На правах рукописи

Гусев Сергей Валентинович

РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ МОНОИДОВ

1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург
2026

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Научный консультант:	Верников Борис Муневич, доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	Вечтомов Евгений Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования «Вятский государственный университет», заведующий кафедрой фундаментальной математики
	Гутерман Александр Эмилевич, доктор физико-математических наук, доцент Университет имени Бар-Илана, профессор департамента математики
	Кузнецов Степан Львович, доктор физико-математических наук Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, заведующий отделом математической логики
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Защита диссертации состоится 13 октября 2026 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.073.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН» по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН», https://www.imm.uran.ru/.

Автореферат разослан «__» __________ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.073.02,
кандидат физ.-мат. наук — И. Н. Белоусов

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. *Многообразием* называют непустой класс универсальных алгебр одной сигнатуры, замкнутый относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. В силу классической теоремы Г.Биркгофа [22], многообразия — это в точности классы алгебр, задаваемые тождествами.

Теория многообразий является одним из основных направлений современной общей алгебры. Этому направлению посвящено большое количество монографий и обзорных статей. Совокупность всех многообразий алгебр одного и того же типа образует решетку относительно включения. Исследование этой решетки относится к числу важнейших направлений изучения многообразий.

Многообразия полугрупп активно исследуются с первой половины 1960-х годов, хотя отдельные результаты появлялись и до этого. На сегодняшний день в этом направлении получена богатая и разнообразная информация, систематизации которой посвящены, в частности, монография Э.Ли [48] и обзорные статьи [1, 16–18, 21, 26, 65, 68]. Значительное внимание многообразиям полугрупп уделяется также в монографиях Ж.Алмейды [20], Дж.Хауи [31], Дж.Роудза и Б.Стейнберга [56] и М.В.Сапира [59], а также в обзорах [5, 38, 62]. Можно упомянуть еще монографию М.Петрича [53], в которой большое внимание уделено многообразиям инверсных полугрупп, и монографию М.Петрича и Н.Райли [54], посвященную многообразиям вполне регулярных полугрупп. С самого начала исследования многообразий полугрупп одним из основных направлений становится изучение решетки многообразий полугрупп, которую мы будем обозначать через $\mathbb{SEM}$[1]. Этому направлению посвящены обзорные статьи [1, 16, 26, 65]. При этом статьи [1, 26] написаны на начальном этапе развития теории многообразий полугрупп и сейчас представляют в основном лишь исторический интерес, обзор [16] отражает состояние развития обсуждаемой области, близкое к современному, а написанный позднее обзор [65] посвящен не всей решетке $\mathbb{SEM}$, а только специальным элементам этой решетки и некоторых ее подрешеток.

На этом фоне резким контрастом выглядит весьма незначительное число работ, в которых изучается решетка всех многообразий моноидов, которую мы будем обозначать через $\mathbb{MON}$ (говоря о многообразиях моноидов, мы имеем в виду, что 0-арная операция, выделяющая единицу, входит в сигнатуру). По существу, можно назвать всего несколько работ, полностью или в существенной степени посвященных этой решетке, опубликованных в прошлом веке. Речь идет о заметке Т.Хида [30], в ко-

[1] Отметим, что первая в мировой литературе статья, в которой изучаются многообразия полугрупп, а именно, статья Я.Калицкого и Д.Скотта 1955 года [37], посвящена именно решеточной тематике: в ней описываются атомы решетки $\mathbb{SEM}$.

торой описана решетка многообразий коммутативных моноидов, статье Д.Поллака [55], в которой, среди прочих результатов, построен пример многообразия моноидов, не имеющего покрытий в решетке $\mathbb{M}\mathrm{on}$, и работе Ш.Висмат [69], в которой описана решетка многообразий идемпотентных моноидов.

С начала 2000-х годов ситуация начала постепенно меняться. В работах ряда авторов, посвященных в основном изучению тождеств в моноидах, появляются и промежуточные результаты, относящиеся к решеткам многообразий (см., например, статьи [19, 33, 36, 43–45, 47, 49, 60], а также часть III недавней монографии [48]). В основном они представляют собой описание решеток подмногообразий некоторых конкретных многообразий моноидов. В частности, в [44] построен первый, насколько нам известно, пример многообразия моноидов с немодулярной решеткой подмногообразий.

Первая попытка систематического изучения решетки $\mathbb{M}\mathrm{on}$ была предпринята в 2019 году в кандидатской диссертации автора [9], где был получен ряд результатов, связанных с тождествами этой решетки. Другое направление в изучении решеток многообразий моноидов открывает статья М.Джексона и Э.Ли [34], посвященная многообразиям моноидов со сложной решеткой подмногообразий. Дальнейшие результаты на эту тему были получены в недавних статьях Д.Глассона [27] и М.Джексона и В.Жанг [36]. Работы [9, 34] служат отправной точкой диссертации. Более подробно о результатах этих работ мы поговорим в следующем разделе при обсуждении постановок задач.

Цели и задачи исследования. Диссертация направлена на систематическое изучение решетки многообразий моноидов. Для достижения этой цели намечены конкретные задачи по ряду направлений.

Отсутствие нетривиальных тождеств. При изучении решетки многообразий полугрупп большое внимание уделялось рассмотрению ограничений, формулирующихся в терминах тождеств (см. [16, § 11]). Поэтому изучение решетки $\mathbb{M}\mathrm{on}$ естественно начать с рассмотрения такого типа ограничений.

Как мы уже упоминали выше, решетка $\mathbb{M}\mathrm{on}$ не является модулярной. В действительности эта решетка не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. Это первый основной результат кандидатской диссертации [9].

Обсудим этот результат подробнее. Многообразие моноидов называется *надкоммутативным*, если оно содержит многообразие $\mathbf{Com}$ всех коммутативных моноидов. Ясно, что совокупность всех надкоммутативных многообразий моноидов образует подрешетку в решетке всех многообразий моноидов, которую будем обозначать через $\mathbb{OC}$. Как и в случае полугрупп, решетка $\mathbb{M}\mathrm{on}$ является дизъюнктным объединением решетки

$\mathbb{OC}$ и решетки $\mathbb{PER}$ многообразий *периодических* моноидов (т.е. моноидов, в которых некоторая степень любого элемента является идемпотентом). В диссертации [9] показано, что решетка $\mathfrak{Eq}(\{1, 2, \ldots, n\})$ отношений эквивалентности на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки решетки $\mathbb{OC}$. Но, как хорошо известно (Д.Сакс [57]), класс всех решеток отношений эквивалентности на конечных множествах не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Поэтому в решетке $\mathbb{OC}$, а значит, и в решетке $\mathbb{MON}$ не выполнено никакое такое тождество.

В диссертации этот результат существенно усилен. Нами установлено, что не только решетка $\mathbb{OC}$, но и решетка $\mathbb{PER}$ (и, более того, решетка $\mathbb{APER}$ всех многообразий *апериодических* моноидов, т.е. моноидов, все подгруппы которых тривиальны) содержит изоморфную копию любой конечной решетки (теоремы 2.1 и 2.7). В частности, это дает положительный ответ на вопрос поставленный М.Джексоном и Э.Ли [34, вопрос 6.3] о существовании *конечно универсальных* многообразий моноидов, т.е. многообразий, в решетку подмногообразий которых вкладывается любая конечная решетка. Таким образом, решетки $\mathbb{APER}$, $\mathbb{PER}$ и $\mathbb{OC}$ и потому решетка $\mathbb{MON}$ не удовлетворяют никакому нетривиальному тождеству, и, более того, в силу результата В.И.Будкина и В.А.Горбунова [4, следствие 1 из теоремы 3], никакому нетривиальному квазитождеству.

Для сравнения заметим, что отсутствие нетривиальных тождеств в решетках многообразий полугрупп было доказано еще в 1971 году в двух работах С.Барриса и Э.Нельсон [23, 24]. Более того, из результата статьи [24] следует, что нетривиальные тождества не выполнены и в решетке многообразий апериодических полугрупп. Что касается решетки надкоммутативных многообразий полугрупп, то в статье [67] М.В.Волковым было дано описание этой решетки в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр некоторого специального типа. В качестве следствия из указанного результата, в этой статье было доказано, что решетка всех надкоммутативных многообразий полугрупп не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.

Многообразия моноидов с дистрибутивной решеткой подмногообразий. После доказательства отсутствия нетривиальных тождеств в решетке $\mathbb{MON}$ естественно начать изучение многообразий моноидов с дистрибутивной или модулярной решеткой подмногообразий. Для краткости будем называть такие многообразия *дистрибутивными* и *модулярными* соответственно.

