Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

На правах рукописи
УДК 519.14+512.54

ГОЛУБЯТНИКОВ МИХАИЛ ПЕТРОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

Специальность 1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Научный руководитель: Махнев Александр Алексеевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Кравцова Ольга Вадимовна, доктор физико-математических наук, доцент Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», профессор кафедры алгебры и математической логики

Койбаев Владимир Амурханович, доктор физико-математических наук, профессор Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Северо-Осетинский Государственный Университет имени К. Л. Хетагурова, профессор кафедры алгебры и анализа

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный университет»

Защита состоится "_____"_______________ 2024 года в _____ на заседании диссертационного совета 24.1.073.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) и на сайте https://www.imm.uran.ru/.

Автореферат разослан "_____"_______________ 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандитат физ.-мат. наук И.Н. Белоусов

Автореферат

В 2004 году выдающийся математик Майкл Ашбахер опубликовал результаты, ознаменовавшие окончательное завершение доказательства классификации конечных простых групп. Данная теорема, являющаяся одним из краеугольных камней современной алгебры, представляет собой масштабное и трудоемкое доказательство, охватывающее множество сложных математических концепций и методов. В связи с этим, в научном сообществе возникла потребность в упрощении и оптимизации доказательства, что позволило бы сделать его более доступным и понятным для широкого круга математиков.

Один из возможных подходов к решению этой проблемы был предложен выдающимся математиком Майклом Атьей. Согласно его идее, классификация конечных простых групп могла бы быть значительно упрощена путем построения некоторого геометрического объекта, на котором эти группы действуют естественным образом. Последующая классификация геометрических структур этого объекта позволила бы получить более наглядное и интуитивно понятное доказательство теоремы.

В качестве одного из таких геометрических объектов может выступать симметричный граф. Особый интерес в этом контексте представляют дистанционно регулярные графы, обладающие рядом уникальных свойств и характеристик. Исследование различных специальных классов дистанционно транзитивных графов имеет богатую историю и восходит к работам выдающихся математиков прошлого. Среди наиболее известных классов таких графов можно выделить кубические клетки Татта, графы инцидентности дезарговых проективных плоскостей, графы групп ранга 3 и многие другие.

Таким образом, изучение дистанционно регулярных графов и их связи с конечными простыми группами представляет собой перспективное направление исследований, способное привести к значительному упрощению и оптимизации доказательства классификации конечных простых групп. Результаты, полученные в рамках данной диссертации, вносят существенный вклад в развитие этой области математики и открывают новые горизонты для дальнейших исследований.

Следует отметить, что дистанционно регулярные графы представляют собой более общий класс графов, включающий в себя дистанционно-транзитивные графы как частный случай. Дистанционно регулярные графы характеризуются наличием определенных комбинаторных свойств, связанных с расстояниями между вершинами, в то время как дистанционно-транзитивные графы дополнительно обладают высокой степенью симметрии, обусловленной транзитивностью действия группы автоморфизмов на множестве вершин графа. Таким образом, результаты, полученные при изучении дистанционно-транзитивных графов, могут быть применены и к более широкому классу дистанционно регулярных графов, что открывает новые возможности для исследований в этой области.

Первый общий результат по классификации дистанционно транзитивных графов был получен в 1971 году Норманом Бигсом и Дереком Смитом [1], где были классифицированы дистанционно транзитивные графы валентности $k = 3$. Графы валентности 4, были полностью классифицированы Смитом [2; 3]. В течение последующих пятнадцати лет центральной проблемой при изучении дистанционно-транзитивных графов была классификация ДТГ малой валентности.

В качестве первого шага в классификации ДТГ валентности 3 и 4 было доказано, что таких графов лишь конечное число. Было высказано предположение, что для всех $k \geq 3$ существует конечное число ДТГ валентности k (при $k = 2$ имеется бесконечная серия ДТГ, а именно циклы длины n). Эта гипотеза эквивалентна существованию функции $d(k)$, обладающей тем свойством, что диаметр ДТГ валентности k не превосходит $d(k)$.

В работе Смита [3] существование такой функции $d(k)$ было доказано для двудольного ДТГ. В работе Кэмерона с соавторами 1982 г. [4] было доказано, что диаметр ДТГ ограничен некоторой функцией от порядка стабилизатора вершины в группе автоморфизмов ДТГ.

