 1994. – 323 с.
- [11] Гусев, С. В. *Решетка многообразий моноидов: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.06* / С. В. Гусев – Екатеринбург, 2019. – 105 с.
- [12] Коуровская тетрадь. *Нерешенные задачи теории групп.* – Под ред. В. Д. Мазурова и Е. И. Хухро. 20-е изд. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2022. – 269 с.
- [13] Львов, И. В. *О многообразиях ассоциативных колец. I* / И. В. Львов // Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12, No. 3. – С. 269–297.
- [14] Нейманн, Х. *Многообразия групп* / Х. Нейманн. – М: Мир, 1969. – 264 с.
- [15] Пинус, А. Г. *Конгруэнц-модулярные многообразия алгебр* / А. Г. Пинус. – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1986. – 132 с.
- [16] Романьков, В. А. *Недистрибутивность решетки многообразий нильпотентных групп* / В. А. Романьков // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9, No. 1. – С. 67–72.
- [17] Сапир М. В. *Проблемы бернсайдовского типа и конечная базирруемость в многообразиях полугрупп* / М. В. Сапир // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1987. – Т. 51, No. 2. – С. 319–340.
- [18] Сапир М. В. *Существенно бесконечно базирруемые конечные полугруппы* / М. В. Сапир // Матем. сб. – 1987. – Т. 133(175), No. 2. – С. 154–166.

- [19] Свердловская тетрадь. Нерешенные задачи теории полугрупп. – Под ред. Л. Н. Шеврина. 2-е изд. – Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979. – 41 с.
- [20] Суханов, Е. В. *Почти линейные многообразия полугрупп* / Е. В. Суханов // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32, No. 4. – С. 469–476.
- [21] Трахтман, А. Н. *О покрывающих элементах в структуре многообразий алгебр* / А. Н. Трахтман // Матем. заметки. – 1974. – Т. 15, No. 2. – С. 307–312.
- [22] Хобби, Д. *Строение конечных алгебр* / Д. Хобби, Р. Маккензи. – М: Мир, 1993. – 284 с.
- [23] Холл, М. *Теория групп* / М. Холл. – М: ИЛ, 1962. – 468 с.
- [24] Шеврин, Л. Н. *Решетки многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 2009. – No. 3. – С. 3–36.
- [25] Шеврин, Л. Н. *Тождества полугрупп* / Л. Н. Шеврин, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 1985. – No. 11. – С. 3–47.
- [26] Шеврин, Л. Н. *Структурные аспекты теории многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Е. В. Суханов // Изв. вузов. Математика. – 1989. – No. 6. – С. 3–39.
- [27] Aglianò, P. *Lattices of pseudovarieties* / P. Aglianò, J. B. Nation // J. Austral. Math. Soc. – 1989. – Vol. 46, No. 2. – P. 177–183.
- [28] Aird, T. *Lattices of varieties of plactic-like monoids* / T. Aird, D. Ribeiro // Semigroup Forum. – 2024. – Vol. 109, No. 1. – P. 3–37.
- [29] Almeida, J. *Finite semigroups and universal algebra* / J. Almeida. – Singapore: World Scientific, 1994. – xvii+511 pp.
- [30] Araújo, J. *A survey on varieties generated by small semigroups and a companion website* / J. Araújo, J. P. Araújo, P. J. Cameron, E. W. H. Lee, J. Raminhos // J. Algebra. – 2023. – Vol. 635. – P. 698–735.
- [31] Birkhoff, G. *On the structure of abstract algebras* / G. Birkhoff // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1935. – Vol. 31, No. 4. – P. 433–454.
- [32] Burris, S. *Embedding the dual of  $\Pi_m$  in the lattice of equational classes of commutative semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, No. 1. – P. 37–39.
- [33] Burris, S. *Embedding the dual of  $\Pi_\infty$  in the lattice of equational classes of semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Algebra Universalis. – 1971. – Vol. 1, No. 2. – P. 248–254.
- [34] Burris, S. *A course in universal algebra* / S. Burris, H. P. Sankappanavar – New York: Springer Verlag, 1981. – xvi+276 pp.
- [35] Cossey, J. *Critical groups and the lattice of varieties* / J. Cossey // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 20, No. 1. – P. 217–221.
- [36] Edmunds, C. C. *On certain finitely based varieties of semigroups* / C. C. Edmunds // Semigroup Forum. – 1977. – Vol. 15, No. 1. – P. 21–39.
- [37] Eilenberg, S. *Automata, languages, and machines. Vol. B* / S. Eilenberg – New York: Academic Press, 1976. – xiii+387 pp.
- [38] Evans, T. *The lattice of semigroup varieties* / T. Evans // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2, No. 1. – P. 1–43.