Хорошо известно, что решетка многообразий групп модулярна, однако она не является дистрибутивной. Первый пример недистрибутивного многообразия групп был построен Г.Хигмэном в середине 1960-х (см. [12, раздел 54.24]). На рубеже 1960-х и 1970-х годов к задаче описания дистрибутивных многообразий групп был неподдельный интерес (см., например, [13, 25, 39]). Однако со временем активность постепенно угасла. Отсутствие ощутимого прогресса в решении обсуждаемой задачи, по-видимому, объясняется тем, что она оказалась трансцендентно сложной. Это вытекает из результатов П.А.Кожевникова [40], согласно которым существует континуум периодических не локально конечных многообразий групп, решетка подмногообразий которых является 3-элементной цепью.

Для решетки $\mathbb{SEM}$ проблемы описания модулярных и дистрибутивных многообразий сформулированы Т.Эвансом в 1971 году [26] и Л.Н.Шевриным в 1979 году [14, задача 2.60a] соответственно. Для решения первой из этих проблем потребовалось более двадцати лет усилий ряда математиков. Окончательно она была решена М.В.Волковым в докторской диссертации [8] (см. также [7] и [16, раздел 11.1]). Параллельно с решением проблемы Т.Эванса, М.В.Волков в диссертации [8] продвинулся и в решении проблемы Л.Н.Шеврина, дойдя, по-видимому, до некоего объективного предела, и описал многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в очень широком частном случае. В частности, полностью были классифицированы дистрибутивные многообразия апериодических полугрупп. На решение проблемы Л.Н.Шеврина в общем случае, вероятно, вряд ли стоит надеяться ввиду упомянутого выше результата П.А.Кожевникова [40] (более подробные комментарии см. в [16, раздел 11.3]).

Вернемся к решетке $\mathbb{MON}$. Отдельные нетривиальные примеры [не]дистрибутивных и [не]модулярных многообразий моноидов появлялись в некоторых работах в процессе доказательств основных результатов (см., в частности, [30, 33, 34, 44, 47, 49, 69]). Однако систематически такие многообразия до последнего времени не изучались.

В диссертации мы рассматриваем первую из обсуждаемых задач, задачу описания дистрибутивных многообразий. Отправной точкой в этом исследовании можно считать описание *цепных* многообразий апериодических моноидов, т.е. многообразий, решетка подмногообразий является цепью, полученное в кандидатской диссертации [9], поскольку свойство быть цепью — предельное усиление тождества дистрибутивности[2]. Как и в полугрупповом случае, на описание дистрибутивных многообразий моноидов в общем случае вряд ли стоит рассчитывать в силу результата П.А.Кожевникова [40]. Поэтому в первую очередь логично сфокусироваться именно на классе апериодических моноидов, как на случае, в котором хотя бы гипотетически можно надеяться получить исчерпывающее

[2]Отметим, что для большинства классических типов алгебр задача описания цепных многообразий была решена более 40 лет назад. В частности, цепные многообразия апериодических полугрупп описаны Е.В.Сухановым [15] в 1982 году, локально конечные цепные многообразия групп — В.А.Артамоновым [2] в 1978 году, а цепные многообразия альтернативных колец — Б.М.Верниковым и М.В.Волковым [6] в 1979 году.

описание. Одним из ключевых результатов диссертации является полное описание дистрибутивных многообразий апериодических моноидов.

Обсудим этот результат подробнее. Нами получено описание дистрибутивных многообразий на языке тождеств. А именно, доказано, что многообразие апериодических моноидов дистрибутивно тогда и только тогда, когда оно содержится в многообразии из некоего списка, состоящего из 5 счетных серий и 29 «спорадических» многообразий (теорема 3.1). Отметим, что из доказательства этого результата следует счетность числа дистрибутивных многообразий апериодических моноидов. Из обсуждаемого доказательства также вытекает, что существуют бесконечно убывающие цепи недистрибутивных многообразий, пересечение элементов которых является дистрибутивным многообразием. Поэтому в случае моноидов описание дистрибутивных многообразий на языке минимальных запрещенных подмногообразий невозможно. Это резко контрастирует с полугрупповым случаем, поскольку любое недистрибутивное многообразие апериодических полугрупп содержит минимальное недистрибутивное многообразие.

Отметим также, что для доказательства обсуждаемого результата потребовалось применение и развитие новой техники. Ключевую роль в нем играет конструкция, совсем недавно предложенная О.Б.Сапир [60] для построения моноидов некоего специального вида. Кроме того, как уже упоминалось выше, составной частью (и первым шагом) описания дистрибутивных многообразий является описание цепных многообразий, полученное в кандидатской диссертации [9]. Для этого там разработан метод, основанный на целом ряде понятий, связанных с комбинаторикой слов (k-разложение слова, k-блоки и k-разделители слова, глубина буквы в слове и др.). Данный метод нашел применение в данной диссертации и за пределами обсуждаемой сейчас задачи, а именно, при изучении минимальных моноидов порождающих многообразия с континуумом подмногообразий. Также с его помощью удалось построить новые примеры *наследственно конечно базируемых* многообразий, т.е. многообразий, все подмногообразия которых могут быть заданы конечным числом тождеств.

Специальные элементы. В диссертации мы рассматриваем еще несколько ограничений, связанных с тождествами. Речь идет о специальных элементах в решетке $\mathbb{MON}$. Напомним определения тех типов специальных элементов, которые будут возникать в данной работе. Элемент x решетки L называется *нейтральным*, если

$$\forall\, y, z \in L\colon\ \ (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$$

стандартным, если

$$\forall\, y, z \in L\colon\quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z);$$

дистрибутивным, если

$$\forall\, y, z \in L\colon\;\; x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

сократимым, если

$$\forall\, y, z \in L\colon\;\; x \vee y = x \vee z \;\&\; x \wedge y = x \wedge z \longrightarrow y = z;$$

модулярным, если

$$\forall\, y, z \in L\colon\;\; y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$$

нижнемодулярным, если

$$\forall\, y, z \in L\colon\;\; x \le y \longrightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

Костандартные, *кодистрибутивные* и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к стандартным, дистрибутивным и нижнемодулярным соответственно. Нейтральный элемент можно также определить как элемент, который вместе с любыми двумя элементами решетки порождает дистрибутивную подрешетку (см., например, [28, теорема 254]). Очевидно, что всякий нейтральный элемент стандартен и костандартен одновременно; всякий [ко]стандартный сократим; всякий сократимый модулярен; всякий [ко]дистрибутивный [верхне-]нижнемодулярен. Хорошо известно также, что всякий [ко]стандартный элемент [ко]кодистрибутивен (см. [28, теорема 253]). Указанные взаимосвязи между типами специальных элементов изображены на рис. 1.

Знание того, как устроены специальные элементы решетки, дает существенную информацию о строении этой решетки в целом. Так, элемент x решетки L нейтрален тогда и только тогда, когда L разложима в подпрямое произведение главного идеала $(x] := \{y \in L \mid y \le x\}$ и главного фильтра $[x) := \{y \in L \mid x \le y\}$, порожденных элементом x (см., например, [28, теорема 254]). Иными словами, элемент x решетки L нейтрален тогда и только тогда отображение $a \mapsto (a \wedge x, a \vee x)$ из L в $(x] \times [x)$ является вложением решеток. Очевидно, что элемент x решетки L сократим тогда и только тогда, когда указанное отображение инъективно. Дистрибутивные и кодистрибутивные элементы связаны с гомоморфизмами решетки на свои интервалы: элемент x дистрибутивен в L тогда и только тогда, когда отображение $a \mapsto a \vee x$ из L в $[x)$ является гомоморфизмом (см. [28, теорема 252]); для кодистрибутивных элементов верно двойственное утверждение. Информацию о специальных элементах в произвольных решетках можно найти, например, в [28, раздел III.2] и [64, разделы 2.1 и 2.2].

К настоящему времени получено много интересных и глубоких результатов о специальных элементах решетки $\mathbb{SEM}$ и некоторых ее важных подрешеток (см. обзоры [16, § 14] и [65]).

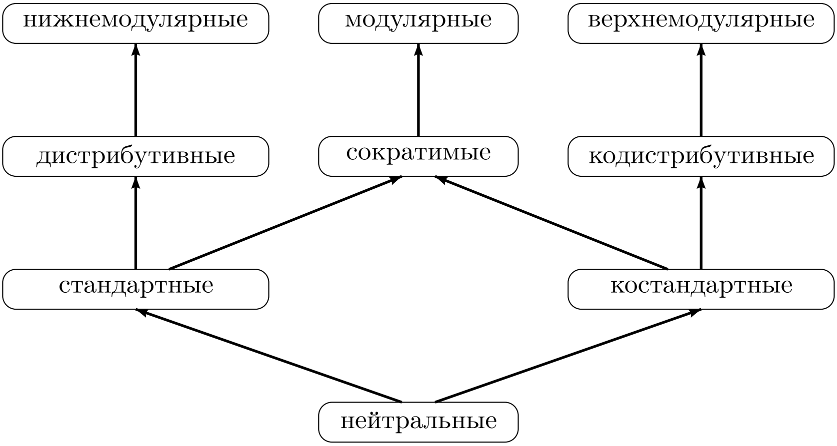

Рис. 1: специальные элементы в абстрактных решетках

Систематическое изучение специальных элементов решетки $\mathbb{MON}$ было начато в кандидатской диссертации [9], в которой были описаны ее нейтральные и костандартные элементы. Эти результаты являются составной частью основных результатов данной диссертации, в которой мы существенно расширяем знания о специальных элементах решетки $\mathbb{MON}$. А именно, в данной диссертации мы даем полное описание нейтральных, стандартных, костандартных, дистрибутивных, нижнемодулярных и сократимых элементов решетки $\mathbb{MON}$ (теоремы 4.1, 4.3 и 4.8).