В работе Кэмерона с соавторами [5] доказано, что порядок стабилизатора вершины дистанционно транзитивного графа ограничен функцией от валентности этого графа. Интересно отметить, что этот результат был получен в предположении истинности классификации простых конечных групп, которая в то время ещё не была полностью завершена.

Ранее в 1984 Баннаи и Ито в книге [6] сформулировали гипотезу:

Гипотеза. *Существует лишь конечное число дистанционно регулярных графов фиксированной валентности, большей двух.*

Эта гипотеза касается не дистанционно транзитивных графов, а другого более широкого класса дистанционно регулярных графов.

Так как дистанционно регулярные графы в общем не обладают “хорошей” группой автоморфизмов, то к этой гипотезе был применён чисто комбинаторный подход, независимый от классификации конечных простых групп.

Полное доказательство гипотезы Баннаи и Ито было получено в 2009 году группой авторов С. Банг, А. Дубицкас, Дж. Кулен и В. Моултон [7]. Доказательство крайне технично и представляет собой синтез комбинаторных рассуждений, теории чисел и математического анализа.

Дальнейшие исследования, были сосредоточены на нахождении новых дистанционно регулярных графов и исследовании их групп автоморфизмов.

Наиболее ярким примером является построение бесконечной серии скрученных графов Грассмана, которые не являются даже вершинно транзитивными [8].

Также Кулен и Парк определили дистанционно регулярные графы Шилла [9], изучению которых посвящена глава 3 настоящей диссертации.

Цель и задачи исследования:

Целью работы является изучение некоторых классов дистанционно регулярных графов и их автоморфизмов. Для ее достижения в работе решаются следующие задачи:

1. Доказать несуществование некоторых серий дистанционно регулярных графов.

2. Продолжить исследования класса дистанционно регулярных графов Шилла.

3. Исследовать возможные группы автоморфизмов некоторых дистанционно регулярных графов

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Доказано несуществование Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов с массивами пересечений:

   1.1. $\{(s+1)^4+s,(s+1)^4-(s+1)^3,(s^2+s+1)(s+1);1,(s+1)s,(s^2+s+1)(s+1)^2\}$. при нечетном числе s.

   1.2. $\{83,54,21;1,6,63\}$, $\{629,500,105;1,20,525\}$, $\{104,70,25;1,7,80\}$ и $\{272,210,49;1,15,224\}$

   Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(s+1)^4+s,(s+1)^4-(s+1)^3,(s^2+s+1)(s+1);1,(s+1)s,(s^2+s+1)(s+1)^2\}$. Если число s нечетно, то Γ не существует.*

   Теорема 2. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{83,54,21;1,6,63\}$ $(s=2)$ и $\{629,500,105;1,20,525\}$ $(s=4)$ не существуют.*

   Теорема 3. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{104,70,25;1,7,80\}$ и $\{272,210,49;1,15,224\}$ не существуют.*

2. Доказано несуществование некоторых графов Шилла:

   2.1. $\{b(b^2-1),b^2(b-1),b^2;1,1,(b^2-1)(b-1)\}$, $\{b^2(b-1)/2,(b-1)(b^2-b+2)/2,b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$, $\{(s+1)(s^3-1),s^4,s^3;1,s^2,s(s^3-1)\}$

   2.2. $\{12,10,2;1,2,8\}$ (Граф Шилла с $b=3$)

   Теорема 4. *Граф Шилла с массивом пересечений $\{12,10,2;1,2,8\}$ не существует.*

   Теорема 5. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b(b^2-1),b^2(b-1),b^2;1,1,(b^2-1)(b-1)\}$. Тогда $b\in\{2,3\}$.*

3. Найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1,nm-n+m-1,n-m+1;1,1,nm-n+m-1\}$

   Теорема 9. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nm-1,nm-n+m-1,n-m+1;1,1,nm-n+m-1\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G)\subseteq\pi(mn)\cup\pi((m-1)(n+1))\cup\pi(m^2-mn+m+n^2-n-2)$, n делит $(m-1)\alpha_0(g)-\alpha_3(g)$, $2(m-1)\alpha_0(g)$ и $2\alpha_3(g)$, и верно одно из утверждений:*

   (1) Ω – пустой граф, p делит mn, $\alpha_3(g)=mnpl$ и $\alpha_1(g)=mpl+m^2n(mn+n-1)+(m+n)ps$;

