Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

На правах рукописи
УДК 519.14+512.54

ГОЛУБЯТНИКОВ МИХАИЛ ПЕТРОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

Специальность 1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
чл.-корр.РАН д. ф-м.наук А.А. Махнев

Екатеринбург – 2024

Содержание

Введение **3**

1 Определения, обозначения и предварительные результаты **8**

1.1 Дистанционно регулярные графы . . . 8

1.2 Алгеба Боуза-Меснера . . . 9

1.3 Тройные числа пересечений . . . 10

1.4 Метод Хигмена работы с автоморфизмами ДРГ . . . 11

1.5 Частичные геометрии . . . 12

2 Несуществование некоторых Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов **14**

2.1 Доказательство теоремы 1 . . . 15

2.2 Доказательство теоремы 2 . . . 16

2.3 Доказательство теоремы 3 . . . 18

2.3.1 Граф с массивом пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ . . . 18

2.3.2 Граф с массивом пересечений $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ . . . 20

3 Графы Шилла **22**

3.1 Граф с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ . . . 23

3.2 Графы Шилла с $b_2 = c_2$ . . . 25

4 Автоморфизмы **32**

4.1 Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ . . . 32

4.1.1 Вспомогательные результаты и доказательство теоремы 8 . . . 33

4.1.2 Доказательство теоремы 9 . . . 35

4.2 Автоморфизмы небольших ДРГ с массивами пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ . . . 40

4.2.1 Вспомогательные результаты . . . 41

4.2.2 Дистанционно регулярные графы с массивом пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$ . . . 42

4.2.3 Дистанционно регулярные графы с массивом пересечений $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$ . . . 43

4.2.4 Дистанционно регулярные графы с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$ . . . 43

Заключение **47**

Литература **48**

Введение

В 2004 году выдающийся математик Майкл Ашбахер опубликовал результаты, ознаменовавшие окончательное завершение доказательства классификации конечных простых групп. Данная теорема, являющаяся одним из краеугольных камней современной алгебры, представляет собой масштабное и трудоемкое доказательство, охватывающее множество сложных математических концепций и методов. В связи с этим, в научном сообществе возникла потребность в упрощении и оптимизации доказательства, что позволило бы сделать его более доступным и понятным для широкого круга математиков.

Один из возможных подходов к решению этой проблемы был предложен выдающимся математиком Майклом Атьей. Согласно его идее, классификация конечных простых групп могла бы быть значительно упрощена путем построения некоторого геометрического объекта, на котором эти группы действуют естественным образом. Последующая классификация геометрических структур этого объекта позволила бы получить более наглядное и интуитивно понятное доказательство теоремы.

В качестве одного из таких геометрических объектов может выступать симметричный граф. Особый интерес в этом контексте представляют дистанционно регулярные графы, обладающие рядом уникальных свойств и характеристик. Исследование различных специальных классов дистанционно транзитивных графов имеет богатую историю и восходит к работам выдающихся математиков прошлого. Среди наиболее известных классов таких графов можно выделить кубические клетки Татта, графы инцидентности дезарговых проективных плоскостей, графы групп ранга 3 и многие другие.

Таким образом, изучение дистанционно регулярных графов и их связи с конечными простыми группами представляет собой перспективное направление исследований, способное привести к значительному упрощению и оптимизации доказательства классификации конечных простых групп. Результаты, полученные в рамках данной диссертации, вносят существенный вклад в развитие этой области математики и открывают новые горизонты для дальнейших исследований.

Следует отметить, что дистанционно регулярные графы представляют собой более общий класс графов, включающий в себя дистанционно-транзитивные графы как частный случай. Дистанционно регулярные графы характеризуются наличием определенных комбинаторных свойств, связанных с расстояниями между вершинами, в то время как дистанционно-транзитивные графы дополнительно обладают высокой степенью симметрии, обусловленной транзитивностью действия группы автоморфизмов на множестве вершин графа. Таким образом, результаты, полученные при изучении дистанционно-транзитивных графов, могут быть применены и к более широкому классу дистанционно регулярных графов, что открывает новые возможности для исследований в этой области.

Первый общий результат по классификации дистанционно транзитивных графов был получен в 1971 году Норманом Бигсом и Дереком Смитом [1], где были классифицированы дистанционно транзитивные графы валентности $k = 3$. Графы валентности 4, были полностью классифицированы Смитом [2; 3]. В течение последующих пятнадцати лет центральной проблемой при изучении дистанционно-транзитивных графов была классификация ДТГ малой валентности.

В качестве первого шага в классификации ДТГ валентности 3 и 4 было доказано, что таких графов лишь конечное число. Было высказано предположение, что для всех $k \geq 3$ существует конечное число ДТГ валентности k (при $k = 2$ имеется бесконечная серия ДТГ, а именно циклы длины n). Эта гипотеза эквивалентна существованию функции $d(k)$, обладающей тем свойством, что диаметр ДТГ валентности k не превосходит $d(k)$.

В работе Смита [3] существование такой функции $d(k)$ было доказано для двудольного ДТГ. В работе Кэмерона с соавторами 1982 г. [4] было доказано, что диаметр ДТГ ограничен некоторой функцией от порядка стабилизатора вершины в группе автоморфизмов ДТГ.

В работе Кэмерона с соавторами [5] доказано, что порядок стабилизатора вершины дистанционно транзитивного графа ограничен функцией от валентности этого графа. Интересно отметить, что этот результат был получен в предположении истинности классификации простых конечных групп, которая в то время ещё не была полностью завершена.

Ранее в 1984 Баннаи и Ито в книге [6] сформулировали гипотезу:

Гипотеза. *Существует лишь конечное число дистанционно регулярных графов фиксированной валентности, большей двух.*

Эта гипотеза касается не дистанционно транзитивных графов, а другого более широкого класса дистанционно регулярных графов.

Так как дистанционно регулярные графы в общем не обладают “хорошей” группой автоморфизмов, то к этой гипотезе был применён чисто комбинаторный подход, независимый от классификации конечных простых групп.

Полное доказательство гипотезы Баннаи и Ито было получено в 2009 году группой авторов С. Банг, А. Дубицкас, Дж. Кулен и В. Моултон [7]. Доказательство крайне технично и представляет собой синтез комбинаторных рассуждений, теории чисел и математического анализа.

Дальнейшие исследования, были сосредоточены на нахождении новых дистанционно регулярных графов и исследовании их групп автоморфизмов.

Наиболее ярким примером является построение бесконечной серии скрученных графов Грассмана, которые не являются даже вершинно транзитивными [8].

Также Кулен и Парк определили дистанционно регулярные графы Шилла [9], изучению которых посвящена глава 3 настоящей диссертации.

Цель и задачи исследования:

Целью работы является изучение некоторых классов дистанционно регулярных графов и их автоморфизмов. Для ее достижения в работе решаются следующие задачи:

1. Доказать несуществование некоторых серий дистанционно регулярных графов.

2. Продолжить исследования класса дистанционно регулярных графов Шилла.

3. Исследовать возможные группы автоморфизмов некоторых дистанционно регулярных графов

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Доказано несуществование некоторых Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов:

   1.1. $\{(s+1)^4+s,(s+1)^4-(s+1)^3,(s^2+s+1)(s+1);1,(s+1)s,(s^2+s+1)(s+1)^2\}$. при нечетном числе s.

   1.2. $\{83,54,21;1,6,63\}$, $\{629,500,105;1,20,525\}$, $\{104,70,25;1,7,80\}$ и $\{272,210,49;1,15,224\}$

   Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{(s+1)^4+s,(s+1)^4-(s+1)^3,(s^2+s+1)(s+1);1,(s+1)s,(s^2+s+1)(s+1)^2\}$. *Если число* s *нечетно, то* Γ *не существует.*

   Теорема 2. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{83,54,21;1,6,63\}$ $(s=2)$ *и* $\{629,500,105;1,20,525\}$ $(s=4)$ *не существуют.*

   Теорема 3. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{104,70,25;1,7,80\}$ *и* $\{272,210,49;1,15,224\}$ *не существуют.*

2. Доказано несуществование некоторых графов Шилла:

   2.1. $\{b(b^2-1),b^2(b-1),b^2;1,1,(b^2-1)(b-1)\}$, $\{b^2(b-1)/2,(b-1)(b^2-b+2)/2,b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$, $(s+1)(s^3-1),s^4,s^3;1,s^2,s(s^3-1)\}$

   2.2. $\{12,10,2;1,2,8\}$ (Граф Шилла с $b=3$)

   Теорема 4. *Граф Шилла с массивом пересечений* $\{12,10,2;1,2,8\}$ *не существует.*

   Теорема 5. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{b(b^2-1),b^2(b-1),b^2;1,1,(b^2-1)(b-1)\}$. *Тогда* $b\in\{2,3\}$.

3. Найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1,nm-n+m-1,n-m+1;1,1,nm-n+m-1\}$

   Теорема 9. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{nm-1,nm-n+m-1,n-m+1;1,1,nm-n+m-1\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *– элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\pi(mn)\cup\pi((m-1)(n+1))\cup\pi(m^2-mn+m+n^2-n-2)$, n *делит* $(m-1)\alpha_0(g)-\alpha_3(g)$, $2(m-1)\alpha_0(g)$ *и* $2\alpha_3(g)$, *и верно одно из утверждений:*

   (1) Ω *– пустой граф,* p *делит* mn, $\alpha_3(g)=mnpl$ *и* $\alpha_1(g)=mpl+m^2n(mn+n-1)+(m+n)ps$;

   (2) Ω *является* t*-кликой,* $t>1$, p *делит* $(n+1)(m-1)$, $(mn-1)(n-m+1)$ *и* $n-m+1-t$, $\alpha_3(g)=(n-m+1)(t+mn)+mnpl$, $2(m-1)t=sn$ *и* $\alpha_1(g)=-(mt+s)+(t+mn+m+mpl)+(m+n)r$;

(3) Ω является l-кокликой, $l > 1$, расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$, числа m, n нечётны и $l = mn$.

(4) Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c, если Δ — связная компонента графа Ω, содержащая вершину a, то либо $p = 2$, либо

(i) диаметр Δ равен 3 и p делит $p^3_{33} = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2$, либо

(ii) диаметр Δ равен 2, Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$, p делит $n - m + 1$, mn, $|\Omega|$, $|\Delta|$, окрестность любой вершины в графе Δ состоит из r изолированных s-клик, $s > 1$, $s + 1$ делит $r(r-1)^2$, p делит $s + 1$ и $r - 1$.

Научная новизна: Все основные результаты диссертации являются новыми.

Научная и практическая значимость Работа носит теоретический характер. Результаты продолжают изучение реберно регулярных графов и их автоморфизмов. Результаты и методы диссертации могут быть использованы для изучения алгебраических структур подобного типа.

Апробация работы. Основные результаты докладывались на следующих конференциях: Международная конференция «Мальцевские чтения 2019» (Новосибирск, Россия); Международная (51-я Всеросийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений»; XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А. Белоногова, (Екатеринбург); The International Conference and PhD-Summer School on “Groups and Graphs, Semigroups and Synchronization” (G2S2) в рамках «Конференции международных математических центров мирового уровня» ([43—46])

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [36—41]. Все работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, и индексируются в Web of Science и/или в Scopus.

Объем и структура работы. Диссертация изложена на 59 страницах, содержит введение, 4 главы, заключение, список литературы и аппендикса, состоящий из 46 источников. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Вспомогательные утверждения (леммы) и таблица имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер главы, вторая цифра — номер параграфа в текущей главе, третья - номер утверждения в текущем параграфе. Теоремы, следствия и замечания имеют сплошную нумерацию.

В первой главе приводятся основные определения, обозначения и предварительные результаты, необходимые для дальнейшего изложения материала.

Вторая глава посвящена доказательству несуществования некоторых классов Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов. Получены новые результаты, позволяющие исключить существование графов с определенными параметрами.

В третьей главе исследуются графы Шилла и их свойства. Особое внимание уделяется графу с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ и графам Шилла, удовлетворяющим условию $b_2 = c_2$.

Четвертая глава содержит результаты о группах автоморфизмов графа с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$. Получены оценки порядков групп автоморфизмов и описаны некоторые их подгруппы.

Результаты (теоремы 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9) получены при поддержке гранта РНФ (проект номер 19-71-10067). Текст диссертации выполнен при поддержке Уральского математического центра УрФУ (соглашение номер 075-02-2024-1428)

1 Определения, обозначения и предварительные результаты

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a вершина графа Γ, то через $\Gamma_i(a)$ обозначается i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a или если вершина a зафиксированная, то *локальным подграфом.*

Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, ..., d\}$. Граф имеющий то же самое множество вершин, и две вершины u, w смежны если $d_\Gamma(u, w) = i$, обозначим через Γ_i.

1.1 Дистанционно регулярные графы

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (соответственно $c_i(u, w)$) обозначается число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$. Если в графе Γ диаметра d значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ для любого $i = 0, \ldots, d$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i, то граф Γ называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$.

Через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

Пусть Γ является Q-полиномиальный дистанционно регулярным графом диаметра d, для него определяется многочлен $T_2(\lambda)$ степени $d+1$, называемый многочленом Тервиллигера (см [10, параграф 4]). Если μ – неглавное собственное значение подграфа $\Gamma(x)$, для некоторой вершины x, то $T_2(\mu) \geq 0$.

Для дистанционно регулярного графа Γ через $\left\{ {uv \atop ij} \right\}$ обозначим множество вершин графа Γ находящихся на расстоянии i от вершины u и на расстоянии j от вершины v.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Числа пересечений дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, вычисляются по рекуррентной формуле [11, лемма 4.1.7]:

$$p^i_{j+1,h} = \frac{1}{c_{j+1}} \left(p^i_{j,h-1} b_{h-1} + p^i_{jh}(a_h - a_j) + p^i_{j,h+1} c_{h+1} - p^i_{j-1,h} b_{j-1} \right),$$

$$p^i_{0h} = \delta_{ih}, \quad p^i_{j0} = \delta_{ij}, \quad p^i_{j,d+1} = 0,$$

$$p^i_{1h} = \begin{cases} c_i & \text{если } h = i-1, \\ a_i & \text{если } h = i, \\ b_i & \text{если } h = i+1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Где δ_{ij} – символ Кронекера и $a_i = b_0 - b_i - c_i$.

Предположим, что Γ — дистанционно регулярный граф степени k и диаметра D, большего 1. Под матрицей A_i $(0 \le i \le D)$ графа Γ будем понимать квадратную матрицу, строки и столбцы которой индексированы множеством $V(\Gamma)$ и на месте (x, y) матрицы A_i стоит 1 в случае $d_\Gamma(x, y) = i$ и 0 в противном случае. *Матрицей смежности* графа Γ называют матрицу A_1 и обозначают ее через A. Под графом Γ_i понимают граф с $V(\Gamma_i) = V(\Gamma)$ и матрицей смежности A_i, т.е. две вершины смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ. Граф Γ имеет точно $D+1$ различных собственных значений $k = \theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_D$, и пусть m_i — кратность значения θ_i $(0 \le i \le D)$. По [11, теорема 4.1.4 (Биггс)] выполнено равенство

$$m_i = \frac{|V(\Gamma)|}{\sum_{i=0}^{D} k_i u_i(\theta)^2},$$

где $(u_0(\theta) = 1, u_1(\theta) = \frac{\theta}{b_0}, \dots, u_D(\theta))^T$ — правый собственный вектор, отвечающий собственному значению θ, трехдиагональной матрицы

$$L_1 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & O & \\ & c_2 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & O & & \cdot & \cdot & b_{D-1} \\ & & & & c_D & a_D \end{pmatrix}.$$

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода C в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d / \sum_{i=0}^{e} p_{id}^d + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности (см. предложение 3 из [12]).

Графом Деза с параметрами (v, k, b, a) $(a \le b)$ называется связный регулярный граф Γ степени k на v вершинах, в котором для любых двух вершин u, w число общих соседей u и w равно a или b [13].

1.2 Алгеба Боуза-Меснера

Алгеброй Боуза-Меснера M дистанционно регулярного графа Γ называется комплексная матричная алгебра, порожденная матрицей смежности A графа Γ с базисом $\{A_i \,|\, i = 0, \dots, D\}$. Алгебра M имеет базис состоящий из примитивных идемпотентов $\{E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \dots, E_D\}$, где $v = |V(\Gamma)|$ и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство отвечающее собственному значению θ_i. Определим матрицы $P = \{P_{ij}\}$ и $Q = \{Q_{ij}\}$ следующим образом – $A_j = \sum_{i=0}^{D} P_{ij} E_i$, $E_j = v^{-1} \sum_{i=0}^{D} Q_{ij} A_i$. Заметим, что существует зависимость между собственными значениями и примитивными идемпотентами, где $\{P_{ij}\}_{i=0}^{D}$ собственные значения матрицы A_j. Матрицы P и Q называются матрицей собственных значений и дуальной матрицей собственных значений соответственно. Далее, относительно покомпонентного умножения $\circ$ выполняются равенства

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{v} \sum_{i=0}^{D} q_{ij}^k E_k.$$

Граф Γ называется *Q-полиномиальным*, если существует упорядочение примитивных идемпотентов $E_0 = \frac{1}{v} J, E_1, \dots, E_D$, такое, что $q_{ij}^k = 0$ при $|j-k| > 1$. Будем говорить, что Γ является *Q-полиномиальным относительно* θ, если E_1 — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее собственному значению θ.

1.3 Тройные числа пересечений

Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1\, u_2\, u_3 \atop r_1\, r_2\, r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1\, u_2\, u_3 \atop r_1\, r_2\, r_3} \right] = \left| \left\{ {u_1\, u_2\, u_3 \atop r_1\, r_2\, r_3} \right\} \right|$. Числа $\left[{u_1\, u_2\, u_3 \atop r_1\, r_2\, r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1\, u_2\, u_3 \atop r_1\, r_2\, r_3} \right]$ будем писать $[r_1\, r_2\, r_3]$. В отличие от двойных чисел пересечения p_{jh}^i тройные числа пересечений зависят от выбора вершин. Опишем способ вычисления некоторых тройных чисел пересечений предложенный в [14].

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u, v)$, $U = d(v, w)$, $V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0\, j\, h] = \delta_{jW} \delta_{hV}$. Аналогично, $[i\, 0\, h] = \delta_{iW} \delta_{hU}$ и $[i\, j\, 0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$.

Фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и считая число вершин находящихся на расстоянии $i \in \{1, 2, 3\}$ от третьей, получим систему линейных Диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{d} [l\, j\, h] = p_{jh}^U - [0\, j\, h] & j, h \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{d} [i\, l\, h] = p_{ih}^V - [i\, 0\, h] & i, h \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{d} [i\, j\, l] = p_{ij}^W - [i\, j\, 0] & i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \tag{1}$$

Более того, используя неравенство треугольника получаем, что при $|i - j| > W$ или $i + j < W$ число $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} u\, v\, w \\ r\, s\, t \end{bmatrix}.$$

Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то по [14, теорема 3] имеем $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{i\, j\, h\} = \left\{ {u\, v\, w \atop i\, j\, h} \right\}$, $[i\, j\, h] = \left[{u\, v\, w \atop i\, j\, h} \right]$, $[i\, j\, h]' = \left[{u\, v\, w \atop i\, h\, j} \right]$, $[i\, j\, h]^* = \left[{u\, v\, w \atop j\, i\, h} \right]$ и $[i\, j\, h]^\sim = \left[{u\, v\, w \atop h\, j\, i} \right]$. Вычисление параметров $[i\, j\, h]'$, $[i\, j\, h]^*$ и $[i\, j\, h]^\sim$

(симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Для тройных чисел пересечений выполняется лемма, являющая обобщением прямоугольного тождества для двойных чисел пересечений (см [11, Лемма 2.1.1])

Лемма. *Пусть* u, v *– вершины графа* Γ *и* $A = \left\{ {uv \atop ij} \right\}$, $B = \left\{ {uv \atop kl} \right\}$. *Тогда для* $h \in \{1, 2, 3\}$ *выполняется соотношение:*

$$\sum_{w \in A} \begin{bmatrix} u\,v\,w \\ k\,l\,h \end{bmatrix} = \sum_{w' \in B} \begin{bmatrix} u\,v\,w' \\ i\,j\,h \end{bmatrix}$$

Доказательство. Количество вершин находящихся на расстоянии h от вершины $w \in A$ и попадающих во множество B равно $\left[{u\,v\,w \atop k\,l\,h} \right]$, аналогично количество вершин находящихся на расстоянии h от вершины $w' \in B$ и попадающих во множество A равно $\left[{u\,v\,w' \atop i\,j\,h} \right]$. Таким образом правая и левая части являются числом пар вершин (x, y) находящихся на расстоянии h, где $x \in A$ и $y \in B$. □

1.4 Метод Хигмена работы с автоморфизмами ДРГ

Для изучения автоморфизмов дистанционно регулярных графов, обычно применяется метод Хигмена, представленный в третьей главе монографии Камерона [15]. В этом методе граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Рассмотрим матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно (заметим, что матрица Q является транспонированной к матрице Q из раздела о тройных числах пересечений). Такие матрицы называются первой и второй матрицей собственных значений схемы. Заметим, что такие матрицы связаны равенством $PQ = QP = vI$ [15; 16].