- [39] Fennemore, C.F. *All varieties of bands. I, II* / C.F. Fennemore // Math. Nachr. – 1971. – Vol. 48, No. 1–6. – P. 237–262.
- [40] Gerhard, J.A. *The lattice of equational classes of idempotent semigroups* / J.A. Gerhard // J. Algebra. – 1970. – Vol. 15, No. 2. – P. 195–224.
- [41] Glasson, D. *The Rees quotient monoid  $M(abba)$  generates a variety with uncountably many subvarieties* / D. Glasson // Semigroup Forum. – 2024. – Vol. 109, No. 2. – P. 476–481.
- [42] Grätzer, G. *Lattice theory: foundation.* / G. Grätzer. – Basel: Springer Basel AG, 2011. – xxix+613 pp.
- [43] Gupta, C.K. *The finite basis question for varieties of groups—some recent results* / C.K. Gupta, A. Krasilnikov // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47, No. 1–2. – P. 273–283.
- [44] Gusev, S.V. *Cancellable elements of the lattice of semigroup varieties* / S.V. Gusev, D.V. Skokov, B.M. Vernikov // Algebra and Discrete Math. – 2018. – Vol. 26, No. 1. – P. 34–46.
- [45] Hall, T.E. *The lattice of pseudovarieties of inverse semigroups* / T.E. Hall, K.G. Johnston // Pacif. J. Math. – 1989. Vol. 138, No. 1. – P. 73–88.
- [46] Head, T.J. *The varieties of commutative monoids* / T.J. Head // Nieuw Arch. Wiskunde. III Ser. – 1968. – Vol. 16. – P. 203–206.
- [47] Howie, J.M. *Fundamental of semigroup theory* / J.M. Howie – Oxford: Oxford University Press, 1995. – x+351 pp.
- [48] Jackson, M. *Small semigroup related structures with infinite properties: Ph.D. thesis* / M. Jackson – Hobart: University of Tasmania, 1999 – v+211 pp.
- [49] Jackson, M. *Finite semigroups whose varieties have uncountably many subvarieties* / M. Jackson // J. Algebra. – 2000. – Vol. 228, No. 2. – P. 512–535.
- [50] Jackson, M. *Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras* / M. Jackson // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70, No. 2. – P. 159–187.
- [51] Jackson, M. *Monoid varieties with extreme properties* / M. Jackson, E.W.H. Lee // Trans. Amer. Math. Soc. – 2018. – Vol. 370, No. 7. – P. 4785–4812.
- [52] Jackson, M. *Interpreting graph colorability in finite semigroups* / M. Jackson, R. McKenzie // Int. J. Algebra Comput. – 2006. – Vol. 16, No. 1. – P. 119–140.
- [53] Jackson, M. *Finitely based, finite sets of words* / M. Jackson, O. Sapir // Int. J. Algebra Comput. – 2000. – Vol. 10, No. 6. – P. 683–708.
- [54] Jackson, M. *From A to B to Z* / M. Jackson, W.T. Zhang // Semigroup Forum. – 2021. – Vol. 103, No. 1. – P. 165–190.
- [55] Ježek, J. *The lattice of equational theories. Part I: modular elements* / J. Ježek // Czechosl. Math. J. – 1981. – Vol. 31, No. 1. – P. 127–152.
- [56] Jipsen, P. *Varieties of lattices* / P. Jipsen, H. Rose. – Lect. Notes Math. – Vol.1533. Berlin: Springer-Verlag, 1992. – x+162pp.
- [57] Kalicki, J. *Equational completeness of abstract algebras* / J. Kalicki, D. Scott // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 650–659.