   (2) Ω является t-кликой, $t>1$, p делит $(n+1)(m-1)$, $(mn-1)(n-m+1)$ и $n-m+1-t$, $\alpha_3(g)=(n-m+1)(t+mn)+mnpl$, $2(m-1)t=sn$ и $\alpha_1(g)=-(mt+s)+(t+mn+m+mpl)+(m+n)r$;

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $l > 1$*, расстояние в* Γ *между любыми двумя вершинами из* Ω *равно* 3*,* $p = 2$*, числа* m, n *нечётны и* $l = mn$*.*

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b, a, c*, если* Δ *— связная компонента графа* Ω*, содержащая вершину* a*, то либо* $p = 2$*, либо*

(*i*) *диаметр* Δ *равен* 3 *и* p *делит* $p^3_{33} = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2$*, либо*

(*ii*) *диаметр* Δ *равен* 2*,* Δ *— сильно регулярный граф с* $\mu = 1$*,* p *делит* $n - m + 1$*,* mn*,* $|\Omega|$*,* $|\Delta|$*, окрестность любой вершины в графе* Δ *состоит из* r *изолированных* s*-клик,* $s > 1$*,* $s + 1$ *делит* $r(r-1)^2$*,* p *делит* $s + 1$ *и* $r - 1$*.*

Научная новизна: Все основные результаты диссертации являются новыми.

Научная и практическая значимость Работа носит теоретический характер. Результаты продолжают изучение реберно регулярных графов и их автоморфизмов. Результаты и методы диссертации могут быть использованы для изучения алгебраических структур подобного типа.

Апробация работы. Основные результаты докладывались на следующих конференциях: Международная конференция «Мальцевские чтения 2019» (Новосибирск, Россия); Международная (51-я Всеросийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений»; XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А. Белоногова, (Екатеринбург); The International Conference and PhD-Summer School on “Groups and Graphs, Semigroups and Synchronization” (G2S2) в рамках «Конференции международных математических центров мирового уровня» ([43—46])

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в семи работах [36—42]. Все работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, и индексируются в Web of Science и/или в Scopus. В совместных работах [36; 38; 40—42] научному руководителю А.А Махневу принадлежит постановка задачи и общая схема их исследования, формулировки и доказательства основных результатов принадлежат автору диссертации. В публикациях, указанных в источниках [40; 42], научный руководитель А.А. Махнев определил направление исследования и разработал общую методологию. Ключевые результаты, их формулировки и доказательства были получены в тесном сотрудничестве со всеми соавторами работ.

Объем и структура работы. Диссертация изложена на 59 страницах, содержит введение, 4 главы, заключение, список литературы, состоящий из 46 источников и аппендикс. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Вспомогательные утверждения (леммы) и имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер главы, вторая цифра — номер параграфа в текущей главе, третья - номер утверждения в текущем параграфе. Теоремы, следствия и замечания имеют сплошную нумерацию.

В первой главе приводятся основные определения, обозначения и предварительные результаты, необходимые для дальнейшего изложения материала.

Вторая глава посвящена доказательству несуществования некоторых классов Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов. Получены новые результаты, позволяющие исключить существование графов с определенными параметрами.

В третьей главе исследуются графы Шилла и их свойства. Особое внимание уделяется графу с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ и графам Шилла, удовлетворяющим условию $b_2 = c_2$.

Четвертая глава содержит результаты о группах автоморфизмов графа с массивом пересечений $\{nm - 1, nm - n + m - 1, n - m + 1; 1, 1, nm - n + m - 1\}$. Получены оценки порядков групп автоморфизмов и описаны некоторые их подгруппы.

Результаты (теоремы 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9) получены при поддержке гранта РНФ (проект номер 19-71-10067). Текст диссертации выполнен при поддержке Уральского математического центра УрФУ (соглашение номер 075-02-2024-1428)

