Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Новосибирский государственный университет
*НАСТОЯЩАЯ НАУКА

На правах рукописи

Васильев Алексей Сергеевич

Надгруппы примарных подгрупп в группах, близких к простым

Специальность 1.1.5 —
«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Ревин Данила Олегович

Новосибирск — 2024

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Диссертационная работа относится к классическому направлению теории конечных групп — исследованию подгруппового строения конечных простых и близких к простым групп. В диссертации рассматриваются некоторые надгруппы (то есть подгруппы, содержащие данные подгруппы) определённых примарных подгрупп — подгрупп порядка, равного степени простого числа.

В 1872 году Л. Силов доказал [1] следующую теорему.

Теорема (Л. Силов). *Пусть порядок группы G равен $r^\alpha \cdot m$, где число r*[1] *простое, а m не делится на r. Тогда справедливы следующие утверждения.*

- *Группа G содержит по крайней мере одну подгруппу порядка r^α (т. н. силовскую r-подгруппу).*
- *Любые две силовские r-подгруппы сопряжены.*
- *Всякая r-подгруппа группы G содержится в некоторой силовской r-подгруппе.*

По мнению специалистов теорема Силова является краеугольным камнем теории конечных групп. Изучение различных надгрупп примарных подгрупп в конечных простых группах является важным аспектом этой теории, поскольку позволяет глубже понять структуру конечных групп. Наиболее впечатляющим и известным продвижением в этом направлении считается создание Дж. Томпсоном и другими специалистами локального теоретико-группового анализа.

В центре внимания диссертационной работы находятся сформулированные ниже проблемы 1-3.

[1] Символ p зарезервирован для обозначения характеристики некоторого фиксированного конечного поля.

Всюду далее символом $\mathfrak{X}$ обозначен фиксированный непустой класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Следуя Х. Виланду [2], будем называть такой класс *полным*. Будем предполагать также, что $\mathfrak{X}$ содержит группу порядка 2 (эквивалентно, содержит некоторую группу чётного порядка, или, эквивалентно, содержит любую 2-группу) и отличен от класса всех конечных групп. Как следует из теоремы Силова, при данных ограничениях любая конечная группа содержит максимальную $\mathfrak{X}$-подгруппу нечётного индекса.

В диссертации рассматривается следующая задача.

Проблема 1. *Для любого полного (т. е. замкнутого относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений) класса конечных групп $\mathfrak{X}$ классифицировать максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в простых группах.*

Решение этой задачи известно в следующих случаях:

- силовские 2-подгруппы в Sym_n (т. е. максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс 2-групп) описаны Л. А. Калужниным [3];
- максимальные подгруппы нечётного индекса в Sym_n (т. е. максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс конечных групп, у которых порядки неабелевых композиционных факторов меньше $n!/2$) описаны М. Либеком и Я. Саксломом [4], У. Кантором [5] и детально Н. В. Масловой [6];
- максимальные разрешимые подгруппы нечётного индекса в Sym_n описаны К. Ю. Коротицким и Д. О. Ревиным [7].

Для случая, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех π-групп, где π — произвольное множество простых чисел, известны следующие результаты. Ф. Холл [8, теорема A4] и Дж. Томпсон [9] описали π-холловы подгруппы в симметрических группах, т.е. такие π-подгруппы, у которых индекс не делится на числа из π. К. Купер [10] упростил рассуждения Холла и Томпсона. Он показал, что в симметрической группе холловы подгруппы (и даже несколько более широкий класс максимальных π-подгрупп) нечётного порядка исчерпываются силовскими подгруппами, а максимальные π-подгруппы нечётного индекса должны быть прямыми произведениями итерированных сплетений симметрических групп [10, теорема 1]. Отсюда классификация Холла–Томпсона получается после несложных арифметических вычислений. Результаты Купера о максимальных π-подгруппах нечётного индекса в уточнённой формулировке можно независимым образом извлечь из настоящей диссертации.

В диссертации приводится описание максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в симметрических группах, где $\mathfrak{X}$ — произвольный полный класс конечных групп, содержащий группу порядка 2. Одним из следствий этого результата является описание максимальных и т. н. субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в знакопеременных группах.

В диссертации всюду предполагается, что r — это простое число. В теории конечных групп r-подгруппы и их нормализаторы (т.н. r-локальные подгруппы) играют фундаментальную роль. Изучение таких подгрупп лежит в основе локального теоретико-группового анализа. Особый интерес представляют r-локальные подгруппы в конечных простых группах. Однако даже нормализаторы силовских подгрупп в простых группах к настоящему времени полностью не описаны.

В диссертации изучается следующий вопрос.

Проблема 2. *Описать нормализаторы силовских подгрупп в простых конечных группах.*

Сами силовские подгруппы в конечных простых группах исследовались в работах многих авторов (см., например, [3; 11—15]). В группах лиева типа, составляющих основной массив конечных простых групп, наилучшим образом исследовано строение нормализаторов силовских p-подгрупп для случая, когда p — характеристика поля определения группы. Строение нормализаторов силовских r-подгрупп в случае, когда r отлично от характеристики поля определения, полностью найдено лишь для $r = 2$. Нормализаторы силовских 2-подгрупп описаны в работах Картера и Фонга [13], А. С. Кондратьева и В. Д. Мазурова [16] и А. С. Кондратьева [17] во всех конечных простых группах. Отметим, что силовская 2-подгруппа во многих случаях совпадает со своим нормализатором. В то же время, в случае нечётного r, силовская r-подгруппа конечной простой группы никогда не совпадает со своим нормализатором: в соответствии с классическим результатом Дж. Глаубермана и Дж. Томпсона [18], если силовская r-подгруппа самонормализуема при $r > 3$, то группа непроста (то же верно и для $r = 3$ [19]). Более того, если нильпотентная подгруппа нечётного порядка самонормализуема, то группа непроста [20].

В диссертации приведено решение проблемы 2 для классических простых групп (линейных и унитарных, а также симплектических и ортогональных групп нечётной характеристики) в случае, когда r — нечётное простое число, отличное от характеристики поля определения.

Пусть G — конечная группа, а V — конечный точный вполне приводимый G-модуль. Изучение орбит действия G на V является классической темой. Одним из самых важных и естественных вопросов об орбитах является установление существования орбиты определённой мощности. В течение длительного времени в литературе изучался вопрос о существовании регулярных орбит, то есть орбит мощности, равной порядку группы. Это изучение имеет множество применений к важным вопросам теории характеров и классов сопряжённости конечных групп. В работе [21] Пальфи и Пибер задались следующим вопросом.

Проблема 3. *Классифицировать все пары групп G, A с $(|G|, |A|) = 1$, такие что $G \leqslant \mathrm{Aut}(A)$ имеет регулярную орбиту на A.*

В диссертации получено продвижение в этом вопросе для примитивных разрешимых групп $G \leqslant \mathrm{Aut}(V)$, где V — конечное векторное пространство. Сами такие группы G (как подгруппы в линейных группах), а также естественные полупрямые произведения $V \rtimes G$ (как подгруппы в симметрических группах) являются надгруппами важных классов примарных подгрупп.

Основные результаты диссертации.

1. Для любого полного (т.е. замкнутого относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений), класса $\mathfrak{X}$ конечных групп, содержащего группу порядка 2, описаны (совместно с Д. О. Ревиным) с точностью до сопряжённости максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в симметрических группах. Как следствие, классифицированы также субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в знакопеременных группах.
2. Для любого нечётного простого числа r, отличного от 2 и от характеристики основного поля, описаны нормализаторы силовских r-подгрупп в полных и простых классических конечных группах: линейных и унитарных, а над полями нечётной характеристики также симплектических и ортогональных.
3. Доказано (совместно с Е. П. Вдовиным и Ю. Яном), что за конечным числом исключений конечная разрешимая, но не метациклическая группа, действующая точно и квазипримитивно на конечном векторном пространстве, обладает регулярной орбитой. Указаны все возможные исключения.

Результат 1 получен в соавторстве с Д. О. Ревиным с решающим вкладом соискателя. Результат 2 получен автором лично. Результат 3 получен в соавторстве с Е. П. Вдовиным и Ю. Яном. Вклад соискателя заключается в доказательстве теоремы, являющейся одной из ключевых для результата 3.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [49—58]. При этом основные результаты диссертации опубликованы в [49—52] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

Новизна и научная значимость работы. Все результаты диссертации являются новыми.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск 2018, 2020), Международной научной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань 2019), Международной конференции «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем», посвящённой 70-летию А.Х. Журтова (Нальчик 2019), Международной (50-ой Всероссийской) молодёжной школе-конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (Екатеринбург 2019), Международной научной студенческой конференции (Новосибирск 2019, 2020, 2021), Международной школе-конференции «Groups and Graphs, Semigroups and Synchronization» (Сочи 2021), семинарах «Теория групп», «Алгебра и логика» Института математики СО РАН и Новосибирского государственного университета, семинаре «Ural Seminar on Group Theory and Combinatorics» Института математики и механики УрО РАН.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения и 3 глав. Полный объём диссертации составляет 107 страниц, включая 9 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 58 наименований.

Содержание диссертации

Введение содержит историю изучаемых вопросов, основные определения и обзор основных результатов.

Глава 1.

Ниже собраны результаты работы и необходимые понятия. По аналогии с [7] мы однозначно параметризуем классы сопряжённости максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в группе Sym_n так называемыми допустимыми диаграммами, ассоциированными с числом n, см. основной результат — теорему 1.1.1. С каждым натуральным числом n ассоциировано конечное число допустимых диаграмм. Из описания допустимых диаграмм, представленного ниже, легко выводится алгоритм построения по числу всех допустимых диаграмм, ассоциированных с этим числом.

Теорема 1.1.1 решает [22, проблема 1] и частично [23, проблема 5.19] и вместе с основным результатом [22] позволяет представить описание т. н. субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в знакопеременных группах, см. теорему 1.1.2. Напомним, что субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы были введены Виландом [2]. Подгруппа H группы G называется *субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой*, если существует такое вложение группы G в качестве субнормальной подгруппы в некоторую группу G^*, при котором H совпадёт с пересечением G и подходящей максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы из G^*. В [23] показано, что если бы удалось получить описание субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в простых группах, то, используя соображения индукционного характера, мы бы имели возможность находить максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы в произвольной конечной группе. Теорема 1.1.2 вносит вклад в выполнение данной программы.

Назовём число

$$\Upsilon = \Upsilon(\mathfrak{X}) = \max\{n \mid \mathrm{Sym}_n \in \mathfrak{X}\}$$

симметрической границей класса $\mathfrak{X}$. Ясно, что $\mathrm{Sym}_n \in \mathfrak{X}$ если и только если $n \leqslant \Upsilon$. С помощью этого числа введём понятия расширенной двоичной записи натурального числа n, шаблона диаграммы и $\mathfrak{X}$-допустимой диаграммы, ассоциированной с n.

Пусть имеются последовательности $\overline{a_\nu a_{\nu-1}\dots a_0}$ и $\overline{b_\nu b_{\nu-1}\dots b_0}$, в которых каждый элемент равен 0 или нечётному числу, не превосходящему Υ. Скажем, что последовательность $\overline{b_\nu b_{\nu-1}\dots b_0}$ получена из $\overline{a_\nu a_{\nu-1}\dots a_0}$ *элементарной заменой*, если существует не превосходящее Υ и имеющее каноническую двоичную запись $\overline{d_\tau d_{\tau-1}\dots d_1 1}$ нечётное число d и номер $\alpha \in \{0,\dots,\nu\}$, такие что $a_\iota = b_\iota$ при $0 \leqslant \iota \leqslant \nu$ за исключением следующих случаев:

- $a_\alpha = 1$, $b_\alpha = d$,
- для всех β, таких что $d_\beta = 1$, имеют место равенства $a_{\alpha+\beta} = 1$, $b_{\alpha+\beta} = 0$.

Другими словами, элементарная замена — это замена единиц в подпоследовательности, соответствующей некоторому нечётному числу d, не превосходящему Υ, на нули (всех, кроме последней) и d (последней). Если последовательность $\overline{b_\nu b_{\nu-1}\ldots b_0}$ получена из $\overline{a_\nu a_{\nu-1}\ldots a_0}$ элементарной заменой, то в силу равенства

$$\sum_{\beta=0}^{\tau} d_\beta 2^{\alpha+\beta} = 2^\alpha d$$

имеем также

$$\sum_{\iota=0}^{\nu} a_\iota 2^\iota = \sum_{\iota=0}^{\nu} b_\iota 2^\iota.$$

Определим расширенную двоичную запись натурального числа n. Рассмотрим сначала каноническое двоичное разложение

$$n = \overline{c_\nu c_{\nu-1}\ldots c_0} = \sum_{\iota=0}^{\infty} c_\iota 2^\iota, \text{ где } c_\iota \in \{0,1\}, c_\iota = 0 \text{ при } \iota > \nu \text{ и } c_\nu = 1.$$

Ясно, что $\nu = [\log n]$; все логарифмы в диссертации по основанию 2. Допустим, последовательность $\overline{a_\nu a_{\nu-1}\ldots a_0}$ получена из канонической записи $\overline{c_\nu c_{\nu-1}\ldots c_0}$ с помощью серии элементарных замен. Тогда запись

$$n = \overline{a_\nu a_{\nu-1}\ldots a_0}, \tag{1}$$

понимаемую как равенство

$$n = \sum_{\iota=0}^{\infty} a_\iota 2^\iota, \tag{2}$$

в котором все a_ι либо нулевые, либо нечётные, не превосходящие Υ, причём $a_\iota = 0$ при $\iota > \nu$, будем называть *расширенной (двоичной) записью числа* n, а коэффициенты a_ι — обобщёнными цифрами такой записи. Заметим, что расширенных двоичных записей данного числа имеется лишь конечное число, и все они могут быть легко найдены. Например, на рис. 1 представлены все расширенные двоичные записи числа $n = 15$ при $\Upsilon = 6$.

С каждой расширенной записью $\overline{a_\nu a_{\nu-1}\ldots a_0}$ числа n ассоциируем *шаблон диаграммы* (рис. 1) следующим образом.