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах Γ обычным образом даёт матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ коммутирует с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [15, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Важным фактом является, то, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

1.5 Частичные геометрии

Система инцидентности $\mathbf{S} = (P, L, \mathcal{I})$, с множеством точек P, прямых L и симметричным отношений инцидентности $\mathcal{I} \subset P \times L$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t) и обозначается как $pG_\alpha(s,t)$, если выполняются следующие аксиомы:

1. Каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку
2. Каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой
3. Прямые пересекаются не более, чем по одной точке
4. Для любой точки a, не лежащей на прямой l, найдется ровно α прямых, проходящих через a и пересекающих l

При этом число точек можно посчитать как $\frac{(s+1)(st+\alpha)}{\alpha}$, а число прямых как $\frac{(t+1)(st+\alpha)}{\alpha}$. Двойственной геометрией к $pG_\alpha(s,t)$ называется частичная геометрия $pG_\alpha(t,s)$, в которой множество точек (прямых) является множество прямых (точек, отождествленных с пучками прямых) исходной геометрии. Частичные геометрии можно условно поместить в следующие 4 класса, имеющие небольшое пересечения:

1. Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s,t)$
2. Если $\alpha = s+1$ (двойственно $\alpha = t+1$), то геометрия называется 2–$(v, s+1, 1)$ схемой (двойственной 2–$(v, t+1, 1)$ схемой)
3. Если $\alpha = s$ (двойственно $\alpha = t$), то геометрия называется сетью (двойственной сетью). Будем говорить, что геометрия $pG_t(s,t)$ является сетью типа $(s+1, t+1)$
4. Истинные частичные геометрии $1 < \alpha < \min\{s,t\}$

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+\frac{st}{\alpha})$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры для некоторых натуральных чисел α, s, t, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$. В таких графах граница Хофмана для клик равна $s+1$ и каждая вершина вне $(s+1)$-клики L смежна с α вершинами из L.

Если граф Γ является точечным графом некоторой частичной геометрии, то он называется *геометрическим*. Отметим, что важной проблемой является проблема существования геометрического графа в классе псевдогеометрических графов с данными параметрами.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

В решение обратных задач входит изучение дистанционно регулярных графов Γ, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Несмотря на то, что имеются даже бесконечные серии допустимых массивов пересеченбий графов из этого класса, не известно существование ни одного графа.

Например, если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен, то по [17, теорема 1] граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Обратно для графа $\bar\Gamma_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(l,t)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{l, tc_2, l-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$.

В работе изучаются массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф $\bar\Gamma_3$ (Γ_3) является псевдогеометрическим для сети. Приведем примеры таких графов ([11, стр. 425-431]).

Пример 1.1. *Пусть* Γ *– граф Сильвестра с массивом пересечений* $\{5,4,2;1,1,4\}$. *Тогда* $v = 1+5+20+10 = 36$ *и* Γ *имеет спектр* $5^1, 2^{16}, -1^{10}, -3^9$. *Далее,* $\bar\Gamma_3$ *– псевдогеометрический граф для сети* $pG_4(5,4)$ *и* $\Sigma = \Gamma_3$ *– сильно регулярный граф с параметрами (36,10,4,2) и неглавными собственными значениями* $4, -2$. *Отсюда граф* Σ *изоморфен* 6×6*-решетке и* $\Sigma(u)$ *— объединение двух изолированных 5-клик.*

Пример 1.2. *Пусть* Γ *– свернутый 7-куб с массивом пересечений* $\{7,6,5;1,2,3\}$. *Тогда* $v = 1+7+21+35 = 64$ *и* Γ *имеет спектр* $7^1, 3^{21}, -1^{35}, -5^7$. *Далее,* $\bar\Gamma_3$ *– псевдогеометрический граф для сети* $pG_3(7,3)$*,* $\Sigma = \Gamma_3$ *– сильно регулярный граф с параметрами* $(64,35,18,20)$ *и неглавными собственными значениями* $3, -5$.

Пример 1.3. *Пусть* Γ *– граф с массивом пересечений* $\{17,16,10;1,2,8\}$. *Тогда* $v = 1+17+136+170 = 324$ *и* Γ *имеет спектр* $17^1, 5^{102}, -1^{170}, -7^{51}$. *Далее,* $\bar\Gamma_3$ *– псевдогеометрический граф для сети* $pG_8(17,8)$ *и* $\Sigma = \Gamma_3$ *– сильно регулярный граф с параметрами* $(324,170,88,90)$ *и неглавными собственными значениями* $8, -10$.

Пример 1.4. *Пусть* Γ *– граф с массивом пересечений* $\{20,16,5;1,1,16\}$. *Тогда* $v = 1+20+320+100 = 441$ *и* Γ *имеет спектр* $20^1, 6^{144}, -1^{100}, -4^{196}$. *Далее,* $\bar\Gamma_3$ *– псевдогеометрический граф для сети* $pG_{16}(20,16)$*,* $\Sigma = \Gamma_3$ *– сильно регулярный граф с параметрами* $(441,100,31,20)$ *и неглавными собственными значениями* $16, -5$.

Пример 1.5. *Пусть* Γ *– граф с массивом пересечений* $\{26,24,19;1,3,8\}$. *Тогда* $v = 1+26+208+494 = 729$ *и* Γ *имеет спектр* $26^1, 8^{156}, -1^{494}, -10^{78}$. *Далее,* $\bar\Gamma_3$ *– псевдогеометрический граф для сети* $pG_8(26,8)$*,* $\Sigma = \Gamma_3$ *– сильно регулярный граф с параметрами* $(729,494,331,342)$ *и неглавными собственными значениями* $8, -19$.

Пример 1.6. *Пусть* Γ *– граф с массивом пересечений* $\{31,30,17;1,2,15\}$. *Тогда* $v = 1+31+465+527 = 1024$ *и* Γ *имеет спектр* $31^1, 7^{310}, -1^{527}, -9^{186}$. *Далее,* $\bar\Gamma_3$ *– псевдогеометрический граф для сети* $pG_{15}(31,15)$*,* $\Sigma = \Gamma_3$ *– сильно регулярный граф с параметрами* $(1024,527,270,272)$ *и неглавными собственными значениями* $15, -17$.

2 Несуществование некоторых Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов

И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и М.С. Нирова [18] нашли описание Q-полиномиалных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Положим $a = a_3$. Скажем, что Γ — граф типа (I), если $c_2 + 1$ делит a, — граф типа (II), если $c_2 + 1$ делит $a + 1$, — граф типа (III), если $c_2 + 1$ не делит a и не делит $a + 1$.

Граф типа (Ii) имеет массив пересечений

$$\left\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, \frac{su^3-su}{s^2-1}\right\}.$$

Граф типа (Iii) имеет массив пересечений

$$\{\frac{(u^2w+u^2-1)(uw+u+w)}{w}, \frac{(u^2-1)u(w+1)^2}{w}, u^2(w+1); 1, \frac{(w+1)(u^2-1)}{w},$$

$$\frac{(u^2w+u^2-1)u(w+1)}{w}\}.$$

Граф типа (IIi) имеет массив пересечений

$$\left\{\frac{u^3s+u^2s^2+us-1}{s^2+1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)s^2}{s^2+1}; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)su}{s^2+1}\right\}.$$

Граф типа (IIii) имеет массив пересечений

$$\left\{\frac{u^3w^2+u^2w^2+uw-1}{w+1}, \frac{(u^2-1)uw^2}{w+1}, \frac{(u^2w+1)w}{w+1}; 1, \frac{(u^2-1)w}{w+1}, \frac{(u^2w+1)uw}{w+1}\right\}.$$

В классе графов типа (IIii) при $w = u$ возникает серия массивов пересечений $\{w^4 + w - 1, w^4 - w^3, (w^2 - w + 1)w; 1, w(w-1), (w^2 - w + 1)w^2\}$. Положим $s = w + 1$. В работе доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(s+1)^4 + s, (s+1)^4 - (s+1)^3, (s^2+s+1)(s+1); 1, (s+1)s, (s^2+s+1)(s+1)^2\}$ не существует при нечетном s.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(s+1)^4 + s, (s+1)^4 - (s+1)^3, (s^2+s+1)(s+1); 1, (s+1)s, (s^2+s+1)(s+1)^2\}$. Если число s нечетно, то Γ не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{83, 54, 21; 1, 6, 63\}$ $(s = 2)$ и $\{629, 500, 105; 1, 20, 525\}$ $(s = 4)$ не существуют.*

Теорема 3. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существуют.*

2.1 Доказательство теоремы 1

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(s+1)^4+s,(s+1)^4-(s+1)^3,(s^2+s+1)(s+1);1,(s+1)s,(s^2+s+1)(s+1)^2\}$, спектром $((s+1)^4+s)^1$, $(s^3+3s^2+4s+1)^{f(s)}$, $-1^{f(s)(s+1)^2}$, $(-s^2-s-1)^{f(s)(s+1)}$

дуальной матрицей собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & f(s) & f(s)(s+1)^2 & f(s)(s+1) \\ 1 & s^3+3s^2+4s+1 & -(s+1)^2 & -(s^2+s+1)(s+1) \\ 1 & -1 & -(s+1)^2 & (s+1)^2 \\ 1 & -s^2-s-1 & (s+1)^3 & -(s^2+s+1)(s+1) \end{pmatrix},$$

где $f(s)=s^4+4s^3+6s^2+5s+1$

Лемма 2.1.1. *Числа пересечений графа Γ равны*

(1) $p^1_{11}=s(s^2+3s+4)$, $p^1_{21}=s(s+1)^3$, $p^1_{22}=s(s^2+s+1)(s+2)(s+1)^2$, $p^1_{32}=(s^2+s+1)(s+1)^3$, $p^1_{33}=s(s^2+2s+2)(s+1)$;

(2) $p^2_{11}=s(s+1)$, $p^2_{21}=s(s^2+s+1)(s+2)$, $p^2_{22}=s(s^3+3s^2+3s+3)(s+1)^2$, $p^2_{31}=(s^2+s+1)(s+1)$, $p^2_{32}=s(s^2+s+1)(s+2)(s+1)$, $p^2_{33}=s(s^2+2s+2)(s+1)$;

(3) $p^3_{21}=(s^2+s+1)(s+1)^2$, $p^3_{22}=s(s^2+s+1)(s+2)(s+1)^2$, $p^3_{31}=s(s^2+2s+2)$, $p^3_{32}=s(s^2+2s+2)(s+1)^2$, $p^3_{33}=s(s^2+s+2)(s+1)$.

Доказательство. Утверждения проверяются непосредственно с помощью формул из [11, лемма 4.1.7] □

Лемма 2.1.2. *Пусть u,v,w — вершины графа Γ с $d(u,v)=2,d(u,w)=d(v,w)=1$, $[ijh]=\begin{bmatrix} {\scriptstyle uvw} \\ {\scriptstyle ijh}\end{bmatrix}$ и $a=[111]$. Тогда*

$[233]=(as^2-3s^3+2as-6s^2+2a-4s)(s^2+2s+2)/s^2$,

$[112]=s^2-a+s-1$.

Доказательство. Заметим, что $[113]=[123]=[131]=[133]=[213]=[231]=[311]=[313]=[321]=[331]=0$. Отсюда, сразу получаем $[312]=[132]=p^2_{13}-0=(s^2+s+1)(s+1)$, $[121]=[211]=s(s^2+3s+4)-a$ и $[112]=p^2_{11}-1=(s^2+s-1)-a$. Далее, $[122]=s(s^2+s+1)(s+2)-[121]$, $[122]=s^4+2s^3+a-2s$, $[221]=s^4+2s^4-3s-1+a$, $[211]=s^3+3s^2-a+4s$ и $[212]=s^4+2s^3+a-2s$.

Обозначим $b=[223]$. Отсюда получаем $[323]=[233]=(s^2+s+1)(s+1)^3-b$. Далее $[232]=[322]=-s^3-2s^2-2s-1+b$. Из соотношения $[221]+[222]+b=p^2_{22}$ получаем $[222]=s^6+5s^5+9s^4+10s^3+9s^2+6s+1-a-b$. Далее из соотношения $[132]+[232]+[332]=p^1_{32}-0=(s^2+s+1)(s+1)^3$, получем $[332]=s^5+4s^4+7s^3+7s^2+4s+1-b$. Наконец из соотношения $[332]+[333]=p^2_{33}-0=s(s^2+2s+2)(s+1)$ получаем $[333]=-s^5-3s^4-4s^3-3s^2-2s-1+b$.

Для завершения доказательства заметим, что $q^3_{11}=0$, отсюда мы имеем

$$S_{311}=\sum_{r,s,t=0}^{d}Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst]=0,$$

подставляя в это равенство, ранее полученные значения тройных чисел пересечений, и выражая параметр b, получаем

$$b = \frac{s^7 + 4\,s^6 - as^4 + 10\,s^5 - 4\,as^3 + 19\,s^4 - 8\,as^2 + 26\,s^3 - 8\,as + 21\,s^2 - 4\,a + 8\,s}{s^2}$$

и $[233] = (as^2 - 3s^3 + 2as - 6s^2 + 2a - 4s)(s^2 + 2s + 2)/s^2$. Лемма доказана. □

По лемме 2.1.2 выполняются неравенства

$$a > \frac{3s^3 + 6s^2 + 4s}{s^2 + 2s + 2}$$

и $a \le s^2 + s - 1$.

Кроме того, из условия целочисленности числа [233] следует делимость $4(a - 2s + 2as)$ на s^2. Если s – нечетное число, то $(2s+1)a \equiv 2s \pmod{s^2}$. Отсюда $a = 2s + ts^2$.

Заметим, что

$$\frac{3s^3 + 6s^2 + 4s}{s^2 + 2s + 2} > 2s,$$

поэтому $t \ge 1$. Однако в этом случае $s^2 + s - 1 < 2s + ts^2$, противоречие. Теорема 1 доказана.

2.2 Доказательство теоремы 2

Рассмотрим сначала дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{83, 54, 21; 1, 6, 63\}$. Этот граф имеет спектр 83^1, 29^{83}, -1^{747}, -7^{249} И дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 83 & 747 & 249 \\ 1 & 29 & -9 & -21 \\ 1 & -1 & -9 & 9 \\ 1 & -7 & 27 & -21 \end{pmatrix}$$

Лемма 2.2.1. *Числа пересечений графа* Γ *равны*

(1) $p^1_{11} = 28$, $p^1_{21} = 54$, $p^1_{32} = 189$, $p^1_{22} = 504$, $p^1_{33} = 60$;

(2) $p^2_{11} = 6$, $p^2_{12} = 56$, $p^2_{13} = 21$, $p^2_{22} = 522$, $p^2_{23} = 168$, $p^2_{33} = 60$;

(3) $p^3_{12} = 63$, $p^3_{13} = 20$, $p^3_{22} = 504$, $p^3_{23} = 180$, $p^3_{33} = 48$.

Доказательство. Утверждения проверяются непосредственно с помощью формул из [11, лемма 4.1.7] □

Лемма 2.2.2. *Пусть* u, v, w *— вершины графа* Γ *с* $d(u,v) = 2, d(u,w) = d(v,w) = 1$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ *и* $a = [111]$. *Тогда*

$[112] = -a + 5$, $[121] = [211] = -a + 28$, $[122] = [212] = a + 28$,

$[132] = [312] = 21$,

$[221] = a + 25$, $[222] = 24a + 168$, $[223] = -25a + 329$,

$[232] = [322] = -25a + 308$, $[233] = [323] = [332] = 25a - 140$,

$[332] = 25a - 140$, $[333] = -25a + 200$.

Доказательство. Заметим, что граф с массивом пересечений $\{83, 54, 21; 1, 6, 63\}$, принадлежит серии $\{(s+1)^4+s, (s+1)^4-(s+1)^3, (s^2+s+1)(s+1); 1, (s+1)s, (s^2+s+1)(s+1)^2\}$, при $s = 2$. Подставляя $s = 2$, в доказательство леммы 2.1.2, получаем требуемые равенства. $\square$

По лемме 2.2.2 имеем $[112] = -a + 5$ и $[323] = 25a - 140$. Поэтому $28/5 \leq a \leq 5$, противоречие.

Рассмотрим теперь дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{629, 500, 105; 1, 20, 525\}$. Этот граф имеет спектр $629^1, 129^{629}, -1^{15725}, -21^{3145}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 629 & 15725 & 3145 \\ 1 & 129 & -25 & -105 \\ 1 & -1 & -25 & 25 \\ 1 & -21 & 125 & -105 \end{pmatrix}$$

Лемма 2.2.3. *Числа пересечений графа* Γ *равны*

(1) $p^1_{11} = 128$, $p^1_{21} = 500$, $p^1_{32} = 2625$, $p^1_{22} = 12600$, $p^1_{33} = 520$;

(2) $p^2_{11} = 20$, $p^2_{12} = 504$, $p^2_{13} = 105$, $p^2_{22} = 12700$, $p^2_{23} = 2520$, $p^2_{33} = 520$;

(3) $p^3_{12} = 525$, $p^3_{13} = 104$, $p^3_{22} = 12600$, $p^3_{23} = 2600$, $p^3_{33} = 440$.

Доказательство. Утверждения проверяются непосредственно с помощью формул из [11, лемма 4.1.7] $\square$

Лемма 2.2.4. *Пусть* u, v, w *— вершины графа* Γ *с* $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ *и* $b = [122]$. *Тогда*

$[123] = [132] = [213] = [231] = [312] = [321] = -b + 525$, $[133] = [313] = [331] = b - 421$,

$[222] = -15b + 33075/2$, $[223] = [232] = [322] = 14b - 7875/2$, $[233] = [323] = [332] = -13b + 12025/2$ *и*

$[333] = 12b - 10305/2$.

Доказательство. Заметим, что $[111] = [112] = [113] = [121] = [131] = [211] = [311] = 0$. Из соотношений $b + [132] = p^3_{12} - 0 = 525$ и $b + [123] = p^3_{13} - 0 = 525$, получаем $[132] = [123] = 525 - b$. Равенство $[132] + [133] = p^3_{13} - 0 = 104$ влечёт $[133] = 104 - (525 - b) = b - 421$.

Положим $c = [221]$. Из соотношений $c + [321] = p^3_{31} - 0 = 525$ и $c + [231] = p^3_{21} - 0 = 525$, получаем $[321] = [231] = 525 - c$. Аналогично, $[231] + [331] = p^3_{31} - 0 = 104$ влечёт $[331] = c - 421$.

Обозначим $d = [312]$. Из соотношений $[212] + d = p^3_{32} - 0 = 525$, получим $[212] = 525 - d$. Равенство $d + [313] = p^3_{33} - 0 = 104$ влечёт $[313] = 104 - d$. Соотношение $[212] + [213] = p^3_{23} - 0 = 525$ даёт $[213] = d$.

Обозначим теперь $e = [222]$. Из соотношений $b + e + [322] = p^3_{32} - 0 = 12600$ и $c + e + [223] = p^3_{23} - 0 = 12600$ получаем $[322] = 12600 - b - e$ и $[223] = 12600 - c - e$. Равенство $d + [322] + [332] = p^3_{32} - 0 = 2600$ влечёт $[332] = b - d + e - 10000$. Далее, из $[212]+e+[232]=p^3_{22}-0=12600$, получаем $[232]=d-e+12075$. Далее $[323]=2600-(525-b)-(12600-c-e)=b+c+e-10525$. Затем, $[233]=c-d+e-10000$ и из соотношения $[333]=439-[133]-[233]$ имеем $[333]=-b-c+d-e+10860$.