- [58] Kharlampovich, O. G. *Algorithmic problems in varieties* / O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir // Int. J. Algebra Comput. – 1995. – Vol. 5, No. 4–5. – P. 379–602.
- [59] Kovács, L. G. *On non-cross varieties of groups* / L. G. Kovács, M. F. Newman // J. Austral. Math. Soc. – 1971. – Vol. 12, No. 2. – P. 129–144.
- [60] Kozhevnikov, P. A. *On nonfinitely based varieties of groups of large prime exponent* / P. A. Kozhevnikov // Comm. Algebra. – 2012. – Vol. 40, No. 7. – P. 2628–2644.
- [61] Kruse, R. L. *Identities satisfied by a finite ring* / R. L. Kruse // J. Algebra. – 1973. – Vol. 26, No. 2. – P. 298–318.
- [62] Lee, E. W. H. *Minimal semigroups generating varieties with complex subvariety lattices* / E. W. H. Lee // Int. J. Algebra Comput. – 2007. – Vol. 17, No. 8. – P. 1553–1572.
- [63] Lee, E. W. H. *On the variety generated by some monoid of order five* / E. W. H. Lee // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2008. – Vol. 74, No. 3–4. – P. 509–537.
- [64] Lee, E. W. H. *Finitely generated limit varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // J. Algebra Appl. – 2009. – Vol. 8, No. 6. – P. 779–796.
- [65] Lee, E. W. H. *Maximal Specht varieties of monoids* / E. W. H. Lee // Moscow Math. J. – 2012. – Vol. 12, No. 3. – P. 787–802.
- [66] Lee, E. W. H. *Varieties generated by 2-testable monoids* / E. W. H. Lee // Studia Sci. Math. Hungar. – 2012. – Vol. 49. – P. 366–389.
- [67] Lee, E. W. H. *Almost Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Beiträge zur Algebra und Geometrie. – 2013. – Vol. 54, No. 1. – P. 121–129.
- [68] Lee, E. W. H. *Finite basis problem for semigroups of order five or less: generalization and revisitation* / E. W. H. Lee // Studia Logica. – 2013. – Vol. 101, No. 1. – P. 95–115.
- [69] Lee, E. W. H. *Inherently non-finitely generated varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 423. – С. 166–182.
- [70] Lee, E. W. H. *On certain Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Results Math. – 2014. – Vol. 66, No. 2. – P. 491–510.
- [71] Lee, E. W. H. *Advances in the theory of varieties of semigroups* / E. W. H. Lee – Cham: Springer, 2023. – xv+287 pp.
- [72] Lee, E. W. H. *A minimal pseudo-complex monoid* / E. W. H. Lee // Arch. Math. – 2023. – Vol. 120, No. 1. – P. 15–25.
- [73] Lee, E. W. H. *Minimal non-finitely based monoids* / E. W. H. Lee, J. R. Li // Dissert. Math. – 2011. – Vol. 475. – P. 1–65.
- [74] Lee, E. W. H. *The smallest monoid that generates a non-Cross variety* / E. W. H. Lee, W. T. Zhang // Xiamen Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. – 2014. – Vol. 53. – P. 1–4.
- [75] McKenzie, R. *Equational bases for lattice theories* / R. McKenzie // Math. Scand. – 1970. – Vol. 27. – P. 24–38.
- [76] Morse, M. *Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semigroups* / M. Morse, G. A. Hedlund // Duke Math. J. – 1944. – Vol. 11, No. 1. – P. 1–7.

- [77] Oates, S. *Identical relations in finite groups* / S. Oates, M. B. Powell // J. Algebra. – 1964. – Vol. 1, No. 1. – P. 11–39.
- [78] Pastijn, F. J. *The lattice of completely regular semigroup varieties* / F. J. Pastijn // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1990. – Vol. 49, No. 1. – P. 24–42.
- [79] Pastijn, F. J. *Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups* / F. J. Pastijn // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 323, No. 1. – P. 79–92.
- [80] Perkins, P. *Bases for equational theories of semigroups* / P. Perkins // J. Algebra. – 1969. – Vol. 11, No. 2. – P. 298–314.
- [81] Petrich, M. *Inverse semigroups* / M. Petrich – New York: John Wiley & Sons, 1984. – vi+674 pp.
- [82] Petrich, M. *The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations* / M. Petrich, N. R. Reilly // Glasgow Math. J. – 1990. – Vol. 32, No. 2. – P. 137–152.
- [83] Petrich, M. *Completely regular semigroup varieties* / M. Petrich, N. R. Reilly – Cham: Springer, 2024. – xiv+238 pp.
- [84] Pollák, Gy. *Some lattices of varieties containing elements without cover* / Gy. Pollák // Quad. Ric. Sci. – 1981. – Vol. 109. – P. 91–96.
- [85] Pollák, Gy. *On two classes of hereditarily finitely based semigroup identities* / Gy. Pollák // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 25, No. 1. – P. 9–33.
- [86] Pudlák, P. *Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice* / P. Pudlák, J. Tůma // Algebra Universalis. – 1980. – Vol. 10, No. 1. – P. 74–95.
- [87] Rhodes, J. *The  $q$ -theory of finite semigroups* / J. Rhodes, B. Steinberg – New York: Springer, 2009. – xxii+666 pp.
- [88] Sachs, D. *Identities in finite partition lattices* / D. Sachs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 12, No. 6. – P. 944–945.
- [89] Sapir, M. V. *On Cross semigroup varieties and related questions* / M. V. Sapir // Semigroup Forum. – 1991. – Vol. 42, No. 1. – P. 345–364.
- [90] Sapir, M. V. *Combinatorial algebra: syntax and semantics* / M. V. Sapir – Cham: Springer, 2014. – xvi+355 pp.
- [91] Sapir, O. B. *Finitely based words* / O. B. Sapir // Int. J. Algebra Comput. – 2000. – Vol. 10, No. 4. – P. 457–480.
- [92] Sapir, O. B. *Finitely based monoids* / O. B. Sapir // Semigroup Forum. – 2015. – Vol. 90, No. 3. – P. 587–614.
- [93] Sapir, O. B. *Limit varieties of  $J$ -trivial monoids* / O. B. Sapir // Semigroup Forum. – 2021. – Vol. 103, No. 1. – P. 236–260.
- [94] Sapir, O. B. *Limit varieties generated by finite non- $J$ -trivial aperiodic monoids* / O. B. Sapir // Semigroup Forum. – 2023. – Vol. 107, No. 3. – P. 732–750.
- [95] Ševrin, L. N. *Attainability and solvability for classes of algebras* / L. N. Ševrin, L. M. Martynov // Semigroups. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. – 1985. – Vol. 39. – P. 397–459.