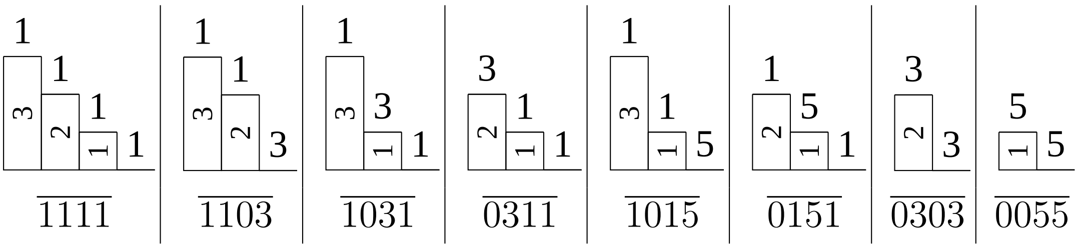


Рисунок 1 — Обобщённые двоичные записи и шаблоны диаграмм для $n = 15$ при $\Upsilon = 6$

- Первоначально шаблон состоит из $\nu + 1$ столбца, где $\nu = [\log n]$, нумерация ведётся справа и начинается с нуля.
- Высота ι-го столбца равна ι (нулевой столбец имеет нулевую высоту).
- Столбцы выравниваем по нижнему краю.
- Над ι-тым столбцом ставим цифру a_ι из расширенной записи $\overline{a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0}$. Если $a_\iota = 0$, то этот столбец удаляем.

Разрежем снизу вверх столбец шаблона высоты ι на полоски целых высот

$$\lambda_1 = \lambda_1(\iota), \quad \ldots, \quad \lambda_k = \lambda_k(\iota), \quad \mu = \mu(\iota),$$

так, чтобы выполнялись неравенства

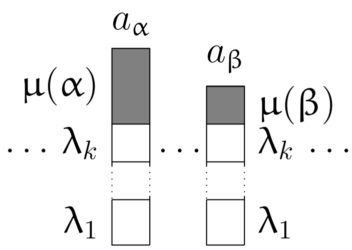
1. $\lambda_i > 0 \quad$ и $\quad 2^{\lambda_i} \leqslant \Upsilon \quad$ для любого $i = 1, \ldots, k$;
2. $\mu \geqslant 0 \quad$ и $\quad a_\iota 2^\mu \leqslant \Upsilon$.

Число k берётся таким, чтобы столбец допускал возможность указанной процедуры. Верхнюю полоску высоты μ закрасим. Считаем, что полоски высот $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu$ идут в указанном порядке снизу вверх. Такое разрезание столбца соответствует упорядоченному разбиению

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu) \vdash \iota$$

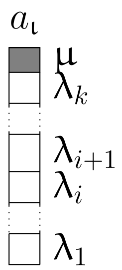
числа $\iota = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k + \mu$. Заметим, что

$$2^\iota = 2^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_k + \mu} = 2^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot 2^{\lambda_k} \cdot 2^\mu. \tag{3}$$



$k(\alpha) = k(\beta) = k$ и $\lambda_i(\alpha) = \lambda_i(\beta)$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Рисунок 2 — столбцы, нарушающие условие 1



Будем говорить, что столбец высоты ι разрезан *правильно*, если выполнены неравенства

1. $a_\iota 2^{\lambda_k+\mu} > \Upsilon$;
2. $2^{\lambda_i+\lambda_{i+1}} > \Upsilon$ для всех $i < k$.

Шаблон, столбцы которого разрезаны правильным образом, будем называть *диаграммой, представляющей число* n. Диаграмма считается *недопустимой*, если она содержит два различных столбца высот α и β, $\alpha > \beta$, таких что выполнено одно из следующих утверждений[2].

1. Для закрашенных частей справедливо неравенство

$$a_\alpha 2^{\mu(\alpha)} + a_\beta 2^{\mu(\beta)} \leqslant \Upsilon,$$

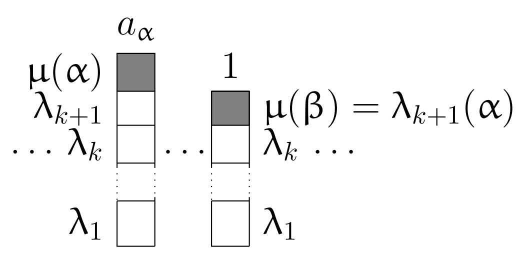
а незакрашенные части столбцов имеют равные высоты и разрезаны одинаковым образом (см. рис. 2).

2. Выполнены соотношения

$$a_\beta = 1 \quad \text{и} \quad a_\alpha 2^{\mu(\alpha)} + 1 \leqslant \Upsilon,$$

а незакрашенная часть столбца высоты α имеет высоту β, и столбец высоты β получается из незакрашенной части столбца высоты α закрашиванием верхней полоски (см. рис. 3).

[2] На данные два утверждения можно смотреть единообразно, если считать, что закрашивание верхней части любого столбца, над которым стоит цифра 1, произведено условно. Тем самым столбец можно рассматривать и как полностью незакрашенный разрезанный на полоски высот $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu = \lambda_{k+1}$, считая при этом высоту закрашенной части равной нулю.



$k(\alpha) = k+1, k(\beta) = k, \lambda_i(\alpha) = \lambda_i(\beta)$ для $i \leqslant k$ и $\lambda_{k+1}(\alpha) = \mu(\beta)$ для некоторого k.

Рисунок 3 — столбцы, нарушающие условие 2

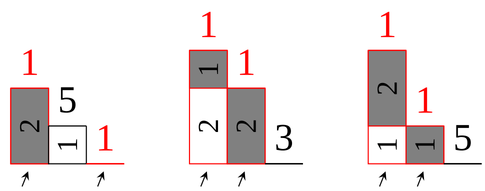


Рисунок 4 — Примеры недопустимых диаграмм для $n = 15$ при $\Upsilon = 6$

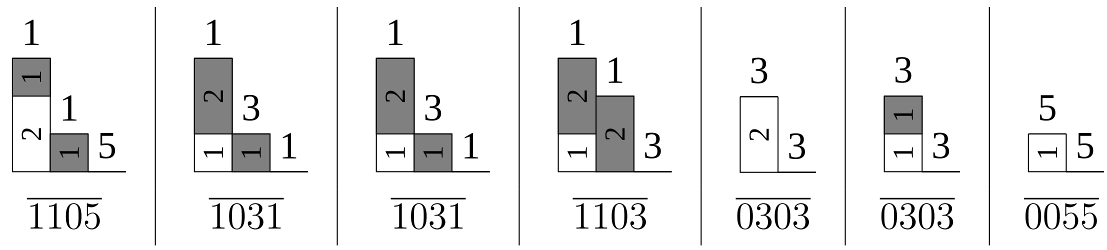


Рисунок 5 — Допустимые диаграммы для $n = 15$ при $\Upsilon = 6$

Например, диаграммы на рис. 4 недопустимы (для помеченных столбцов нарушается одно из условий 1 или 2).

В противном случае диаграмма считается *допустимой* (точнее, $\mathfrak{X}$-*допустимой*) (рис. 5). Тот факт, что $\mathcal{D}$ является допустимой диаграммой для числа n будем обозначать следующим образом:

$$\mathcal{D} \vDash n.$$

Отметим, что не всякой расширенной двоичной записи может соответствовать допустимая диаграмма. Например, при $\Upsilon = 5$, если

$$n = \overline{\dots 0151} = \dots + 1 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

то для столбцов с номерами 2 и 0 любой диаграммы, отвечающей этой расширенной записи, будет справедливо неравенство 1 в виде $2^2 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 5 = \Upsilon$.

Легко видеть, что любые несколько столбцов допустимой диаграммы снова образуют допустимую диаграмму, представляющую некоторое меньшее число. Кроме того, если нижние полоски всех столбцов допустимой диаграммы имеют равную высоту, то, удалив их, мы снова получим допустимую диаграмму. Отметим, что данная процедура допускает удаление закрашенных полосок.

Пусть $\mathcal{D} \vDash n$ — допустимая диаграмма, соответствующая расширенной записи числа $n = \overline{a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0}$. Сопоставим данной диаграмме некоторую подгруппу в Sym_n по следующему правилу. Предположим, что ι-тый столбец диаграммы, соответствующий ненулевой цифре a_ι, разбит на незакрашенные полоски, высоты которых образуют упорядоченный набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, и закрашенную полоску высоты μ. Свяжем с ним сплетение

$$\mathrm{Sym}_{2^{\lambda_1}} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_k}} \wr \mathrm{Sym}_{a_\iota 2^\mu},$$

рассматриваемое как транзитивная подгруппа в группе $\mathrm{Sym}_{a_\iota 2^\iota}$, не зависящая от расстановки скобок (лемма 1.2.7) и определённая однозначно с точностью до сопряжения, см. равенство (3). Всей диаграмме сопоставим прямое произведение сплетений, соответствующих её столбцам[3]:

$$\prod_{\iota=0}^{\nu} \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_1(\iota)}} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_{k(\iota)}(\iota)}} \wr \mathrm{Sym}_{a_\iota 2^{\mu(\iota)}}, \text{ где } \nu = [\log n].$$

Ввиду равенства (2), мы естественным образом отождествим это произведение с подгруппой в Sym_n и будем обозначать его символом $S_\mathcal{D}$. Подгруппа $S_\mathcal{D}$ определена с точностью до сопряжения в Sym_n. Довольно очевидно[4], что группы $S_\mathcal{D}$ и $S_\mathcal{E}$ сопряжены, если и только если $\mathcal{D} = \mathcal{E}$.

Имеет место

[3]Отметим, что столбцам шаблона, над которыми записана цифра 0 и которые затем были удалены, при таком подходе можно поставить в соответствие сплетение, равное по определению $\mathrm{Sym}_0 = 1$, т. е. они не вносят никакого вклада в прямое произведение, сопоставленное диаграмме.

[4]Возможно, единственный не вполне тривиальный факт состоит в том, что одна и та же группа не может соответствовать двум разным допустимым диаграммам. Он легко следует из того, что длины орбит такой группы $S_\mathcal{D}$ однозначно задают шаблон диаграммы $\mathcal{D}$, а невозможность двумя различными способами разрезать столбцы этого шаблона для получения допустимой диаграммы, соответствующей группе $S_\mathcal{D}$, легко выводится по индукции из леммы 1.2.9

Теорема 1.1.1. *Пусть* $G = \mathrm{Sym}_n$. *Тогда отображение* $\mathfrak{D} \mapsto S^G_{\mathfrak{D}}$ *задаёт биекцию между множеством* $\mathfrak{X}$*-допустимых диаграмм* $\mathfrak{D} \vDash n$ *и множеством классов сопряжённости максимальных* $\mathfrak{X}$*-подгрупп в* Sym_n, *имеющих нечётный индекс.*

Для $\mathfrak{X}$-допустимой диаграммы $\mathfrak{D} \vDash n$ положим

$$A_{\mathfrak{D}} = S_{\mathfrak{D}} \cap \mathrm{Alt}_n\,.$$

Из теоремы 1.1.1 следует, что подгруппа $A_{\mathfrak{D}}$ является субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса в Alt_n, и в соответствии с [22] подгруппы такого типа называют *стандартными* субмаксимальными $\mathfrak{X}$-подгруппами нечётного индекса группы Alt_n. В некоторых случаях Alt_n может обладать и нестандартными субмаксимальными $\mathfrak{X}$-подгруппами нечётного индекса, которые полностью классифицированы в [22, теорема 1]. Таким образом, из теоремы 1.1.1 и [22, теорема 1] получаем следующее утверждение, дающее описание субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в знакопеременных группах.

Теорема 1.1.2. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— полный класс конечных групп такой, что* $\mathbb{Z}_2 \in \mathfrak{X}$. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Подгруппа* H *знакопеременной группы* Alt_n *является субмаксимальной* $\mathfrak{X}$*-подгруппой нечётного индекса тогда и только тогда, когда* H *является группой одного из следующих типов:*
   - (S) H *сопряжена с подгруппой вида* $A_{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{D} \vDash n$;
   - $(A6)$ $n = 6$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ *и* $H \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Alt}_6)$, *при этом* H *изоморфна группе диэдра порядка* 8;
   - $(A7)$ $n = 7$, $\mathrm{Alt}_7 \notin \mathfrak{X}$, $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$ *и* $H \cong \mathrm{GL}_3(2)$;
   - $(A8)$ $n = 8$, $\mathrm{Alt}_8 \notin \mathfrak{X}$, $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$ *и* $H \cong 2^3 : \mathrm{GL}_3(2)$.
2. *Субмаксимальные* $\mathfrak{X}$*-подгруппы* H_1 *и* H_2 *типа* (S) *сопряжены в* Alt_n *тогда и только тогда, когда максимальные* $\mathfrak{X}$*-подгруппы* $K_1,K_2 \leqslant \mathrm{Sym}_n$ *нечётного индекса, для которых* $H_i = K_i \cap \mathrm{Alt}_n$, $i = 1,2$, *сопряжены в* Sym_n. *Таким образом, существует биекция между классами сопряжённости субмаксимальных* $\mathfrak{X}$*-подгрупп типа* (S) *в группе* Alt_n *и*

максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в группе Sym_n*. При выполнении ограничений, указанных для типов* $(A6)$–$(A8)$ *в группе* Alt_n*, число классов сопряжённости подгрупп типа* (An) *равно одному при* $n = 6$ *и двум при* $n = 7{,}8$*.*

3. *Класс сопряжённости любой субмаксимальной* $\mathfrak{X}$*-подгруппы* H *нечётного индекса в группе* Alt_n *инвариантен относительно действия группы* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_n)$ *за исключением случаев, когда*
    - $n = 6$, $\mathbb{Z}_3 \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ *и* H *— подгруппа типа* (S)*; при этом в* Alt_6 *субмаксимальные* $\mathfrak{X}$*-подгруппы типа* (S) *образуют два класса сопряжённости, переставляемые любым автоморфизмом группы* Alt_6*, не индуцированным элементом из* Sym_6*, и инвариантные относительно* Sym_6*;*
    - $n \in \{7{,}8\}$, H *— подгруппа типа* (An)*; при этом в* Alt_n *два класса сопряжённости субмаксимальных* $\mathfrak{X}$*-подгрупп типа* (An) *переставляются любым автоморфизмом группы* Alt_n*, индуцированным нечётной подстановкой.*
4. *Всякая субмаксимальная* $\mathfrak{X}$*-подгруппа* H *нечётного индекса в* Alt_n *пронормальна, т. е. для любого* $g \in \mathrm{Alt}_n$ *подгруппы* H *и* H^g *сопряжены в* $\langle H{,}H^g\rangle$*.*
5. *Субмаксимальная* $\mathfrak{X}$*-подгруппа* H *нечётного индекса в группе* Alt_n *является максимальной* $\mathfrak{X}$*-подгруппой за исключением следующих случаев:*
    - $n = 6$, $\mathbb{Z}_3 \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ *и* H *— подгруппа типа* $(A6)$*; в этом случае* H *содержится в двух подгруппах*

    $$(\mathrm{Sym}_2 \times \mathrm{Sym}_4) \cap \mathrm{Alt}_6 \text{ и } (\mathrm{Sym}_2 \wr \mathrm{Sym}_3) \cap \mathrm{Alt}_6$$

    типа (S)*, переставляемых автоморфизмом из* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_6) \setminus \mathrm{Sym}_6$*.*
    - $n = 8$, $\mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_8 \notin \mathfrak{X}$ *и* $H = (\mathrm{Sym}_2 \wr \mathrm{Sym}_4) \cap \mathrm{Alt}_8$ *— подгруппа типа* (S)*; в этом случае* H *содержится в подгруппах типа* $(A8)$*, принадлежащих обоим классам сопряжённости.*

Глава 2.