Так как $q^3_{11}=q^1_{31}=q^1_{13}=0$, то $S_{311}=S_{131}=S_{113}=0$. Получаем ещё 3 уравнения: $15c-15d+2e=25200$, $15b+15c+2e=33075$ и $15b-15d+2e=25200$. Отсюда $e=-15b+33075/2$, $d=525-b$ и $c=b$. Лемма доказана. □

Противоречие с тем, что число $[222]=-15b+33075/2$ не целое. Теорема 2 доказана.

2.3 Доказательство теоремы 3

2.3.1 Граф с массивом пересечений $\{104,70,25;1,7,80\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{104,70,25;1,7,80\}$. Дуальной матрицей собственных значений является матрица [11, глава 2.3]

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 104 & 1040 & 325\\ 1 & 34 & -10 & -25\\ 1 & -1 & -10 & 10\\ 1 & -8 & 32 & -25\end{pmatrix}$$

Лемма 2.3.1. *Числа пересечений графа Γ равны*
$p^1_{11}=33$, $p^1_{21}=70$, $p^1_{32}=250$, $p^1_{22}=720$, $p^1_{33}=75$;
$p^2_{11}=7$, $p^2_{12}=72$, $p^2_{13}=25$, $p^2_{22}=742$, $p^2_{23}=225$, $p^2_{33}=75$;
$p^3_{12}=80$, $p^3_{13}=24$, $p^3_{22}=720$, $p^3_{23}=240$, $p^3_{33}=60$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 2.3.2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{104,70,25;1,7,80\}$. *Пусть u,v,w — вершины графа Γ с $d(u,v)=d(u,w)=1$, $d(v,w)=2$,* $[ijh]=\begin{bmatrix}uvw\\ ijh\end{bmatrix}$. *Тогда*
$[111]=6$, $[112]=[121]=27$, $[122]=42$,
$[211]=0$, $[212]=[221]=45$, $[213]=[231]=25$,
$[222]=450$, $[223]=[232]=225$, $[233]=0$,
$[322]=250$, $[323]=[332]=0$, $[333]=75$.

Доказательство. Заметим, что $[113]=[123]=[131]=[132]=[133]=[311]=[312]=[313]=[321]=[331]=0$, отсюда сразу получаем $[213]=p^2_{13}-0=25$ и $[231]=p^2_{13}-0=25$.

Обозначим $a=[122]$. Выразим из системы тройные числа пересечений через параметр a.

Из соотношений $[112]+a=p^1_{21}-1=69$ и $[121]+a=p^1_{21}-1=69$ получаем $[112]=[121]=-a+69$. Далее из соотношений $[121]+[221]=p^2_{12}-0=72$ и $[112]+[212]=p^2_{12}-0=72$ находим $[212]=[221]=a+3$. А из соотношения $[111]+[121]=p^1_{11}-0=33$ получаем $[111]=a-36$. Далее $[211]=6-[111]=-a+42$.

Из соотношения $a + [222] + [322] = p^2_{22} - 0 = 742$ имеем $[322] = 742 - a - b$. Далее из соотношений $[322] + [323] = p^1_{32} - 0 = 250$ и $[322] + [332] = p^1_{32} - 0 = 250$ получаем $[332] = a + b - 492$ и $[323] = a + b - 492$. Из соотношений $[223] + [323] = p^2_{23} - 0 = 225$, $[232]+[332] = p^2_{32} - 0 = 225$ и $[332]+[333] = p^1_{33} - 0 = 75$ получаем $[223] = [232] = -a-b+717$ и $[333] = -a - b + 567$. Из $[233] + [333] = p^2_{33} - 0 = 75$ получаем $[233] = a + b - 492$.

Так как для этого графа $q^3_{11} = 0$, то

$$S_{113}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst] = -41160a + 1715b + 956970 = 0.$$

Отсюда $b = 24a - 558$, $[223] = [232] = -25a + 1275$, $[322] = -25a + 1300$, $[233] = [323] = [332] = 25a - 1050$ и $[333] = -25a + 1125$.

Так как $[211] \geq 0$, то $a \leq 42$. С другой стороны, $[323] \geq 0$, поэтому $a \geq 42$. Отсюда $a = 42$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.3.3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$. *Пусть* u, v, w' *— вершины графа* Γ, $d(u, v) = 1$, $d(u, w') = 2$, $d(v, w') = 3$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw' \\ ijh \end{bmatrix}$ *и* $a' = [122]$. *Тогда*

$[112] = -a' + 72$, $[113] = a' - 39$, $[121] = 7$, $[123] = [213] = -a' + 63$,

$[212] = a'+7$, $[221] = -5a'+288$, $[222] = 24a'-630$, $[223] = -19a'+1062$, $[231] = 5a'-216$, $[232] = -25a' + 1365$, $[233] = 20a' - 900$,

$[321] = 5a' - 215$, $[322] = -25a' + 1350$, $[323] = 20a' - 885$, $[331] = -5a' + 240$, $[332] = 25a' - 1125$, $[333] = -20a' + 960$.

Где $a' \in \{45, 46, 47, 48\}$.

Доказательство. Заметим, что $[111] = [131] = [132] = [133] = [211] = [311] = [312] = [313] = 0$. Отсюда сразу получаем $[121] = p^2_{11} - 0 = 7$.

Обозначим $a' = [122]$. Выразим из системы тройные числа пересечений через параметр a'.

Из соотношения $[112] + a' = p^2_{12} - 0 = 72$ получаем $[112] = -a' + 72$. Из $[121] + a' + [123] = p^1_{12} - 0 = 70$ имеем $[123] = -a' + 63$. Из равенств $[112] + [212] = p^3_{12} - 1 = 79$ и $[112] + [113] = p^1_{11} - 0 = 33$ получим $[212] = a' + 7$ и $[113] = a' - 39$. Соотношение $[212] + [213] = p^2_{23} - 0 = 70$ даёт $[213] = 63 - a'$.

Обозначим теперь $b = [222]$. Из $a'+b+[322] = p^3_{22} - 0 = 720$ получаем $[322] = 720-a'-b$. Равенство $[322] + [332] = p^2_{32} - 0 = 225$ влечёт $[332] = a' + b - 495$. Далее, из соотношения $[232] + [332] = p^3_{32} - 0 = 240$ получаем $[232] = 735 - a' - b$.

Пусть теперь $c = [333]$. Тогда из соотношений $[323]+c = p^2_{33}-0 = 75$ и $[233]+c = p^3_{33}-0 = 60$ находим $[323] = 75 - c$ и $[233] = 60 - c$. Из $[213] + [223] + [233] = p^2_{23} - 0 = 225$ получаем $[223] = a' + c + 102$. Из $[221] + b + [223] = p^1_{22} - 0 = 720$ получаем $[221] = 618 - a' - b - c$. Равенство $[121]+[221]+[321] = p^3_{21} - 0 = 80$ влечёт $[321] = a'+b+c-545$. Из $[221]+[231] = p^2_{21} - 0 = 72$ имеем $[231] = a' + b + c - 546$. Наконец, из $[231] + [331] = p^3_{31} - 0 = 24$ получаем $[331] = 570 - a' - b - c$.

Так как для этого графа $q_{11}^3 = 0$, то

$$S_{113}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst] = -8575b - 10290c + 4476150 = 0,$$

$$S_{311}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst] = -41160a' + 1715b + 1080450 = 0.$$

Отсюда $b = 24a' - 630$ и $c = -20a' + 960$. Подставляя полученные значения для b и c получаем требуемые равенства.

Из неравенства $[332] \geq 0$ следует $a' \geq 45$, а из $[333] \geq 0$ получаем $a' \leq 48$. Лемма доказана.

Докажем теперь, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ не существует. Пусть u и v смежные вершины графа Γ. Заметим что $\left|\left\{ {uv \atop 12} \right\}\right| = p_{12}^1 = 70$ и $\left|\left\{ {uv \atop 23} \right\}\right| = p_{23}^1 = 250$. Пусть e – число пар вершин (x,y), находящихся на расстоянии 3, где $x \in \left\{ {uv \atop 12} \right\}$ и $y \in \left\{ {uv \atop 23} \right\}$.

По лемме 2.3.2 имеем $e = p_{12}^1 \cdot \left[{uvw \atop 233} \right] = 0$. С другой стороны, по лемме 2.3.3 число e удовлетворяет неравенствам $250 \cdot (-48+63) \leq e \leq 250 \cdot (-45+63)$. Отсюда $3750 \leq e \leq 4500$, противоречие. Таким образов граф с массивом $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ не существует. □

2.3.2 Граф с массивом пересечений $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$

В этом разделе мы докажем не существование дистанционно регулярного графа с массивом $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$. Тогда дуальной матрицей собственных значений является матрица [11, глава 2.3]

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 272 & 3808 & 833 \\ 1 & 62 & -14 & -49 \\ 1 & -1 & -14 & 14 \\ 1 & -16 & 64 & -49 \end{pmatrix}$$

Лемма 2.3.4. *Числа пересечений графа Γ равны*

(1) $p_{11}^1 = 61$, $p_{21}^1 = 210$, $p_{22}^1 = 2912$, $p_{32}^1 = 686$, $p_{33}^1 = 147$;

(2) $p_{11}^2 = 15$, $p_{21}^2 = 208$, $p_{22}^2 = 2962$, $p_{31}^2 = 49$, $p_{32}^2 = 637$, $p_{33}^2 = 147$;

(3) $p_{21}^3 = 224$, $p_{22}^3 = 2912$, $p_{31}^3 = 48$, $p_{32}^3 = 672$, $p_{33}^3 = 112$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 2.3.5. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$. *Пусть* u, v, w *— вершины графа Γ,* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 1$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$ *и* $a = [111]$. *Тогда выполняются следующие равенства*

$[112] = [121] = [211] = -a + 60$,

$[122] = [212] = [221] = a + 150$,

$[222] = 416a/25 + 9204/5,$
$[223] = [232] = [322] = -441a/25 + 4606/5,$
$[233] = [323] = [332] = 441a/25 - 1176/5,$
$[333] = -441a/25 + 1911/5.$

Доказательство. Заметим, что $[113] = [123] = [131] = [132] = [133] = [213] = [231] = [311] = [312] = [313] = [321] = [331] = 0$.

Обозначим $a = [111]$ и выразим тройные числа пересечений через параметр a.

Из соотношений $a + [211] = p^1_{11} - 1 = 60$, $a + [121] = p^1_{11} - 1 = 60$ и $a + [112] = p^1_{11} - 1 = 60$ получаем $[112] = [121] = [211] = -a + 60$. Аналогично из соотношений $[211] + [212] = p^1_{21} - 0 = 210$, $[211] + [221] = p^1_{21} - 0 = 210$ и $[112] + [122] = p^1_{21} - 0 = 210$ получаем $[122] = [212] = [221] = a + 150$.

Обозначим теперь $b = [222]$. Равенства $[221] + [222] + [223] = p^3_{22} - 0 = 2912$, $[212] + [222] + [232] = p^3_{22} - 0 = 2912$ и $[122] + [222] + [322] = p^3_{22} - 0 = 2912$ дают $[223] = [232] = [322] = -a - b + 2762$. Равенства $[223] + [323] = p^1_{32} - 0 = 686$, $[223] + [233] = p^1_{32} - 0 = 686$ и $[232] + [332] = p^1_{32} - 0 = 686$ дают $[323] = [233] = [332] = a + b - 2076$. Наконец из равенства $[233] + [333] = p^1_{33} - 0 = 147$ находим $[333] = -a - b + 2223$

Так как для этого графа $q^3_{11} = 0$, то

$$S_{113}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{r1}Q_{s1}Q_{t3}[rst] = -235872a + 14175b - 26093340 = 0.$$

Отсюда $b = 416a/25 + 9204/5$, $[223] = [232] = [322] = -441a/25 + 4606/5$, $[233] = [323] = [332] = 441a/25 - 1176/5$ и $[333] = -441a/25 + 1911/5$. Лемма доказана. □

Докажем теперь, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существует. Ввиду леммы 2.3.5 из соотношений $[333] \geq 0$ и $[332] \geq 0$ получаем $14 \leq a \leq 21$. С другой стороны, из условия целочисленности $[333]$ число a должно быть сравнимо с 5 по модулю 25, противоречие. Таким образов граф с массивом $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существует.

Из результатов параграфов 2.3.1 и 2.3.2 получаем что графы с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существует. Теорема 3 доказана.

3 Графы Шилла

Дистанционно регулярный граф диаметра d имеет $d+1$ различных собственных значений $k=\theta_0>\theta_1>\dots>\theta_d$. [11] Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\min\{a_3,(a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1=a_3$ по теореме 7 из [9] имеем $\theta_1=(a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2$. Графом Шилла [9; 17] называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий собственное значение θ_1, равное $a=a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b=b(\Gamma)=k/a$. Далее, $a_1=a-b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$. В [9] классифицированы графы Шилла с $b=2$ и $b=3$.

Предложение 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b=2$. Тогда Γ является одним из следующих графов:*

1. *Нечетный граф степени* 4*,*
2. *Обобщенный шестиугольник порядка* $(2,2)$*,*
3. *Граф Хэмминга* $H(3,3)$*,*
4. *Граф Тервиллигера с массивом пересечений* $\{10,6,4;1,2,5\}$*,*
5. *Граф Джонсона* $J(9,3)$.

Известные графы Шилла – это нечетный граф $O(4)$ с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$, граф Хэмминга $H(3,3)$ с массивом пересечений $\{6,4,2;1,2,3\}$, обобщенный шестиугольник $GH(2,2)$ с массивом пересечений $\{6,4,4;1,1,3\}$, граф Тервиллигера с массивом пересечений $\{10,6,4;1,2,5\}$, граф Доро с массивом пересечений $\{12,10,3;1,3,8\}$, унитарные графы на множестве неизотропных векторов с массивами пересечений $\{q(q+1),(q+2)(q-1),q+2;1,1,q^2-1\}$, q — степень простого числа, или граф Джонсона $J(9,3)$ с массивом пересечений $\{18,10,4;1,4,9\}$.

Пусть Γ является графом Шилла с $b_2=c_2$. Если собственные значения графа θ_2,θ_3 графа Γ имеют одинаковые кратности, то Γ имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2,(b-1)(b^2-b+2)/2,b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$, b сравнимо с 0 или 1 по модулю 4 [9].

Графы Шилла с $b_2=c_2$ изучались также в [19; 20] Для двупараметрического семейства массивов пересечений $\{2r^2(2r+1)(2lr-(l+1)),(2r-1)(2r^2(2lr-(l+1))+r(2lr-(l+1))+1),r^2l(2r-1);1,r^2l(2r-1),r(2lr-(l+1))(4r^2-1)\}$ существует лишь конечное число графов ($(l,r)\in\{(1,2),(2,1),(4,1),(6,1)\}$) (см. теорема 2 из [20].

Предложение 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b=3$. Тогда Γ имеет один из следующих массивов пересечений* $\{12,10,5;1,1,8\}$, $\{12,10,2;1,2,8\}$, $\{12,10,3;1,3,8\}$, $\{15,12,6;1,2,10\}$, $\{24,18,9;1,1,16\}$, $\{27,20,10;1,2,18\}$, $\{30,22,9;1,3,20\}$, $\{42,30,12;1,6,28\}$, $\{60,42,18;1,6,40\}$, $\{69,48,24;1,4,46\}$, $\{93,64,24;1,6,62\}$, $\{105,72,24;1,12,70\}$.

Известны существование и единственность графа с массивом пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$ (это унитарный неизотропный граф с $q = 4$). Существует единственный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ (это граф Доро). В [21; 22], и [23] доказано, что графы Шилла с массивами пересечений $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существуют. Зюляркина Н.Д. и Махнев А.А. нашли возможные автоморфизмы графа Шилла с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ [24].

3.1 Граф с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$

В данной главе исследуются свойства графа Шилла Γ с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$. Этот граф имеет спектр $12^1, 4^{22}, 1^{32}, -4^{33}$ и $v = 1+12+60+15 = 88$ вершин. Далее, граф Γ_2 является реберно регулярным графом Деза с параметрами $(88, 60, 40, 44)$ и $\lambda(\Gamma_2) = 40$. Аналогично, граф Γ_3 является реберно регулярным графом Деза с параметрами $(88, 15, 5, 2)$ и $\lambda(\Gamma_3) = 2$. Так как $15 = 3(1 + 4)$, то 4-клика C из Γ_3 является 1-кодом, совершенным относительно последней окрестности.

Предложение 3. *Граф Шилла с массивом пересечений* $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ *не содержит* 1*-кодов, совершенных относительно последней окрестности.*

Теорема 4. *Граф Шилла с массивом пересечений* $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ *не существует.*

В классе графов Шилла с $b = 3$ остались неизученными только графы с массивами пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$ и $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$. Автоморфизмы графов с массивами пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ и $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$ изучены А.А. Махневым и К.С. Ефимовым, А.А. Махневым соответственно.

Пусть Σ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\Gamma = \Sigma_2$. Тогда Γ — реберно регулярный граф с параметрами $(88, 60, 40)$.

Лемма 3.1.1. *Для ненулевых чисел пересечений графа* Σ *верны равенства*

(1) $p^1_{11} = 1$, $p^1_{12} = 10$, $p^1_{22} = 40$, $p^1_{23} = 10$, $p^1_{33} = 5$;

(2) $p^2_{11} = 2$, $p^2_{12} = 8$, $p^2_{13} = 2$, $p^2_{22} = 40$, $p^2_{23} = 11$, $p^2_{33} = 2$;

(3) $p^3_{12} = 8$, $p^3_{13} = 4$, $p^3_{22} = 44$, $p^3_{23} = 8$, $p^3_{33} = 2$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 3.1.2. *Пусть* $u, w \in \Gamma$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если вершины* u, w *смежны в* Γ, *то* Γ *содержит* 40 *вершин из* $[u] \cap [w]$, *по* 19 *вершин из* $[u] - w^\perp$, $[w] - u^\perp$ *и* 8 *вершин вне* $u^\perp \cup w^\perp$;

(2) *если вершины* u, w *не смежны в* Γ *и* $|[u] \cap [w]| = 40$, *то* Γ *содержит по* 20 *вершин из* $[u]-w^\perp$, $[w]-u^\perp$ *и* 6 *вершин вне* $u^\perp \cup w^\perp$, *причем* $\Gamma-(u^\perp \cup w^\perp)$ *содержит единственную вершину из* $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ *и* 5 *вершин из* $\Sigma_3(u) \cap \Sigma_3(w)$;

(3) *если вершины* u, w *не смежны в* Γ *и* $|[u] \cap [w]| = 44$, *то* Γ *содержит по* 16 *вершин из* $[u] - w^\perp$, $[w] - u^\perp$ *и* 10 *вершин вне* $u^\perp \cup w^\perp$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 3.1.3. *Пусть $\{u, w, z\}$ является кликой в Σ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $[z]$ содержит α вершин из $[u] \cap [w]$, то $\Gamma(z)$ содержит по $40 - \alpha$ вершин из $[u] - w^{\perp}$, $[w] - u^{\perp}$ и $\alpha - 20$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$, поэтому $20 \leq \alpha \leq 25$;*

(2) *если $\alpha \leq 22$, то $25 - \alpha$ вершин из $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp} \cup z^{\perp})$ лежат на расстоянии 3 в Σ от u, w, z и индуцируют клику в Σ, поэтому $\alpha = 22$.*

Доказательство. Пусть $[z]$ содержит α вершин из $[u] \cap [w]$. Тогда $\Gamma(z)$ содержит по $40 - \alpha$ вершин из $[u] - w^{\perp}$, $[w] - u^{\perp}$ и $\alpha - 20$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$, поэтому $20 \leq \alpha \leq 25$.

Если $\alpha \leq 22$, то $25 - \alpha$ вершин из $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp} \cup z^{\perp})$ лежат на расстоянии 3 в Σ от u, w, z и индуцируют клику в Σ. Так как $a_1(\Sigma) = 1$, то $\alpha = 22$. □

Лемма 3.1.4. *Пусть $\Sigma_3(z)$ содержит смежные в Σ вершины u, w и $[z]$ содержит β вершин из $[u] \cap [w]$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\Gamma(z)$ содержит по $44 - \beta$ вершин из $[u] - w^{\perp}$, $[w] - u^{\perp}$ и $\beta - 28$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$, поэтому $28 \leq \beta \leq 33$;*

(2) *если $y \in \Sigma(u) \cap \Sigma(w)$, $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp} \cup z^{\perp})$ содержит вершину z', лежащую на расстоянии 3 в Σ от u, z, то $\{u, w\} = \Sigma_3(z) \cap \Sigma_3(z')$ и $y \in \Sigma_2(z) \cup \Sigma_2(z')$.*

Доказательство. Пусть $[z]$ содержит β вершин из $[u] \cap [w]$. Тогда $\Gamma(z)$ содержит по $44 - \beta$ вершин из $[u] - w^{\perp}$, $[w] - u^{\perp}$ и $\beta - 28$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$. Заметим, что $33 - \beta$ вершин из $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp} \cup z^{\perp})$ лежат на расстоянии 1 или 3 в Σ от u, w, z, поэтому $28 \leq \beta \leq 33$.