Литература

1. *Biggs N. L.*, *Smith D. H.* On Trivalent Graphs // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1971. — Т. 3, № 2. — С. 155—158. — DOI: `10.1112/blms/3.2.155`.
2. *Smith D. H.* On Tetravalent Graphs // Journal of the London Mathematical Society. — 1973. — Июнь. — Т. s2—6, № 4. — С. 659—662. — DOI: `10.1112/jlms/s2-6.4.659`.
3. *Smith D. H.* Distance-Transitive Graphs of Valency Four // Journal of the London Mathematical Society. — 1974. — Июль. — Т. s2—8, № 2. — С. 377—384. — DOI: `https://doi.org/10.1112/jlms/s2-8.2.377`.
4. *Cameron P. J.* There are only finitely many finite distance-transitive graphs of given valency greater than two // Combinatorica. — 1982. — Март. — Т. 2, № 1. — С. 9—13. — DOI: `10.1007/bf02579277`.
5. On the Sims Conjecture and Distance Transitive Graphs / P. J. Cameron, C. E. Praeger, J. Saxl, G. M. Seitz // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1983. — Сент. — Т. 15, № 5. — С. 499—506. — DOI: `10.1112/blms/15.5.499`.
6. *Bannai*, *Ito T.* Algebraic combinatorics I: Association schemes. — Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.
7. There are only finitely many distance-regular graphs of fixed valency greater than two / S. Bang, A. Dubickas, J. H. Koolen, V. Moulton. — 2009. — Сент. — arXiv: `0909.5253 [math.CO]`.
8. *Dam E. van*, *Koolen J.* A New Family of Distance-Regular Graphs with Unbounded Diameter // CentER Discussion Paper Series. — 2005. — Т. 2004, № 116.
9. *Koolen J.*, *Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. — 2010. — Т. 31. — С. 2064—2073.
10. *Brouwer A.*, *Cohen A.*, *Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. — Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1989.
11. *Behbahani M.*, *Lam C.* Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. — 2011. — Т. 311. — С. 132—144.
12. *Zavarnitsine A.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. — 2009. — Т. 6. — С. 1—12.
13. *Gavrilyuk A.*, *Koolen J.* The Terwilliger polynomial of a Q-polynomial distance-regular graph and its application to the pseudo-partition graphs // Linear Algebra Appl. — 2015. — Т. 466. — С. 117—140.
14. *Coolsaet K.*, *Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. A. — 2008. — Т. 115. — С. 1086—1095.
15. *Gavrilyuk A.*, *Koolen J.* A characterization of the graphs of bilinear $d \times d$-forms over F_2 // Combinatorica. — 2019. — Т. 39, № 2. — С. 289—321.

16. *Махнев А.*, *Нирова М.* Дистанционно-регулярные графы Шилла // Мат. заметки. — 2018. — Т. 103. — С. 730—744.

17. *Cameron P. J.* Permutation Groups / под ред. C. U. Press. — 1999.

18. *Godsil C.* Association Schemes. — 2018.

19. *Developers T. S.* SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version x.y.z). — 2019. — `https://www.sagemath.org`.

20. ATLAS of Finite Groups : Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. — Oxford University Press. — 1986. — DOI: `10.2307/2007904`.

21. *Belousov I. N.*, *Makhnev A. A.*, *Nirova M. S.* On Q-polynomial distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. — 2019. — Окт. — Т. 16. — С. 1385—1392. — DOI: `10.33048/semi.2019.16.096`.

22. *Jurišić A.*, *Vidali J.* Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Designs, Codes and Cryptography. — 2012. — Март. — Т. 65, № 1/2. — С. 29—47. — DOI: `10.1007/s10623-012-9651-0`.

23. Deza graphs: A generalization of strongly regular graph / M. Erickson, S. Fernando, W. H. Haemers, D. Hardy, J. Hemmeter // Journal of Combinatorial Designs. — 1999. — Т. 7, № 6. — С. 395—405. — DOI: `10.1002/(sici)1520-6610(1999)7:6<395::aid-jcd1>3.0.co;2-u`.

24. *Brouwer A.*, *Sumalroj S.*, *Worawannotai C.* The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays 27, 20, 10; 1, 2, 18 and 36, 28, 4; 1, 2, 24 // The Australasian Journal of Combinatorics. — 2016. — Т. 66, № 2. — С. 330—332.

25. *Belousov I. N.*, *Makhnev A. A.* Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. — 2018. — Нояб. — Т. 15. — С. 1506—1512. — DOI: `10.33048/semi.2018.15.125`.

26. *Belousov I. N.*, *Makhnev A. A.* Distance-regular graph with intersection array $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. — 2019. — Февр. — Т. 16. — С. 206—216. — DOI: `10.33048/semi.2019.16.012`.

27. *Махнев А.*, *Зюляркина Н.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ // Доклады академии наук. — 2011. — Т. 439, № 4. — С. 443—447.