В этой главе описаны нормализаторы силовских r-подгрупп в классических (линейных и унитарных, а также ортогональных и симплектических нечётной характеристики) простых и полных группах для простого числа r, отличного от характеристики основного поля: указано строение нормализатора и описано действие нормализатора на секциях некоторого нормального ряда силовской подгруппы. Основываясь на результатах о так называемых радикальных подгруппах и их нормализаторах, полученных в работах Дж. Альперина и П. Фонга [24] и Цз. Аня [25], мы докажем теоремы 2.1.3-2.1.7, которые дают описание нормализаторов силовских r-подгрупп для нечётного простого числа r, отличного от характеристики в полных линейных и унитарных группах, а также в полных ортогональных и симплектических группах нечётной характеристики. Теорема 2.1.1 сводит вопрос изучения нормализаторов силовских r-подгрупп в группах $\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ к аналогичному вопросу для $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$. Предложение 2.1.8 ниже указывает на соответствие между строением нормализаторов силовских подгрупп в простых и полных симплектических и ортогональных группах. Таким образом, для того, чтобы завершить описание нормализаторов силовских подгрупп в классических простых группах, остаётся лишь случай ортогональных и симплектических групп характеристики 2.

Зафиксируем следующие обозначения. Через q обозначается натуральная степень простого числа p. Через η обозначается число ± 1 или знак этого числа. Следуя [26], будем использовать единое обозначение $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ для полной линейной (в случае $\eta = +$) и унитарной (в случае $\eta = -$) групп и аналогичные обозначения $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ и $\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ для специальных и проективных специальных групп. Через $\mathrm{Sp}_n(q)$ обозначаются симплектические группы — группы изометрий n-мерного векторного пространства над полем $\mathbb{F}_q$ с соответствующей невырожденной симплектической формой, а через $\mathrm{O}_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -, \circ\}$ (где $\circ$ — пустой символ, возникающий тогда и только тогда, когда n нечётно), обозначаются ортогональные группы — группы изометрий n-мерного векторного пространства над тем же полем из q элементов размерности n с соответствующей невырожденной квадратичной формой. Через $\mathrm{SO}_n^\varepsilon(q)$ обозначаются специальные ортогональные группы, состоящие из элементов группы $\mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$ с определителем 1. Через $\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ обозначается подгруппа индекса 2 в группе $\mathrm{SO}_n^{\varepsilon}(q)$. Для натурального числа n через n_r обозначается r-часть числа n, т. е. наибольшая степень числа r, которая делит n. Через $n_{r'}$ обозначим частное n/n_r.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $G = \mathrm{GL}_n^{\eta}(q), S = \mathrm{SL}_n^{\eta}(q)$, r *— нечётное простое число такое, что* $(q,r) = 1$, $U \in \mathrm{Syl}_r(G), P = U \cap S \in \mathrm{Syl}_r(S)$. *Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) $(r,n,(q-\eta)_r) = (3,3,3)$, $N_S(P) > N_G(U) \cap S$ *и*

$$P \simeq 3_+^{1+2},\ N_S(P) \simeq \mathrm{SU}_3(2)$$

где 3_+^{1+2} *— это экстраспециальная группа порядка* 27 *периода* 3*;*

(2) $N_S(P) = N_G(U) \cap S$.

Кроме того, если $^{-} : S \to S/Z(S) = \mathrm{PSL}_n^{\eta}(q)$ *— канонический эпиморфизм, то*

$$\overline{P} \in \mathrm{Syl}_r(\overline{S}) \text{ и } N_{\overline{S}}(\overline{P}) = \overline{N_S(P)}.$$

Предложение 2.1.8. *Пусть* $G \in \{\mathrm{Sp}_n(q), \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)\}$, $S = G$ *в случае* $G = \mathrm{Sp}_n(q)$ *и* $S = \Omega_n^{\varepsilon}(q)$ *— это подгруппа индекса 2 в специальной ортогональной группе* $\mathrm{SO}_n^{\varepsilon}(q)$ *в случае* $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$. *Пусть* r *— нечётное простое число, взаимно простое с* q, $U \in \mathrm{Syl}_r(G)$. *Тогда* $U \leqslant S$. *Кроме того, если* $^{-} : S \to S/Z(S)$ *— канонический эпиморфизм, то*

$$\overline{U} \in \mathrm{Syl}_r(\overline{S}) \text{ и } N_{\overline{S}}(\overline{U}) = \overline{N_S(U)}.$$

В случае, когда число $q - \eta = |\,\mathrm{GL}_n^{\eta}(q) : \mathrm{SL}_n^{\eta}(q)|$ не делится на r, утверждение теоремы 2.1.1 тривиально, потому что в этом случае множества силовских r-подгрупп в группах $\mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$ и $\mathrm{SL}_n^{\eta}(q)$ совпадают. Ключевым шагом в доказательстве теоремы 2.1.1 является следующее

Предложение 2.1.2. *Пусть* r *— нечётный простой делитель числа* $q - \eta$. *Тогда нормализатор в* $\mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$ *силовской* r*-подгруппы группы* $\mathrm{SL}_n^{\eta}(q)$ *содержится в* *группе мономиальных матриц, если и только если*

$$(r,n,(q-\eta)_r) \neq (3,3,3).$$

Поясним, что означает символ “$\circledast$” в формулировках теорем 2.1.3-2.1.7. Пусть R и N — подгруппы группы $\mathrm{GL}_n(q)$, причём $R \trianglelefteq N$, а S — некоторая группа подстановок на m элементах, рассматриваемая как группа подстановочных матриц степени m (подстановке π соответствует матрица, в которой на местах $(i, i\pi)$ стоят единицы, а на остальных — нули). Рассмотрим произвольную матрицу из S и заменим все её единичные элементы на матрицы из N, лежащие в одном и том же смежном классе группы N по подгруппе R, а все её нулевые элементы на нулевые матрицы степени n. Обозначим через $(N/R) \circledast S$ множество всех матриц степени nm, полученных таким способом[5]. Ясно, что это множество образует подгруппу в группе $\mathrm{GL}_{nm}(q)$. Легко видеть, что $(N/R) \circledast S$ — это подгруппа в подстановочном сплетении $N \wr S$, естественным образом вложенном в $\mathrm{GL}_{nm}(q)$. Эта подгруппа содержит нормальную подгруппу $\underbrace{R \times \ldots \times R}_{m}$ из базы сплетения, фактор по которой изоморфен группе $(N/R) \times S$. Через Sym_k обозначим симметрическую группу степени k. Через C_k обозначается циклическая группа порядка k, отождествлённая с соответствующей регулярной подгруппой в Sym_k.

Теорема 2.1.3. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$, r — нечётное простое число, такое, что $(q,r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid (\eta q)^k \equiv 1 \pmod r\}.$$

Пусть неотрицательные числа b и c — соответственно частное и остаток от деления n на e. Зафиксируем r-ичное представление числа b:

$$b = b_0 + b_1 r + \ldots + b_\nu r^\nu, 0 \leqslant b_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R \simeq 1_c \times R_0^{b_0} \times \ldots \times R_\nu^{b_\nu}, \tag{2.1}$$

[5]Отметим, что эта конструкция была введена в [24]. Однако, там вместо символа $\circledast$ использовался символ $\otimes$, что нам кажется менее удачным выбором, поскольку он явно конфликтует с символом кронекерова произведения матриц.

где 1_c — тривиальная подгруппа в $\mathrm{GL}_c^\eta(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{GL}_{er^i}^\eta(q)$, и возведение группы R_i в степень b_i означает прямое произведение b_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) \simeq \mathrm{GL}_c^\eta(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{b_i}\,, \tag{2.2}$$

$$N_G(R)/R \simeq \mathrm{GL}_c^\eta(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{b_i}, \tag{2.3}$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i \simeq C_{(q^e-\eta^e)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i\ \text{раз}}, \tag{2.4}$$

$$N_i \simeq (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i\ \text{раз}}), \tag{2.5}$$

и

$$N_i/R_i \simeq \left(C_{(q^e-\eta^e)_{r'}} \rtimes C_e\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i\ \text{раз}}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1.4. *Пусть $G = \mathrm{Sp}_n(q)$, где q — степень нечётного простого числа, а n чётно, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть числа m и d обозначают частное и остаток от деления n на $2f$, то есть

$$n = 2fm + d,\ 0 \leqslant d < 2f.$$

Зафиксируем r-ичное представление числа m:

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leqslant m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{Sp}_d(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{Sp}_{2fr^i}(q)$, и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение

m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{Sp}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$
$$N_G(R)/R = \mathrm{Sp}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$
$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Теорема 2.1.5. *Пусть n — нечётное число и $G = \mathrm{O}_n(q)$, где q — степень нечётного простого числа, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть числа m и d обозначают частное и остаток от деления n на $2f$, то есть

$$n = 2fm + d,\ 0 \leqslant d < 2f.$$

Зафиксируем r-ичное представление числа m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leqslant m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{O}_d(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{O}^{\delta}_{2fr^i}(q)$, и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i

копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{O}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$
$$N_G(R)/R = \mathrm{O}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$
$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Теорема 2.1.6. *Пусть n — чётное число и $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$, где q — степень нечётного простого числа, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Определим число m следующим образом:

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2f} - 1, & \text{если } 2f \text{ делит } n \text{ и } (\delta)^{n/2f} \neq \varepsilon \\ [\frac{n}{2f}], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $d = n - 2fm$. Обозначим через K группу $\mathrm{O}_d^{\delta^m}(q)$, где $d = n - 2fm$. Зафиксируем r-ичное представление числа m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leqslant m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d *— тривиальная подгруппа в группе* $\mathrm{O}_d^{\delta^m}(q)$, R_i *— силовская* r*-подгруппа группы* $G_i = \mathrm{O}^{\delta}_{2fr^i}(q)$, *и возведение* R_i *в степень* m_i *означает прямое произведение* m_i *копий группы* R_i. *Для нормализатора подгруппы* R *имеют место разложения*

$$N_G(R) = \mathrm{O}_d^{\delta^m}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$
$$N_G(R)/R = \mathrm{O}_d^{\delta^m}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. *Кроме того,*

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$
$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Мы будем доказывать теоремы 2.1.4-2.1.6 в унифицированной форме, которая представлена в следующей теореме.

Теорема 2.1.7. *Пусть* $G \in \{\mathrm{Sp}_n(p), \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)\}$, *где* q *— степень нечётного простого числа, и* r *— простое число, такое, что* $(2q, r) = 1$. *Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Определим число m *следующим образом:*

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2f} - 1, & \text{если } G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q), 2f \text{ делит } n \text{ и } (\delta)^{n/2f} \neq \varepsilon \\ [\frac{n}{2f}], & \text{иначе}. \end{cases}$$

Положим $d = n - 2fm$. *Обозначим через* K *группу* $\mathrm{Sp}_d(q)$ *(для* $G = \mathrm{Sp}_n(q)$*) или* $\mathrm{O}_d^{\varepsilon\delta^m}(q)$ *(для* $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$*). Зафиксируем* r*-ичное представление числа* m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leqslant m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu}, \tag{2.7}$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе K, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{Sp}_{2fr^i}(q)$ (для $G = \mathrm{Sp}_n(q)$) или[6] *$\mathrm{O}_{2fr^i}^{\varepsilon\delta}(q)$ (для $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$), и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения*

$$N_G(R) = K \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \tag{2.8}$$

$$N_G(R)/R = K \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \tag{2.9}$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \tag{2.10}$$

$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}), \tag{2.11}$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}. \tag{2.12}$$

Отметим, что из работы [24] также извлекается строение нормализаторов силовских подгрупп в симметрических группах, которое используется в теореме 2.1.3. Это строение приведено в следующем предложении (нечётность числа r не предполагается).

Предложение 2.1.9. *Пусть $G = \mathrm{Sym}_k$, r — простое число. Зафиксируем r-ичное представление числа k:*

$$k = k_0 + k_1 r + \ldots + k_\nu r^\nu, 0 \leqslant k_i < r \text{ для всех } i.$$

[6] Если ε — пустой символ, то считаем, что $\varepsilon\delta$ — тоже пустой символ.

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R \simeq 1_{k_0} \times R_1^{k_1} \times \ldots \times R_\nu^{k_\nu}, \tag{2.13}$$

где 1_{k_0} — тривиальная подгруппа группы Sym_{k_0}, R_i — силовская r-подгруппа группы $S_i = \mathrm{Sym}_{r^i}$, и возведение группы R_i в степень k_i означает прямое произведение k_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) \simeq \mathrm{Sym}_{k_0} \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{k_i}, \tag{2.14}$$

$$N_G(R)/R \simeq \mathrm{Sym}_{k_0} \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{k_i}\,, \tag{2.15}$$

где $N_i = N_{S_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i \simeq \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \tag{2.16}$$

$$N_i/R_i \simeq \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}. \tag{2.17}$$

Глава 3.