Если $y \in \Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ и $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp} \cup z^{\perp})$ содержит вершину z', лежащую на расстоянии 3 в Σ от u, z, то $\{u, w\} = \Sigma_3(z) \cap \Sigma_3(z')$ и $y \in \Sigma_2(z) \cup \Sigma_2(z')$. □

Лемма 3.1.5. *Пусть $\{u, w, z\}$ является кликой в Σ_3. Если $[z]$ содержит γ вершин из $[u] \cap [w]$, то $\Gamma(z)$ содержит по $44 - \gamma$ вершин из $[u] - w^{\perp}$, $[w] - u^{\perp}$ и $\gamma - 28$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$, поэтому $28 \leq \gamma \leq 37$.*

Доказательство. Если $[z]$ содержит γ вершин из $[u] \cap [w]$, то $\Gamma(z)$ содержит по $44 - \gamma$ вершин из $[u] - w^{\perp}$, $[w] - u^{\perp}$ и $\gamma - 28$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$. Далее, $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp} \cup z^{\perp})$ содержит $37 - \gamma$ вершин. Заметим, что $37 - \gamma$ вершин из $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp} \cup z^{\perp})$ лежат на расстоянии 1 или 3 в Σ от u, w, z, поэтому $28 \leq \gamma \leq 37$. □

Лемма 3.1.6. *Граф Σ_3 не содержит 4-клик.*

Доказательство. Пусть Σ_3 содержит 4-клику $\{u, w, y, z\}$. Тогда $\{\Sigma_3(y) \cap (\{u\} \cup \Sigma(u)), \Sigma_3(y) \cap (\{w\} \cup \Sigma(w)), \Sigma_3(y) \cap (\{z\} \cup \Sigma(z))\}$ образует разбиение $\Sigma_3(y)$.

Отсюда $\{\{u\} \cup \Sigma(u), \{w\} \cup \Sigma(w), \{y\} \cup \Sigma(y), \{z\} \cup \Sigma(z)\}$ содержит 64 вершины, а оставшиеся 24 вершины попадают в $[u] \cap [w] \cap [y] \cap [z]$. Но в этом случае $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит 24 вершины, противоречие с леммой 3.1.5. Лемма доказана. □

Из леммы 3.1.6 следует предложение 3

Лемма 3.1.7. *Пусть $\Sigma_2(z)$ содержит смежные в Σ вершины u, w и $[z]$ содержит δ вершин из $[u] \cap [w]$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\Gamma(z)$ содержит по $40 - \delta$ вершин из $[u] - w^{\perp}$, $[w] - u^{\perp}$ и $\delta - 24$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$, поэтому $24 \le \delta \le 34$;*

(2) *либо z смежна с вершиной из $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ и $\Gamma_3(z)$ содержит единственную вершину из $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(w)$, либо z не смежна с вершиной из $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ и $\Gamma_3(z)$ содержит две вершины из $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(w)$.*

Доказательство. Пусть $[z]$ содержит δ вершин из $[u] \cap [w]$. Тогда $\Gamma(z)$ содержит по $40 - \delta$ вершин из $[u] - w^{\perp}$, $[w] - u^{\perp}$ и $\delta - 24$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$. Аналогично, $\Gamma(u)$ содержит $40 - \delta$ вершин из $[z] - w^{\perp}$, $43 - \delta$ вершин из $[w] - z^{\perp}$ и $\delta - 24$ вершин вне $w^{\perp} \cup z^{\perp}$. Отсюда $34 - \delta$ вершин из $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp} \cup z^{\perp})$ лежат на расстоянии 1 или 3 в Σ от u, w, z, поэтому $24 \le \delta \le 34$.

С дугой стороны, по лемме 3.1.2 ровно 8 вершин лежит вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$, поэтому либо z смежна с вершиной из $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ и $\Gamma_3(z)$ содержит единственную вершину из $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(w)$, либо z не смежна с вершиной из $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ и $\Gamma_3(z)$ содержит две вершины из $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(w)$. □

Завершим доказательство теоремы. Ввиду леммы 3.1.7 в $\Sigma_2(u) \cap \Sigma_2(w)$ имеется ровно 30 вершин, находящихся на расстоянии 3 от пар вершин из $\Sigma_3(u) \cap \Sigma_3(w)$. С другой стороны, в $\Sigma_3(u) \cap \Sigma_3(w)$ имеется 10 пар вершин, находящихся на расстоянии 3 в Σ от трех вершин, отличных от u, w. Отсюда любая пара вершин из $\Sigma_3(u) \cap \Sigma_3(w)$ является 2-кликой, поэтому $\Sigma_3(u) \cap \Sigma_3(w)$ является 5-кликой, противоречие с тем, что в Σ нет 4-клик. Теорема 4 доказана.

3.2 Графы Шилла с $b_2 = c_2$

Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = c_2$. Если собственные значения графа θ_2, θ_3 графа Γ имеют одинаковые кратности, то Γ имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$, b сравнимо с 0 или 1 по модулю 4 [9].

Графы Шилла с $b_2 = c_2$ изучались также в [19; 20] Для двупараметрического семейства массивов пересечений $\{2r^2(2r+1)(2lr-(l+1)), (2r-1)(2r^2(2lr-(l+1)) + r(2lr-(l+1)) + 1), r^2 l(2r-1); 1, r^2 l(2r-1), r(2lr-(l+1))(4r^2-1)\}$ существует лишь конечное число графов ($(l, r) \in \{(1,2), (2,1), (4,1), (6,1)\}$) (см. теорема 2 из [20].

В работе [25] найдены следующие бесконечные серии допустимых массивов пересечений графов Шилла:

1. $\{(2c_2-1)c_2(2c_2^2-1), 2c_2^2((2c_2-1)c_2-1), 2c_2^2; 1, c_2, (2c_2^2-1)((2c_2-1)c_2-1)\}$;

2. $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$;

3. $\{b(b+1), (b+2)(b-1), b+2; 1, 1, b^2-1\}$;

4. $\{2b(b-1), (2b-1)(b-1), 2b-1; 1, 1, 2(b-1)^2\}$;

5. $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$, $s > 2$.

Основным результатом данной главы является изучение графов Шилла с массивами пересечений из этих серий.

Заметим, что в серии $\{2b(b-1), (2b-1)(b-1), 2b-1; 1, 1, 2(b-1)^2\}$ имеется только 3 допустимых массива пересечений $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$, $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$ и $\{84, 78, 13; 1, 1, 72\}$.

Теорема 5. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$. *Тогда* $b \in \{2, 3\}$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$. *Тогда* $b = 2$ *и* Γ *— обобщенный шестиугольник порядка* $(2, 2)$ *с массивом пересечений* $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$.

Теорема 6. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$ *не существует.*

Граф Шилла Γ с массивом пересечений $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$ является Q-полиномиальным.

Теорема 7. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$ *не существует.*

Доказательство следствия 1 и теоремы 6 опирается на вычисление тройных чисел пересечений [14].

Пусть $b = 3$ и Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$. Тогда Γ имеет $1 + 24 + 432 + 243 = 700$ вершин, спектр: $24^1, 8^{175}, -1^{224}, -4^{300}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 175 & 224 & 300 \\ 1 & \frac{175}{3} & -\frac{28}{3} & -50 \\ 1 & 0 & -\frac{28}{3} & \frac{25}{3} \\ 1 & -\frac{175}{27} & \frac{448}{27} & -\frac{100}{9} \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.2.1. *Числа пересечений графа* Γ *равны*

(1) $p^1_{11} = 5$, $p^1_{21} = 18$, $p^1_{32} = 162$, $p^1_{22} = 252$, $p^1_{33} = 81$;

(2) $p^2_{11} = 1$, $p^2_{12} = 14$, $p^2_{13} = 9$, $p^2_{22} = 264$, $p^2_{23} = 153$, $p^2_{33} = 81$;

(3) $p^3_{12} = 16$, $p^3_{13} = 8$, $p^3_{22} = 272$, $p^3_{23} = 144$, $p^3_{33} = 90$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$, $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 264 на 432 вершинах.

Лемма 3.2.2. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 1$. *Тогда выполняются равенства:*

$[111] = -r_1+1$, $[112] = [121] = r_5$, $[122] = -r_2-r_1+14$, $[123] = [132] = r_2$, $[133] = -r_2+9$;

$[211] = r_1 - r_3 - r_2 + 148$, $[212] = [221] = -r_1 + r_3 + r_2 - 135$, $[222] = r_2 + r_1 - r_2 + 237$, $[223] = [232] = -r_2 - r_3 + 162$, $[233] = r_2 + r_3 - 9$;

$[311] = r_3 + r_2 - 144$, $[312] = [321] = -r_3 - r_2 + 153$, $[322] = r_2$, $[323] = [332] = r_3$, $[333] = -r_3 + 81$,

где $r_2 \in \{0, 1, ..., 9\}$, $r_1 \in \{0, 1\}$, $r_3 \in \{0, 1, ..., 81\}$ *и* $r_2 \in \{63, 64, ..., 149\}$.

Доказательство. Вычисление с помощью системы `SageMath` [26] и пакета `sage-drg` [27; 28] □

Имеем $p^2_{23} = 153$, поэтому $[223] = -r_2 - r_3 + 162 \leq 153$ и $9 \leq r_2 + r_3$. По лемме 3.2.2 имеем $88 \leq [222] = r_2+r_1-r_2+237 \leq 184$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит $530-[222]$ вершин, то $98 \leq [222] \leq 184$.

Лемма 3.2.3. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 3$. *Тогда, либо* $[112] = 0$ *и выполняются равенства:*

(1) $[112] = [121] = 0$, $[113] = [131] = 1$, $[122] = -r_1+14$, $[123] = [132] = r_1$, $[133] = -r_1+8$;

(2) $[212] = r_3 + 7$, $[213] = -r_3 + 7$, $[221] = -r_4 + 14$, $[222] = -r_8 - r_3 + 257$, $[223] = r_8 + r_3 + r_4 - 7$, $[231] = r_4$, $[232] = r_8$, $[233] = -r_8 - r_4 + 152$;

(3) $[312] = -r_3 + 9$, $[313] = r_3$, $[321] = r_4 + 2$, $[322] = r_1 + r_8 + r_3$, $[323] = -r_1 - r_8 - r_3 - r_4 + 151$, $[331] = -r_4 + 7$, $[332] = -r_1 - r_8 + 144$, $[333] = r_1 + r_8 + r_4 - 70$,

$r_1 \in \{0, 1, ..., 8\}$, $r_8 \in \{55, 56, ..., 151\}$, $r_4 \in \{0, 1, ..., 7\}$, $r_3 \in \{0, 1, ..., 7\}$;

Либо $[112] = 1$ *и выполняются равенства:*

(4) $[112] = [121] = 1$, $[113] = [131] = 0$, $[122] = -r_1+13$, $[123] = [132] = r_1$, $[133] = -r_1+9$;

(5) $[212] = r_3 + 6$, $[213] = -r_3 + 8$, $[221] = -r_4 + 14$, $[222] = -r_8 - r_3 + 258$, $[223] = r_8 + r_3 + r_4 - 8$, $[231] = r_4$, $[232] = r_8$, $[233] = -r_8 - r_4 + 152$;

(6) $[312] = -r_3 + 9$, $[313] = r_3$, $[321] = r_4 + 1$, $[322] = r_1 + r_8 + r_3$, $[323] = -r_1 - r_8 - r_3 - r_4 + 152$, $[331] = -r_4 + 8$, $[332] = -r_1 - r_8 + 144$, $[333] = r_1 + r_8 + r_4 - 71$,

$r_1 \in \{0, 1, ..., 9\}$, $r_8 \in \{54, 55, ..., 151\}$, $r_4 \in \{0, 1, ..., 8\}$, $r_3 \in \{0, 1, ..., 8\}$.

Доказательство. Упрощения формул из системы (1) дают равенства

$[112] = [112]$, $[113] = -[112]+1$, $[121] = r_9$, $[122] = -r_1-r_9+14$, $[123] = r_1$, $[131] = -r_9+1$, $[132] = r_1 + r_9 - [112]$, $[133] = -r_1 + [112] + 8$;

$[212] = -[112]+r_3+7$, $[213] = [112]-r_3+7$, $[221] = -r_4+14$, $[222] = -r_8+[112]-r_3+257$, $[223] = r_8 - [112] + r_3 + r_4 - 7$, $[231] = r_4$, $[232] = r_8$, $[233] = -r_8 - r_4 + 152$;

$[312] = -r_3 + 9$, $[313] = r_3$, $[321] = -r_9 + r_4 + 2$, $[322] = r_1 + r_9 + r_8 - [112] + r_3$, $[323] = -r_1 - r_8 + [112] - r_3 - r_4 + 151$, $[331] = r_9 - r_4 + 7$, $[332] = -r_1 - r_9 - r_8 + [112] + 144$, $[333] = r_1 + r_8 - [112] + r_4 - 70$,

где $r_1, r_4 \in \{0, 1, ..., 14\}$, $r_9 \in \{0, 1, ..., 7\}$, $r_8 \in \{0, 1, ..., 152\}$, $[112] \in \{0, 1\}$, $r_3 \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Симметризация. Верны равенства $[112] = [112] = [121]' = r'_9$, $[122] = -r_1 - r_9 + 14$, поэтому $r_1 + r_9 = r'_1 + r'_9$, Далее, $[212] = -[112] + r_3 + 7 = [221]' = -r_4' + 14$, поэтому $-[112] + r_3 + r_4' = 7$, $[233] = -r_8 - r_4 + 152$ и $r_8 + r_4 = r_8' + r_4'$.

Пусть $[112] = 0$. Тогда $r_9' = 0$, $r_1 + r_9 = r_1' = r_1$ и $r_3 + r_4' = 7$. Отсюда $r_9 = 0$ и выполняются равенства (1–3).

Пусть $[112] = 1$. Тогда $r_9' = 1$, $r_1 + r_9 = r_1' + 1 = r_1 + 1$ и $r_3 + r_4' = 8$. Отсюда $r_9 = 1$ и и выполняются равенства (4–6). $\square$

По лемме 3.2.3 имеем $99 \le [222] = -r_8 + [112] - r_3 + 257 \le 204$.

Лемма 3.2.4. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. Тогда, либо $[112] = 1$ и выполняются равенства:*

(1) $[111] = 0$, $[112] = [121] = 1$, $[113] = [131] = 0$, $[122] = 13 - r_{13}$, $[123] = [132] = r_{13}$, $[133] = 9 - r_{13}$;

(2) $[211] = 1$, $[212] = [221] = 13 - r_{13}$, $[213] = [231] = r_{13}$, $[222] = r_{13} - r_{11} + 250$, $[223] = [232] = r_{11}$, $[233] = -r_{13} - r_{11} + 153$;

(3) $[311] = 0$, $[312] = [321] = r_{13}$, $[313] = [331] = -r_{13} + 9$, $[322] = r_{11}$, $[323] = [332] = -r_{13} - r_{11} + 153$, $[333] = 2r_{13} + r_{11} - 81$;

Либо $[113] = 1$ и выполняются равенства:

(4) $[111] = [112] = [121] = 0$, $[113] = [131] = 1$, $[122] = 14 - r_{13}$, $[123] = [132] = r_{13}$, $[133] = 8 - r_{13}$;

(5) $[211] = 0$, $[212] = [221] = 14 - r_{13}$, $[213] = [231] = r_{13}$, $[222] = r_{13} - r_{11} + 249$, $[223] = [232] = r_{11}$, $[233] = -r_{13} - r_{11} + 153$;

(6) $[311] = 1$, $[312] = [321] = r_{13}$, $[313] = [331] = -r_{13} + 8$, $[322] = r_{11}$, $[323] = [332] = -r_{13} - r_{11} + 153$, $[333] = 2r_{13} + r_{11} - 80$;

Либо $[112] = [113] = 0$ и выполняются равенства:

(7) $[111] = 1$, $[112] = [121] = [113] = [131] = 0$, $[122] = 14 - r_{13}$, $[123] = [132] = r_{13}$, $[133] = 9 - r_{13}$;

(8) $[211] = 0$, $[212] = [221] = 14 - r_{13}$, $[213] = [231] = r_{13}$, $[222] = r_{13} - r_{11} + 249$, $[223] = [232] = r_{11}$, $[233] = -r_{13} - r_{11} + 153$;

(9) $[311] = 0$, $[312] = [321] = r_{13}$, $[313] = [331] = -r_{13} + 9$, $[322] = r_{11}$, $[323] = [332] = -r_{13} - r_{11} + 153$, $[333] = 2r_{13} + r_{11} - 81$,

где $r_{13} \in \{0, 1, ..., 9\}$, $r_{11} \in \{63, 64, ..., 153\}$.

Доказательство. Упрощения формул из системы (1) дают равенства

$[111] = -r_{13} - r_{11} - [112] + r_{13} - [113] + r_{12} + 1$, $[112] = [112]$, $[113] = r_{13} + r_{11} - r_{13} + [113] - r_{12}$, $[121] = r_{10}$, $[122] = r_{11}$, $[123] = -r_{11} - r_{10} + 14$, $[131] = r_{13} + r_{11} + [112] - r_{13} - r_{10} + [113] - r_{12}$, $[132] = -[112] - r_{11} + 14$, $[133] = -r_{13} - r_{11} + r_{11} + r_{13} + r_{10} - [113] + r_{12} - 5$;

$[211] = r_{13} + r_{11} + [112] - r_{13} - r_{12}$, $[212] = -r_{13} - [112] + 14$, $[213] = -r_{11} + r_{13} + r_{12}$, $[221] = -r_{13} - r_{11} - [112] + r_{12} + 14$, $[222] = r_{13} + [112] - r_{12} + 249$, $[223] = r_{11}$, $[231] = r_{13}$, $[232] = r_{12}$, $[233] = -r_{13} - r_{12} + 153$;

$[311] = [113]$, $[312] = r_{13}$, $[313] = -r_{13} - [113] + 9$, $[321] = r_{13} + r_{11} + [112] - r_{10} - r_{12}$, $[322] = -r_{13} - [112] - r_{11} + r_{12} + 14$, $[323] = -r_{11} + r_{11} + r_{10} + 139$, $[331] = -r_{13} - r_{11} - [112] + r_{10} - [113] + r_{12} + 9$, $[332] = [112] + r_{11} - r_{12} + 139$, $[333] = r_{13} + r_{11} - r_{11} - r_{10} + [113] - 67$,

где $r_{13}, [113] \in \{0, 1, ..., 9\}$, $r_{11} \in \{0, 1, ..., 167\}$, $[112], r_{11}, r_{10} \in \{0, 1, ..., 14\}$, $r_{13}, r_{12} \in \{0, 1, ..., 153\}$.

Симметризация. Верны равенства $[112] = [112] = [112]^*$, $[121] = r_{10} = r^{\sim}_{10}$, $[112] = r'_{10}$, $[122] = r_{11} = r'_{11}$, $[223] = r_{11} = r^*_{11}$, $[232] = r_{12} = r^{\sim}_{12}$, $[311] = [113] = [113]'$, $[231] = r_{13}$, $[312] = r_{13}$ и $r^*_{13} = r'_{13}$.

Так как $[112] = [112] = [112]^*$, то $[112]' = [112]^{\sim}$, поэтому $[121] = r_{10} = [211] = r_{13} + r_{11} + [112] - r_{13} - r_{12}$ и $r_{13} + r_{11} + [112] = r_{13} + r_{10} + r_{12}$. Аналогично, $[121] = r_{10} = r^{\sim}_{10}$ влечет $r'_{10} = r^*_{10}$, поэтому $[112] = [112] = [211] = r_{13} + r_{11} + [112] - r_{13} - r_{12}$ и $[112] = r_{10}$. Отсюда $[112] = [112]' = [112]^* = [112]^{\sim}$ и $r_{10} = r'_{10} = r^*_{10} = r^{\sim}_{10}$.