Обсуждаемые результаты резко контрастируют с полученными ранее результатами о специальных элементах решетки $\mathbb{SEM}$. Число нижнемодулярных элементов в решетке $\mathbb{SEM}$ континуально (это нетрудно вывести из теоремы 3.2 в [65]), стандартных и дистрибутивных — счетно (см. [65, теорема 3.3]), а нейтральных — конечно (см. [65, теорема 3.4]). При этом свойства быть дистрибутивным и стандартным элементом в решетке $\mathbb{SEM}$ эквивалентны (см. [65, теорема 3.3]). В решетке $\mathbb{MON}$, оказалось, что свойства принадлежать одному из четырех обсуждаемых типов элементов равносильны и число таких элементов конечно. При этом, в решетке $\mathbb{SEM}$ нейтральность и костандартность эквивалентны, а в решетке $\mathbb{MON}$ — нет. Наконец, в решетке $\mathbb{MON}$ всякий нижнемодулярный (и, следовательно, дистрибутивный) элемент является костандартным (и, следовательно, сократимым, кодистрибутивным, модулярным и верхнемодулярным) элементом. В решетке же $\mathbb{SEM}$ всякий нижнемодулярный элемент модулярен (см. [65, следствие 3.9]), а всякий дистрибутивный сократим (ср. теорему 1.1 в [63] и теорему 3.3 в [65]), однако костандартность не следует из дистрибутивности (ср. теоремы 3.3 и 3.4 в [65]), а сократимость из нижней модулярности (ср. теорему 1.1 в [63] и теорему 3.2 в [65]).

Число специальных элементов решетки можно рассматривать как своего рода меру ее сложности. Скажем, в дистрибутивной решетке любой элемент является нейтральным. С учетом сказанного в предыдущем абзаце, решетка $\mathbb{MON}$ в этом смысле оказывается устроена даже сложнее решетки $\mathbb{SEM}$.

Минимальные моноиды, порождающие многообразия со сложной решеткой подмногообразий. Многообразие называют *малым*, если решетка его подмногообразий конечна; *конечно порожденным*, если оно порождается конечной алгеброй; *конечно базируемым*, если его можно задать конечным числом тождеств; и *бесконечно базируемым*, если конечным числом тождеств его задать нельзя. Многообразия, являющиеся одновременно конечно порожденными, конечно базируемыми и малыми принято называть *кроссовыми*. Конечные группы (Ш.Оутс, М.Пауэлл [52]), ассоциативные кольца (И.В.Львов [11], Р.Круз [41]), кольца Ли (Ю.А.Бахтурин, А.Ю.Ольшанский [3]) и решетки (Р.Маккензи [51]) порождают кроссовы многообразия.

Полугруппы и моноиды, пожалуй, единственные «классические» типы универсальных алгебр, для которых аналогичное утверждение не верно. В частности, существуют конечные полугруппы и моноиды, порождающие бесконечно базируемые многообразия (см. обзор [68]). Конечно порожденное многообразие может не быть кроссовым также за счет бесконечности решетки подмногообразий (см., например, недавний обзор [21]). При этом конечные полугруппы и моноиды могут порождать многообразия с чрезвычайно сложной решеткой подмногообразий. Представляет интерес задача нахождения минимальных таких примеров. Двумя наиболее экстремальными условиями сложности являются континуальность решетки подмногообразий и конечная универсальность. Обсудим по отдельности каждое из этих двух условий.

Первые примеры конечных моноидов, порождающих многообразия с континуумом подмногообразий были найдены еще в работе М.Джексона и Р.Маккензи [35] в 2006 году. Однако наиболее экстремальные примеры были построены М.Джексоном и Э.Ли [34] в 2018 году. А именно, они среди прочего показали, что 6-элементный *моноид Брандта*

$$B_2^1 := \langle a, b \mid aba = a,\, bab = b,\, a^2 = b^2 = 0\rangle \cup \{1\} = \{a, b, ab, ba, 0, 1\}$$

порождает многообразие $\mathbf{B}_2^1$, имеющее континуальную решетку подмногообразий (иным способом этот факт был доказан М.Джексоном и В.Жанг в [36]). Хорошо известно, что моноид Брандта B_2^1 содержится в многообразии $\mathbf{A}_2^1$, порожденным другим знаменитым 6-элементным моноидом

$$A_2^1 := \langle a, b \mid a^2 = 0,\, aba = a,\, bab = b^2 = b\rangle \cup \{1\} = \{a, b, ab, ba, 0, 1\}.$$

Поэтому многообразие $\mathbf{A}_2^1$ также имеет континуальную решетку подмногообразий.

Что касается не более чем 5-элементных моноидов, то, как показали Э.Ли и В.Жанг в работе [50], с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма, каждый из них, за исключением 5-элементного моноида

$$P_2^1 := \langle a, b \mid a^2 = ab = a,\ b^2a = b^2 \rangle \cup \{1\} = \{a, b, ba, b^2, 1\},$$

порождает кроссово многообразие; многообразие $\mathbf{P}_2^1$, порожденное моноидом P_2^1 не является малым. Однако до недавнего времени следующий вопрос, поставленный М.Джексоном и Э.Ли [34, вопрос 6.1], был открыт: континуальна ли решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{P}_2^1$? В данной диссертации мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. Отсюда следует, что наименьший порядок моноида, порождающего многообразие с континуумом подмногообразием равен 6 (теорема 5.1). Удивительно, но вопрос о том, каков наименьший порядок полугруппы, порождающей многообразие с континуумом подмногообразий открыт до сих пор (более подробные комментарии см. в [46]).

Что касается конечной универсальности, то в 2007 году Э.Ли [42] показал, что любое многообразие, порожденное не более чем 3-элементной полугруппой конечно универсальным не является, при этом существуют 4-элементные полугруппы, порождающие конечно универсальные многообразия. Для многообразий моноидов вопрос о том, каков наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие, оставался открытым. В силу упомянутых выше результатов Э.Ли и В.Жанг [50], конечно универсальное многообразие не может порождаться никаким не более чем 5-элементным моноидом, за исключением моноида P_2^1. В данной диссертации мы показываем, что многообразие $\mathbf{P}_2^1$ не является конечно универсальным, в то время как многообразие $\mathbf{B}_2^1$, напротив, конечно универсально. Тем самым, мы устанавливаем, что наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие, как и в случае с континуальностью, оказывается равным 6 (теорема 5.28).

Два маленьких многообразия с большим объединением. Решетку подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, как обычно, будем обозначать через $\mathfrak{L}(\mathbf{V})$. В статье [34] М.Джексоном и Э.Ли был построен еще один экстремальный пример. Они указали два многообразия моноидов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ таких, что

1) многообразия $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ являются кроссовыми;
2) решетка $\mathfrak{L}(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})$ континуальна и не удовлетворяет ни условию минимальности, ни условию максимальности.

В данной диссертации построен другой пример с еще более экстремальными свойствами (теорема 6.1). А именно, найдены два многообразия моноидов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, удовлетворяющих условиям 1) и 2) выше, такие, что

3) многообразие $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ конечно универсально;

4) многообразие $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ покрывает одно из многообразий $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Более того, решетки $\mathfrak{L}(\mathbf{X})$ и $\mathfrak{L}(\mathbf{Y})$ являются 6-элементной и 7-элементной цепями соответственно. Несмотря на контринтуитивность этого примера, в диссертации также показано, что существует бесконечно много примеров двух кроссовых многообразий моноидов, объединение которых является конечно универсальным многообразием с континуумом подмногообразий.

Из обсуждаемого результата, в частности, вытекает, что в классе решеток подмногообразий многообразий моноидов конечность решетки, условие максимальности и условие минимальности не замкнуты относительно объединения многообразий и перехода к покрытиям. Интересно, что для многообразий полугрупп ответы на вопросы, аналогичные обсуждаемым сейчас, относительно конечности и условия минимальности отрицательны (М.В.Сапир [58]), а относительно условия максимальности неизвестны (соответствующий вопрос сформулирован в [16, вопрос 10.2]). Более того, в контексте многообразий полугрупп следующие три вопроса также являются открытыми. Существуют ли два малых многообразия, решетка подмногообразий объединения которых континуальна? Существует ли малое многообразие, покрытие которого имеет континуум подмногообразий? Существуют ли два малых многообразия с конечно универсальным объединением? Первый из этих вопросов в явном виде был сформулирован в [32, вопрос 3.15] (см. также [21, проблема 5.3]), второй — в [21, проблема 5.4], а третий — в [21, проблема 5.10].