28. *Махнев А.*, *Нирова М.* Distance-Regular Graph with Iintersection Array $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ Does not Exist // Владикавказский математический журнал. — 2021. — Июнь. — № 2. — DOI: `10.46698/j7484-0095-3580-b`.

29. *Makhnev A. A.*, *Belousov I. N.* To the theory of Shilla graphs with $b_2 = c_2$ // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. — 2017. — T. 14. — C. 1135—1146. — DOI: `10.17377/semi.2017.14.097`.

30. *Belousov I. N.* Shilla Distance-Regular Graphs with $b_2 = sc_2$ // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2019. — Дек. — T. 307, S1. — C. 23—33. — DOI: `10.1134/s0081543819070034`.

31. *Efimov K. S.*, *Makhnev A. A.* Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$ // Ural mathematical journal. — 2018. — T. 4, № 2. — C. 69—78. — DOI: `10.15826/umj.2018.2.008`.

32. *Gavrilyuk A. L.*, *Makhnev A. A.* On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Doklady Mathematics. — 2010. — Июнь. — T. 81, № 3. — C. 439—442. — DOI: `10.1134/s1064562410030282`.

33. *Bose R.*, *Dowling T.* A generalization of Moore graphs of diameter two // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1971. — Дек. — T. 11, № 3. — C. 213—226. — DOI: `10.1016/0095-8956(71)90031-1`.

34. *Vidali J.* Using Symbolic Computation to Prove Nonexistence of Distance-Regular Graphs // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2018. — Окт. — T. 25, № 4. — DOI: `10.37236/7763`.

35. *Janoš Vidali.* jaanos/sage-drg: sage-drg v0.9. — 2019. — DOI: `10.5281/ZENODO.1418409`.

Основные публикации по теме диссертации

36. *Махнев А. А.*, *Голубятников М. П.* Несуществование некоторых Q-полиномиальных дистанционно регулярных графов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 136—141. — DOI: `10.21538/0134-4889-2019-25-4-136-141`. — (Scopus, WoS).

37. *Голубятников М. П.* Об автоморфизмах небольших дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ // Сиб. электрон. матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 1245—1253. — DOI: `10.33048/semi.2019.16.086`. — (WoS).

38. *Махнев А. А.*, *Голубятников М. П.* Граф Шилла с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ не существует // Математические заметки. — 2019. — Т. 106, № 5. — С. 797—800. — DOI: `10.4213/mzm12559`. — (Scopus, WoS).

39. *Голубятников М. П.* Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существуют // Тр. ИММ УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 4. — С. 98—105. — DOI: `10.21538/0134-4889-2020-26-4-98-105`. — (Scopus, WoS).

40. Три бесконечные серии графов Шилла не существуют / А. А. Махнев, И. Н. Белоусов, М. П. Голубятников, М. С. Нирова // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2021. — Т. 498. — С. 45—50. — DOI: 10.31857/s2686954321030115. — (Scopus, WoS).

41. *Махнев А. А.*, *Голубятников М. П.* Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ // Algebra and Logic. — 2020. — Нояб. — Т. 59, № 5. — С. 567—581. — DOI: 10.1007/s10469-020-09611-x. — (Scopus, WoS).

42. *Makhnev A. A.*, *Golubyatnikov M. P.*, *Guo W.* Inverse Problems in Graph Theory: Nets // Communications in Mathematics and Statistics. — 2018. — Дек. — Т. 7, № 1. — С. 69—83. — DOI: 10.1007/s40304-018-0159-4. — (Scopus, WoS).

Тезисы докладов на конференциях

43. *Голубятников М. П.* Об автоморфизмах небольших дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ // Международная конференция «Мальцевские чтения 2019». — Новосибирск, Россия, август.2019.

44. *Голубятников М. П.*, *Махнев А. А.* Несуществование некоторых Q-полиномиальных графов // Международная (51-я Всеросийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений». — Екатеринбург, Россия, февраль.2020.

45. *Голубятников М. П.*, *Махнев А. А.* Графы с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существуют // XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А. Белоногова. — Екатеринбург (онлайн), Россия, август.2020.

46. *Голубятников М. П.*, *Махнев А. А.* Small distance-regular graphs with intersection arrays $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ // The International Conference and PhD-Summer School on “Groups and Graphs, Semigroups and Synchronization” (G2S2) в рамках «Конференции международных математических центров мирового уровня». — Сочи, Россия, август.2021.