Далее, $[122] = r_{11} = r'_{11}$ влечет $r^*_{11} = r^{\sim}_{11}$, поэтому $[212] = -r_{13} - [112] + 14 = [221] = -r_{13} - r_{11} - [112] + r_{12} + 14$ и $r_{11} = r_{12}$. Теперь из равенства $r_{13} + r_{11} + [112] = r_{13} + r_{10} + r_{12}$ следует, что $r_{13} = r_{13}$. Аналогично, $[223] = r_{11} = r^*_{11}$ влечет $r'_{11} = r^{\sim}_{11}$, следовательно, $[232] = r_{12} = [322] = -r_{13} - [112] - r_{11} + r_{12} + 14$ и $r_{13} + [112] + r_{11} = 14$.

Отсюда следуют равенства

$[111] = -[112] - [113] + 1$, $[112] = [121] = [112]$, $[113] = [131] = [113]$, $[122] = r_{11}$, $[123] = [132] = r_{13}$, $[133] = 9 - r_{13} - [113]$;

$[211] = [112]$, $[212] = [221] = r_{11}$, $[213] = [231] = r_{13}$, $[222] = -r_{11} - r_{11} + 263$, $[223] = [232] = r_{11}$, $[233] = -r_{13} - r_{11} + 153$;

$[311] = [113]$, $[312] = [321] = r_{13}$, $[313] = [331] = -r_{13} - [113] + 9$, $[322] = r_{11}$, $[323] = [332] = -r_{13} - r_{11} + 153$, $[333] = 2r_{13} + r_{11} + [113] - 81$,

где $[112] + [113] \leq 1$, $r_{13} + [113] \leq 9$, $r_{13} + r_{11} \leq 153$, $r_{11} + r_{11} \leq 167$.

Допустим, что $[112] = 1$. Тогда $[113] = 0$, $r_{13} + r_{11} = 13$ и выполняются равенства из пунктов (1–3) заключения леммы.

Допустим, что $[113] = 1$. Тогда $[112] = 0$, $r_{13} + r_{11} = 14$ и выполняются равенства из пунктов (4–6) заключения леммы.

Допустим, что $[113] = [112] = 0$. Тогда $r_{13} + r_{11} = 14$ и выполняются равенства из пунктов (7–9) заключения леммы. $\square$

По лемме 3.2.4 имеем $96 \leq [222] \leq 190$.

Пусть $d(u, v) = 2$. Подсчитаем число g пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 21} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны $p^2_{21} = 14$, по лемме 3.2.2 имеем $[212] = -r_1 + r_3 + r_2 - 135 \leq 95$ ($r_1 \in \{0, 1\}$, $r_3 \in \{0, 1, ..., 81\}$, $r_2 \in \{63, 64, ..., 149\}$) и $g \leq 1330$. С другой стороны, $p^2_{22} = 264$, по лемме 3.2.4 имеем $[212] = 14 - r_{13}$ и $g = 3696 - \sum_i r^i_{13} \leq 1330$. Поэтому $2366 \leq \sum_i r^i_{13}$ и $10.1 \leq \sum_i r^i_{13}/264$. Противоречие с тем, что $r_{13} \leq 9$.

Полученное противоречие завершает доказательство следствия 1.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$. Тогда число вершин равно $(b^2-b+1)(b^2+1)$, Γ имеет спектр $(b^3-b^2)/2^1$, $(b^2-b)/2^{(b^2-b+1)b}$, $(-b\pm\sqrt{b^3-b^2+b})/2^{(b^2-b+2)(b-1)b/2}$, и дуальную матрицу Q собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & (b^2-b+1)b & \frac{1}{2}(b^2-b+2)(b-1)b & \frac{1}{2}(b^2-b+2)(b-1)b \\ 1 & b^2-b+1 & -\frac{\left(b^2-b+2\right)\left(b-\sqrt{b^3-b^2+b}\right)}{2b} & -\frac{\left(b^2-b+2\right)\left(b+\sqrt{b^3-b^2+b}\right)}{2b} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{b^3-b^2+b}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{b^3-b^2+b}-\frac{1}{2} \\ 1 & -b^2+b-1 & \frac{1}{2}\left(b+\sqrt{b^3-b^2+b}\right)(b-1) & \frac{1}{2}\left(b-\sqrt{b^3-b^2+b}\right)(b-1) \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.2.5. *Для чисел пересечений графа* Γ *верны равенства*

$p^1_{11}=(b-3)b/2$, $p^1_{21}=(b^2-b+2)(b-1)/2$, $p^1_{32}=(b^2-b+2)(b-1)/2$, $p^1_{22}=(b^2-b+2)(b-1)^2$, $p^1_{33}=(b^2-b+2)/2$;

$p^2_{11}=(b-1)b/4$, $p^2_{12}=(b-1)^2b/2$, $p^2_{13}=(b-1)b/4$, $p^2_{22}=b^4-3b^3+5b^2-4b-1$, $p^2_{23}=(b^2-2b+3)b/2$, $p^2_{33}=(b-1)b/4$;

$p^3_{12}=(b-1)^2b/2$, $p^3_{13}=(b-1)b/2$, $p^3_{22}=(b^2-2b+3)(b-1)b$, $p^3_{23}=(b-1)^2b/2$, $p^3_{33}=b-1$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Зафиксируем вершины u,v,w графа Γ и положим $\{ijh\}=\left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh]=\left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Лемма 3.2.6. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=1$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*

$[111]=b^4-7b^3/2+13b^2/2-6b-r_3-r_3-r_3$, $[121]=[211]=-b^4+7b^3/2-25b^2/4+23b/4+r_3+r_3+r_3$, $[122]=b^4-7b^3/2+13b^2/2-7b-r_3-r_3-r_3+1$, $[123]=[132]=b^3/2-5b^2/4+7b/4+r_3-r_3-1$, $[133]=-b^3/2+3b^2/2-2b-r_3+r_3+1$;

$[211]=-b^4+7b^3/2-6b^2+9b/2+r_3+r_3$, $[212]=[221]=b^4-3b^3+5b^2-4b-r_3-r_3-1$, $[222]=r_3$, $[223]=[232]=r_3$, $[233]=b^3/2-b^2+3b/2-r_3$;

$[311]=r_3$, $[312]=[321]=b^2/4-b/4-r_3$, $[322]=b^3/2-3b^2/2+2b+r_3+r_3$, $[323]=[332]=b^2/4-b/4-r_3$, $[333]=r_3$.

Доказательство. Вычисление с помощью системы `SageMath` [26] и пакета `sage-drg` [27; 28] □

По лемме 3.2.6 имеем $[233]=b^3/2-b^2+3b/2-r_3\geq 0$, поэтому $[222]=r_3\leq b^3/2-b^2+3b/2$.

Положим $\Delta=\Gamma_2(u)$, $\Lambda=\Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени $p^2_{22}=b^4-3b^3+5b^2-4b-1$ на $k_2=(b^2-b+2)(b^2-b)=b^4-2b^3+3b^2-2b$ вершинах. Пусть $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=1$. Тогда $\Lambda(v)\cap\Lambda(w)$ содержит не менее $b^4-4b^3+7b^2-6b-1$ вершин. Поэтому $b^4-4b^3+7b^2-6b-1\leq b^3/2-b^2+3b/2$ и $b^4+8b^2\leq 9b^3/2+15b/2+1$. Отсюда $b\leq 4$.

Но в случае $b=3$ имеем $b^4+8b^2=153$, $9b^3/2+15b/2+1=121.5+22.5+1=145$, противоречие. Аналогично, в случае $b=4$ имеем $b^4+8b^2=256+128=384$, $9b^3/2+15b/2+1=288+30+1=319$, противоречие.

Теорема 6 доказана.

Пусть Γ является графом Шилла с массивом пересечений $\{(s+1)(s^3-1),s^4,s^3;1,s^2,s(s^3-1)\}$. Многочлен Тервелигера (см. [29]) графа Γ равен $-s(s^3-s^2-$

$s-x-1)(s^3-sx-s-x-1)(s+x+1)(x+1)$, поэтому собственные значения локального подграфа принадлежат $[-s-1,-1]\cup[(s^3-s-1)/(s+1), s^3-s^2-s-1]$. С другой стороны по предложению 4.4.3 из [11] следует, что собственные значения локального подграфа принадлежат отрезку $[-s^4/(s^3-1)-1, s^4/(s^2+s+1)-1]$.

Положим $A=(s^3-s-1)/(s+1)$, $B=s^4/(s^2+s+1)-1$. Тогда $B-A=(s^4(s+1)-(s^3-s-1)(s^2+s+1)-(s+1)(s^2+s+1))/((s+1)(s^2+s+1))=-s^3/((s+1)(s^2+s+1))<0$, поэтому $B<A$ и все неглавные собственные значения локального подграфа отрицательны. Отсюда локальный подграф является объединением изолированных (a_1+1)-клик. Противоречие с тем, что $a_1+1=s^3-s-1$ не делит $k=(s+1)(s^3-1)$.

Теорема 7 доказана.

4 Автоморфизмы

4.1 Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$

В этом разделе обозначения конечных групп будут даны в соответствии с [30].

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен, то по теореме 1 из [17] граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Обратно для графа $\bar{\Gamma}_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(l,t)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{l, tc_2, l-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$.

В работе [42] изучены массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_t(l,t)$. В случае $c_2 = 1$ имеется всего четыре примера таких графов с $v \leq 3200$.

Пример 4.1. *Пусть* Γ *– граф Сильвестра с массивом пересечений* $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$*. Тогда* $v = 1 + 5 + 20 + 10 = 36$ *и* Γ *имеет спектр* $5^1, 2^{16}, -1^{10}, -3^9$*. Далее, граф* Γ_3 *изоморфен* 6×6*-решетке.*

Пример 4.2. *Пусть* Γ *– граф с массивом пересечений* $\{20, 16, 5; 1, 1, 16\}$*. Тогда* $v = 1+20+320+100 = 441$ *и* Γ *имеет спектр* $20^1, 6^{144}, -1^{100}, -4^{196}$*. Далее,* Γ_3 *– псевдогеометрический граф для сети* $pG_4(20,4)$*сильно регулярный граф с параметрами* $(441, 100, 31, 20)$ *и неглавными собственными значениями* $16, -5$*.*

Пример 4.3. *Пусть* Γ *– граф с массивом пересечений* $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$*. Тогда* $v = 1 + 39 + 1404 + 156 = 1600$ *и* Γ *имеет спектр* $39^1, 7^{675}, -1^{156}, -6^{768}$*. Далее,* Γ_3 *– псевдогеометрический граф для сети* $pG_3(39,3)$*.*

Пример 4.4. *Пусть* Γ *– граф с массивом пересечений* $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$*. Тогда* $v = 1 + 55 + 2970 + 110 = 3136$ *и* Γ *имеет спектр* $55^1, 7^{1617}, -1^{110}, -8^{1408}$*. Далее,* Γ_3 *является* 56×56*-решёткой.*

Автоморфизмы графов из примеров 2 и 3 найдены в [42] и [31] соответственно. В [42] найдены бесконечные серии допустимых массивов пересечений таких графов. В случае $c_2 = 1$ имеем двупараметрическую серию $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$, $m < n$.Для этого графа имеем $k_2 = (nm-1)(nm-n+m-1)$, $k_3 = (nm-1)(n-m+1)$, $v = nm + (nm-1)(nm-n+m-1) + (nm-1)(n-m+1) = n^2m^2$ и Γ_3 — псевдогеометрический граф для сети $pG_{n-m}(nm-1, n-m)$. Так как окрестность любой вершины является объединением изолированных (a_1+1)-клик, то $n-m$ делит

$nm-1$, и отличные от -1 неглавные собственные значения равны $n-1$, $-m-1$, а их кратности – $m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$, $n^2(mn-1)(m-1)/(m+n)$. Ввиду границы Дельсарта имеем $n-m+1 \le 1+(nm-1)/(m+1)$ и $n+1 \le m(m+1)$. В случае равенства число максимальных клик в окрестности вершины равно $m+1$. Основным результатом главы, является доказательство следующих двух теорем.

Теорема 8. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$. Тогда $n-m$ делит $nm-1$ и для числа $t=(nm-1)/(n-m)$ верно неравенство $nm-n+m-1 \le t^2$.*

Следствие 2. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{160, 144, 17; 1, 1, 144\}$, $\{714, 672, 43; 1, 1, 672\}$ не существуют.*

Теорема 9. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(mn) \cup \pi((m-1)(n+1)) \cup \pi(m^2 - mn + m + n^2 - n - 2)$, n делит $(m-1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, $2(m-1)\alpha_0(g)$ и $2\alpha_3(g)$, и верно одно из утверждений:*

(1) *Ω – пустой граф, p делит mn, $\alpha_3(g) = mnpl$ и $\alpha_1(g) = mpl + m^2n(mn+n-1) + (m+n)ps$;*

(2) *Ω является t-кликой, $t > 1$, p делит $(n+1)(m-1)$, $(mn-1)(n-m+1)$ и $n-m+1-t$, $\alpha_3(g) = (n-m+1)(t+mn) + mnpl$, $2(m-1)t = sn$ и $\alpha_1(g) = -(mt+s) + (t+mn+m+mpl) + (m+n)r$;*

(3) *Ω является l-кокликой, $l > 1$, расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$, числа m, n нечётны и $l = mn$.*

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c, если Δ — связная компонента графа Ω, содержащая вершину a, то либо $p = 2$, либо*

(*i*) *диаметр Δ равен 3 и p делит $p^3_{33} = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2$, либо*

(*ii*) *диаметр Δ равен 2, Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$, p делит $n-m+1$, mn, $|\Omega|$, $|\Delta|$, окрестность любой вершины в графе Δ состоит из r изолированных s-клик, $s > 1$, $s+1$ делит $r(r-1)^2$, p делит $s+1$ и $r-1$.*

4.1.1 Вспомогательные результаты и доказательство теоремы 8

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в доказательстве теоремы 8.

Лемма 4.1.1. *Пусть Δ — геодезический граф диаметра 2. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *Δ содержится в $a^\perp$ для некоторой вершины a;*

(2) *Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$;*

(3) *Δ — бирегулярный граф со степенями вершин β и γ, $\beta < \gamma$, если B и C — множество вершин из Δ степеней β и γ, то B — коклика, окрестность вершины из B*

в Δ является β-кокликой из C, прямые (максимальные клики) из C имеют порядок $l = \gamma - \beta + 2$ и $|\Delta| = \beta\gamma + 1$.

Доказательство. Это теорема 1.17.1 из [11]. □

Лемма 4.1.2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$. Тогда окрестность любой вершины a состоит из r изолированных s-клик, где $s+1$ делит $r(r-1)^2$. Если Γ не является пятиугольником и $s = c^2 f$, где f свободно от квадратов, то $s+1 < r$, $r - 1 = (t+c)tf$ и $2t+c$ делит многочлен $R(s)$, где $R(s) = cs(s-4)(s^2-2s-4)$, если s не делится на 4, $R(s) = cs(s-4)(s^2+2s+4)/16$, если s делится на 4, в частности, $s \neq 2$.*

Доказательство. Заметим, что число $(s+1)$-клик в Γ равно $r^2(r-1)(s+1) - r^2(2r-3) + r(r-1)^2/(s+1)$. Поэтому $s+1$ делит $r(r-1)^2$. Далее, $s+1 \leq r$, а остальные утверждения этой леммы, кроме неравенств $s \neq 2$ и $s+1 \neq r$, если Γ не является пятиугольником, доказаны в теореме 4 из [32]. Покажем, что $s+1 \neq r$, если Γ не является пятиугольником. В противном случае, $t(t+c) = c^2$, но это уравнение не имеет целочисленных решений.

Пусть $s = 2$. Тогда $c = 1$ и $2t+1$ делит $R(2) = 16$, противоречие. □

Лемма 4.1.3. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$. Тогда $n-m$ делит $nm-1$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *для числа $t = (nm-1)/(n-m)$ верно неравенство $nm-n+m-1 \leq t^2$;*

(2) *либо $t \geq m+8$, либо Γ имеет массив пересечений $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$ или $\{20, 16, 5; 1, 1, 16\}$.*

Доказательство. Пусть a, z — вершины на расстоянии 3 в Γ, K — клика из $[z] \cap \Gamma_2(a)$. Тогда число клик в $[a] \cap \Gamma_2(z)$ не больше $|K|$. В противном случае две подходящие вершины из K смежны с вершинами некоторой клики из $[a] \cap \Gamma_2(z)$, противоречие с тем, что тогда Γ содержит четырехугольник.

Значит, порядок максимальной клики в $[z] \cap \Gamma_2(a)$ не больше числа максимальных клик в $[a]$. Пусть t — число максимальных клик в $[a]$. Тогда $(n+1)(m-1)/t \leq t$. С другой стороны, $t = (mn-1)/(n-m) = m + (m^2-1)/(n-m)$, поэтому $(n+1)(m-1) \leq (m + (m^2-1)/(n-m))^2$.

В случае $m^2 - 1 = n - m$ получим $n = m^2 + m - 1$, $t = m+1$ и $(n+1)(m-1) = m(m^2-1) > (m+1)^2$, противоречие.

В случае $m^2 - 1 = 2(n-m)$ получим $n = (m^2+2m-1)/2$, m нечётно и $(n+1)(m-1) = (m-1)(m+1)^2/2 \leq (m+2)^2$. Отсюда $m = 3$ и Γ имеет массив пересечений $\{20, 16, 5; 1, 1, 16\}$.

В случае $m^2 - 1 = 3(n-m)$ получим $n = (m^2+3m-1)/3$, m не делится на 3 и $(n+1)(m-1) = (m+2)(m-1)^2/3 \leq (m+3)^2$. Отсюда $m \leq 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$, $\{35, 30, 6; 1, 1, 30\}$ или $\{64, 56, 9; 1, 1, 56\}$. Но два последних массива не являются допустимыми.

В случае $m^2 - 1 = 4(n-m)$ получим $m = 2l+1$, $n = l^2 + 3l + 1$ и $(n+1)(m-1) = 2l(l+1)(l+2) \leq (2l+5)^2$. Отсюда $l \leq 3$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 12, 3; 1, 1, 12\}$, $\{54, 49, 7; 1, 1, 49\}$ или $\{132, 120, 13; 1, 1, 120\}$. Но эти массивы не являются допустимыми.

В случае $m^2-1=5(n-m)$ получим $m=5l+1$, $n=5l^2+7l+1$ или $m=5l-1$, $n=5l^2+3l-1$. В первом случае $(nm-1)/(n-m)=(25l^2+40l+12)/(5l+2)=5l+6$. Далее, $(n+1)(m-1)=5l(5l^2+7l+2)\le(5l+6)^2$, поэтому $l\le 2$ и Γ имеет массив пересечений $\{77,70,8;1,1,70\}$ или $\{384,360,25;1,1,360\}$.

Во втором случае $(nm-1)/(n-m)=(25l^2+10l-8)/(5l-2)=5l+4$. Далее, $(n+1)(m-1)=(5l-2)(5l^2+3l)\le(5l+4)^2$. Отсюда $l=1$ и Γ имеет массив пересечений $\{27,24,4;1,1,24\}$. Но эти массивы не являются допустимыми.

В случае $m^2-1=6(n-m)$ получим $m=6l+1$, $n=6l^2+8l+1$ или $m=6l-1$, $n=6l^2+4l-1$. В первом случае $(nm-1)/(n-m)=(18l^2+27l+7)/(3l+1)=6l+3$. Далее, $(n+1)(m-1)=4l(3l^2+4l+1)\le 3(2l+1)^2$, противоречие.

Во втором случае $(nm-1)/(n-m)=(18l^2+9l-5)/(3l-1)=6l+5$. Далее, $(n+1)(m-1)=4l(3l-1)(3l+2)\le(6l+5)^2$. Отсюда $l=1$ и Γ имеет массив пересечений $\{44,40,5;1,1,40\}$. Но этот массив не являются допустимым.

В случае $m^2-1=7(n-m)$ получим $m=6l+1$, $n=6l^2+8l+1$ или $m=6l-1$, $n=6l^2+4l-1$. В первом случае $(nm-1)/(n-m)=(18l^2+27l+7)/(3l+1)=6l+3$. Далее, $(n+1)(m-1)=4l(3l^2+4l+1)\le 3(2l+1)^2$, противоречие. □

Из леммы 4.1.3 следует теорема 8. Докажем следствие 2. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{160,144,17;1,1,144\}$. Тогда $n=23, m=7$, $n-m=16$, $(nm-1)/(n-m)=10$ и $(n+1)(m-1)=144>100$, противоречие с теоремой 8. Следствие 2 доказано.