Предельные и кроссовы многообразия. Накопленная информация о решетке $\mathbb{MON}$, а также наработанная техника позволили существенно продвинуться и в решении нескольких вопросов близких решеткам многообразии. В диссертации рассматриваются две такие родственные темы: предельные и кроссовы многообразия.

Обсудим сначала первую из них. *Предельными* принято называть минимальные бесконечно базируемые многообразия. Легко видеть, что решетка подмногообразий любого предельного многообразия не более чем счетна и удовлетворяет условию минимальности. По лемме Цорна, каждое бесконечно базируемое многообразие содержит некоторое предельное многообразие. Следовательно, многообразие является наследственно конечно базируемым тогда и только тогда, когда оно не содержит предельных многообразий. Этим объясняется интерес к предельным многообразиям.

Опыт, однако, показывает, что нахождение явных примеров предельных многообразий оказывается весьма нетривиальной задачей. Например, до сих пор не известен явный пример предельного многообразия групп, хотя их число континуально [40]. Построение такого примера остается одной из интригующих открытых проблем в теории многообразий групп (см. [10, задача 4.46], а также обзор [29, § 3]). Тем не менее, известны явные примеры предельных многообразий полугрупп и моноидов.

Первые два примера предельных многообразий моноидов были построены М.Джексоном [33] в 2005 году[3]. С тех пор эта тематика привлекла значительное внимание исследователей (см., например, статьи [43, 60, 61, 70], а также часть III недавней монографии [48]). В частности, было найдено еще несколько явных примеров. А в работе Э.Ли [43] удалось даже показать, что два предельных многообразия М.Джексона являются единственными предельными многообразиями апериодических моноидов с *центральными идемпотентами* (т.е. моноидов, в которых идемпотенты перестановочны со всеми остальными элементами). Этот результат выступает резким контрастом на фоне многообразий не только групп, но и полугрупп, для которых описания предельных многообразий в сколько-нибудь широких классах неизвестны. В диссертации обсуждаемый результат Э.Ли обобщается на следующие два класса:

- класс многообразий апериодических моноидов с *коммутирующими идемпотентами* (т.е. моноидов, в которых идемпотенты перестановочны друг с другом);
- класс многообразий $\mathscr{J}$-*тривиальных* моноидов (т.е. моноидов, в которых отношение Грина $\mathscr{J}$ совпадает с отношением равенства[4]).

Показано, что имеется в точности 4 предельных многообразия апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами (теорема 7.1) и 7 предельных многообразия $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов (теорема 7.2).

Перейдем к кроссовым многообразиям. Одним из методов описания таких многообразий является нахождение всех *почти кроссовых* многообразий (т.е. минимальных некроссовых многообразий), поскольку стандартным применением леммы Цорна можно показать, что любое некроссово многообразие содержит некоторое почти кроссово. Параллельно с изучением предельных многообразий, Э.Ли [45] существенно продвинулся в изучении кроссовых многообразий, показав, что имеется в точности 3 почти кроссовых многообразия апериодических моноидов с центральными идемпотентами. В качестве следующего шага, он предложил задачу описания почти кроссовых многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами, получив определенное промежуточное

[3]Для сравнения отметим, что первое предельное многообразие полугрупп найдено М.В.Волковым [66] намного раньше, еще в 1982 году.

[4]Напомним, что два элемента полугруппы S находятся в отношении Грина $\mathscr{J}$, если они порождают один и тот же главный идеал в S.

продвижение в этом направлении в работе [47]. В данной диссертации обсуждаемая задача решена полностью. А именно, показано, что имеется в точности 9 почти кроссовых многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами (теорема 7.14).

Методология и методы исследования. В работе применяются методы теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

Степень достоверности. Достоверность результатов исследования обеспечивается использованием научно обоснованных методов с опорой на основополагающие теоретические положения в области математики, на фундаментальные работы по теории полугрупп, теории решеток и теории многообразий, использованием общеалгебраических и специальных методов исследований в области теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории полугрупп и теории многообразий. Результаты, полученные в диссертации, значительно расширяют круг наших знаний о строении решетки многообразий моноидов.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1) утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке многообразий моноидов; первые примеры конечно универсальных многообразий моноидов;
2) описание дистрибутивных многообразий апериодических моноидов;
3) описание нейтральных, стандартных, костандартных, дистрибутивных, нижнемодулярных и сократимых элементов решетки всех многообразий моноидов;
4) утверждение о том, что наименьший порядок моноида, порождающего многообразие с континуальной решеткой подмногообразий равен 6;
5) утверждение о том, что наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие равен 6;
6) пример двух кроссовых многообразий моноидов, объединение которых является конечно универсальным многообразием с континуумом подмногообразий;

7) описание предельных многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами и предельных многообразий $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов;
8) описание кроссовых многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 2015), Международной конференции «Группы и графы, метрики и многообразия» (Екатеринбург, 2017), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2017–2022, 2024, 2025), Международной молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2018), 56-й летней школе по алгебре и упорядоченным множествам (Шпиндлерув Млын, Чехия, 2018), Международной конференции, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 2019), Международной летней школе-конференции «Пограничные вопросы универсальной алгебры и теории моделей» (Эрлагол, 2021), Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2021), Международной конференции «Алгебра и динамические системы» (Нальчик, 2022), 3-й конференции Математических центров России (Майкоп, 2023), Международной конференции по группам, полугруппам, алгебраической комбинаторике и смежным темам (Хайкоу, Китай, 2023), Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2024), Международной конференции «Алгебра и ее роль в компьютерных науках» (Лиссабон, Португалия, 2025), Международной конференции по теоретической и вычислительной алгебре (Эвора, Португалия, 2025), 5-й конференции Математических центров России (Красноярск, 2025).

Результаты диссертации также докладывались на семинаре «Алгебра и логика» (Новосибирск, 2019), алгебраическом семинаре ОмГПУ (Омск, 2019), онлайн-семинаре «Полугруппы, автоматы и языки» (Порту, Португалия, 2021), семинаре в Сианьском университете электронных наук и технологий (Сиань, Китай, 2023), семинаре в Университете Ланьчжоу (Ланьчжоу, Китай, 2023), семинаре в Технологическом университете Ланьчжоу (Ланьчжоу, Китай, 2023), семинаре в Северо-восточном педагогическом университете (Ланьчжоу, Китай, 2023). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на семинаре «Алгебра и фундаментальная информатика» (Екатеринбург, 2016–2025).

Публикации. По теме диссертации опубликована 21 работа [71–91] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [72–76, 78, 80, 81, 84–86, 88, 89]. Утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке многообразий моноидов и первые примеры конечно универсальных многообразий моноидов опубликованы в статье [85]. Описание дистрибутивных многообразий апериодических моноидов опубликовано в статьях [74, 84]. Описание нейтральных, стандартных, костандартных, дистрибутивных, нижнемодулярных и сократимых элементов решетки всех многообразий моноидов опубликовано в [72, 73, 75, 86]. Утверждение о том, что наименьший порядок моноида, порождающего многообразие с континуальной решеткой подмногообразий равен 6, опубликовано в статье [88]. Утверждение о том, что наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие равен 6, опубликовано в статье [80]. Пример двух кроссовых многообразий моноидов, объединение которых является конечно универсальным многообразием с континуумом подмногообразий, опубликован в статьях [76, 80]. Описание предельных многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами опубликовано в статье [78], а описание предельных многообразий $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов – в статье [89]. Наконец, описание кроссовых многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами опубликовано статье [81].

Некоторые промежуточные результаты диссертации опубликованы в статьях [71,77,79,82,83,90,91]. Работа [87] носит обзорный характер, хотя и содержит несколько новых результатов, приводимых с доказательствами. Все упомянутые в этом обзоре результаты, включенные в диссертацию, доказаны в одной из статей [71–73, 75–77, 79, 81, 85, 86, 88–91].

Личный вклад автора. Работы [71–84] написаны без соавторов. Из работы [85] в диссертацию включены лишь результаты, принадлежащие диссертанту. В работах [90, 91] Б.М.Верникову принадлежат постановка задачи и усовершенствование первоначального варианта изложения, а сами доказательства найдены диссертантом. Результаты работ [86, 88, 89] получены в нераздельном соавторстве.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 276 страниц. Библиографический список содержит 134 наименования.

Краткое содержание работы

Во **введении** приводится обзор исследований по проблематике, которой посвящена диссертация, определены цели и задачи работы, кратко описаны результаты, полученные автором в решении поставленных задач.

В **главе 1** приводятся все необходимые определения, обозначения и предварительные результаты.