Предположим, что конечная разрешимая группа G действует точно, неприводимо и квазипримитивно на конечном векторном пространстве V размерности n над конечным полем порядка q характеристики p. Тогда у G есть характеристическая нормальная подгруппа E, которая является прямым произведением экстраспециальных r-групп для различных простых r. Полагаем $e = \sqrt{|E/\mathbf{Z}(E)|}$ (это некоторый инвариант, измеряющий сложность рассматриваемой группы). В [27, Теорема 3.1] и [28, Теорема 3.1] доказано, что если $e = 5{,}6{,}7$ или $e \geqslant 10$ и $e \neq 16$, то у G всегда существует регулярная орбита на V.

Если V — конечное векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}_q$, где q — степень простого числа, через $\Gamma\mathrm{L}_n(q) = \Gamma\mathrm{L}(V)$ обозначим группу полулинейных преобразований пространства V, а через $\Gamma(q^n) = \Gamma(V)$ — подгруппу группы $\Gamma\mathrm{L}_1(q^n)$, порождённую мультипликативной группой поля $\mathbb{F}_{q^n}$ и автоморфизмом $\sigma^{\log_p q}$, где σ — это автоморфизм Фробениуса поля $\mathbb{F}_{q^n}$. Если $e = 1$, то

$G \leqslant \Gamma(q^n)$, и возможно, что $G = \Gamma(q^n)$, в то время как $\Gamma(q^n)$ не имеет регулярной орбиты при $n \geqslant 2$. Поэтому для $e = 1$ нельзя ожидать, что у G обязательно существует регулярная орбита. В этом случае G метациклическая, и, следовательно, существует бесконечное число метациклических примитивных линейных групп, не имеющих регулярных орбит.

Основной результат главы состоит в следующем.

Теорема 3.1.1. *Пусть G — разрешимая группа, действующая точно, неприводимо и квазипримитивно на конечном векторном пространстве V, и $|V| > 5^{18}$. Предположим также, что G не метациклическая. Тогда у G есть регулярная орбита на V.*

Заметим, что известно лишь несколько примеров максимальных неприводимых примитивных разрешимых подгрупп $\mathrm{GL}(V)$, не являющихся метациклическими и не имеющих регулярной орбиты. В работе представлен узкий список всех разрешимых неприводимых примитивных групп, у которых, возможно, нет регулярной орбиты.

Информация о существовании регулярной орбиты использовалась рядом авторов для изучения различных задач в этой области (например [29—34]). Результаты этой главы могут быть использованы для упрощения некоторых доказательств в [29; 30; 33; 35].

Ещё одно применение полученных в этой главе результатов — изучение баз разрешимых групп подстановок и k-замыканий разрешимых групп. В [36] было показано, что если G - примитивная разрешимая группа подстановок, то k-замыкание группы G при $k \geqslant 3$ является разрешимой группой.

Глава 1. Относительно максимальные подгруппы в симметрических группах

1.1 Обзор основных результатов главы

В этой главе содержится доказательство теоремы 1.1.1, которая, как уже отмечалось, предоставляет параметризацию максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в группе Sym_n допустимыми диаграммами (см. обозначения в введении). Напомним, что из теоремы 1.1.1 и [22, теорема 1] следует теорема 1.1.2, дающая описание субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в знакопеременных группах.

Теорема 1.1.1. *Пусть $G = \mathrm{Sym}_n$. Тогда отображение $\mathfrak{D} \mapsto S_{\mathfrak{D}}^G$ задаёт биекцию между множеством $\mathfrak{X}$-допустимых диаграмм $\mathfrak{D} \models n$ и множеством классов сопряжённости максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп в Sym_n, имеющих нечётный индекс.*

Теорема 1.1.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — полный класс конечных групп такой, что $\mathbb{Z}_2 \in \mathfrak{X}$. Имеют место следующие утверждения.*

1. *Подгруппа H знакопеременной группы Alt_n является субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса тогда и только тогда, когда H является группой одного из следующих типов:*
   - (S) *H сопряжена с подгруппой вида $A_{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{D} \models n$;*
   - $(A6)$ *$n = 6$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ и $H \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Alt}_6)$, при этом H изоморфна группе диэдра порядка 8;*
   - $(A7)$ *$n = 7$, $\mathrm{Alt}_7 \notin \mathfrak{X}$, $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$ и $H \cong \mathrm{GL}_3(2)$;*
   - $(A8)$ *$n = 8$, $\mathrm{Alt}_8 \notin \mathfrak{X}$, $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$ и $H \cong 2^3 : \mathrm{GL}_3(2)$.*
2. *Субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы H_1 и H_2 типа (S) сопряжены в Alt_n тогда и только тогда, когда максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы $K_1,K_2 \leqslant \mathrm{Sym}_n$ нечётного индекса, для которых $H_i = K_i \cap \mathrm{Alt}_n$, $i = 1,2$, сопряжены в Sym_n. Таким образом, существует биекция между классами сопряжённости субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп типа (S) в группе Alt_n и*

максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в группе Sym_n. При выполнении ограничений, указанных для типов $(A6)$–$(A8)$ в группе Alt_n, число классов сопряжённости подгрупп типа (An) равно одному при $n = 6$ и двум при $n = 7{,}8$.

3. *Класс сопряжённости любой субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы H нечётного индекса в группе Alt_n инвариантен относительно действия группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_n)$ за исключением случаев, когда*
   - $n = 6$, $\mathbb{Z}_3 \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ *и* H *— подгруппа типа* (S)*; при этом в* Alt_6 *субмаксимальные* $\mathfrak{X}$*-подгруппы типа* (S) *образуют два класса сопряжённости, переставляемые любым автоморфизмом группы* Alt_6*, не индуцированным элементом из* Sym_6*, и инвариантные относительно* Sym_6*;*
   - $n \in \{7{,}8\}$, H *— подгруппа типа* (An)*; при этом в* Alt_n *два класса сопряжённости субмаксимальных* $\mathfrak{X}$*-подгрупп типа* (An) *переставляются любым автоморфизмом группы* Alt_n*, индуцированным нечётной подстановкой.*
4. *Всякая субмаксимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа H нечётного индекса в Alt_n пронормальна, т. е. для любого $g \in \mathrm{Alt}_n$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$.*
5. *Субмаксимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа H нечётного индекса в группе Alt_n является максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой за исключением следующих случаев:*
   - $n = 6$, $\mathbb{Z}_3 \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ *и* H *— подгруппа типа* $(A6)$*; в этом случае* H *содержится в двух подгруппах*

     $$(\mathrm{Sym}_2 \times \mathrm{Sym}_4) \cap \mathrm{Alt}_6 \text{ и } (\mathrm{Sym}_2 \wr \mathrm{Sym}_3) \cap \mathrm{Alt}_6$$

     типа (S)*, переставляемых автоморфизмом из* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_6) \setminus \mathrm{Sym}_6$.
   - $n = 8$, $\mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_8 \notin \mathfrak{X}$ *и* $H = (\mathrm{Sym}_2 \wr \mathrm{Sym}_4) \cap \mathrm{Alt}_8$ *— подгруппа типа* (S)*; в этом случае* H *содержится в подгруппах типа* $(A8)$*, принадлежащих обоим классам сопряжённости.*

1.2 Предварительные результаты

Пусть G — подгруппа в $\mathrm{Sym}\,\Omega$ и $\Delta \subseteq \Omega$. Следуя [37], обозначаем через $G_{\{\Delta\}}$ стабилизатор в G подмножества Δ, т. е.

$$G_{\{\Delta\}} = \{g \in G \mid \Delta^g = \Delta\},$$

и через $G_{(\Delta)}$ — поточечный стабилизатор Δ, т. е.

$$G_{(\Delta)} = \{g \in G \mid \delta^g = \delta \text{ для всех } \delta \in \Delta\}.$$

Понятно, что группа $G_{\{\Delta\}}$ действует на множестве Δ, т.е. определён гомоморфизм

$$g \mapsto g^\Delta$$

из $G_{\{\Delta\}}$ в $\mathrm{Sym}\,\Delta$, а ядро этого гомоморфизма совпадает с $G_{(\Delta)}$. Образ $G_{\{\Delta\}}$ в $\mathrm{Sym}\,\Delta$ обозначим G^Δ.

Лемма 1.2.1. *[7, лемма 1] Пусть G — конечная группа, $N \trianglelefteqslant G$ и H — подгруппа нечётного индекса в группе G. Тогда индексы $|N : (H \cap N)|$ и $|G/N : HN/N|$ нечётны.*

Лемма 1.2.2. *[38, теорема 13.3] Пусть H — примитивная подгруппа в Sym_n, содержащая транспозицию. Тогда $H = \mathrm{Sym}_n$.*

Пусть даны два натуральных числа n и n'. Следуя [39], введём отношение $\preccurlyeq$ на множестве натуральных чисел. Пишем $n' \preccurlyeq n$, если каноническая двоичная запись числа n' получается из двоичной записи числа n заменой некоторых единиц нулями. Другими словами, если

$$n = \sum_{\iota=0}^{\infty} c_\iota 2^\iota \quad \text{и} \quad n' = \sum_{\iota=0}^{\infty} c'_\iota\, 2^\iota, \quad \text{где} \quad c_\iota, c'_\iota \in \{0,1\},$$

и почти все c_ι и c'_ι равны нулю, то $n' \preccurlyeq n$ тогда и только тогда, когда $c'_\iota \leqslant c_\iota$ для всех $\iota \geqslant 0$. Легко заметить, что отношение $\preccurlyeq$ является частичным порядком на множестве натуральных чисел, точнее, подпорядком естественного порядка. Кроме того, $n' \preccurlyeq n$ тогда и только тогда, когда $n - n' \preccurlyeq n$.

Лемма 1.2.3. *[9, лемма $2(S)$], [6, осн. теор.] Пусть $m \leqslant n$. Тогда индекс подгруппы $\mathrm{Sym}_m \times \mathrm{Sym}_{n-m}$ в группе Sym_n равен C_n^m. Этот индекс нечётен тогда и только тогда, когда $m \preccurlyeq n$.*

Лемма 1.2.4. *[9, лемма $2(T)$], [7, лемма 4] Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Пусть r, s — натуральные числа. Тогда индекс $|\,\mathrm{Sym}_{rs} : (\mathrm{Sym}_r \wr \mathrm{Sym}_s)|$ нечётен тогда и только тогда, когда r является степенью двойки.*

(2) *Пусть H — транзитивная подгруппа нечётного индекса в Sym_n, обладающая системой импримитивности, и Δ — блок этой системы такой, что $|\Delta| < n$. Тогда $|\Delta|$ является степенью двойки.*

Лемма 1.2.5. *Если Sym_n содержит транзитивную $\mathfrak{X}$-подгруппу нечётного индекса, то $n = a2^{\varkappa}$, для некоторого неотрицательного целого $\varkappa$ и некоторого нечётного a, не превосходящего Υ.*

Доказательство. Пусть H — транзитивная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в Sym_n. Воспользуемся индукцией по n. Рассмотрим два случая: когда H примитивна, и когда она импримитивна.

Допустим, H примитивна. Тогда $H = \mathrm{Sym}_n$ по лемме 1.2.2 и $n \leqslant \Upsilon$ по определению Υ, откуда вытекает утверждение леммы.

Пусть теперь H импримитивна и обладает системой импримитивности из s блоков мощности r для некоторых r,$s > 1$. Тогда $n = rs$ и

$$H \leqslant \mathrm{Sym}_r \wr \mathrm{Sym}_s\,.$$

Поскольку H имеет нечётный индекс в Sym_n, индекс $|\,\mathrm{Sym}_n : (\mathrm{Sym}_r \wr \mathrm{Sym}_s)|$ также нечётен, и по лемме 1.2.4 число r является степенью двойки. Для завершения доказательства достаточно показать, что

$(*)$ $s = 2^{\lambda}a$, где λ — неотрицательное целое, а a — нечётное число, не превосходящее Υ.

Так как H действует на множестве блоков транзитивно, её образ $\overline{H}$ относительно естественного эпиморфизма $\mathrm{Sym}_r \wr \mathrm{Sym}_s \to \mathrm{Sym}_s$ является транзитивной

$\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса в Sym_s. Утверждение $(*)$ справедливо по предположению индукции. $\square$

Лемма 1.2.6. *Пусть H — транзитивная импримитивная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в Sym_n, и Δ — нетривиальный блок минимального размера для группы H. Тогда $|\Delta| = 2^\lambda$ для некоторого натурального λ, не превосходящего $[\log \Upsilon]$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.2.4 число $|\Delta|$ является степенью двойки, и достаточно показать, что $|\Delta| \leqslant \Upsilon$. Покажем, что группа $\mathrm{Sym}\,\Delta$ содержит примитивную $\mathfrak{X}$-подгруппу нечётного индекса и совпадает с ней в силу леммы 1.2.2 и теоремы Силова. В частности, $\mathrm{Sym}\,\Delta \in \mathfrak{X}$ и $|\Delta| \leqslant \Upsilon$ по определению Υ и $|\Delta| = 2^\lambda$ по лемме 1.2.1.