4.1.2 Доказательство теоремы 9

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nm-1,nm-n+m-1,n-m+1;1,1,nm-n+m-1\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 4.1.4. *Числа пересечений графа Γ равны*

(1) $p^1_{11}=n-m-1$, $p^1_{12}=(m-1)(n+1)$, $p^1_{22}=(m-1)(n+1)(m-n+mn-3)$, $p^1_{23}=(m-1)(n+1)(n-m)$, $p^1_{33}=(n-m)(n-m+1)$;

(2) $p^2_{11}=1$, $p^2_{12}=m-n+mn-3$, $p^2_{13}=n-m+1$, $p^2_{22}=m^2n^2+2m^2n+m^2-2mn^2-6mn-5m+n^2+5n+5$, $p^2_{23}=(n-m+1)(m-n+mn-2)$, $p^2_{33}=(n-m)(n-m+1)$;

(3) $p^3_{12}=(m-1)(n+1)$, $p^3_{13}=n-m$, $p^3_{22}=(m-1)(n+1)(m-n+mn-2)$, $p^3_{23}=(n-m)(m-1)(n+1)$, $p^3_{33}=m^2-mn+m+n^2-n-2$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 4.1.5. *Граф Γ имеет спектр $\theta_0=nm-1$ кратности 1, $\theta_1=n-1$ кратности $m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$, $\theta_2=-1$ кратности $(mn-1)(n-m+1)$, $\theta_3=-(m+1)$ кратности $n^2(mn-1)(m-1)/(m+n)$.*

Доказательство. Результат получен с помощью компьютерного упрощения формул из [11, лемма 2.2.6]. □

Лемма 4.1.6. *Пусть* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* $m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* $(mn-1)(n-m+1)$. *Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g) = ((nm+m-1)\alpha_0(g) + n\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/((m+n)n) - m^2/(m+n)$. $\chi_2(g) = ((n-m+1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/(mn) - (m-n-1)$. $\chi_1(g) - m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$ *и* $\chi_2(g) - (mn-1)(n-m+1)$ *делятся на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{m^2(mn-1)(n+1)}{m+n} & \frac{m^2(n^2-1)}{m+n} & -\frac{m^2}{m+n} & -\frac{m^2(n+1)}{m+n} \\ (mn-1)(n-m+1) & m-n-1 & m-n-1 & (m-1)(n+1) \\ \frac{n^2(mn-1)(m-1)}{m+n} & -\frac{n^2(m^2-1)}{m+n} & \frac{n^2}{m+n} & -\frac{n^2(m-1)}{m+n} \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = ((n+1)(nm-1)\alpha_0(g) + (n^2-1)\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - (n+1)\alpha_3(g))/(m+n)n^2)$. Подставляя $\alpha_2(g) = m^2n^2 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = ((nm+m-1)\alpha_0(g) + n\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/((m+n)n) - m^2/(m+n)$.

Аналогично, $\chi_2(g) = ((mn-1)(n-m+1)\alpha_0(g) + (m-n-1)\alpha_1(g) + (m-n-1)\alpha_2(g) - (m-1)(n+1)\alpha_3(g))/(m^2n^2)$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = m^2n^2 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = ((n-m+1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/(mn) - (m-n-1)$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2 [33]. □

Лемма 4.1.7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) n *делит* $(m-1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, $2(m-1)\alpha_0(g)$ *и* $2\alpha_3(g)$;

(2) *если* p *делит* mn, $m+n-1$ *и* $\alpha_0(g)$, *то* p^2 *делит* $\alpha_3(g)$;

(3) *если* p *делит* $(n+1, m)$, *то для* $ny = (m-1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$ *число* y *делится на* p.

Доказательство. Имеем $\chi_2(g) = ((n-m+1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/(mn) + (n+1-m)$ и $\chi_2(g) - (mn-1)(n-m+1)$ делится на p. Отсюда mn делит $(n-m+1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$. Далее, $\chi_1(g) = ((nm+m-1)\alpha_0(g) + n\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/((m+n)n) - m^2/(m+n)$, поэтому n лелит $(m-1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$. Таким образом, n делит $2(m-1)\alpha_0(g)$ и $2\alpha_3(g)$.

Пусть p делит mn, $m+n-1$ и $\alpha_0(g)$. С учетом делимости $((n-m+1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/(mn)$ на p, получим, что p^2 делит $(n-m+1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$. Отсюда p^2 делит $\alpha_3(g)$.

Пусть p делит $(n+1, m)$. Так как $\chi_1(g) - m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$ делится на p, то $\chi_1(g)$ делится на p Положим $ny = (m-1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$. Тогда $\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + y - m^2)/(m+n)$, $m\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + y - m^2$ делится на p и y делится на p. □

Лемма 4.1.8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *– пустой граф, то* p *делит* mn, $\alpha_3(g) = mnpl$ *и* $\alpha_1(g) = mpl + m^2n(mn + n - 1) + (m+n)ps$;

(2) *если Ω является t-кликой, то $t > 1$, p делит $(n+1)(m-1)$, $(mn-1)(n-m+1)$ и $n-m+1-t$, $\alpha_3(g) = (n-m+1)(t+mn) + mnpl$, $2(m-1)t = sn$ и $\alpha_1(g) = -(mt+s) + (t+mn+m+mpl) + (m+n)r$;*

(3) *если Ω является l-кокликой, $l > 1$, то расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$, числа m, n нечетны и $l = mn$;*

(4) *если Ω содержит ребро и является объединением изолированных l_i-клик, $l_i \leq n-m+1$, $i \in \{1, ..., r\}$, то расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из разных клик в Ω равно 3, p делит $(n+1)(m-1)$, $nm-l_i$ и l_i-l_j, $\alpha_3(g) = mnpt-(n-m+1)(n^2m^2-\sum l_s)$, $2(m-1)\sum l_s = ny$ для некоторого натурального числа y и $\alpha_1(g) = (m+n)pz - y - \sum l_s - m(m^2-m+1)$.*

Доказательство. Пусть Ω – пустой граф. Имеем $v = m^2n^2$, поэтому p делит mn.

Если p делит m, то $\chi_2(g) = -\alpha_3(g))/(mn) - (m-n-1)$ и $\chi_2(g) + (n+1)$ делятся на p. Отсюда $\alpha_3(g) = mnpl$. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - mpl)/(m+n) - m^2/(m+n)$ и $\chi_1(g) - m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$ делится на p. Отсюда $\alpha_1(g) = mpl + m^2n(mn+n-1) + (m+n)ps$.

Если p делит n, то $\chi_2(g) = -\alpha_3(g))/(mn) - (m-n-1)$ и $\chi_2(g) - (m-1)$ делятся на p. Отсюда $\alpha_3(g) = mnpl$. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - mpl)/(m+n) - m^2/(m+n)$ и $\chi_1(g) - m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$ делится на p. Отсюда снова $\alpha_1(g) = mpl + m^2n(mn+n-1) + (m+n)ps$.

Пусть Ω является t-кликой. Если $t = 1$, $\Omega = \{a\}$, то p делит $k = mn-1$, $\chi_2(g) = ((n-m+1) - \alpha_3(g))/(mn) - (m-n-1)$ и $\chi_2(g) - (mn-1)(n-m+1)$ делятся на p. Отсюда $(n-m+1) - \alpha_3(g) = -mn(pl + (m-n-1))$ и $\alpha_3(g) = mnpl + (nm-1)(n+1-m)$. Далее, $\chi_1(g) = ((nm+m-1) + n\alpha_1(g) - (mnpl + (nm-1)(n+1-m)))/((m+n)n) - m^2/(m+n)$ и $\chi_1(g) - m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$ делится на p. Теперь $\alpha_1(g) = -m^2n/(m+n) + ps - mpl + nm - 1$ и p не делит $\alpha_1(g)$, противоречие.

Если $t > 1$, то p делит $(n+1)(m-1)$, $(mn-1)(n-m+1)$ и $n-m+1-t$. Число $\chi_2(g) = ((n-m+1)t + mn) - \alpha_3(g))/(mn)$ делится на p, поэтому $\alpha_3(g) = (n-m+1)(t+mn) + mnpl$. Далее, $2(m-1)t = sn$, $\chi_1(g) = (mt + s + \alpha_1(g) - (t + mn + m + mpl))/(m+n)$, поэтому $\alpha_1(g) = -(mt+s) + (t+mn+m+mpl) + (m+n)r$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l > 1$. Тогда расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3. Заметим, что P^3_{33} сравнимо с -1 по модулю p, поэтому p делит $l-1$.

Напомним, что Γ_3 – псевдогеометрический граф для сети $pG_t(nm-1, t)$, поэтому $l \leq nm$. Далее, p делит $a_3 = n-m$ и $nm-1$, число $\chi_2(g) = ((n-m+1)(l+nm) - \alpha_3(g))/(mn)$ делится на p, поэтому $\alpha_3(g) = (n-m+1)(l+nm) + mnpr$ и p делит $l+1$. Теперь p делит $n^2m^2 - l$, $n^2m^2 + 1$ и $p = 2$. Отсюда числа l, m, n нечетны.

Пусть $d(w, w^g) = i > 0$. Если $i = 3$, то, с учетом равенства $p^3_{33} = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2$ вершина w попадает в окрестность неподвижной точки, противоречие. Если $i = 2$, то вершина w попадает в окрестность неподвижной точки. Если $i = 1$, то, с учетом равенства $p^1_{11} = n-m-1$ вершина w попадает в окрестность неподвижной точки. Таким образом, $lnm = n^2m^2$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик порядков $l_1, ..., l_r$. Снова расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из разных клик в Ω равно 3. Так как $a_1 = n - m - 1$, $k = nm - 1$, то p делит $nm - l_i$ и p делит $n - m - l_i + 1$ в случае $l_i > 1$. Далее, p делит $n^2 + m^2 - 2mn + n - m - \sum_{s \neq i} l_s$ в случае $l_i > 1$. Если $i \neq j$, то p делит $n^2 + m^2 - mn - n + m - 2 - \sum_{s \neq i,j} l_s$. Отсюда p делит $l_i - l_j$.

Имеем $\chi_2(g) = ((n-m+1)\sum l_s - \alpha_3(g))/(mn) + (n+1-m)$ и $\chi_2(g) - (mn-1)(n-m+1)$ делится на p. Отсюда $((n-m+1)(\sum l_s - n^2m^2) - \alpha_3(g))/(mn)$ делится на p и $\alpha_3(g) = mnpt - (n-m+1)(n^2m^2 - \sum l_s)$. Далее, $\chi_1(g) = ((nm+m-1)\sum l_s + n\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/((m+n)n) - m^2/(m+n)$, n делит $(nm+m-1)\sum l_s - \alpha_3(g)$ и $\chi_1(g) - m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$ делится на p. Поэтому $2(m-1)\sum l_s = ny$ для некоторого натурального числа y, $\chi_1(g) = (m + y + \alpha_1(g) - mpt + (n-m+1)nm^2 - m^2 + \sum l_s)/(m+n)$ и $(y + \alpha_1(g) + \sum l_s + m(m^2 - m + 1))/(m+n)$ делится на p. Итак, $\alpha_1(g) = (m+n)pz - y - \sum l_s - m(m^2 - m + 1)$. $\square$

В леммах 4.1.9–4.1.12 предполагается, что Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c. Пусть Δ — связная компонента графа Ω, содержащая вершину a.

Лемма 4.1.9. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — несвязный граф, то степень любой вершины в Ω не больше $n - m$, в частности, степень a в Δ не больше $n - m$, $|\Omega - \Delta| \leq (n-m)(n-m+1)$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $|\Omega|(m-1)(n+1)$, но не больше $(n - m + 1 - p)\alpha_1(g) + \alpha_2(g)$;*

(2) *если диаметр Δ равен 2, то p делит $n - m + 1$ и либо*

(*i*) *Δ содержится в $a^{\perp}$,*

(*ii*) *Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$,*

(*iii*) *Δ — бирегулярный граф со степенями вершин β и γ, $|\Delta| = \beta\gamma + 1$;*

(3) *если диаметр Δ больше 2, то p делит p^3_{33}.*

Доказательство. Пусть Ω — несвязный граф. Тогда степень любой вершины в Ω не больше $n - m$. С учетом равенств $d(b,c) = 2$ и $p^2_{33} = (n-m)(n-m+1)$ имеем $|\Omega - \Delta| \leq (n-m)(n-m+1)$. Если $d(w, w^g) = 1$, то w смежна не более чем с $n - m + 1 - p$ вершинами из Ω, если $d(w, w^g) = 2$, то w смежна не более чем с одной вершиной из Ω. Значит, число рёбер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $|\Omega|(m-1)(n+1)$, но не больше $(n - m + 1 - p)\alpha_1(g) + \alpha_2(g)$.

Если диаметр Δ равен 2, то с учетом равенства $p^2_{13} = n - m + 1$ число p делит $n - m + 1$ и по лемме 4.1.1 верно одно из утверждений:

(а) Δ содержится в $a^{\perp}$,

(б) Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$,

(в) Δ — бирегулярный граф со степенями вершин β и γ, $\beta < \gamma$, если B и C — множество вершин из Δ степеней β и γ, то B — коклика, окрестность вершины из B в Δ является β-кокликой из C, прямые (максимальные клики) из C имеют порядок $l = \gamma - \beta + 2$ и $|\Delta| = \beta\gamma + 1$.

Ели диаметр Δ больше 2, то для вершины $z \in \Gamma_3(a) \cap \Delta$ имеем $|\Gamma_3(a) \cap \Gamma_3(z)| = p^3_{33}$ и p делит p^3_{33}. $\square$

Лемма 4.1.10. *Если Δ содержится в $a^\perp$, то $p = 2$, $m-1$ и n четны, n делит $2(m-1)|\Omega|$.*

Доказательство. Для вершины $b \in \Delta(a)$ число p делит $[b] \cap \Gamma_2(a)$, $p^1_{12} = (m-1)(n+1)$, поэтому p делит $(m-1)(n+1)$. Отсюда p делит $(m-1,n)(m,n+1)$, в частности, p делит mn и $|\Omega|$. Но $|a^\perp - \Delta| = mn - |\Delta|$ и p делит $|\Delta|$ Пусть $w \in [a]$ и $d(w, w^g) = 1$. Если $w^\perp \cap (w^g)^\perp$ содержит единственную вершину $a \in \Delta$, то p делит $n-m$, противоречие. Если же $w^\perp \cap (w^g)^\perp$ содержит y вершин из $\Delta(a)$ и p делит $n-m-y$ и $y+1$.

Число $\chi_2(g) = ((n-m+1)|\Omega| - \alpha_3(g))/(mn) + (n+1-m)$ делится на p, поэтому $\alpha_3(g) = mnpl + (n-m+1)|\Omega|$. Далее, $\chi_1(g) = ((nm+2m-n-2)|\Omega| + n\alpha_1(g) - mnpl))/((m+n)n) - m^2/(m+n)$ и $\chi_1(g) - m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$ делится на p. Отсюда n делит $2(m-1)|\Omega|$, p делит $2(m-1)|\Omega|/n - n(mn+m-1)$. Если p делит $(m,n+1)$, то p делит n, противоречие. Значит, p делит $(m-1,n)$ и $2(m-1)|\Omega|/n$. Наконец, $\alpha_1(g) = (m+n)rp + ((m-1+2(m-1)/n)|\Omega| - mpl$, $\alpha_2(g) = m^2n^2 - (m+n)rp + mpl - mnpl - |\Omega|(2(m-1)/n + n + 1)$.

Пусть z — число максимальных клик из $[a]$, пересекающих $Delta$. Так как число $p^2_{22} = m^2n^2 + 2m^2n + m^2 - 2mn^2 - 6mn - 5m + n^2 + 5n + 5$ сравнимо с $-(z-2)$ по модулю p. Далее, p^2_{22} сравнимо с 1 по модулю p и z сравнимо с 1 по модулю p. Теперь число максимальных клик из $[a]$ равно $(mn-1)/(m+n)$ сравнимо с 1 по модулю p. Число $(mn-1)/(m+n) = m - (m^2+1)/(m+n)$ сравнимо с 1 по модулю p, поэтому $(m^2+1)/(m+n)$ делится на p и $p = 2$.

Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = mn - 1 + (|\Omega| - 1)(mn - n + m - 3) = |\Omega|(mn - n + m - 3) + n - m + 2$. С другой стороны, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = (m-1)|\Omega| + m^2n^2 - 2mnl + n + 1$, $|\Omega|(mn - n - 2) = m^2n^2 - 2mnl + m - 1$ и $l = (m^2n^2 - |\Omega|(mn - n - 2) + m - 1)/(2mn)$.

□

Лемма 4.1.11. *Если Δ — бирегулярный граф с $\mu = 1$, то $p = 2$ делит $n - m - 1$ и числа γ, β нечетны.*

Доказательство. Пусть Δ — бирегулярный граф со степенями вершин β и γ, $\beta < \gamma$. Если B и C — множество вершин из Δ степеней β и γ, то B — коклика, окрестность вершины из B в Δ является β-кокликой из C, прямые (максимальные клики) из C имеют порядок $l = \gamma - \beta + 2$ и $|\Delta| = \beta\gamma + 1$.

Далее, p делит $(n - m + 1) - 2$ и $\gamma - \beta$, поэтому $p = 2$ и числа γ, β одной чётности. Далее, p делит mn и p делит $|\Omega|$. Далее, $p^1_{33} = (n-m)(n-m+1)$ делится на p, поэтому p делит $|\Omega \cap \Gamma_3(a) \cap \Gamma_3(b)| = |\Omega - \Delta|$ и p делит $|\Delta|$. Отсюда числа γ, β нечётны. □

Лемма 4.1.12. *Если Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$, то p делит $n - m + 1$, mn, $|\Omega|$, $|\Delta|$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Δ — граф Мура степени $r > 2$ и $p = 2$;*

(2) *Δ не является графом Мура, p делит $s + 1$ и $r - 1$.*

Доказательство. Пусть Δ' — другая связная компонента графа Ω. Тогда, либо Δ' является кликой, либо диаметр Δ' больше 2. Если Δ' является t-кликой, то p делит t, а если диаметр Δ' больше 2, то ввиду леммы 4.1.9 число p делит $(n+1, m)$.

Пусть Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$. По лемме 4.1.2 окрестность любой вершины a в Δ состоит из r изолированных s-клик, где $s+1$ делит $r(r-1)^2$, p делит $mn-1-rs$ и $n-m-1-(s-1)$. Так как $p^2_{12} = m-n+mn-3$, то p делит $mn-n+m-3-(s-1)$, $mn-4-2(s-1)$ и $mn-2n+2m-2$. Далее, p делит $n-m+1$, $mn-4-2(s-1)$ и $mn-2n+2m-2$. Отсюда p делит mn, $2(s+1)$ и p делит $|\Omega|$. Число $p^1_{33} = (n-m)(n-m+1)$ делится на p, поэтому p делит $|\Omega \cap \Gamma_3(a) \cap \Gamma_3(b)| = |\Omega - \Delta|$ и p делит $|\Delta|$.

Если Δ является пятиугольником, то p делит $mn-3$ и $n-m-1$. Противоречие с тем, что $(nm, nm-3)$ делит 3, а $(n-m+1, n-m-1)$ делит 2.

Если Δ не является пятиугольником и $s = c^2 f$, где f свободно от квадратов, то $s+1 < r$, $r-1 = (t+c)tf$ и $2t+c$ делит многочлен $R(s)$, где $R(s) = cs(s-4)(s^2-2s-4)$, если s не делится на 4, $R(s) = cs(s-4)(s^2+2s+4)/16$, если s делится на 4, в частности, $s \neq 2$.

Если Δ является графом Мура, то $s = 1$, $p = 2$, $r \in \{3, 7, 57\}$. В этом случае числа m, n имеют разные чётности.

Пусть Δ не является графом Мура. Тогда p делит $n-m+1$, $n-m-1-(s-1)$ и $s+1$. Число $|\Delta| = r(r-1)s^2 + rs + 1$ сравнимо с $r^2 - 2r + 1$ по модулю p и p делит $r-1$.