В **главе 2** доказано отсутствие нетривиальный тождеств в решетке $\mathbb{MON}$ и ряда ее подрешеток. Для формулировки ее основных результатов нам необходимо ввести некоторые определения и обозначения. Как обычно, через X^* мы будем обозначать свободный моноид над алфавитом X. *Тождеством* над алфавитом X называют формальное равенство $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^*$. Через $\mathsf{var}\,\Sigma$ обозначается многообразие, заданное системой тождеств Σ. Положим

$$\mathbf{O} := \mathsf{var}\{xzytxy \approx xzytyx,\ xzxyty \approx xzyxty\}.$$

Через $\mathbf{V}^\delta$ обозначается многообразие моноидов, *двойственное* к $\mathbf{V}$ (т.е. состоящее из моноидов, антиизоморфных моноидам из $\mathbf{V}$).

Основными результатами главы 2 являются

Теорема 2.1. *Интервал $[\mathbf{COM}, \mathbf{O}\wedge\mathbf{O}^\delta]$ решетки $\mathbb{OC}$ содержит изоморфную копию любой конечной решетки. Следовательно, решетка $\mathbb{OC}$, а потому и вся решетка $\mathbb{MON}$, не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству.*

Теорема 2.7. *Многообразие $(\mathbf{O} \wedge \mathbf{O}^\delta) \wedge \mathsf{var}\{x^3 \approx x^4,\ x^3y \approx yx^3\}$ конечно универсально. Следовательно, решетка $\mathbb{APER}$, а потому и решетка $\mathbb{PER}$, не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству.*

В **главе 3** диссертации дается полное описание дистрибутивных многообразий апериодических моноидов. Для формулировки этого результата введем некоторые обозначения. Для каждого натурального n обозначим через S_n симметрическую группу на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Для любых $n, m, k \in \mathbb{N}$, $\rho \in S_{n+m}$ и $\tau \in S_{n+m+k}$ определим слова

$$\mathbf{a}_{n,m}[\rho] := \left(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\right) x \left(\prod_{i=1}^{n+m-1} z_{i\rho} y_i^2\right) z_{(n+m)\rho}\, x \left(\prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i\right),$$

$$\mathbf{a}'_{n,m}[\rho] := \left(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\right) \left(\prod_{i=1}^{n+m-1} z_{i\rho} y_i^2\right) z_{(n+m)\rho}\, x^2 \left(\prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i\right),$$

$$\overline{\mathbf{a}}_{n,m}[\rho] := \left(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\right) x \left(\prod_{i=1}^{n+m-1} z_{i\rho} y_i^2 x\right) z_{(n+m)\rho}\, x \left(\prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i\right),$$

$$\mathbf{c}_{n,m,k}[\tau] := \left(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\right) xyt \left(\prod_{i=n+1}^{n+m} z_i t_i\right) x z_{1\tau} \left(\prod_{i=2}^{n+m+k} y_i^2 z_{i\tau}\right)\left(\prod_{i=n+m+1}^{n+m+k} t_i z_i\right).$$

Через $\mathbf{c}'_{n,m,k}[\tau]$ будем обозначать слово, получающееся из слова $\mathbf{c}_{n,m,k}[\tau]$ перестановкой местами первых вхождений букв x и y. Обозначим также через $\mathbf{d}_{n,m,k}[\tau]$ и $\mathbf{d}'_{n,m,k}[\tau]$ слова, получающиеся из слов $\mathbf{c}_{n,m,k}[\tau]$ и $\mathbf{c}'_{n,m,k}[\tau]$ соответственно, если читать их справа налево. Положим

$$\Phi := \{x^2 \approx x^3,\, x^2y^2 \approx y^2x^2\},$$
$$\Phi_1 := \left\{\mathbf{c}_{k,\ell,m}[\rho] \approx \mathbf{c}'_{k,\ell,m}[\rho],\, \mathbf{d}_{k,\ell,m}[\rho] \approx \mathbf{d}'_{k,\ell,m}[\rho] \mid k,\ell,m \in \mathbb{N},\, \rho \in S_{k+\ell+m}\right\},$$
$$\Phi_2 := \{\mathbf{a}_{k,\ell}[\rho] \approx \overline{\mathbf{a}}_{k,\ell}[\rho] \mid k,\ell \in \mathbb{N},\, \rho \in S_{k+\ell}\},$$
$$\Phi_3 := \left\{\mathbf{a}_{k,\ell}[\rho] \approx \mathbf{a}'_{k,\ell}[\rho] \mid k,\ell \in \mathbb{N},\, \rho \in S_{k+\ell}\right\}.$$

Введем обозначения для следующих трех конкретных тождеств:

$$\sigma_1 : \ xyzxty \approx yxzxty, \quad \sigma_2 : \ xzytxy \approx xzytyx, \quad \sigma_3 : \ xzxyty \approx xzyxty.$$

Основным результатом главы 3 является

Теорема 3.1. *Многообразие апериодических моноидов дистрибутивно тогда и только тогда, когда оно содержится в одном из многообразий*

$$\mathbf{B} := \mathsf{var}\left\{x \approx x^2\right\},$$
$$\mathbf{D}_1 := \mathsf{var}\left\{\Phi,\, xyx \approx xyx^2,\, x^2y \approx x^2yx\right\},$$
$$\mathbf{D}_2 = \mathsf{var}\left\{\Phi,\, \Phi_1,\, \Phi_2,\, xyx \approx xyx^2\right\},$$
$$\mathbf{D}_3 := \mathsf{var}\left\{\Phi,\, \sigma_2,\, \sigma_3,\, x^2y \approx x^2yx \approx xyx^2,\, xyxzx \approx xyxzx^2\right\},$$
$$\mathbf{D}_4 := \mathsf{var}\left\{\begin{array}{l}\Phi,\, \sigma_2,\, \sigma_3,\, x^2y \approx x^2yx,\, x^2yty \approx yx^2ty,\\ xyzx^2ty^2 \approx yxzx^2ty^2,\, xyxzx \approx xyx^2zx\end{array}\right\},$$
$$\mathbf{D}_5 := \mathsf{var}\left\{\Phi,\, \sigma_2,\, \sigma_3,\, xyx^2 \approx x^2yx,\, xyzx^2y \approx yxzx^2y,\, xyxzx \approx xyxzx^2\right\},$$
$$\mathbf{D}_6 := \mathsf{var}\left\{\begin{array}{l}\Phi,\, \sigma_2,\, \sigma_3,\, x^2yx \approx x^2yx^2,\, x^2yty \approx yx^2ty,\\ xyzx^2ty \approx yxzx^2ty,\, xyzytx^2 \approx yxzytx^2\end{array}\right\},$$
$$\mathbf{D}_7 := \mathsf{var}\left\{\begin{array}{l}\Phi,\, \sigma_2,\, \sigma_3,\, x^2yx \approx x^2yx^2,\, x^2yty \approx yx^2ty,\, xyzx^2ty^2 \approx yxzx^2ty^2,\\ xyzx^2y \approx yxzx^2y,\, xyxzx \approx xyx^2zx\end{array}\right\},$$
$$\mathbf{D}_8 := \mathsf{var}\left\{\begin{array}{l}\Phi,\, \sigma_2,\, \sigma_3,\, x^2yx \approx x^2yx^2,\, x^2yty \approx yx^2ty,\, xyzx^2ty^2 \approx yxzx^2ty^2,\\ xyzx^2y \approx yxzx^2y,\, xyzx^2tysx \approx yxzx^2tysx,\, xyxzx \approx xyxzx^2\end{array}\right\},$$
$$\mathbf{D}_9 := \mathsf{var}\left\{\Phi,\, \sigma_1,\, \sigma_3,\, x^2yx \approx x^2yx^2,\, ytx^2y \approx ytyx^2\right\},$$
$$\mathbf{D}_{10} := \mathsf{var}\left\{\Phi,\, \sigma_1,\, \sigma_3,\, x^2yx \approx x^2yx^2,\, xyxzx \approx xyxzx^2,\, x^2zytxy \approx x^2zytyx\right\},$$
$$\mathbf{D}_{11} := \mathsf{var}\left\{\Phi,\, \Phi_1,\, \Phi_2,\, xyx^2 \approx x^2yx,\, xyxzx \approx xyxzx^2\right\},$$
$$\mathbf{D}_{12} := \mathsf{var}\left\{\begin{array}{l}\Phi,\, \Phi_1,\, \Phi_2,\, x^2yx \approx x^2yx^2,\, ytx^2y \approx ytyx^2,\, x^2yty \approx yx^2ty,\\ xyzx^2ty \approx yxzx^2ty,\, xyzytx^2 \approx yxzytx^2,\, yzyxtx^2 \approx yzxytx^2\end{array}\right\},$$