Из [37, с. 1.5.6] следует, что $H_{\{\Delta\}}$ действует транзитивно на Δ. Ввиду минимальности $|\Delta|$ и согласно [37, с. 1.5.10] действие $H_{\{\Delta\}}$ на Δ примитивно. Возьмём систему импримитивности

$$\Delta_1 = \Delta, \Delta_2, \ldots, \Delta_s,$$

содержащую блок Δ. Пусть M — полный стабилизатор в Sym_n этой системы импримитивности. Тогда

$$M = \mathrm{Sym}\,\Delta \wr \mathrm{Sym}_s = (\mathrm{Sym}\,\Delta_1 \times \mathrm{Sym}\,\Delta_2 \times \ldots \times \mathrm{Sym}\,\Delta_s) \rtimes \mathrm{Sym}_s\,.$$

Обозначим через B базу этого сплетения, т. е. подгруппу

$$B = \mathrm{Sym}\,\Delta_1 \times \mathrm{Sym}\,\Delta_2 \times \ldots \times \mathrm{Sym}\,\Delta_s.$$

Рассмотрим стабилизатор $M_{\{\Delta\}}$ блока $\Delta = \Delta_1$ в M. Ясно, что $B \leqslant M_{\{\Delta\}}$ и $H_{\{\Delta\}} = H \cap M_{\{\Delta\}}$. Группа $M_{\{\Delta\}}$ действует на множестве Δ, тем самым определён гомоморфизм

$$\rho : g \mapsto g^\Delta$$

из $M_{\{\Delta\}}$ в $\mathrm{Sym}\,\Delta = \mathrm{Sym}\,\Delta_1$, и ядро этого гомоморфизма совпадает с $M_{(\Delta)}$. Как легко заметить,

$$M_{\{\Delta\}} = \mathrm{Sym}\,\Delta_1 \times (\mathrm{Sym}\,\Delta_2 \times \ldots \times \mathrm{Sym}\,\Delta_s) \rtimes \mathrm{Sym}_{s-1} = \mathrm{Sym}\,\Delta \times M_{(\Delta)},$$

и сужение ρ на сомножитель $\mathrm{Sym}\,\Delta$ является тождественным отображением

$$\mathrm{Sym}\,\Delta \to \mathrm{Sym}\,\Delta.$$

Покажем теперь, что $H^{\rho}_{\{\Delta\}}$ — примитивная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в $\mathrm{Sym}\,\Delta$. Группа $H^{\rho}_{\{\Delta\}}$ является гомоморфным образом подгруппы $H_{\{\Delta\}}$ группы $H \in \mathfrak{X}$ и потому является $\mathfrak{X}$-подгруппой. Примитивность $H^{\rho}_{\{\Delta\}}$ следует из примитивности действия $H_{\{\Delta\}}$ на Δ.

Поскольку $B \leqslant M_{\{\Delta\}}$, имеем $B \cap H \leqslant M_{\{\Delta\}} \cap H = H_{\{\Delta\}}$. Так как сужение ρ на $\mathrm{Sym}\,\Delta$ является тождественным отображением, выполнены соотношения

$$\mathrm{Sym}\,\Delta \cap H = (\mathrm{Sym}\,\Delta \cap H)^{\rho} \leqslant (B \cap H)^{\rho} \leqslant H^{\rho}_{\{\Delta\}} \leqslant \mathrm{Sym}\,\Delta. \tag{1.1}$$

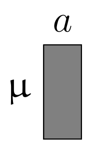
С помощью леммы 1.2.1 и поскольку $B \trianglelefteqslant M$ и $\mathrm{Sym}\,\Delta \trianglelefteqslant B$, заключаем, что $H \cap B$ — подгруппа нечётного индекса в B, и $H \cap \mathrm{Sym}\,\Delta$ — подгруппа нечётного индекса в $\mathrm{Sym}\,\Delta$. Отсюда ввиду (1.1), $H^{\rho}_{\{\Delta\}}$ — примитивная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в $\mathrm{Sym}\,\Delta$. □

Лемма 1.2.7. *[40, глава 1, лемма 15.4] Пусть G, H, K — группы подстановок степеней r, s, t соответственно. Тогда для естественным образом определяемых подгрупп в группе Sym_{rst} выполнены равенства*

$$(G \wr H) \wr K = G \wr (H \wr K).$$

Лемма 1.2.8. *Пусть K — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в Sym_n, причём K транзитивна. Тогда с точностью до сопряжённости $K = S_{\mathcal{D}}$ для некоторой допустимой диаграммы $\mathcal{D} \vDash n$, причём диаграмма $\mathcal{D}$ соответствует расширенной записи числа n, содержащей ровно одну значащую цифру.*

Доказательство. Доказываем лемму индукцией по n. Если подгруппа K примитивна, то, по лемме 1.2.2 и определению Υ имеем $K = \mathrm{Sym}_n$ и $n \leqslant \Upsilon$.



В этом случае верно $K = S_{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D}$ соответствует расширенной записи числа n, содержащей ровно одну значащую цифру: если $n = 2^{\mu}a$, где a — нечётное целое, то $\mathcal{D}$ состоит из одного столбца высоты μ, над которым написана цифра a, и который в свою очередь состоит из одной закрашенной полоски высоты μ.

Пусть теперь K импримитивна. Из леммы 1.2.5 следует, что $n = 2^{\varkappa}a$, где $\varkappa$ — неотрицательное целое, а a нечётное целое, не превосходящее Υ. Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ — система импримитивности группы K с нетривиальными блоками минимального размера, и Δ — один из этих блоков. Тогда $|\Delta| = 2^{\lambda}$, где $2^{\lambda} \leqslant \Upsilon$ по лемме 1.2.6, $K \leqslant \mathrm{Sym}\,\Delta \wr \mathrm{Sym}_s$ и $s = 2^{\varkappa-\lambda}a$. Обозначим через B базу сплетения $W = \mathrm{Sym}\,\Delta \wr \mathrm{Sym}_s$ и рассмотрим естественный эпиморфизм $^{-} : W \to \mathrm{Sym}_s$. В силу неравенства $2^{\lambda} \leqslant \Upsilon$, подгруппа

$$B = \mathrm{Sym}\,\Delta_1 \times \ldots \times \mathrm{Sym}\,\Delta_s$$

принадлежит классу $\mathfrak{X}$. Поэтому группа BK тоже принадлежит классу $\mathfrak{X}$. Значит, $B \leqslant K$ в силу максимальности $\mathfrak{X}$-подгруппы K. Тогда $\overline{K}$ — транзитивная $\mathfrak{X}$-подгруппа в Sym_s. Поскольку $B \leqslant K$, подгруппа $\overline{K}$ будет максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой в Sym_s.

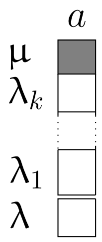
По предположению индукции существует допустимая диаграмма $\overline{\mathcal{D}} \vDash s$, такая, что $\overline{K} = S_{\overline{\mathcal{D}}}$ и $\overline{\mathcal{D}}$ соответствует расширенной двоичной записи числа s, содержащей ровно одну значащую цифру. В частности, $\overline{\mathcal{D}}$ состоит из одного столбца. Так как $\overline{\mathcal{D}} \vDash s = 2^{\varkappa-\lambda}a$, единственная значащая цифра в расширенной записи числа s совпадает с a. Ясно также, что

$$K = \mathrm{Sym}\,\Delta \wr \overline{K} = \mathrm{Sym}_{2^{\lambda}} \wr S_{\overline{\mathcal{D}}}.$$

Пусть единственный столбец диаграммы $\overline{\mathcal{D}}$ разрезан на полоски высот $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu$, считая снизу вверх, и полоска высоты μ закрашена. Тогда

$$\overline{K} = S_{\overline{\mathcal{D}}} = \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_1}} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_k}} \wr \mathrm{Sym}_{a2^{\mu}},$$

$$K = \mathrm{Sym}_{2^{\lambda}} \wr S_{\overline{\mathcal{D}}} = \mathrm{Sym}_{2^{\lambda}} \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_1}} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_k}} \wr \mathrm{Sym}_{a2^{\mu}}.$$



Рассмотрим диаграмму $\mathcal{D}$, получаемую приклеиванием снизу полоски высоты λ к единственному столбцу диаграммы $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда $K = S_{\mathcal{D}}$.

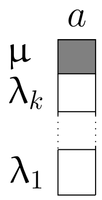
Для завершения доказательства осталось показать, что $\mathcal{D}$ — допустимая диаграмма. Поскольку $\mathcal{D}$ состоит из одного столбца, нужно показать, что этот столбец разрезан правильно. Более точно, достаточно установить что $2^{\lambda+\lambda_1} > \Upsilon$ в случае, когда в $\overline{\mathcal{D}}$ есть незакрашенная полоска, и $2^{\lambda+\mu}a > \Upsilon$ в случае, когда $\overline{\mathcal{D}}$ состоит из одной закрашенной полоски; остальные неравенства следуют из того, что $\overline{\mathcal{D}}$ —допустимая диаграмма.

Рассмотрим случай, когда в $\overline{\mathcal{D}}$ есть незакрашенная полоска, т. е. $k > 0$. Предположим, что $2^{\lambda+\lambda_1} \leqslant \Upsilon$. Тогда $\mathrm{Sym}_{2^{\lambda+\lambda_1}} \in \mathfrak{X}$ по определению числа Υ и следовательно подгруппа K строго содержится в $\mathfrak{X}$-подгруппе

$$\mathrm{Sym}_{2^{\lambda+\lambda_1}} \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_2}} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_k}} \wr \mathrm{Sym}_{a2^{\mu}} \leqslant \mathrm{Sym}_n\,,$$

что противоречит максимальности K.

Рассмотрим теперь случай, когда $\overline{\mathcal{D}}$ состоит лишь из закрашенной полоски высоты $\mu = \varkappa - \lambda$ и допустим, что $2^{\lambda+\mu}a \leqslant \Upsilon$. Поскольку $2^{\lambda+\mu}a = 2^{\varkappa}a = n$, получаем, что $\mathrm{Sym}_n \in \mathfrak{X}$ и $K < \mathrm{Sym}_n$, вопреки максимальности K. $\square$



Если $\mathcal{D} \models 2^{\varkappa}a$, где $a \leqslant \Upsilon$ нечётно и $\mathcal{D}$ состоит из одного столбца, разрезанного на незакрашенные полоски высот $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $k \geqslant 1$ и закрашенную полоску высоты μ, то подгруппа

$$S_{\mathcal{D}} = \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_1}} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_k}} \wr \mathrm{Sym}_{a2^{\mu}} \leqslant \mathrm{Sym}_{2^{\varkappa}a}$$

обладает *естественной системой импримитивности* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$, где $t = a2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_k+\mu}$, а блоки $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$ имеют размер 2^{λ_1}. Так как $S_{\mathcal{D}}$ содержит в качестве подгрупп полные симметрические группы $\mathrm{Sym}\,\Gamma_1, \ldots, \mathrm{Sym}\,\Gamma_t$, данная система импримитивности будет неизмельчаемой [37, с. 1.5.10].

Лемма 1.2.9. *Пусть допустимая диаграмма $\mathcal{D}$ состоит из одного столбца и ассоциирована с числом $n = 2^{\varkappa}a$, где a — нечётное число, не превосходящее Υ. Рассмотрим группу $H = S_{\mathcal{D}}$ и её естественную систему импримитивности*

$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$*, выбранную, как описано выше. Тогда каждый блок любой нетривиальной системы импримитивности этой группы будет объединением некоторых блоков* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную нетривиальную систему импримитивности $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ группы H. Пусть

$$\Gamma \in \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t\},\ \Delta \in \{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}.$$

В силу определения подгруппы $H = S_{\mathfrak{D}}$ имеет место включение $\mathrm{Sym}\,\Gamma \leqslant H$. Достаточно показать, что $\Gamma \leqslant \Delta$, если $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$.

Допустим, $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, но $\Gamma \nleqslant \Delta$. Выберем $\omega \in \Gamma \cap \Delta$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \Delta$. Заметим, что $\Delta \nleqslant \Gamma$, т. к. Γ — нетривиальный минимальный блок группы H. Поэтому найдётся $\delta \in \Delta \setminus \Gamma$. Рассмотрим транспозицию $(\omega\gamma) \in \mathrm{Sym}\,\Gamma \leqslant H$. Имеем

$$\delta = \delta^{(\omega\gamma)} \in \Delta^{(\omega\gamma)} \cap \Delta.$$

Следовательно, $\Delta^{(\omega\gamma)} = \Delta$. В частности, $\gamma = \omega^{(\omega\gamma)} \in \Delta^{(\omega\gamma)} = \Delta$, вопреки тому, что $\gamma \in \Gamma \setminus \Delta$; противоречие. $\square$

1.2.1 Блоки интранзитивных групп

В этом разделе $M \leqslant \mathrm{Sym}\,\Omega$ — транзитивная импримитивная группа подстановок множества Ω, а $H \leqslant M$ — интранзитивная подгруппа группы M. Обозначим через $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ некоторую систему импримитивности группы M, и пусть $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_r$ — все орбиты группы H. Введём матрицу $A = (|\mathrm{O}_i \cap \Delta_j|)$ размера $r \times s$, в i-той строке j-того столбца которой записана мощность пересечения i-той орбиты группы H с j-тым блоком группы M. Цель этого раздела состоит в том, чтобы показать, что с точностью до перенумерации орбит и блоков, матрица A блочно-диагональная специального вида.

Лемма 1.2.10. *Ненулевые элементы матрицы A, находящиеся в одной строке, совпадают.*

Доказательство. Пусть некоторая орбита нетривиально пересекается с двумя различными блоками. Можно считать, что это первая орбита и первые два блока, т.е. $\mathrm{O}_1 \cap \Delta_1 \neq \varnothing$ и $\mathrm{O}_1 \cap \Delta_2 \neq \varnothing$. Покажем, что $|\mathrm{O}_1 \cap \Delta_1| = |\mathrm{O}_1 \cap \Delta_2|$.

Возьмём $\delta_1 \in \mathrm{O}_1 \cap \Delta_1$, $\delta_2 \in \mathrm{O}_1 \cap \Delta_2$. В силу того, что O_1 — орбита группы H и $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{O}_1$, существует $h \in H$ такой, что $\delta_1^h = \delta_2$. В силу того, что $H \leqslant M$, имеет место $\Delta_1^h = \Delta_2$. Наконец, $\mathrm{O}_1^h = \mathrm{O}_1$. Поэтому

$$(\mathrm{O}_1 \cap \Delta_1)^h = \mathrm{O}_1 \cap \Delta_2,$$

а значит и порядки множеств $\mathrm{O}_1 \cap \Delta_1$ и $\mathrm{O}_1 \cap \Delta_2$ совпадают. □

Лемма 1.2.11. *Пусть орбита группы H нетривиально пересекается с двумя различными блоками группы M. Тогда любая другая орбита либо не пересекается ни с одним из этих блоков, либо пересекается с обоими.*

Доказательство. Можно считать, что $\mathrm{O}_1 \cap \Delta_1 \neq \varnothing$ и $\mathrm{O}_1 \cap \Delta_2 \neq \varnothing$. Пусть $\mathrm{O}_i \cap \Delta_1 \neq \varnothing$ для некоторого $i \neq 1$. Покажем, что $\mathrm{O}_i \cap \Delta_2 \neq \varnothing$.