Пусть $a \in \Delta$. Тогда число максимальных клик в $[a]$ равно $(nm-1)/(n-m)$, причем максимальная клика из $a^\perp$, не пересекающая $\Delta - \{a\}$, не является g-допустимой. Пусть t_1 — число $\langle g \rangle$-орбит, в которых вершина смежна с ее образом под действием g, но не смежна с ее образом под действием g^2, t_2 — число $\langle g \rangle$-орбит, в которых вершина смежна с ее образом под действием g^2, но не смежна с ее образом под действием g.

В случае $\Omega = \Delta$ имеем $\alpha_2(g) - pt_2 = (n-m)((nm-1)/(n-m)-r)|\Delta|$. Так как число $(s+1)$-клик в Δ равно $r|\Delta|/(s+1)$, то $\alpha_1(g) = (n-m-s)r|\Delta|/(s+1) + pt_1$ Отсюда $\alpha_3(g) = n^2m^2 - |\Delta| - (pt_2 + (n-m)((nm-1)/(n-m)-r)|\Delta|) - (pt_1 + (n-m-s)r|\Delta|/(s+1))$ и n делит $2|\Delta|(1 + ((nm-1)/(n-m)-r) + (n-m-s)r/(s+1)) + 2p(t_1+t_2)$. Таким образом, n делит $4|\Delta|(r-1)(s+1) - 2p(t_1+t_2)m(s+1)$.

В случае $s = 4$ число $p = 5$ делит $s+1 = c^2 f + 1$ и $r - 1 = (t+c)tf$. Поэтому 5 делит $f^2 - 1$ и либо 5 делит t, либо t сравнимо с $-c$ по модулю 5. Так как $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^2)$ и $t_1(g^2) = t_2(g)$,то $t_1 = t_2$. $\square$

Из лемм 4.1.8–4.1.12 следует теорема 9

4.2 Автоморфизмы небольших ДРГ с массивами пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$

В теореме 9 найдены простые порядки автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$. С помощью этого результата в этой работе мы найдём автоморфизмы симметричных дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$ $(n = 13, m = 7)$, $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$ $(n = 17, m = 13)$ и $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$ $(n = 21, m = 13)$. и покажем, что они не существуют. Более того, для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$ мы уточним нормальную структуру группы автоморфизмов.

Теорема 10. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *– элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 7, 13\}$, 13 *делит* $\alpha_0(g)$ *и* $\alpha_3(g)$, *и верно одно из утверждений:*

(1) Ω *– пустой граф,* $p = 13$ *или* $p = 7$, $\alpha_3(g) = 91pl$ *и* $\alpha_1(g) = 7pl + 20ps + 49 \cdot 13 \cdot 103$;

(2) Ω *является* 91*-кокликой, расстояние в* Γ *между любыми двумя вершинами из* Ω *равно* 3 *и* $p = 2$.

(3) Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b, a, c, *и если* Δ *— связная компонента графа* Ω, *содержащая вершину* a, *то либо* $p = 2$, *либо диаметр* Δ *равен* 3 *и* $p = 7$ *или* $p = 13$.

Следствие 3. *Пусть группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ *с массивом пересечений* $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$. *Тогда* G *— разрешимая* $\{2, 7, 13\}$*-группа и* Γ *не является реберно симметричным графом.*

Теорема 11. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *– элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 13, 17\}$, 17 *делит* $\alpha_0(g)$ *и* $\alpha_3(g)$, *и верно одно из утверждений:*

(1) Ω *– пустой граф,* $p = 17$ *или* $p = 13$, $\alpha_3(g) = 221pl$ *и* $\alpha_1(g) = 13lp + 30ps + 169 \cdot 17 \cdot 237$;

(2) Ω *является* 221*-кокликой, расстояние в* Γ *между любыми двумя вершинами из* Ω *равно* 3 *и* $p = 2$.

(3) Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b, a, c,*и если* Δ *— связная компонента графа* Ω, *содержащая вершину* a, *то либо* $p = 2$, *либо диаметр* Δ *равен* 3 *и* $p \in \{2, 3, 7\}$.

Следствие 4. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* Γ *не является реберно симметричным графом.*

Теорема 12. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *– элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 13\}$, 21 *делит* $\alpha_0(g)$ *и* $\alpha_3(g)$, *и верно одно из утверждений:*

(1) Ω *– пустой граф,* $p \in \{3, 7, 13\}$, $\alpha_3(g) = 273pl$ *и* $\alpha_1(g) = 13pl + 34ps + 13^2 \cdot 21 \cdot 293$;

(2) Ω *является* 7*-кликой,* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 21(26l + 16)$ *и* $\alpha_1(g) = 26l + 34r + 24$;

(3) Ω *является* 273*-кокликой, расстояние в* Γ *между любыми двумя вершинами из* Ω *равно* 3 *и* $p = 2$.

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b, a, c,*и если* Δ *— связная компонента графа* Ω, *содержащая вершину* a, *то либо* $p = 2$, *либо диаметр* Δ *равен* 3 *и* $p = 3$.

Следствие 5. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* $|G|$ *не делится на* 17. *В частности,* Γ *не является реберно симметричным графом.*

4.2.1 Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в доказательстве теорем 10–12.

Лемма 4.2.1. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ) *и вторым собственным значением* r. *Если* g — *автоморфизм* Γ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$, *то* $|\Delta| \le v\cdot\max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$.

Доказательство. Следует из [34, теорема 3.2]. □

Пусть далее в этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 4.2.2. *Числа пересечений графа* Γ *равны*

(1) $p^1_{11} = n-m-1$, $p^1_{12} = (m-1)(n+1)$, $p^1_{22} = (m-1)(n+1)(m-n+mn-3)$, $p^1_{23} = (m-1)(n+1)(n-m)$, $p^1_{33} = (n-m)(n-m+1)$;

(2) $p^2_{11} = 1$, $p^2_{12} = m-n+mn-3$, $p^2_{13} = n-m+1$, $p^2_{22} = m^2n^2+2m^2n+m^2-2mn^2-6mn-5m+n^2+5n+5$, $p^2_{23} = (n-m+1)(m-n+mn-2)$, $p^2_{33} = (n-m)(n-m+1)$;

(3) $p^3_{12} = (m-1)(n+1)$, $p^3_{13} = n-m$, $p^3_{22} = (m-1)(n+1)(m-n+mn-2)$, $p^3_{23} = (n-m)(m-1)(n+1)$, $p^3_{33} = m^2-mn+m+n^2-n-2$.

Доказательство. Утверждения проверяются непосредственно с помощью формул из [11, лемма 4.1.7] и системы компьютерной алгебры SageMath [26]. □

Лемма 4.2.3. *Граф* Γ *имеет спектр* $\theta_0 = nm-1$ *кратности* 1, $\theta_1 = n-1$ *кратности* $m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$, $\theta_2 = -1$ *кратности* $(mn-1)(n-m+1)$, $\theta_3 = -(m+1)$ *кратности* $n^2(mn-1)(m-1)/(m+n)$.

Доказательство. Результат получен с помощью формул из [11, лемма 2.2.6] и системы компьютерной алгебры SageMath [26]. □

4.2.2 Дистанционно регулярные графы с массивом пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$.

Докажем теорему 10. По теореме 9 имеем $\pi(G) \subseteq \{2,7,13\}$.

Пусть Ω – пустой граф. Тогда p делит $13\cdot 7$, по теореме 9 имеем $\alpha_3(g) = 91pl$ и $\alpha_1(g) = 7pl + 20ps + 49\cdot 13\cdot 103$

Пусть Ω является t-кликой в Γ, $1 < t \le 7$. По теореме 9 число p делит $2^2\cdot 3\cdot 7$, $2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ и $7-t$, и $12t = 13s$, противоречие.

Пусть Ω является l-кокликой в Γ, $l > 1$. Тогда расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p=2$ и $l=91$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь и Δ — связная компонента графа Ω. Если диаметр Δ равен 3, то p делит $p^3_{33} = m^2-mn+m+n^2-n-2 = 7\cdot 13$.

Если диаметр Δ равен 2, то p делит $n-m+1=7$ и $mn = 7\cdot 13$, отсюда $p=7$. Далее, Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$, $p=7$ делит $|\Omega|$ и $|\Delta|$, окрестность любой вершины в графе Δ состоит из r изолированных s-клик, $s > 1$, $s+1$ делит $r(r-1)^2$, 7 делит $s+1$ и $r-1$. По лемме 4.2.1 имеем $|\Delta| \le 1956$. Так как $|\Delta| = 1 + rs + r(r-1)s^2$, $s \ge 6$ и $r \ge 8$, то $|\Delta| \ge 2065$, противоречие. Теорема 10 доказана.

Перейдем к доказательству следствия 3.

Пусть группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для вершины $a \in \Gamma$ имеем $|G : G_a| = 7^2 \cdot 13^2$. Ввиду [35, таблица 1] группа G разрешима. Напомним, что в реберно симметричном графе, стабилизатор вершины действует транзитивно на окрестности вершины. Поэтому, так как, G является $3'$–группой, а окрестность вершины в Γ состоит из 90 вершин, то граф Γ не может быть реберно симметричным.

4.2.3 Дистанционно регулярные графы с массивом пересечений $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Докажем теорему 11. По теореме 9 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 11, 13, 17\}$.

Пусть Ω – пустой граф. Тогда p делит $13 \cdot 17$ и по теореме9 имеем $\alpha_3(g) = 221pl$ и $\alpha_1(g) = 13lp + 30ps + 169 \cdot 17 \cdot 237$.

Пусть Ω является t-кликой, $1 < t \le 5$. По теореме 9 число p делит $2^3 \cdot 3^3$, $2^2 \cdot 5^2 \cdot 11$, $5 - t$ и $24t = 17s$, противоречие.

Пусть Ω является l-кокликой, $l > 1$. Тогда расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$ и $l = 221$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь и Δ связная компонента графа Ω тогда, если диаметр Δ равен 3, то p делит $p^3_{33} = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.

Если диаметр Δ равен 2, то p делит $n - m + 1 = 5$ и $mn = 13 \cdot 17$, противоречие.

Теорема 11 доказана.

Перейдём к доказательству следствия 2.

Пусть группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для вершины $a \in \Gamma$ имеем $|G : G_a| = 13^2 \cdot 17^2$. Так как, G является $5'$–группой, а окрестность вершины в Γ состоит из 220 вершин, то граф Γ не может быть реберно симметричным.

4.2.4 Дистанционно регулярные графы с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Докажем теорему 12. По теореме 9 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 11, 13, 109\}$.

Пусть Ω – пустой граф. Тогда p делит $3 \cdot 7 \cdot 13$ и по лемме 4.2.1 имеем $\alpha_3(g) = 273pl$ и $\alpha_1(g) = 13pl + 34ps + 13^2 \cdot 21 \cdot 293$

Пусть Ω является t-кликой, $1 < t \le 9$. По лемме 4.2.1 число p делит $2^3 \cdot 3 \cdot 11$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$ и $9 - t$, причём $24t = 21s$. Отсюда $t = 7$, $s = 8$ и $p = 2$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l > 1$. Тогда расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$ и $l = 273$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь и Δ связная компонента графа Ω. Если диаметр Δ равен 3, то p делит $p^3_{33} = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2 = 3 \cdot 109$.

Если диаметр Δ равен 2, то p делит $n - m + 1 = 3^2$ и $mn = 3 \cdot 7 \cdot 13$, отсюда $p = 3$. По лемме 4.2.1 имеем $|\Delta| \leq 11153$. Далее, по теореме 9 Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$, $p = 3$ делит $|\Omega|$ и $|\Delta|$, окрестность любой вершины в графе Δ состоит из r изолированных s-клик, $s > 1$, $s + 1$ делит $r(r-1)^2$, 3 делит $s + 1$ и $r - 1$. Так как $|\Delta| = 1 + rs + r(r-1)s^2$, в случае $s = 5$ получим $25r^2 - 20r + 1 \leq 11153$ и $r \leq 21$. По 4.1.2 имеем $r = 5t(t + c) + 1$ и $2t + c$ делит $R(5)$, где $R(s) = cs(s-4)(s^2 - 2s - 4)$. Отсюда $r = 21, t = 1, c = 3$, поэтому $k(\Delta) = 105$, противоречие с тем, что 3 не делит $272 - 105$.

В случае $s = 8$ получим $64r^2 - 56r + 1 \leq 11153$ и $r \leq 13$. По 4.1.2 получим $r = 2t(t+c)+1$ и $2t+c$ делит $168c$. Если $r = 13$, то $t = 1, c = 5$, Δ имеет параметры $(9569, 104, 7, 1)$ и $36+412$ не является квадратом, противоречие.

Для доказательства теоремы 12 осталось установить, что $|G|$ не делится на 109.

Лемма 4.2.4. *Число* $|G|$ *не делится на* 109.

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 109 из G, a — вершина из $\mathrm{Fix}(f)$. Тогда $[a]$ является объединением 34 изолированных 8-клик. Из действия f на $[a]$ следует, что $[a]$ содержится в $\mathrm{Fix}(f)$. Теперь по связности Γ имеем $\Gamma \subseteq \mathrm{Fix}(f)$, противоречие. □

Теорема 12 доказана.

Докажем следствие 5.

Пусть группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда, так как порядок G не делиться на 17, а окрестность вершины в Γ состоит из $272 = 2^4 \cdot 17$ вершин, то граф Γ не может быть реберно симметричным.

С целью изучение вершинно транзитивных дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$ изучим структуру неразрешимой группы автоморфизмов. До конца параграфа будем предполагать, что неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$ и L — компонента из $\bar{T}$. Ввиду теоремы 12 и леммы 4.2.4 порядок группы G делит $2^\beta 3^\gamma 7^2 13^2$, $\gamma \geq 2$.

Лемма 4.2.5. *Пусть a вершина графа Γ, тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) либо $L \cong L_2(13)$ и L_a — подгруппа индекса 91 или 273, либо $L \cong L_3(3)$ и $L_a \cong E_9.GL_2(3)$ — подгруппа индекса 13;

(2) либо $L \cong L_2(7)$ и L_a — подгруппа индекса 7 или 21, либо $L \cong L_2(8)$ и L_a — подгруппа индекса 63, либо $L \cong U_3(3)$ и L_a — подгруппа индекса 63.

Доказательство. Если 13 делит $|\bar{T}|$, то по [35, таблица 1] в $\bar{T}$ существует компонента L, изоморфная одной из следующих групп: $L_2(13)$, $L_2(27)$, $L_3(3)$, $G_2(3)$, ${}^3D_4(2)$. Далее,

$|L : L_a|$ делит $13^2 21^2$, поэтому либо $L \cong L_2(13)$ и L_a — подгруппа индекса 91 или 273, либо $L \cong L_3(3)$ и $L_a \cong E_9.GL_2(3)$ — подгруппа индекса 13, либо $L \cong {}^3D_4(2)$ и L_a — подгруппа индекса $9 \cdot 91$. В последнем случае 7 делит $|L_a|$, противоречие.

Если 11 делит $|\bar{T}|$, то по [35, таблица 1] $|\bar{T}|$ делится на 5, противоречие.

Если 11 и 13 не делят $|\bar{T}|$, то по [35, таблица 1] в $\bar{T}$ существует компонента L, изоморфная одной из следующих групп: $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$. Далее, $|L : L_a|$ делит $13^2 21^2$, поэтому либо $L \cong L_2(7)$ и L_a — подгруппа индекса 7 или 21, либо $L \cong L_2(8)$ и L_a — подгруппа индекса 63, либо $L \cong U_3(3)$ и L_a — подгруппа индекса 63. □

Подробно рассмотрим случаи, когда $|L : L_a|$ делится на 3 и компонента L не изоморфна $L_2(7)$.

Лемма 4.2.6. *Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту L, изоморфную $L_2(13)$, и $|L : L_a| = 273$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $T = L \times M$, $M \cong L_2(13)$;

(2) $T = L \times M \times N$, $M \cong L_3(3)$, $N \cong L_2(7)$ *и* N_a *— подгруппа индекса* 21;

(3) $\bar{T} = L \times M \times N$, $M \cong L_3(3)$, $N \cong L_2(7)$, N_a *— подгруппа индекса* 7 *и* $|S(G) : S(G)_a| = 3$;

(4) $\bar{T} = L \times M$, $M \cong L_3(3)$, M_a *— подгруппа индекса* 13 *и* $|S(G) : S(G)_a| = 21$;

(5) $T = L \times M \times N$, $M \cong L_2(7)$, M_a *— подгруппа индекса* 21 *и* $N \cong Z_{13}$;

(6) $\bar{T} = L \times M$, $M \cong L_2(7)$, M_a *— подгруппа индекса* 7, *и* $|S(G) : S(G)_a| = 39$;

(7) $\bar{T} = L$ *и* $|S(G) : S(G)_a| = 273$.

Доказательство. Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту L, изоморфную $L_2(13)$ и $|L : L_a| = 273$. Тогда либо $\bar{T}$ содержит еще одну компоненту M, изоморфную $L_2(13)$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту M, изоморфную $L_3(3)$ и M_a — подгруппа индекса 13, либо $\bar{T}$ содержит компоненту M, изоморфную $L_2(7)$ и L_a — подгруппа индекса 7 или 21, либо $\bar{T}$ не содержит других компонент.

В первом случае $S(G) = S(G)_a = 1$, $T = L \times M$ и выполняется утверждение (1).

Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту M, изоморфную $L_3(3)$, и компоненту N, изоморфную $L_2(7)$. Если N_a — подгруппа индекса 21 из N, то $S(G) = S(G)_a = 1$, $T = L \times M \times N$ и выполняется утверждение (2). Если N_a — подгруппа индекса 7 из N, то $|S(G) : S(G)_a| = 3$ и выполняется утверждение (3).

Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту M, изоморфную $L_3(3)$, и не содержит компонент, изоморфных $L_2(7)$. Тогда выполняется утверждение (4).

Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту M, изоморфную $L_2(7)$, и не содержит компонент, изоморфных $L_3(3)$. Тогда выполняется утверждение (5) или (6).

Если $\bar{T}$ не содержит компонент, отличных от L, то выполняется утверждение (7). □

Лемма 4.2.7. *Пусть $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(13)$, но содержит компоненту L, изоморфную $L_2(8)$, и $|L : L_a| = 63$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *$\bar{T}$ содержит компоненту M, изоморфную $L_2(7)$, $|L : L_a| = 7$ и либо*

(*i*) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $N_1 \cong N_2 \cong L_3(3)$, *либо* (*ii*) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $N_1 \cong L_3(3)$, $N_2 \cong Z_{13}$, *либо*

(*iii*) $T = L \times M$, $|M| = 169$, *либо*

(2) $\bar{T}$ *не содержит компонент, изоморфных* $L_2(7)$, *и либо*

(*i*) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $M \cong Z_7$, $N_1 \cong N_2 \cong L_3(3)$, *либо*

(*ii*) $T = L \times M \times N_1$, $|M| = 91$ *и* $N_1 \cong L_3(3)$, *либо*

(*iii*) $T = L \times M$, $|M| = 169 \cdot 7$.

Доказательство. Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту L, изоморфную $L_2(8)$ и $|L : L_a| = 63$.

Допустим, что $\bar{T}$ содержит компоненту M, изоморфную $L_2(7)$ и $|L : L_a| = 7$. Тогда либо $\bar{T}$ содержит две компоненты N_1, N_2, изоморфных $L_3(3)$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту N, изоморфную $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 13$, либо $|S(G) : S(G)_a| = 169$. В этом случае выполняется одно из утверждений $(i - iii)$ из (1).

Допустим, что $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(7)$. Тогда либо $\bar{T}$ содержит две компоненты N_1, N_2, изоморфных $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 7$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту N, изоморфную $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 91$, либо $|S(G) : S(G)_a| = 169 \cdot 7$. В этом случае выполняется одно из утверждений $(i - iii)$ из (2). □

Лемма 4.2.8. *Пусть* $\bar{T}$ *не содержит компонент, изоморфных* $L_2(13)$ *и* $L_2(8)$, *но содержит компоненту* L, *изоморфную* $U_3(3)$, *и* $|L : L_a| = 63$. *Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $\bar{T}$ *содержит компоненту* M, *изоморфную* $L_2(7)$, $|L : L_a| = 7$ *и либо*

(*i*) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $N_1 \cong N_2 \cong L_3(3)$, *либо*

(*ii*) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $N_1 \cong L_3(3)$, $N_2 \cong Z_{13}$, *либо*

(*iii*) $T = L \times M$, $|M| = 169$, *либо*

(2) $\bar{T}$ *не содержит компонент, изоморфных* $L_2(7)$, *и либо*

(*i*) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $M \cong Z_7$, $N_1 \cong N_2 \cong L_3(3)$, *либо*

(*ii*) $T = L \times M \times N_1$, $|M| = 91$ *и* $N_1 \cong L_3(3)$, *либо*

(*iii*) $T = L \times M$, $|M| = 169 \cdot 7$.