$$\mathbf{D}_{13} := \mathsf{var}\left\{\begin{array}{l}\Phi,\,\Phi_1,\,\Phi_2,\,x^2yx\approx x^2yx^2,\,yx^2ty\approx xyx^2ty,\,ytyx^2\approx ytxyx^2,\\ xyxzx\approx xyx^2zx,\,x^2yty^2\approx yx^2ty^2,\,x^2yzytx\approx yx^2zytx,\\ x^2yzxty\approx yx^2zxty,\,x^2zytxy\approx x^2zytyx,\\ yzx^2ytx\approx yzyx^2tx,\,xyzx^2ty^2\approx yxzx^2ty^2\end{array}\right\},$$

$$\mathbf{D}_{14} := \mathsf{var}\left\{\begin{array}{l}\Phi,\,\Phi_1,\,\Phi_2,\,x^2yx\approx x^2yx^2,\,yx^2ty\approx xyx^2ty,\,ytyx^2\approx ytxyx^2,\\ xyxzx\approx xyxzx^2,\,x^2yty^2\approx yx^2ty^2,\,x^2yzytx\approx yx^2zytx,\\ x^2yzxty\approx yx^2zxty,\,x^2zytxy\approx x^2zytyx,\,yzx^2ytx\approx yzyx^2tx,\\ xyzx^2ty^2\approx yxzx^2ty^2,\,xyzx^2tysx\approx yxzx^2tysx\end{array}\right\},$$

$$\mathbf{D}_{15} := \mathsf{var}\left\{\Phi_1,\,xyx\approx x^2yx\approx xyx^2,\,(xy)^2\approx (yx)^2\right\},$$

$$\mathbf{P}_n := \mathsf{var}\left\{\Phi_1,\,\Phi_3,\,x^n\approx x^{n+1},\,x^2y\approx yx^2\right\},\quad n\in\mathbb{N},$$

$$\mathbf{Q}_n := \mathsf{var}\left\{x^n\approx x^{n+1},\,x^ny\approx yx^n,\,x^2y\approx xyx\right\},\quad n\in\mathbb{N},$$

$$\mathbf{R}_n := \mathsf{var}\left\{\sigma_1,\,\sigma_3,\,x^n\approx x^{n+1},\,x^2y\approx yx^2\right\},\quad n\in\mathbb{N},$$

или в одном из многообразий, двойственных к указанным.

В **главе 4** диссертации изучаются специальные элементы в решетке $\mathbb{MON}$. Для того, чтобы сформулировать ее основные результаты нам потребуется еще несколько обозначений. Через $\mathbf{Mon}$ будем обозначать многообразие всех моноидов, а через $\mathbf{T}$ — тривиальное многообразие. Через $M(W)$ обозначим фактор-моноид Риса свободного моноида X^* по идеалу всех слов, не являющихся подсловами слов из W. Многообразие моноидов, порожденное моноидом $M(W)$ обозначается через $\mathbf{M}(W)$. Основными результатами главы 4 являются следующие три теоремы.

Теорема 4.1. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *является нижнемодулярным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ *является дистрибутивным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *является стандартным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iv) $\mathbf{V}$ *является нейтральным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(v) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$*,* $\mathbf{M}(1)$ *или* $\mathbf{Mon}$.

Теорема 4.3. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *является модулярным и верхнемодулярным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ *является костандартным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$*,* $\mathbf{M}(1)$*,* $\mathbf{M}(x)$ *и* $\mathbf{Mon}$.

Теорема 4.8. *Многообразие моноидов* $\mathbf{V}$ *является сократимым элементом решетки* $\mathbb{MON}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}(1)$, $\mathbf{M}(x)$, $\mathbf{M}(xy)$ *и* $\mathbf{Mon}$.

Глава 5 посвящена изучению моноидов малых порядков, порождающих многообразия со сложной решеткой подмногообразий. Ее основными результатами являются следующие две теоремы.

Теорема 5.1. *Наименьший порядок моноида, порождающего многообразие с континуумом подмногообразий равен 6.*

Теорема 5.28. *Наименьший порядок моноида, порождающего конечно универсальное многообразие равен 6.*

В **главе 6** строится пример двух многообразий моноидов, каждое из которых имеет прозрачно устроенную решетку подмногообразий, однако решетка подмногообразий объединения этих двух многообразий, напротив, устроена чрезвычайно сложно. Положим

$$\mathbf{N} := \mathsf{var}\{x^2 \approx x^3,\, x^2y \approx yx^2,\, xyxzx \approx x^2yz,\, \sigma_2,\, \sigma_3\}.$$

Основным результатом главы 6 является следующая

Теорема 6.1.

(i) *По модулю интервала* $[\mathbf{M}(xyzxty, xzytxy), \mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}]$ *решетка* $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N})$ *имеет вид, изображенный на рис. 2.*

(ii) *Интервал* $[\mathbf{M}(xyzxty, xzytxy), \mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N}]$ *решетки* $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N})$ *континуален и содержит изоморфную копию любой конечной решетки.*

Глава 7 посвящена изучению предельных и кроссовых многообразий. Чтобы сформулировать ее основные результаты нам потребуется следующая конструкция, предложенная О.Б.Сапир [60]. Пусть α — конгруэнция на свободном моноиде X^*. Элементы фактор-моноида X^*/α называются *α-классами.* Через $[\mathbf{u}]^\alpha$ будем обозначать α-класс слова $\mathbf{u}$. Отношение быть подсловом можно естественным образом расширить на α-классы: два α-класса $\mathtt{u}, \mathtt{v} \in X^*/\alpha$ находятся в отношении $\mathtt{v} \le_\alpha \mathtt{u}$, если $\mathtt{u} = \mathtt{pvs}$ для некоторых $\mathtt{p}, \mathtt{s} \in X^*/\alpha$. Легко видеть, что отношение $\le_\alpha$ является квазипорядком на множестве X^*/α. Через $\mathtt{W}^{\le_\alpha}$ будем обозначать замыкание множества α-классов $\mathtt{W}$ относительно квазипорядка $\le_\alpha$. Если $\mathtt{W}$ — множество α-классов, то через $M_\alpha(\mathtt{W})$ будем обозначать фактор-моноид Риса моноида X^*/α по идеалу $(X^*/\alpha) \setminus \mathtt{W}^{\le_\alpha}$. Отметим, что если α — тривиальная конгруэнция на X^*, то моноид $M_\alpha(\mathtt{W})$ является ничем иным как моноидом $M(\mathtt{W})$. Многообразие моноидов, порожденное моноидом $M_\alpha(\mathtt{W})$ обозначается через $\mathbf{M}_\alpha(\mathtt{W})$. Определим две конгруэнции γ и λ на свободном моноиде X^*: для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^*$,

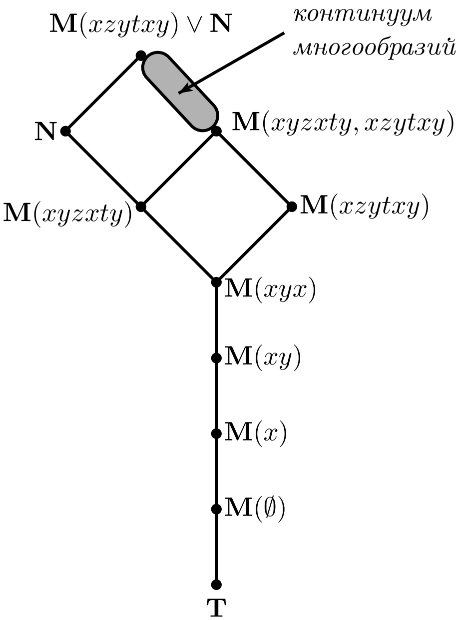

Рис. 2: решетка $\mathfrak{L}(\mathbf{M}(xzytxy) \vee \mathbf{N})$

- $\mathbf{u}\ \gamma\ \mathbf{v}$ тогда и только тогда, когда совпадают множества всех букв, входящих в слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ ровно 1 раз, и слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ можно получить друг из друга изменением показателей степеней букв;
- $\mathbf{u}\ \lambda\ \mathbf{v}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{u}\ \gamma\ \mathbf{v}$ и первые два вхождения любой повторяющейся буквы смежны в слове $\mathbf{u}$ тогда и только тогда, когда первые два вхождения этой буквы смежны в слове $\mathbf{v}$.

Через $\overline{\lambda}$ обозначаем конгруэнцию на X^*, двойственную к λ.

Первым основным результатом главы 7 является следующее описание предельных многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами.

Теорема 7.1. *Предельными многообразиями апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами являются многообразия*

$$\mathbf{M}(xyzxty, xzytxy),\ \mathbf{M}(xzxyty),\ \mathbf{M}_\lambda([xzyxty]^\lambda),\ \mathbf{M}_{\overline{\lambda}}([xzyxty]^{\overline{\lambda}})$$

и только они.

Вторым основным результатом главы 7 является описание предельных многообразий $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов.