- [96] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattices of varieties of semigroups and epigroups* / V. Yu. Shaprynskiĭ, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // *Comm. Algebra.* – 2019. – Vol. 47, No. 11. – P. 4697–4712.
- [97] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov // In: R. G. Romeo, M. V. Volkov, A. R. Rajan (eds.), *Semigroups, categories, and partial algebras. ICSAA 2019. Proceedings of the conference, Kochi, India, December 9–12, 2019.* Singapore: Springer. *Springer Proc. Math. Stat.* Vol. 345. – 2021. – P. 231–241.
- [98] Skokov, D. V. *On modular and cancellable elements of the lattice of semigroup varieties* / D. V. Skokov, B. M. Vernikov // *Сибирские электронные матем. изв.* – 2019. – Т. 16. – С. 175–186.
- [99] Stern, M. *Semimodular lattices. Theory and applications* / M. Stern. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – xiv+370 pp.
- [100] Vachuska, C. *On the lattice of completely regular monoid varieties* / C. Vachuska // *Semigroup Forum.* – 1993. – Vol. 46, No. 1. – P. 168–186.
- [101] Vernikov, B. M. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // *Semigroup Forum.* – 2007. – Vol. 75, No. 3. – P. 554–566.
- [102] Vernikov, B. M. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // *Algebra Universalis.* – 2008. – Vol. 59, No. 3–4. – P. 405–428.
- [103] Vernikov, B. M. *Special elements in lattices of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // *Acta Sci. Math. (Szeged).* – 2015. – Vol. 81, No. 1–2. – P. 79–109.
- [104] Vernikov, B. M. *Upper-modular and related elements of the lattice of commutative semigroup varieties* / B. M. Vernikov // *Semigroup Forum.* – 2017. – Vol. 94, No. 3. – P. 696–711.
- [105] Volkov, M. V. *An example of a limit variety of semigroups* / M. V. Volkov // *Semigroup Forum.* – 1982. – Vol. 24, No. 1. – P. 319–326.
- [106] Volkov, M. V. *A general finite basis condition for system of semigroup identities* / M. V. Volkov // *Semigroup Forum.* – 1990. – Vol. 41, No. 1. – P. 181–191.
- [107] Volkov, M. V. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / M. V. Volkov // In: P. M. Higgins (ed.), *Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex. Colchester: University of Essex.* – 1994. – P. 99–110.
- [108] Volkov, M. V. *Covers in the lattices of semigroup varieties and pseudovarieties* / M. V. Volkov // In: J. Almeida, G. M. S. Gomes, P. V. Silva (eds.), *Semigroups, Automata and Languages.* Singapore: World Scientific. – 1996. – P. 263–280.
- [109] Volkov, M. V. *The finite basis problem for finite semigroups* / M. V. Volkov // *Math. Jpn.* – 2001. – Vol. 53, No. 1. – P. 171–199.
- [110] Wismath, S. L. *The lattice of varieties and pseudovarieties of band monoids* / S. L. Wismath // *Semigroup Forum.* – 1986. – Vol. 33, No. 1. – P. 187–198.
- [111] Wismath, S. L. *The lattice of varieties of  $*$ -regular band monoids* / S. L. Wismath // *Semigroup Forum.* – 1993. – Vol. 46, No. 1. – P. 130–133.
- [112] Zhang, W. T. *Existence of a new limit variety of aperiodic monoids* / W. T. Zhang // *Semigroup Forum.* – 2013. – Vol. 86, No. 1. – P. 212–220.