Доказательство. Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту L, изоморфную $U_3(3)$ и $|L : L_a| = 63$.

Допустим, что $\bar{T}$ содержит компоненту M, изоморфную $L_2(7)$ и $|L : L_a| = 7$. Тогда, либо $\bar{T}$ содержит две компоненты N_1, N_2, изоморфных $L_3(3)$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту N, изоморфную $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 13$, либо $|S(G) : S(G)_a| = 169$. В этом случае выполняется одно из утверждений $(i - iii)$ из (1).

Допустим, что $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(7)$. Тогда, либо $\bar{T}$ содержит две компоненты N_1, N_2, изоморфных $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 7$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту N, изоморфную $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 91$, либо $|S(G) : S(G)_a| = 169 \cdot 7$. В этом случае выполняется одно из утверждений $(i - iii)$ из (2).

□

Заключение

В рамках диссертационной работы проведено исследование некоторых классов дистанционно регулярных графов.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Доказано несуществование некоторых Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов:

   1.1. $\{(s+1)^4+s,(s+1)^4-(s+1)^3,(s^2+s+1)(s+1);1,(s+1)s,(s^2+s+1)(s+1)^2\}$. при нечетном числе s.

   1.2. $\{83,54,21;1,6,63\}$, $\{629,500,105;1,20,525\}$, $\{104,70,25;1,7,80\}$ и $\{272,210,49;1,15,224\}$

2. Доказано несуществование некоторых графов Шилла:

   2.1. $\{b(b^2-1),b^2(b-1),b^2;1,1,(b^2-1)(b-1)\}$, $\{b^2(b-1)/2,(b-1)(b^2-b+2)/2,b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$, $(s+1)(s^3-1),s^4,s^3;1,s^2,s(s^3-1)\}$

   2.2. $\{12,10,2;1,2,8\}$ (Граф Шилла с $b=3$)

3. Найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1,nm-n+m-1,n-m+1;1,1,nm-n+m-1\}$

4. Подробно изучено нормальное строение неразрешимой группы автоморфизмов графов с массивами пересечений $\{90,84,7;1,1,84\}$, $\{220,216,5;1,1,216\}$ и $\{272,264,9;1,1,264\}$

Литература

1. *Biggs N. L.*, *Smith D. H.* On Trivalent Graphs // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1971. — Т. 3, № 2. — С. 155—158. — DOI: 10.1112/blms/3.2.155.
2. *Smith D. H.* On Tetravalent Graphs // Journal of the London Mathematical Society. — 1973. — Июнь. — Т. s2—6, № 4. — С. 659—662. — DOI: 10.1112/jlms/s2-6.4.659.
3. *Smith D. H.* Distance-Transitive Graphs of Valency Four // Journal of the London Mathematical Society. — 1974. — Июль. — Т. s2—8, № 2. — С. 377—384. — DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s2-8.2.377.
4. *Cameron P. J.* There are only finitely many finite distance-transitive graphs of given valency greater than two // Combinatorica. — 1982. — Март. — Т. 2, № 1. — С. 9—13. — DOI: 10.1007/bf02579277.
5. On the Sims Conjecture and Distance Transitive Graphs / P. J. Cameron, C. E. Praeger, J. Saxl, G. M. Seitz // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1983. — Сент. — Т. 15, № 5. — С. 499—506. — DOI: 10.1112/blms/15.5.499.
6. *Bannai*, *Ito T.* Algebraic combinatorics I: Association schemes. — Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.
7. There are only finitely many distance-regular graphs of fixed valency greater than two / S. Bang, A. Dubickas, J. H. Koolen, V. Moulton. — 2009. — Сент. — arXiv: 0909.5253 [math.CO].
8. *Dam E. van*, *Koolen J.* A New Family of Distance-Regular Graphs with Unbounded Diameter // CentER Discussion Paper Series. — 2005. — Т. 2004, № 116.
9. *Koolen J.*, *Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. — 2010. — Т. 31. — С. 2064—2073.
10. *Gavrilyuk A.*, *Koolen J.* The Terwilliger polynomial of a Q-polynomial distance-regular graph and its application to the pseudo-partition graphs // Linear Algebra Appl. — 2015. — Т. 466. — С. 117—140.
11. *Brouwer A.*, *Cohen A.*, *Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. — Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1989.
12. *Jurišić A.*, *Vidali J.* Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Designs, Codes and Cryptography. — 2012. — Март. — Т. 65, № 1/2. — С. 29—47. — DOI: 10.1007/s10623-012-9651-0.
13. Deza graphs: A generalization of strongly regular graph / M. Erickson, S. Fernando, W. H. Haemers, D. Hardy, J. Hemmeter // Journal of Combinatorial Designs. — 1999. — Т. 7, № 6. — С. 395—405. — DOI: 10.1002/(sici)1520-6610(1999)7:6<395::aid-jcd1>3.0.co;2-u.

14. *Coolsaet K.*, *Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. A. — 2008. — Т. 115. — С. 1086—1095.

15. *Cameron P. J.* Permutation Groups / под ред. C. U. Press. — 1999.

16. *Godsil C.* Association Schemes. — 2018.

17. *Махнев А.*, *Нирова М.* Дистанционно-регулярные графы Шилла // Мат. заметки. — 2018. — Т. 103. — С. 730—744.

18. *Belousov I. N.*, *Makhnev A. A.*, *Nirova M. S.* On Q-polynomial distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. — 2019. — Окт. — Т. 16. — С. 1385—1392. — DOI: 10.33048/semi.2019.16.096.

19. *Махнев А.*, *Нирова М.* Distance-Regular Graph with Iintersection Array $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ Does not Exist // Владикавказский математический журнал. — 2021. — Июнь. — № 2. — DOI: 10.46698/j7484-0095-3580-b.

20. *Makhnev A. A.*, *Belousov I. N.* To the theory of Shilla graphs with $b_2 = c_2$ // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. — 2017. — Т. 14. — С. 1135—1146. — DOI: 10.17377/semi.2017.14.097.

21. *Brouwer A.*, *Sumalroj S.*, *Worawannotai C.* The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays 27, 20, 10; 1, 2, 18 and 36, 28, 4; 1, 2, 24 // The Australasian Journal of Combinatorics. — 2016. — Т. 66, № 2. — С. 330—332.

22. *Belousov I. N.*, *Makhnev A. A.* Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. — 2018. — Нояб. — Т. 15. — С. 1506—1512. — DOI: 10.33048/semi.2018.15.125.

23. *Belousov I. N.*, *Makhnev A. A.* Distance-regular graph with intersection array $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. — 2019. — Февр. — Т. 16. — С. 206—216. — DOI: 10.33048/semi.2019.16.012.

24. *Махнев А.*, *Зюляркина Н.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ // Доклады академии наук. — 2011. — Т. 439, № 4. — С. 443—447.

25. *Belousov I. N.* Shilla Distance-Regular Graphs with $b_2 = sc_2$ // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2019. — Дек. — Т. 307, S1. — С. 23—33. — DOI: 10.1134/s0081543819070034.

26. *Developers T. S.* SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version x.y.z). — 2019. — https://www.sagemath.org.

27. *Janoš Vidali.* jaanos/sage-drg: sage-drg v0.9. — 2019. — DOI: 10.5281/ZENODO.1418409.

28. *Vidali J.* Using Symbolic Computation to Prove Nonexistence of Distance-Regular Graphs // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2018. — Окт. — Т. 25, № 4. — DOI: 10.37236/7763.

29. *Gavrilyuk A.*, *Koolen J.* A characterization of the graphs of bilinear $d \times d$-forms over F_2 // Combinatorica. — 2019. — Т. 39, № 2. — С. 289—321.

30. ATLAS of Finite Groups : Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. — Oxford University Press. — 1986. — DOI: 10.2307/2007904.

31. *Efimov K. S.*, *Makhnev A. A.* Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$ // Ural mathematical journal. — 2018. — Т. 4, № 2. — С. 69—78. — DOI: 10.15826/umj.2018.2.008.

32. *Bose R.*, *Dowling T.* A generalization of Moore graphs of diameter two // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1971. — Дек. — Т. 11, № 3. — С. 213—226. — DOI: 10.1016/0095-8956(71)90031-1.

33. *Gavrilyuk A. L.*, *Makhnev A. A.* On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Doklady Mathematics. — 2010. — Июнь. — Т. 81, № 3. — С. 439—442. — DOI: 10.1134/s1064562410030282.

34. *Behbahani M.*, *Lam C.* Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. — 2011. — Т. 311. — С. 132—144.

35. *Zavarnitsine A.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. — 2009. — Т. 6. — С. 1—12.

Основные публикации по теме диссертации

36. *Махнев А. А.*, *Голубятников М. П.* Несуществование некоторых Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 136—141. — DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-136-141. — (Scopus, WoS).

37. *Голубятников М. П.* Об автоморфизмах небольших дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ // Сиб. электрон. матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 1245—1253. — DOI: 10.33048/semi.2019.16.086. — (WoS).

38. *Махнев А. А.*, *Голубятников М. П.* Граф Шилла с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ не существует // Математические заметки. — 2019. — Т. 106, № 5. — С. 797—800. — DOI: 10.4213/mzm12559. — (Scopus, WoS).

39. *Голубятников М. П.* Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существуют // Тр. ИММ УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 4. — С. 98—105. — DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-98-105. — (Scopus, WoS).

40. Три бесконечные серии графов Шилла не существуют / А. А. Махнев, И. Н. Белоусов, М. П. Голубятников, М. С. Нирова // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2021. — Т. 498. — С. 45—50. — DOI: `10.31857/s2686954321030115`. — (Scopus, WoS).

41. *Махнев А. А.*, *Голубятников М. П.* Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ // Algebra and Logic. — 2020. — Нояб. — Т. 59, № 5. — С. 567—581. — DOI: `10.1007/s10469-020-09611-x`. — (Scopus, WoS).

42. *Makhnev A. A.*, *Golubyatnikov M. P.*, *Guo W.* Inverse Problems in Graph Theory: Nets // Communications in Mathematics and Statistics. — 2018. — Дек. — Т. 7, № 1. — С. 69—83. — DOI: `10.1007/s40304-018-0159-4`. — (Scopus, WoS).

Тезисы и конференции

43. *Голубятников М. П.* Об автоморфизмах небольших дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ // Международная конференция «Мальцевские чтения 2019». — Новосибирск, Россия, август.2019.

44. *Голубятников М. П.*, *Махнев А. А.* Несуществование некоторых Q-полиномиальных графов // Международная (51-я Всеросийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений». — Екатеринбург, Россия, февраль.2020.

45. *Голубятников М. П.*, *Махнев А. А.* Графы с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существуют // XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А. Белоногова. — Екатеринбург (онлайн), Россия, август.2020.

46. *Голубятников М. П.*, *Махнев А. А.* Small distance-regular graphs with intersection arrays $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ // The International Conference and PhD-Summer School on "Groups and Graphs, Semigroups and Synchronization" (G2S2) в рамках «Конференции международных математических центров мирового уровня». — Сочи, Россия, август.2021.

Листинг программ

Листинг 1: Шапка программы.

```
from drg import *
from tqdm.notebook import tqdm

drg = drg.DRGParameters([5,4,2],[1,1,4])
ia = DRG.intersectionArray()
ia_str_latex = "{%d,␣%d,␣%d;␣%d,␣%d,␣%d}"
   % (IA[0][0], IA[0][1], IA[0][2], IA[1][0], IA[1][1], IA[1][2])
md_file = open(IAStr+".txt","w+")
```

Листинг 2: Основной метод подсчета параметров.

```
def write_report(tin_calculator, drg, ia, md_file):
    ia_str_latex = "\\{%d, %d, %d; %d, %d, %d\\}" % (ia[0][0], ia[0][1], ia[0][2], ia[1][0], ia[1][1], ia[1][2])

    md_file.write("### Graph $"+ia_str_latex+"$ \r\n\r\n")

    md_file.write("##### Parameters: \r\n\r\n")
    md_file.write("Order: $1 + %d + %d + %d = %d$ \r\n" % (drg.p[0,1,1], drg.p[0,2,2], drg.p[0,3,3], drg.order()))

    spectra = ""
    for i in range(len(drg.eigenvalues(expand=True))):
        spectra += str(drg.eigenvalues(expand=True)[i]) + "^{" + str(drg.multiplicities()[i]) + "}, "

    md_file.write("Spectra: " + spectra +"\r\n\r\n")

    md_file.write("##### Intersection numbers: \r\n\r\n")
    md_file.write("$p_{11}^1=%d$, $p_{21}^1=%d$, $p_{32}^1=%d$, $p_{22}^1=%d$, $p_{33}^1=%d$ \r\n"
            %(drg.p[1,1,1], drg.p[1,1,2], drg.p[1,3,2], drg.p[1,2,2], drg.p[1,3,3]))

    md_file.write("$p^2_{11}=%d$, $p^2_{12}=%d$, $p^2_{13}=%d$, $p^2_{22}=%d$, $p^2_{23}=%d$, $p^2_{33}=%d$ \r\n"
            %(drg.p[2,1,1], drg.p[2,1,2], drg.p[2,1,3], drg.p[2,2,2], drg.p[2,2,3], drg.p[2,3,3]))

    md_file.write("$p^3_{12}=%d$,  $p^3_{13}=%d$, $p^3_{22}=%d$, $p^3_{23}=%d$, $p^3_{33}=%d$ \r\n"
            %(drg.p[3,1,2], drg.p[3,1,3], drg.p[3,2,2], drg.p[3,2,3], drg.p[3,3,3]))

    md_file.write("##### P = \r\n\r\n")
    md_file.write("$$\r\n")
    md_file.write(latex(drg.eigenmatrix(expand=True)))
    md_file.write("\r\n$$")
    md_file.write("\r\n\r\n")
```

```
md_file.write("#####␣Q␣=␣␣\r\n\r\n")
md_file.write("$$\r\n")
md_file.write(latex(drg.dualEigenmatrix(expand=True)))
md_file.write("\r\n$$")
md_file.write("\r\n\r\n")

triples = []
for u in range(1, 4):
    for v in range(1, 4):
        for w in range(1, 4):
            if drg.p[u, v, w] != 0:
                triples.append((u, v, w))

for triple in tqdm(triples):
    u, v, w = triple
    tin_calculator(u, v, w)

md_file.close()
```

Листинг 3: Метод нахождения ограничений, основанный на подсчете целых точек внутри полиэдра.

```
def get_triple_intersection_report_full(u, v, w, drg, md_file,
   ↪ filter_solutions=True):
    tin = drg.tripleEquations(w, v, u)
    md_file.write("######␣Triple␣Intersection␣Numbers␣for␣U␣=␣%d,␣V␣=␣%d,␣W␣=␣
       ↪ %d\r\n" % (u, v, w))

    md_file.write("$$")
    md_file.write("\r\n")
    for i in range(0, 4):
        for j in range(0, 4):
            for k in range(0, 4):
                s = tin[i, j, k]
                if s != 0:
                    md_file.write("[%d%d%d]␣=␣" % (i, j, k) + latex(s) + "\\\\␣\
                       ↪ r\n")
    md_file.write("\r\n")
    md_file.write("$$")

    inequalities = []
    variables = tin.variables()
    for i in range(0, 4):
        for j in range(0, 4):
            for k in range(0, 4):
                if tin[i, j, k] != 0:
                    v = [0] * (len(variables) + 1)
                    v[0] = tin[i, j, k].subs(dict(zip(variables, [0] * len(
                       ↪ variables))))
                    for l in range(1, len(variables) + 1):
                        v[l] = derivative(tin[i, j, k], variables[l - 1])
                    inequalities.append(v)

    poly = Polyhedron(ieqs=inequalities, base_ring=QQ)
    solutions = poly.integral_points()

    if filter_solutions:
        true_solutions = []
        for sol in solutions:
            flag = True
```

```
        for i in range(0, 4):
            for j in range(0, 4):
                for k in range(0, 4):
                    if not tin[i, j, k].subs(dict(zip(variables, sol))).
                        ↪ is_integer():
                        flag = False
                        break
        if flag:
            true_solutions.append(sol)
else:
    true_solutions = solutions

ell = [0] * len(variables)

md_file.write("\r\n\r\n")
for i in range(0, len(variables)):
    tmp = list(zip(*true_solutions))[i]
    tmp = list(set(tmp))
    tmp.sort()
    if len(tmp) < 20:
        md_file.write("$" + latex(variables[i]) + "\\in" + latex(tmp) + "$\
            ↪ r\n")
    else:
        md_file.write("$" + latex(min(tmp)) + "␣\\le␣" + latex(variables[i
            ↪ ]) + "␣\\le␣" + latex(max(tmp)) + "$\r\n")

md_file.write("\r\n")
md_file.write("\r\n---\r\n")
```

Листинг 4: Метод нахождения ограничений, основанный на линейном программировании.

```
def get_triple_intersection_report_linprog(u, v, w, drg, md_file):
    # U = d(v, w), V = d(u, w), W(v, u)
    tin = drg.tripleEquations(w, v, u)
    md_file.write("######␣Triple␣Intersection␣Numbers␣for␣U␣=␣%d,␣V␣=␣%d,␣W␣=␣
        ↪ %d\r\n" % (u, v, w))

    md_file.write("$$")
    md_file.write("\r\n")
    for i in range(0, 4):
        for j in range(0, 4):
            for k in range(0, 4):
                s = tin[i, j, k]
                if s != 0:
                    md_file.write("[%d%d%d]␣=␣" % (i, j, k) + latex(s) + "\\\\␣\
                        ↪ r\n")
    md_file.write("\r\n")
    md_file.write("$$")

    inequalities = []
    constants = []
    variables = tin.variables()
    for i in range(0, 4):
        for j in range(0, 4):
            for k in range(0, 4):
                if tin[i, j, k] != 0:
                    v = [0] * len(variables)
                    for l in range(0, len(variables)):
                        v[l] = derivative(tin[i, j, k], variables[l])
                    constants.append(tin[i, j, k].subs(dict(zip(variables, [0] *
                        ↪  len(variables)))))
                    inequalities.append(v)

    a_matrix = Matrix(inequalities)
    f_vector = vector(constants)

    constraints = []

    for i in range(len(variables)):
        p_max = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True, solver='GLPK')
```

```
    w_max = p_max.new_variable(integer=True, nonnegative=True)
    p_max.set_objective(w_max[i])
    p_max.add_constraint(a_matrix * w_max >= -f_vector)
    max_value = Integer(p_max.solve())

    p_min = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False, solver='GLPK')
    w_min = p_min.new_variable(integer=True, nonnegative=True)
    p_min.set_objective(w_min[i])
    p_min.add_constraint(a_matrix * w_min >= -f_vector)
    min_value = Integer(p_min.solve())

    constraints.append((variables[i], min_value, max_value))

md_file.write("\r\n\r\n")

for (var, min_value, max_value) in constraints:
    md_file.write("$" + latex(min_value) + " \\le " + latex(var) + " \\le " + latex(max_value) + "$\r\n")

md_file.write("\r\n")
md_file.write("\r\n---\r\n")
```

Листинг 5: Метод, считающий только тройные числа пересечений без нахождения ограничений.

```
def get_triple_intersection_report_simple(u, v, w, drg, md_file):
    tin = drg.tripleEquations(w, v, u)
    md_file.write("######␣Triple␣Intersection␣Numbers␣for␣U␣=␣%d,␣V␣=␣%d,␣W␣=␣
        ↪ %d\r\n" % (u, v, w))

    md_file.write("$$")
    md_file.write("\r\n")
    for i in range(0, 4):
        for j in range(0, 4):
            for k in range(0, 4):
                s = tin[i, j, k]
                if s != 0:
                    md_file.write("[%d%d%d]␣=␣" % (i, j, k) + latex(s) + "\\\\␣\
                        ↪ r\n")
    md_file.write("\r\n")
    md_file.write("$$")

    md_file.write("\r\n")
    md_file.write("\r\n---\r\n")
```