Теорема 7.2. *Предельными многообразиями $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов являются многообразия*

$$\mathbf{M}(xyzxty, xzytxy),\ \mathbf{M}(xzxyty),\ \mathbf{M}_\lambda([xzyxty]^\lambda),\ \mathbf{M}_{\overline{\lambda}}([xzyxty]^{\overline{\lambda}}),$$
$$\mathbf{M}_\gamma([xy^2tx]^\gamma, [xty^2x]^\gamma),\ \mathbf{M}_\lambda([xty^2x]^\lambda),\ \mathbf{M}_{\overline{\lambda}}([xy^2tx]^{\overline{\lambda}})$$

и только они.

Положим

$$\mathbf{P} := \mathsf{var}\begin{Bmatrix} xyx \approx xyx^2,\ x^2y^2 \approx y^2x^2,\ xyzxy \approx yxzxy, \\ x^2yty \approx xyxty,\ yx^2ty \approx xyxty \end{Bmatrix}.$$

Третьим основным результатом главы 7 является описание почти кроссовых многообразий апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами.

Теорема 7.14. *Многообразие апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами является кроссовым тогда и только тогда, когда оно не содержит 4 многообразия, перечисленные в теореме 7.1, а также 5 следующих многообразий:*

$$\mathbf{M}(\{xt_1x \cdots t_nx \mid n \in \mathbb{N}\}),\ \mathbf{D}_1,\ \mathbf{D}_1^\delta, \mathbf{P},\ \mathbf{P}^\delta.$$

В **заключении** диссертации изложены итоги выполненного исследования, рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессорам Б.М.Верникову и М.В.Волкову за постоянное внимание к его работе, многочисленные полезные обсуждения и ценные замечания при подготовке текста диссертации.

Список литературы

[1] Айзенштат, А. Я. *О решетке многообразий полугрупп* / А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1979. – С. 3–46.

[2] Артамонов, В. А. *Цепные многообразия групп* / В. А. Артамонов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1978. – Вып. 3. – С. 3–8.

[3] Бахтурин, Ю. А. *Тождественные соотношения в конечных кольцах Ли* / Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский // Матем. сб. – 1975. – Т. 96(138), No. 4. – С. 543–559.

[4] Будкин, А. И. *К теории квазимногообразий алгебраических систем* / А. И. Будкин, В. А. Горбунов // Алгебра и логика. – 1975. – Т. 14, No. 2. – С. 123–143.

[5] Важенин, Ю. М. *Разрешимость теорий первого порядка классов полугрупп* / Ю. М. Важенин // Алгебраические системы и их многообразия. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1988. – С. 23–40.

[6] Верников, Б. М. *Почти цепные многообразия альтернативных колец* / Б. М. Верников, М. В. Волков // Исследования по современной алгебре. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1979. – С. 22–39.

[7] Волков, М. В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* / М. В. Волков // Докл. Акад. наук. – 1992. – Т. 326, No. 3. – С. 409–413.

[8] Волков, М. В. Тождества в решетках многообразий полугрупп: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук : 01.01.06 / М. В. Волков – Екатеринбург, 1994. – 323 с.

[9] Гусев, С. В. Решетка многообразий моноидов: дис. . . . канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / С. В. Гусев – Екатеринбург, 2019. – 105 с.

[10] Коуровская тетрадь. Нерешенные задачи теории групп. – Под ред. В. Д. Мазурова и Е. И. Хухро. 20-е изд. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2022. – 269 с.

[11] Львов, И. В. *О многообразиях ассоциативных колец.* I / И. В. Львов // Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12, No. 3. – С. 269–297.

[12] Нейманн, Х. Многообразия групп / Х. Нейманн. – М: Мир, 1969. – 264 с.

[13] Романьков, В. А. *Недистрибутивность решетки многообразий нильпотентных групп* / В. А. Романьков // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9, No. 1. – С. 67–72.

[14] Свердловская тетрадь. Нерешенные задачи теории полугрупп. – Под ред. Л. Н. Шеврина. 2-е изд. – Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979. – 41 с.

[15] Суханов, Е. В. *Почти линейные многообразия полугрупп* / Е. В. Суханов // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32, No. 4. – С. 469–476.

[16] Шеврин, Л. Н. *Решетки многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 2009. – No. 3. – С. 3–36.

[17] Шеврин, Л. Н. *Тождества полугрупп* / Л. Н. Шеврин, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 1985. – No. 11. – С. 3–47.

[18] Шеврин, Л. Н. *Структурные аспекты теории многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Е. В. Суханов // Изв. вузов. Математика. – 1989. – No. 6. – С. 3–39.

[19] Aird, T. *Lattices of varieties of plactic-like monoids* / T. Aird, D. Ribeiro // Semigroup Forum. – 2024. – Vol. 109, No. 1. – P. 3–37.

[20] Almeida, J. Finite semigroups and universal algebra / J. Almeida. – Singapore: World Scientific, 1994. – xvii+511 pp.

[21] Araújo, J. *A survey on varieties generated by small semigroups and a companion website* / J. Araújo, J. P. Araújo, P. J. Cameron, E. W. H. Lee, J. Raminhos // J. Algebra. – 2023. – Vol. 635. – P. 698–735.

[22] Birkhoff, G. *On the structure of abstract algebras* / G. Birkhoff // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1935. – Vol. 31, No. 4. – P. 433–454.

[23] Burris, S. *Embedding the dual of* Π_m *in the lattice of equational classes of commutative semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, No. 1. – P. 37–39.

[24] Burris, S. *Embedding the dual of* Π_∞ *in the lattice of equational classes of semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Algebra Universalis. – 1971. – Vol. 1, No. 2. – P. 248–254.

[25] Cossey, J. *Critical groups and the lattice of varieties* / J. Cossey // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 20, No. 1. – P. 217–221.

[26] Evans, T. *The lattice of semigroup varieties* / T. Evans // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2, No. 1. – P. 1–43.

[27] Glasson, D. *The Rees quotient monoid* $M(abba)$ *generates a variety with uncountably many subvarieties* / D. Glasson // Semigroup Forum. – 2024. – Vol. 109, No. 2. – P. 476–481.

[28] Grätzer, G. Lattice theory: foundation. / G. Grätzer. – Basel: Springer Basel AG, 2011. – xxix+613 pp.

[29] Gupta, C. K. *The finite basis question for varieties of groups—some recent results* / C. K. Gupta, A. Krasilnikov // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47, No. 1–2. – P. 273–283.

[30] Head, T. J. *The varieties of commutative monoids* / T. J. Head // Nieuw Arch. Wiskunde. III Ser. – 1968. – Vol. 16. – P. 203–206.

[31] Howie, J. M. Fundamental of semigroup theory / J. M. Howie – Oxford: Oxford University Press, 1995. – x+351 pp.

[32] Jackson, M. *Finite semigroups whose varieties have uncountably many subvarieties* / M. Jackson // J. Algebra. – 2000. – Vol. 228, No. 2. – P. 512–535.

[33] Jackson, M. *Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras* / M. Jackson // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70, No. 2. – P. 159–187.

[34] Jackson, M. *Monoid varieties with extreme properties* / M. Jackson, E. W. H. Lee // Trans. Amer. Math. Soc. – 2018. – Vol. 370, No. 7. – P. 4785–4812.

[35] Jackson, M. *Interpreting graph colorability in finite semigroups* / M. Jackson, R. McKenzie // Int. J. Algebra Comput. – 2006. – Vol. 16, No. 1. – P. 119–140.

[36] Jackson, M. *From A to B to Z* / M. Jackson, W. T. Zhang // Semigroup Forum. – 2021. – Vol. 103, No. 1. – P. 165–190.

[37] Kalicki, J. *Equational completeness of abstract algebras* / J. Kalicki, D. Scott // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 650–659.

[38] Kharlampovich, O. G. *Algorithmic problems in varieties* / O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir // Int. J. Algebra Comput. – 1995. – Vol. 5, No. 4–5. – P. 379–602.

[39] Kovács, L. G. *On non-cross varieties of groups* / L. G. Kovács, M. F. Newman // J. Austral. Math. Soc. – 1971. – Vol. 12, No. 2. – P. 129–144.

[40] Kozhevnikov, P. A. *On nonfinitely based varieties of groups of large prime exponent* / P. A. Kozhevnikov // Comm. Algebra. – 2012. – Vol. 40, No. 7. – P. 2628–2644.

[41] Kruse, R. L. *Identities satisfied by a finite ring* / R. L. Kruse // J. Algebra. – 1973. – Vol. 26, No. 2. – P. 298–318.

[42] Lee, E. W. H. *Minimal semigroups generating varieties with complex subvariety lattices* / E. W. H. Lee // Int. J. Algebra Comput. – 2007. – Vol. 17, No. 8. – P. 1553–1572.

[43] Lee, E. W. H. *Maximal Specht varieties of monoids* / E. W. H. Lee // Moscow Math. J. – 2012. – Vol. 12, No. 3. – P. 787–802.