Возьмём $h \in H$ как в доказательстве леммы 1.2.10. Тогда $\mathrm{O}_i^h = \mathrm{O}_i$, а значит

$$(\mathrm{O}_i \cap \Delta_1)^h = \mathrm{O}_i \cap \Delta_2,$$

что влечёт требуемое. □

Лемма 1.2.12. *С точностью до перестановки строк и столбцов, матрица A имеет блочно-диагональный вид*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

с прямоугольными блоками $A_1, A_2, \ldots$, не содержащими нулевых элементов и такими, что все столбцы в каждой матрице A_i одинаковы.

Доказательство. Перенумеруем блоки так, чтобы первыми были блоки с номерами из множества

$$J = \{j \mid \mathrm{O}_1 \cap \Delta_j \neq \varnothing\}.$$

Затем перенумеруем орбиты так, чтобы первыми были орбиты с номерами из множества

$$I_1 = \{i \mid \mathrm{O}_i \cap \Delta_1 \neq \varnothing\}.$$

Пусть $|J| > 1$, т.е. орбита O_1 группы H нетривиально пересекается с двумя различными блоками группы M. По лемме 1.2.11, для любого $j \in J$ множество I_1 индексов орбит, пересекающихся с блоком Δ_1, совпадает с множеством

$$I_j = \{i \mid \mathrm{O}_i \cap \Delta_j \neq \varnothing\}$$

индексов орбит, пересекающихся с блоком Δ_j.

Таким образом, после предложенной перенумерации матрица A примет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A' \end{pmatrix},$$

где матрица A_1 имеет размер $|I| \times |J|$, не содержит нулевых элементов и все её столбцы совпадают. Продолжая этот процесс, получаем требуемое. □

1.3 Доказательство теоремы 1.1.1

Достаточно проверить следующие два утверждения:

1. если H — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в группе Sym_n, то H совпадает с некоторой подгруппой $S_{\mathfrak{D}}$, где $\mathfrak{D} \vDash n$, и
2. для $\mathfrak{D} \vDash n$ подгруппа $S_{\mathfrak{D}}$ будет максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой в Sym_n, а индекс $S_{\mathfrak{D}}$ в Sym_n нечётен.

Докажем вначале утверждение 1. Пусть H — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа группы Sym_n, где $n > 1$, и число $|\mathrm{Sym}_n : H|$ нечётно.

Пусть H транзитивна. Тогда утверждение 1 верно по лемме 1.2.8.

Пусть теперь H интранзитивна, $\mathrm{O}_1,\ldots,\mathrm{O}_r$ — все её орбиты, и $n_i = |\mathrm{O}_i|$. Обозначая через m_2 наибольшую степень двойки, делящую число m, будем считать, что

$$(n_1)_2 = 2^{\iota(1)},\, (n_2)_2 = 2^{\iota(2)}, \ldots, (n_r)_2 = 2^{\iota(r)}.$$

Тогда $H \leqslant \mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_1 \times \ldots \times \mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_r$. Поскольку H — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа, очевидно, что H порождается своими проекциями H_i на $\mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_i$, а каждая из таких проекций является максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса в $\mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_i$ и транзитивна на O_i. Кроме того, подгруппа $\mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_1 \times \ldots \times \mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_r$ содержит силовскую 2-подгруппу группы Sym_n. Поэтому если A и B — два объединения некоторых орбит O_i, при этом $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, то подгруппа

$$\mathrm{Sym}\,\mathrm{A} \times \mathrm{Sym}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \leqslant \mathrm{Sym}\,\mathrm{B}$$

имеет нечётный индекс в $\mathrm{Sym}\,\mathrm{B}$, и $|\mathrm{A}| \preccurlyeq |\mathrm{B}|$ по лемме 1.2.3. Отсюда для любого поднабора $n_{i_1}, \ldots, n_{i_m}$ набора чисел $n_1,\ldots,n_r$ каноническая двоичная запись числа $n_{i_1} + \ldots + n_{i_m}$ (напр., двоичная запись самих чисел $n_1,\ldots,n_r$) получается из канонической двоичной записи числа n заменой некоторых единиц нулями. Взяв в качестве A одну из орбит O_{i_1}, а в качестве B — её объединение $\mathrm{O}_{i_1} \cup \mathrm{O}_{i_2}$ с другой орбитой O_{i_2}, получаем, что в двоичной записи чисел n_{i_1} и n_{i_2} при $i_1 \neq i_2$ единицы могут стоять только на разных позициях. По лемме 1.2.5 $n_i = a_{\iota(i)}2^{\iota(i)}$, где $a_{\iota(i)}$ нечётное, не превосходящее Υ. Из сказанного и из определения расширенной двоичной записи ясно, что, заменив в равенстве $n = \sum n_i$ каждое слагаемое соответствующим выражением $a_{\iota(i)}2^{\iota(i)}$, получаем расширенную двоичную запись числа n. В частности, все числа $\iota(i)$, соответствующие различным орбитам, различны.

По лемме 1.2.8, каждая группа H_i совпадает с $S_{\mathcal{D}_\iota}$ для допустимой диаграммы $\mathcal{D}_\iota \Vdash n_i = a_\iota 2^\iota$, где $\iota = \iota(i)$, состоящей из одного столбца, причём для различных i столбцы таких диаграмм имеют различную высоту. Из этих столбцов $\mathcal{D}_\iota$ получаем диаграмму $\mathcal{D}$, ассоциированную с числом n.

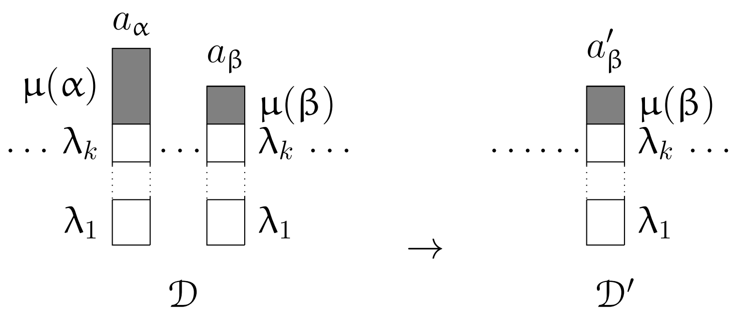


Рисунок 1.1 — случай 1

Покажем, что $\mathcal{D}$ допустима, и тогда $H = H_1 \times \ldots \times H_r = S_{\mathcal{D}}$ для $\mathcal{D} \vDash n$. Поскольку диаграммы $\mathcal{D}_\iota$ допустимы, каждый столбец диаграммы $\mathcal{D}$ разрезан правильным образом. Поэтому осталось удостовериться, что в диаграмме $\mathcal{D}$ нет пары столбцов, удовлетворяющей условию 1 или условию 2.

Предположим, нашлись два столбца, удовлетворяющие условию 1. Пусть это столбцы высот α и β, где $\alpha > \beta$. Их незакрашенные части разрезаны одинаковым образом и выполнено неравенство

$$a_\alpha 2^{\mu(\alpha)} + a_\beta 2^{\mu(\beta)} \leqslant \Upsilon. \tag{1.2}$$

Тогда $H_\alpha \times H_\beta < S_{\mathcal{D}'_\beta}$, где диаграмма $\mathcal{D}'_\beta$ состоит из одного столбца высоты β, разрезанного так же, как столбец $\mathcal{D}_\beta$, и над столбцом в $\mathcal{D}'_\beta$ стоит цифра

$$a'_\beta = a_\alpha 2^{\mu(\alpha)-\mu(\beta)} + a_\beta = a_\alpha 2^{\alpha-\beta} + a_\beta.$$

Построим диаграмму $\mathcal{D}'$ удалением из диаграммы $\mathcal{D}$ столбца $\mathcal{D}_\alpha$ и заменой столбца $\mathcal{D}_\beta$ на $\mathcal{D}'_\beta$ (см. рис. 1.1).
Из неравенства (1.2) следует, что $a'_\beta 2^{\mu(\beta)} \leqslant \Upsilon$, откуда $S_{\mathcal{D}'} \in \mathfrak{X}$. Но тогда легко видеть, что $H < S_{\mathcal{D}'} \in \mathfrak{X}$. Противоречие с максимальностью группы H.

Предположим теперь, что нашлись два столбца, удовлетворяющие условию 2. Пусть это столбцы высот α и β, где $\alpha > \beta$. Тогда

$$a_\beta = 1 \quad \text{и} \quad a_\alpha 2^{\mu(\alpha)} + 1 \leqslant \Upsilon, \tag{1.3}$$

незакрашенная часть столбца высоты α имеет высоту β, и столбец высоты β получается из незакрашенной части столбца высоты α закрашиванием верхней

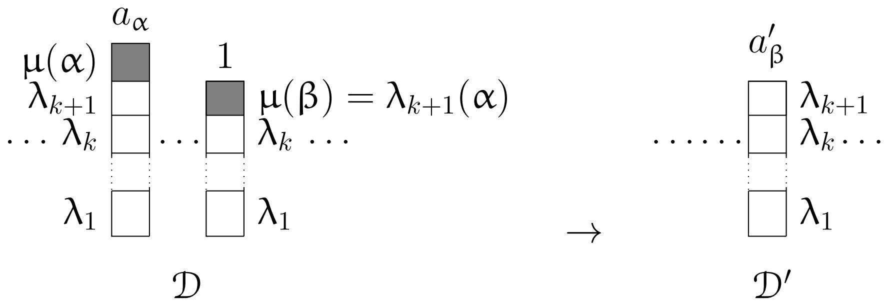


Рисунок 1.2 — случай 2

полоски (на рисунке номер $k+1$). Тогда $H_\alpha \times H_\beta < S_{\mathcal{D}'_\beta}$, где диаграмма $\mathcal{D}'_\beta$ состоит из одного столбца высоты β и выглядит следующим образом. Незакрашенная часть столбца в диаграмме $\mathcal{D}'_\beta$ состоит из незакрашенной части столбца диаграммы $\mathcal{D}_\beta$ и добавленной сверху незакрашенной полоски высоты $\mu(\beta) = \lambda_{k+1}(\alpha)$ над ней; высота закрашенной части в $\mathcal{D}'_\beta$ равна нулю, а над столбцом стоит цифра

$$a'_\beta = a_\alpha 2^{\mu(\alpha)} + 1 = a_\alpha 2^{\alpha-\beta} + 1 \leqslant \Upsilon.$$

Снова построим диаграмму $\mathcal{D}'$ удалением столбца $\mathcal{D}_\alpha$ и заменой столбца $\mathcal{D}_\beta$ на $\mathcal{D}'_\beta$ как на рисунке 1.2.

Теперь, как и в случае 1, $H < S_{\mathcal{D}'} \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Утверждение 1 доказано.

Теперь докажем утверждение 2. Пусть $H = S_{\mathcal{D}}$ для некоторой допустимой диаграммы $\mathcal{D} \vDash n$. Покажем, что H является максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса в группе Sym_n. Из определения группы $S_{\mathcal{D}}$ следует, что $H \in \mathfrak{X}$. С помощью лемм 1.2.3 и 1.2.4 легко проверяется, что H имеет нечётный индекс в Sym_n. Осталось показать, что если $H \leqslant M$ для максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы M, то $H = M$.

Следующая лемма доказывает утверждение 2 в критическом частном случае.

Лемма 1.3.1. *Пусть $\mathcal{D} \vDash n = a2^\lambda$, где $\lambda \geqslant 0$ и a — нечётное число, не превосходящее Υ. Тогда $S_{\mathcal{D}}$ — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в Sym_n.*

Доказательство. Очевидно, что $S_{\mathcal{D}} = \mathrm{Sym}_n$ при $n \leqslant \Upsilon$. Поэтому далее считаем, что $n > \Upsilon$.

Допустим, диаграмма $\mathcal{D}$ состоит из одного столбца. Тогда группа $H = S_{\mathcal{D}}$ транзитивна. Предположим, что $H \leqslant M$, где M — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в Sym_n. В силу доказанного утверждения 1 $M = S_{\mathcal{E}}$ для некоторой допустимой диаграммы $\mathcal{E} \vDash n$. Поскольку M также транзитивна, $\mathcal{E}$ состоит из одного столбца. Из леммы 1.2.2 и условия $n > \Upsilon$ следует, что M импримитивна. Пусть нижние полоски в диаграммах $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ имеют высоты $\varkappa_1$ и λ_1 соответственно (они не закрашены в силу $n > \Upsilon$). Зафиксируем естественные системы импримитивности

$$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t \text{ для } H \quad \text{и} \quad \Delta_1, \ldots, \Delta_s \text{ для } M,$$
$$|\Gamma_i| = 2^{\varkappa_1} \leqslant \Upsilon \text{ и } |\Delta_i| = 2^{\lambda_1} \leqslant \Upsilon.$$

Система $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ будет также системой импримитивности для группы H. Покажем, что эти две системы импримитивности совпадают.

Выберем $\Gamma \in \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t\}$ и $\Delta \in \{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ так, чтобы $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$. По лемме 1.2.9 имеет место включение $\Gamma \subseteq \Delta$, и следовательно $\varkappa_1 \leqslant \lambda_1$.

По определению группы $S_{\mathcal{D}}$ имеем $H \leqslant \mathrm{Sym}\,\Gamma \wr \mathrm{Sym}_t$, причём база

$$\mathrm{Sym}\,\Gamma_1 \times \ldots \times \mathrm{Sym}\,\Gamma_t$$

этого сплетения содержится в H. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$^{-} : \mathrm{Sym}\,\Gamma \wr \mathrm{Sym}_t \to \mathrm{Sym}_t\,.$$

Образ $\overline{H}$ подгруппы H относительно этого гомоморфизма совпадает с группой $S_{\overline{\mathcal{D}}}$, соответствующей диаграмме $\overline{\mathcal{D}}$, полученной из $\mathcal{D}$ удалением нижней полоски, и поэтому $\overline{\mathcal{D}}$ допустима. По предположению индукции $\overline{H}$ является максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса в Sym_t. Гомоморфизм $^{-}$ индуцирует действие группы $\overline{H}$ на множестве $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t\}$.

Если $\Delta = \Gamma$, то $M \leqslant \mathrm{Sym}\,\Gamma \wr \mathrm{Sym}_t$ и $\overline{M} = \overline{H}$, и тогда $M = H$.