- [113] Zhang, W. T. *A new example of limit variety of aperiodic monoids* / W. T. Zhang, Y. F. Luo // Электрон. ресурс. <https://arxiv.org/abs/1901.02207> [P. 1–16.]

## Публикации автора по теме диссертации

### в рецензируемых научных изданиях

- [114] Гусев, С. В. *О решетке надкоммутативных многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Изв. вузов. Математика. – 2018. – No. 5. – С. 28–32.
- [115] Гусев, С. В. *Стандартные элементы решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Алгебра и логика. – 2020. – Т. 59, No. 6. – С. 615–626.
- [116] Гусев, С. В. *Дистрибутивные и нижнемодулярные элементы решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Сиб. матем. журн. – 2022. – Т. 63, No. 6. – С. 1248–1255.
- [117] Гусев, С. В. *Многообразия аperiodических моноидов с дистрибутивной решеткой подмногообразий* / С. В. Гусев // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. – 2025. – Т. 525. – С. 98–101.
- [118] Gusev, S. V. *Special elements of the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev // Algebra Universalis. – 2018. – Vol. 97, No. 2. – Article 29. – P. 1–12.
- [119] Gusev, S. V. *On the ascending and descending chain conditions in the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev // Сибирские электронные матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 983–997.
- [120] Gusev, S. V. *A new example of a limit variety of monoids* / S. V. Gusev // Semigroup Forum. – 2020. – Vol. 101, No. 1. – P. 102–120.
- [121] Gusev, S. V. *Limit varieties of aperiodic monoids with commuting idempotents* / S. V. Gusev // J. Algebra Appl. – 2021. – Vol. 20, No. 9. – Article 2150160. – P. 1–17.
- [122] Gusev, S. V. *Varieties of aperiodic monoids with central idempotents whose subvariety lattice is distributive* / S. V. Gusev // Monatsh. Math. – 2023. – Vol. 201, No. 1. – P. 79–108.
- [123] Gusev, S. V. *Minimal monoids generating varieties with complex subvariety lattices* / S. V. Gusev // Proc. Edinb. Math. Soc. – 2024. – Vol. 67, No. 2. – P. 617–642.
- [124] Gusev, S. V. *Cross varieties of aperiodic monoids with commuting idempotents* / S. V. Gusev // Int. J. Algebra Comput. – 2025. – Vol. 35, No. 1. – P. 145–165.
- [125] Gusev, S. V. *Small monoids generating varieties with uncountably many subvarieties* / S. V. Gusev // Semigroup Forum. – 2025. – Vol. 110, No. 1. – P. 255–259.
- [126] Gusev, S. V. *Varieties of aperiodic monoids with commuting idempotents whose subvariety lattice is distributive* / S. V. Gusev // Semigroup Forum. – 2025. – Vol. 111, No. 3. – P. 653–749.
- [127] Gusev, S. V. *Varieties of monoids with a distributive subvariety lattice* / S. V. Gusev // Proc. Amer. Math. Soc. – 2025. – Vol. 153, No. 11. – P. 4553–4568.
- [128] Gusev, S. V. *Varieties of monoids with complex lattices of subvarieties* / S. V. Gusev, E. W. H. Lee // Bull. Lond. Math. Soc. – 2020. – Vol. 52, No. 4. – P. 762–775.
- [129] Gusev, S. V. *Cancellable elements of the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev, E. W. H. Lee // Acta Math. Hungar. – 2021. – Vol. 165, No. 1. – P. 156–168.

- [130] Gusev, S. V. *The lattice of varieties of monoids* / S. V. Gusev, E. W. H. Lee, B. M. Vernikov // Japan. J. Math. – 2022. – Vol. 17, No. 2. – P. 117–183.
- [131] Gusev, S. V. *Limit varieties of monoids satisfying a certain identity* / S. V. Gusev, Y. X. Li, W. T. Zhang // Algebra Colloq. – 2025. – Vol. 32, No. 1. – P. 1–40.
- [132] Gusev, S. V. *Classification of limit varieties of  $J$ -trivial monoids* / S. V. Gusev, O. B. Sapir // Comm. Algebra. – 2022. – Vol. 50, No. 7. – P. 3007–3027.
- [133] Gusev, S. V. *Chain varieties of monoids* / S. V. Gusev, B. M. Vernikov // Dissert. Math. – 2018. – Vol. 534. – P. 1–73.
- [134] Gusev, S. V. *Two weaker variants of congruence permutability for monoid varieties* / S. V. Gusev, B. M. Vernikov // Semigroup Forum. – 2021. – Vol. 103, No. 1. – P. 106–152.