[44] Lee, E. W. H. *Varieties generated by* 2*-testable monoids* / E. W. H. Lee // Studia Sci. Math. Hungar. – 2012. – Vol. 49. – P. 366–389.

[45] Lee, E. W. H. *Almost Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Beiträge zur Algebra und Geometrie. – 2013. – Vol. 54, No. 1. – P. 121–129.

[46] Lee, E. W. H. *Finite basis problem for semigroups of order five or less: generalization and revisitation* / E. W. H. Lee // Studia Logica. – 2013. – Vol. 101, No. 1. – P. 95–115.

[47] Lee, E. W. H. *On certain Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Results Math. – 2014. – Vol. 66, No. 2. – P. 491–510.

[48] Lee, E. W. H. Advances in the theory of varieties of semigroups / E. W. H. Lee – Cham: Springer, 2023. – xv+287 pp.

[49] Lee, E. W. H. *A minimal pseudo-complex monoid* / E. W. H. Lee // Arch. Math. – 2023. – Vol. 120, No. 1. – P. 15–25.

[50] Lee, E. W. H. *The smallest monoid that generates a non-Cross variety* / E. W. H. Lee, W. T. Zhang // Xiamen Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. – 2014. – Vol. 53. – P. 1–4.

[51] McKenzie, R. *Equational bases for lattice theories* / R. McKenzie // Math. Scand. – 1970. – Vol. 27. – P. 24–38.

[52] Oates, S. *Identical relations in finite groups* / S. Oates, M. B. Powell // J. Algebra. – 1964. – Vol. 1, No. 1. – P. 11–39.

[53] Petrich, M. Inverse semigroups / M. Petrich – New York: John Wiley & Sons, 1984. – vi+674 pp.

[54] Petrich, M. Completely regular semigroup varieties / M. Petrich, N. R. Reilly – Cham: Springer, 2024. – xiv+238 pp.

[55] Pollák, Gy. *Some lattices of varieties containing elements without cover* / Gy. Pollák // Quad. Ric. Sci. – 1981. – Vol. 109. – P. 91–96.

[56] Rhodes, J. The q-theory of finite semigroups / J. Rhodes, B. Steinberg – New York: Springer, 2009. – xxii+666 pp.

[57] Sachs, D. *Identities in finite partition lattices* / D. Sachs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 12, No. 6. – P. 944–945.

[58] Sapir, M. V. *On Cross semigroup varieties and related questions* / M. V. Sapir // Semigroup Forum. – 1991. – Vol. 42, No. 1. – P. 345–364.

[59] Sapir, M. V. Combinatorial algebra: syntax and semantics / M. V. Sapir – Cham: Springer, 2014. – xvi+355 pp.

[60] Sapir, O. B. *Limit varieties of J-trivial monoids* / O. B. Sapir // Semigroup Forum. – 2021. – Vol. 103, No. 1. – P. 236–260.

[61] Sapir, O. B. *Limit varieties generated by finite non-J-trivial aperiodic monoids* / O. B. Sapir // Semigroup Forum. – 2023. – Vol. 107, No. 3. – P. 732–750.

[62] Ševrin, L. N. *Attainability and solvability for classes of algebras* / L. N. Ševrin, L. M. Martynov // Semigroups. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. – 1985. – Vol. 39. – P. 397–459.

[63] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattices of varieties of semigroups and epigroups* / V. Yu. Shaprynskiĭ, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, No. 11. – P. 4697–4712.

[64] Stern, M. Semimodular lattices. Theory and applications / M. Stern. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – xiv+370 pp.

[65] Vernikov, B. M. *Special elements in lattices of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2015. – Vol. 81, No. 1–2. – P. 79–109.

[66] Volkov, M. V. *An example of a limit variety of semigroups* / M. V. Volkov // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 24, No. 1. – P. 319–326.

[67] Volkov, M. V. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / M. V. Volkov // In: P. M. Higgins (ed.), Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex. Colchester: University of Essex. – 1994. – P. 99–110.

[68] Volkov, M. V. *The finite basis problem for finite semigroups* / M. V. Volkov // Math. Jpn. – 2001. – Vol. 53, No. 1. – P. 171–199.

[69] Wismath, S. L. *The lattice of varieties and pseudovarieties of band monoids* / S. L. Wismath // Semigroup Forum. – 1986. – Vol. 33, No. 1. – P. 187–198.

[70] Zhang, W. T. *Existence of a new limit variety of aperiodic monoids* / W. T. Zhang // Semigroup Forum. – 2013. – Vol. 86, No. 1. – P. 212–220.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных изданиях

[71] Гусев, С. В. *О решетке надкоммутативных многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Изв. вузов. Математика. – 2018. – No. 5. – С. 28–32.

[72] Гусев, С. В. *Стандартные элементы решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Алгебра и логика. – 2020. – Т. 59, No. 6. – С. 615–626.

[73] Гусев, С. В. *Дистрибутивные и нижнемодулярные элементы решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Сиб. матем. журн. – 2022. – Т. 63, No. 6. – С. 1248–1255.

[74] Гусев, С. В. *Многообразия апериодических моноидов с дистрибутивной решеткой подмногообразий* / С. В. Гусев // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. – 2025. – Т. 525. – С. 98–101.

[75] Gusev, S. V. *Special elements of the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev // Algebra Universalis. – 2018. – Vol. 97, No. 2. – Article 29. – P. 1–12.
[76] Gusev, S. V. *On the ascending and descending chain conditions in the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev // Сибирские электронные матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 983–997.
[77] Gusev, S. V. *A new example of a limit variety of monoids* / S. V. Gusev // Semigroup Forum. – 2020. – Vol. 101, No. 1. – P. 102–120.
[78] Gusev, S. V. *Limit varieties of aperiodic monoids with commuting idempotents* / S. V. Gusev // J. Algebra Appl. – 2021. – Vol. 20, No. 9. – Article 2150160. – P. 1–17.
[79] Gusev, S. V. *Varieties of aperiodic monoids with central idempotents whose subvariety lattice is distributive* / S. V. Gusev // Monatsh. Math. – 2023. – Vol. 201, No. 1. – P. 79–108.
[80] Gusev, S. V. *Minimal monoids generating varieties with complex subvariety lattices* / S. V. Gusev // Proc. Edinb. Math. Soc. – 2024. – Vol. 67, No. 2. – P. 617–642.
[81] Gusev, S. V. *Cross varieties of aperiodic monoids with commuting idempotents* / S. V. Gusev // Int. J. Algebra Comput. – 2025. – Vol. 35, No. 1. – P. 145–165.
[82] Gusev, S. V. *Small monoids generating varieties with uncountably many subvarieties* / S. V. Gusev // Semigroup Forum. – 2025. – Vol. 110, No. 1. – P. 255–259.
[83] Gusev, S. V. *Varieties of aperiodic monoids with commuting idempotents whose subvariety lattice is distributive* / S. V. Gusev // Semigroup Forum. – 2025. – Vol. 111, No. 3. – P. 653–749.
[84] Gusev, S. V. *Varieties of monoids with a distributive subvariety lattice* / S. V. Gusev // Proc. Amer. Math. Soc. – 2025. – Vol. 153, No. 11. – P. 4553–4568.
[85] Gusev, S. V. *Varieties of monoids with complex lattices of subvarieties* / S. V. Gusev, E. W. H. Lee // Bull. Lond. Math. Soc. – 2020. – Vol. 52, No. 4. – P. 762–775.
[86] Gusev, S. V. *Cancellable elements of the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev, E. W. H. Lee // Acta Math. Hungar. – 2021. – Vol. 165, No. 1. – P. 156–168.
[87] Gusev, S. V. *The lattice of varieties of monoids* / S. V. Gusev, E. W. H. Lee, B. M. Vernikov // Japan. J. Math. – 2022. – Vol. 17, No. 2. – P. 117–183.
[88] Gusev, S. V. *Limit varieties of monoids satisfying a certain identity* / S. V. Gusev, Y. X. Li, W. T. Zhang // Algebra Colloq. – 2025. – Vol. 32, No. 1. – P. 1–40.
[89] Gusev, S. V. *Classification of limit varieties of J-trivial monoids* / S. V. Gusev, O. B. Sapir // Comm. Algebra. – 2022. – Vol. 50, No. 7. – P. 3007–3027.
[90] Gusev, S. V. *Chain varieties of monoids* / S. V. Gusev, B. M. Vernikov // Dissert. Math. – 2018. – Vol. 534. – P. 1–73.
[91] Gusev, S. V. *Two weaker variants of congruence permutability for monoid varieties* / S. V. Gusev, B. M. Vernikov // Semigroup Forum. – 2021. – Vol. 103, No. 1. – P. 106–152.

Гусев Сергей Валентинович

Решетки многообразий моноидов

Автореф. дис. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___.______. Заказ № ____________________

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 1,7. Тираж 100 экз.

Типография ____