Предположим, что $\Delta \neq \Gamma$. Тогда $\varkappa_1 < \lambda_1 \leqslant [\log \Upsilon]$ по лемме 1.2.9 и каждый блок Δ_i является объединением $2^{\lambda_1 - \varkappa_1}$ блоков системы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$. Система импримитивности $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ группы H определяет систему импримитивности

$\overline{\Delta}_1, \ldots, \overline{\Delta}_s$ группы $\overline{H}$ на множестве $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t\}$ по следующему правилу: Γ_i и Γ_j принадлежат одному блоку $\overline{\Delta}$ как точки тогда и только тогда, когда Γ_i и Γ_j содержатся как подмножества в некотором блоке Δ. Пусть диаграмма $\overline{\mathcal{D}}$ начинается с незакрашенной полоски высоты $\varkappa_2$. Тогда $|\overline{\Delta}| = 2^{\lambda_1 - \varkappa_1}$ кратно $2^{\varkappa_2}$ по лемме 1.2.9. Отсюда $\varkappa_2 \leqslant \lambda_1 - \varkappa_1$ и диаграмма $\mathcal{D}$ содержит две идущие подряд полоски высот $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ такие, что

$$2^{\varkappa_1 + \varkappa_2} \leqslant 2^{\varkappa_1 + \lambda_1 - \varkappa_1} = 2^{\lambda_1} \leqslant \Upsilon;$$

противоречие. Пусть теперь диаграмма $\overline{\mathcal{D}}$ состоит лишь из закрашенной полоски. Тогда из определения следует, что $\overline{H} = \mathrm{Sym}_t$ и $\overline{H}$ действует на множестве $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t\}$ примитивно. Отсюда $2^{\lambda_1 - \varkappa_1} = |\overline{\Delta}| = 1$, противоречие.

Рассмотрим второй случай, когда $\mathcal{D}$ состоит из более чем одного столбца. Подгруппа H интранзитивна и имеет столько же орбит на множестве Ω, сколько столбцов в диаграмме $\mathcal{D}$. Обозначим эти орбиты через $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_r$. Из определения группы $S_{\mathcal{D}}$ следует, что все числа $|\mathrm{O}_i|$ различны и имеют вид $a_\iota 2^\iota$, где a_ι — нечётное число, не превосходящее Υ. Пусть $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_r$ — одностолбцовые диаграммы, соответствующие орбитам $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_r$, причём

$$H = S_{\mathcal{D}_1} \times \ldots \times S_{\mathcal{D}_r}.$$

Как и ранее, рассмотрим диаграмму $\mathcal{E}$, такую что $M = S_{\mathcal{E}}$ максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в Sym_n и $H \leqslant M$.

Предположим, что M транзитивна. Как и выше, M импримитивна и пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ — её естественная неизмельчаемая система импримитивности с блоками размера $2^{\lambda_1} \leqslant \Upsilon$. Группа H действует на множестве блоков $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$.

По лемме 1.2.12, перенумеровав при необходимости орбиты $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_r$ и блоки $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$, можно считать, что матрица

$$A = (|\mathrm{O}_i \cap \Delta_j|)_{i \in \{1, \ldots, r\},\ j \in \{1, \ldots, s\}}$$

имеет блочно-диагональный вид, при этом в каждой строке этой матрицы все ненулевые элементы совпадают, а сумма элементов каждого столбца равна 2^{λ_1}.

Покажем, что блок Δ_1 полностью содержится в орбите O_1, то есть множество

$$I = \{i \mid \mathrm{O}_i \cap \Delta_1 \neq \varnothing\}$$

состоит в точности из одного элемента O_1. Действительно, предположим, что $|I| > 1$. В силу равенства ненулевых элементов в каждой строке матрицы A, для всех $i \in I$ выполнены равенства

$$|\mathrm{O}_i| = |\mathrm{O}_i \cap \Delta_1| \cdot l \tag{1.4}$$

для некоторого l, единого для всех $i \in I$ в силу того, что множество

$$J(i) = \{j \mid \mathrm{O}_i \cap \Delta_j \neq \varnothing\}$$

едино для всех $i \in I$. Покажем, что числа $|\mathrm{O}_i \cap \Delta_1|$ являются степенями двойки. Действительно, группа $H \cap \mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_i$ имеет нечётный индекс в группе $\mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_i$, а с другой стороны содержится в подгруппе

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{O}_i \cap \Delta_1) \wr \mathrm{Sym}_l \leqslant \mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_i,$$

поэтому группа $\mathrm{Sym}(\mathrm{O}_i \cap \Delta_1) \wr \mathrm{Sym}_l$ также имеет нечётный индекс в группе $\mathrm{Sym}\,\mathrm{O}_i$. По лемме 1.2.4, $|\mathrm{O}_i \cap \Delta_1|$ является степенью двойки.

Ввиду единственности двоичного разложения, степень двойки не может быть суммой попарно различных степеней двойки. Теперь, из равенства

$$|\Delta_1| = \sum_{i \in I} |\mathrm{O}_i \cap \Delta_1|$$

и того, что $|\Delta_1|$ есть степень двойки, получаем, что найдутся различные i_1 и i_2 такие, что

$$|\mathrm{O}_{i_1} \cap \Delta_1| = |\mathrm{O}_{i_2} \cap \Delta_1|. \tag{1.5}$$

Равенства (1.4) и (1.5) влекут $|\mathrm{O}_{i_1}| = |\mathrm{O}_{i_2}|$, вопреки тому, что все орбиты имеют разную мощность.

Аналогичным образом можно показать, что любой блок $\Delta \in \{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ полностью содержится в одной из орбит группы H.

Рассуждая, как и в случае, когда $\mathcal{D}$ — диаграмма, состоящая из одного столбца, убеждаемся, что высота незакрашенной нижней полоски в любой из диаграмм $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_r$ равна λ_1, где $|\Delta| = 2^{\lambda_1}$. Более того, для столбцов с незакрашенной нижней полоской, соответствующие естественные системы импримитивности групп составлены из тех блоков $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$, которые содержатся в соответствующих этим столбцам орбитах. Если же нижняя полоска в какой-либо диаграмме $\mathcal{D}_i$ закрашена, то группа H на орбите O_i действует примитивно, а значит в O_i содержится ровно один блок; в частности, $|\mathrm{O}_i| = 2^{\lambda_1} \cdot 1$ и над столбцом $\mathcal{D}_i$ (который имеет высоту λ_1) написана цифра 1. Как видно из определения шаблона, не может быть двух столбцов одинаковой высоты. Следовательно в диаграмме не может быть двух столбцов с закрашенной нижней полоской одной и той же высоты, поскольку иначе оба столбца будут закрашены целиком и иметь одну высоту.

Поскольку H стабилизирует систему $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$, имеем $H \leqslant \mathrm{Sym}\,\Delta \wr \mathrm{Sym}_s$. Пусть, как и раньше, $^{-} : \mathrm{Sym}\,\Delta \wr \mathrm{Sym}_s \to \mathrm{Sym}_s$ — естественный эпиморфизм. Тогда

$$\overline{H} = S_{\overline{\mathcal{D}}_1} \times \ldots \times S_{\overline{\mathcal{D}}_r} = S_{\overline{\mathcal{D}}},$$

где диаграмма $\overline{\mathcal{D}}$ получена из $\mathcal{D}$ удалением нижних полосок высоты λ_1 во всех её столбцах и составлена из столбцов одностолбцовых диаграмм $\overline{\mathcal{D}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{D}}_r$.

Чтобы воспользоваться предположением индукции, осталось проверить допустимость диаграммы $\overline{\mathcal{D}}$. Предположим, что диаграмма $\overline{\mathcal{D}}$ недопустима. Тогда она содержит два различных столбца высот $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, где $\overline{\alpha} > \overline{\beta}$, удовлетворяющих одному из условий 1 или 2. Рассмотрим два случая: $\overline{\beta} > 0$ и $\overline{\beta} = 0$. В случае $\overline{\beta} > 0$ (см. рис. 1.3) столбцы диаграммы $\overline{\mathcal{D}}$ высот $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ получены из столбцов высот $\alpha = \overline{\alpha} + \lambda_1$ и $\beta = \overline{\beta} + \lambda_1$ диаграммы $\mathcal{D}$ удалением незакрашенной полоски высоты λ_1. Эти столбцы в диаграмме $\mathcal{D}$ удовлетворяют тому же условию недопустимости, что и столбцы высот $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ диаграммы $\overline{\mathcal{D}}$, вопреки допустимости $\mathcal{D}$. Если же $\overline{\beta} = 0$, то соответствующий столбец нулевой высоты в диаграмме $\overline{\mathcal{D}}$ может быть получен только из полностью закрашенного столбца высоты $\beta = \mu(\beta) = \lambda_1$ (см. рис. 1.4), и как мы отметили выше, над ним должна быть цифра 1. Столбец высоты $\overline{\alpha}$ диа-

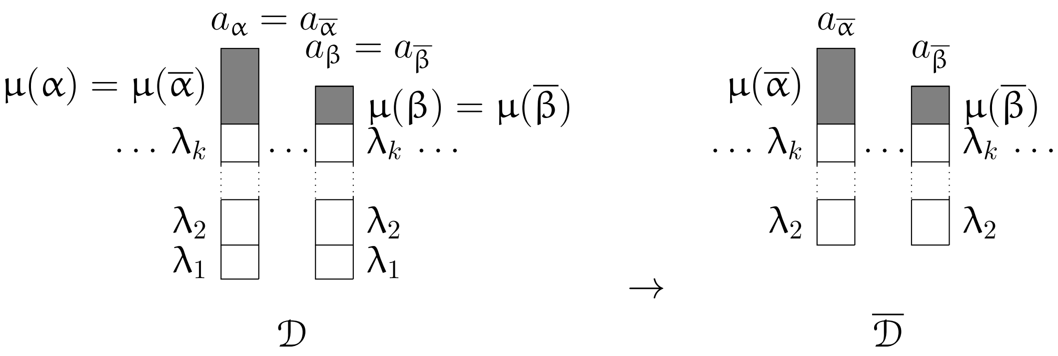


Рисунок 1.3 — случай $\beta > 0$

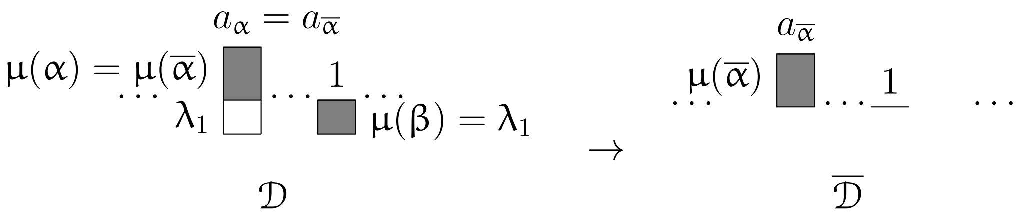


Рисунок 1.4 — случай $\beta = 0$

граммы $\overline{\mathcal{D}}$ по-прежнему получается из столбца высоты $\alpha = \overline{\alpha} + \lambda_1$ диаграммы $\mathcal{D}$ удалением незакрашенной полоски высоты λ_1. В любом из случаев 1 или 2 имеем

$$a_\alpha 2^{\mu(\alpha)} + 1 = a_{\overline{\alpha}} 2^{\mu(\overline{\alpha})} + 1 \leqslant \Upsilon.$$

Таким образом, столбцы высот α и β диаграммы $\mathcal{D}$ удовлетворяют условию 2, и диаграмма $\mathcal{D}$ недопустима. Противоречие.

По предположению индукции $\overline{H}$ — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в Sym_s, а её полный прообраз H — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа нечётного индекса в $\mathrm{Sym}\,\Delta \wr \mathrm{Sym}_s$. С другой стороны, $M = S_{\mathcal{E}} \leqslant \mathrm{Sym}\,\Delta \wr \mathrm{Sym}_s$, поэтому $H = S_{\mathcal{E}} = M$.

Если группа M интранзитивна и имеет те же орбиты, что и группа H, то рассуждая для каждой из орбит, как и в случае, когда $\mathcal{D}$ — диаграмма из одного столбца, получаем, что на этих орбитах M действует так же, как и H, следовательно, $M = H$.

Осталось рассмотреть случай, когда M интранзитивна, но её множество орбит отлично от множества орбит группы H. В силу $H \leqslant M$, любая орбита группы M является объединением некоторых орбит группы H. Рассмотрим орбиту O группы M, являющуюся объединением $m > 1$ орбит $\mathrm{O}_{i_1}, \dots, \mathrm{O}_{i_m}$

группы H. Тогда рассмотрим подгруппу $M_{\mathrm{O}} \leqslant \mathrm{Sym}\,\mathrm{O}$, являющуюся проекцией группы M на $\mathrm{Sym}\,\mathrm{O}$, и её подгруппу $H_{\mathrm{O}} = S_{\mathcal{D}_{i_1}} \times \ldots \times S_{\mathcal{D}_{i_m}}$. Понятно, что $H_{\mathrm{O}} \leqslant M_{\mathrm{O}} \leqslant \mathrm{Sym}\,\mathrm{O}$, группа M_{O} является максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса в $\mathrm{Sym}\,\mathrm{O}$ и действует транзитивно на O, а H_{O} действует интранзитивно на O. Далее, рассуждая, как и в случае выше, когда M транзитивна, получаем $H_{\mathrm{O}} = M_{\mathrm{O}}$, противоречие. $\square$

Теперь установим максимальность подгруппы $H = S_{\mathcal{D}}$ как $\mathfrak{X}$-подгруппы в общем случае. Воспользуемся индукцией по n.

Если M транзитивна, то, по лемме 1.2.5 $n = a2^{\varkappa}$, где a нечётное число, не превосходящее Υ. Теперь по лемме 1.3.1 $H = M$.

Степенью столбца диаграммы $\mathcal{D}$ назовём число $a_\iota 2^\iota$, где ι — высота столбца, a_ι — соответствующая цифра из расширенной записи, стоящая в диаграмме над этим столбцом. Степени столбцов являются мощностями орбит группы $S_{\mathcal{D}}$.

Пусть M интранзитивна. Тогда H интранзитивна, и орбиты группы M являются объединениями орбит группы H, которые, в свою очередь, соответствуют столбцам диаграммы $\mathcal{D}$. Кроме того, $M \leqslant \mathrm{Sym}_m \times \mathrm{Sym}_{n-m}$ для некоторого $m \preccurlyeq n$, причём столбцы диаграммы $\mathcal{D}$ можно разбить на два непересекающихся подмножества $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ так, чтобы числа m и $n-m$ были суммами степеней столбцов из этих множеств. Обозначим теми же символами $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ диаграммы, собранные из столбцов этих двух подмножеств. Понятно, что $\mathcal{D}_1 \vDash m$ и $\mathcal{D}_2 \vDash n-m$.

Из определения группы $S_{\mathcal{D}}$ следует, что

$$H = S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}_1} \times S_{\mathcal{D}_2} \leqslant \mathrm{Sym}_m \times \mathrm{Sym}_{n-m},$$

и по предположению индукции $S_{\mathcal{D}_1}, S_{\mathcal{D}_2}$ — максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в группах $\mathrm{Sym}_m, \mathrm{Sym}_{n-m}$. Пусть M_1 и M_2 — проекции подгруппы M на Sym_m и Sym_{n-m} соответственно. Тогда $S_{\mathcal{D}_i} \leqslant M_i$, и значит $M_i = S_{\mathcal{D}_i}$. Таким образом,

$$H \leqslant M \leqslant M_1 \times M_2 = S_{\mathcal{D}_1} \times S_{\mathcal{D}_2} = H,$$

и $M = H$. $\square$

Глава 2. Нормализаторы силовских подгрупп в классических группах

2.1 Обзор основных результатов главы

В теореме 2.1.1, напомним, дано описание нормализаторов силовских r-подгрупп в простых линейных и унитарных группах для нечётного простого числа r, взаимно простого с характеристикой поля определения группы, через нормализаторы силовских r-подгрупп в соответствующих полных группах, а предложение 2.1.2 является ключевым шагом в доказательстве теоремы 2.1.1. В этой главе мы докажем теорему 2.1.1 и теорему 2.1.3, которая содержит описание нормализаторов силовских r-подгрупп в полных линейных и унитарных группах для нечётного простого числа r, взаимно простого с характеристикой.

Мы также одновременно докажем теоремы 2.1.4-2.1.6, доказав теорему 2.1.7, и установим справедливость предложения 2.1.8, тем самым описав нормализаторы силовских r-подгрупп в полных и простых симплектических и ортогональных группах, определённых над полем нечётной характеристики, для нечётного простого числа r, взаимно простого с характеристикой.

Наконец, в этой главе приведено доказательство предложения 2.1.9, в котором, как было сказано во введении, описано строение нормализаторов силовских подгрупп в симметрических группах. Необходимые обозначения см. во введении.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q), S = \mathrm{SL}_n^\eta(q)$, r *— нечётное простое число такое, что* $(q,r) = 1$, $U \in \mathrm{Syl}_r(G), P = U \cap S \in \mathrm{Syl}_r(S)$. *Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) $(r,n,(q-\eta)_r) = (3,3,3)$, $N_S(P) > N_G(U) \cap S$ *и*

$$P \simeq 3_+^{1+2}, N_S(P) \simeq \mathrm{SU}_3(2)$$

где 3_+^{1+2} *— это экстраспециальная группа порядка* 27 *периода* 3*;*

(2) $N_S(P) = N_G(U) \cap S$.

Кроме того, если $\overline{}: S \to S/Z(S) = \mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ *— канонический эпиморфизм, то*

$$\overline{P} \in \mathrm{Syl}_r(\overline{S}) \text{ и } N_{\overline{S}}(\overline{P}) = \overline{N_S(P)}.$$

Предложение 2.1.2. *Пусть* r *— нечётный простой делитель числа* $q - \eta$. *Тогда нормализатор в* $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ *силовской* r*-подгруппы группы* $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ *содержится в группе мономиальных матриц, если и только если*

$$(r,n,(q-\eta)_r) \neq (3,3,3).$$

Теорема 2.1.3. *Пусть* $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, r *— нечётное простое число, такое, что* $(q,r) = 1$. *Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid (\eta q)^k \equiv 1 \pmod r\}.$$

Пусть неотрицательные числа b *и* c *— соответственно частное и остаток от деления* n *на* e. *Зафиксируем* r*-ичное представление числа* b*:*

$$b = b_0 + b_1 r + \ldots + b_\nu r^\nu, 0 \leqslant b_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r*-подгруппы* R *группы* G *справедливо разложение*

$$R \simeq 1_c \times R_0^{b_0} \times \ldots \times R_\nu^{b_\nu}, \tag{2.1}$$

где 1_c *— тривиальная подгруппа в* $\mathrm{GL}_c^\eta(q)$, R_i *— силовская* r*-подгруппа группы* $G_i = \mathrm{GL}_{er^i}^\eta(q)$, *и возведение группы* R_i *в степень* b_i *означает прямое произведение* b_i *копий группы* R_i. *Для нормализатора подгруппы* R *имеют место разложения*

$$N_G(R) \simeq \mathrm{GL}_c^\eta(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{b_i}, \tag{2.2}$$

$$N_G(R)/R \simeq \mathrm{GL}_c^\eta(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{b_i}, \tag{2.3}$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. *Кроме того,*

$$R_i \simeq C_{(q^e-\eta^e)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \tag{2.4}$$

$$N_i \simeq (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}), \tag{2.5}$$

и

$$N_i/R_i \simeq \left(C_{(q^e-\eta^e)_{r'}} \rtimes C_e\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1.4. *Пусть $G = \mathrm{Sp}_n(q)$, где q — степень нечётного простого числа, а n чётно, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть числа m и d обозначают частное и остаток от деления n на $2f$, то есть

$$n = 2fm + d,\ 0 \leqslant d < 2f.$$

Зафиксируем r-ичное представление числа m:

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leqslant m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{Sp}_d(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{Sp}_{2fr^i}(q)$, и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{Sp}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

$$N_G(R)/R = \mathrm{Sp}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$

$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Теорема 2.1.5. *Пусть n — нечётное число и $G = \mathrm{O}_n(q)$, где q — степень нечётного простого числа, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть числа m и d обозначают частное и остаток от деления n на $2f$, то есть

$$n = 2fm + d,\ 0 \leqslant d < 2f.$$

Зафиксируем r-ичное представление числа m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leqslant m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{O}_d(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{O}^{\delta}_{2fr^i}(q)$, и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{O}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$
$$N_G(R)/R = \mathrm{O}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$
$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Теорема 2.1.6. *Пусть n — чётное число и $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$, где q — степень нечётного простого числа, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Определим число m следующим образом:

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2f} - 1, & \text{если } 2f \text{ делит } n \text{ и } (\delta)^{n/2f} \neq \varepsilon \\ [\frac{n}{2f}], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $d = n - 2fm$. Обозначим через K группу $\mathrm{O}_d^{\delta^m}(q)$, где $d = n - 2fm$. Зафиксируем r-ичное представление числа m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leqslant m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{O}_d^{\delta^m}(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{O}_{2fr^i}^{\delta}(q)$, и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{O}_d^{\delta^m}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

$$N_G(R)/R = \mathrm{O}_d^{\delta^m}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$

$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Теорема 2.1.7. *Пусть* $G \in \{\mathrm{Sp}_n(p), \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)\}$*, где* q *— степень нечётного простого числа, и* r *— простое число, такое, что* $(2q, r) = 1$*. Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Определим число m *следующим образом:*

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2f} - 1, & \text{если } G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q), 2f \text{ делит } n \text{ и } (\delta)^{n/2f} \neq \varepsilon \\ [\frac{n}{2f}], & \text{иначе}. \end{cases}$$

Положим $d = n - 2fm$*. Обозначим через* K *группу* $\mathrm{Sp}_d(q)$ *(для* $G = \mathrm{Sp}_n(q)$*) или* $\mathrm{O}_d^{\varepsilon\delta^m}(q)$ *(для* $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$*). Зафиксируем* r*-ичное представление числа* m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leqslant m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r*-подгруппы* R *группы* G *справедливо разложение*

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu}, \tag{2.7}$$

где 1_d *— тривиальная подгруппа в группе* K*,* R_i *— силовская* r*-подгруппа группы* $G_i = \mathrm{Sp}_{2fr^i}(q)$ *(для* $G = \mathrm{Sp}_n(q)$*) или*[1] $\mathrm{O}_{2fr^i}^{\varepsilon\delta}(q)$ *(для* $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$*), и возведение* R_i *в степень* m_i *означает прямое произведение* m_i *копий группы* R_i*. Для нормализатора подгруппы* R *имеют место разложения*

$$N_G(R) = K \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \tag{2.8}$$

$$N_G(R)/R = K \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \tag{2.9}$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$*. Кроме того,*

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \tag{2.10}$$

$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}), \tag{2.11}$$

[1] Если ε — пустой символ, то считаем, что $\varepsilon\delta$ — тоже пустой символ.

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i\ \text{раз}}. \tag{2.12}$$

Предложение 2.1.8. *Пусть $G \in \{\mathrm{Sp}_n(q), \mathrm{O}_n^\varepsilon(q)\}$, $S = G$ в случае $G = \mathrm{Sp}_n(q)$ и $S = \Omega_n^\varepsilon(q)$ — это подгруппа индекса 2 в специальной ортогональной группе $\mathrm{SO}_n^\varepsilon(q)$ в случае $G = \mathrm{O}_n^\varepsilon(q)$. Пусть r — нечётное простое число, взаимно простое с q, $U \in \mathrm{Syl}_r(G)$. Тогда $U \leqslant S$. Кроме того, если $^- : S \to S/Z(S)$ — канонический эпиморфизм, то*

$$\overline{U} \in \mathrm{Syl}_r(\overline{S}) \text{ и } N_{\overline{S}}(\overline{U}) = \overline{N_S(U)}.$$

Предложение 2.1.9. *Пусть $G = \mathrm{Sym}_k$, r — простое число. Зафиксируем r-ичное представление числа k:*

$$k = k_0 + k_1 r + \ldots + k_\nu r^\nu, 0 \leqslant k_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R \simeq 1_{k_0} \times R_1^{k_1} \times \ldots \times R_\nu^{k_\nu}, \tag{2.13}$$

где 1_{k_0} — тривиальная подгруппа группы Sym_{k_0}, R_i — силовская r-подгруппа группы $S_i = \mathrm{Sym}_{r^i}$, и возведение группы R_i в степень k_i означает прямое произведение k_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) \simeq \mathrm{Sym}_{k_0} \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{k_i}, \tag{2.14}$$

$$N_G(R)/R \simeq \mathrm{Sym}_{k_0} \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{k_i}\,, \tag{2.15}$$

где $N_i = N_{S_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i \simeq \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i\ \text{раз}}, \tag{2.16}$$

$$N_i/R_i \simeq \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i\ \text{раз}}. \tag{2.17}$$

2.2 Предварительные сведения и результаты

2.2.1 Обозначения

Следуя [26], зафиксируем обозначения. Конечное поле порядка q обозначается через $\mathbb{F}_q$. Как было сказано, группу $\mathrm{GL}_n(q)$ будем обозначать через $\mathrm{GL}_n^+(q)$, а группу $GU_n(q)$ — через $\mathrm{GL}_n^-(q)$.

В связи с тем, что $\mathrm{GL}_n(q)$ состоит из матриц над полем $\mathbb{F}_q$, а $GU_n(q)$ из матриц над полем $\mathbb{F}_{q^2}$, конечное поле $\mathbb{F}_q$ порядка q будем также обозначать через $\mathbb{F}_{+q}$, а поле $\mathbb{F}_{q^2}$ — через $\mathbb{F}_{-q}$. Подгруппу диагональных матриц группы $\mathrm{GL}_n(q)$ обозначим через $\mathrm{Diag}_n^+(q)$, а подгруппу диагональных матриц группы $GU_n(q)$ — через $\mathrm{Diag}_n^-(q)$, т. е. $\mathrm{Diag}_n^-(q) = \mathrm{Diag}_n^+(q^2) \cap GU_n(q)$. Из определения следует, что

$$\mathrm{Diag}_n^\eta(q) \simeq \underbrace{C_{q-\eta} \times \ldots \times C_{q-\eta}}_{n \text{ раз}}.$$

В случае рассмотрения линейных и унитарных групп, введём следующие обозначения для чисел e и a. Обозначим через e мультипликативный порядок числа ηq по модулю r, то есть

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid (\eta q)^k \equiv 1 \pmod r\}.$$

Отметим следующие эквивалентности:

$$(\eta q)^k \equiv 1 \pmod r \Leftrightarrow q^k \equiv \eta^k \pmod r \Leftrightarrow (q^k - \eta^k) \text{ делится на } r.$$

Через a обозначим число, определяемое равенством

$$(q^e - \eta^e)_r = r^a.$$

В случае рассмотрения симплектических и ортогональных групп, введём следующие обозначения для чисел e, δ, f и a. Обозначим через e мультипликативный порядок числа q по модулю r, то есть

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\}.$$

Вслед за [41], для удобства введём ещё две величины: $\delta = (-1)^{e-1}$ и $f = \frac{e}{(e,2)}$. Отметим следующие эквивалентности:

$$(\delta q)^k \equiv 1 \pmod r \Leftrightarrow q^k \equiv \delta^k \pmod r \Leftrightarrow (q^k - \delta^k) \text{ делится на } r.$$

Через a обозначим число, определяемое равенством $r^a = (q^e - 1)_r$. Отметим, что знак δ выбирается таким образом, чтобы r^a делило $q^f - \delta$.

Через Sym_n будем обозначать симметрическую группу степени n. Следуя [24], нам будет удобно рассматривать симметрические группы как соответствующие группы подстановочных матриц. Подстановочное сплетение $X \wr Y$ матричной группы X и группы Y, состоящей из подстановочных матриц, определяется как группа, полученная заменой единиц и нулей соответственно в каждой матрице $y \in Y$ всевозможными матрицами из группы X и нулевыми матрицами той же степени, что и группа X. Таким образом, если $X \leqslant \mathrm{GL}_m(q)$ и $Y \leqslant \mathrm{Sym}_n$, то $X \wr Y \in \mathrm{GL}_{mn}(q)$. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — n копий группы X, действующих на пространствах $V_1, V_2, \ldots, V_n$ размерности m над полем $\mathbb{F}_q$ соответственно. Тогда можно считать, что $X \wr Y$ действует на пространстве $V = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \cdots \bigoplus V_n$. При этом $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ является базой сплетения $X \wr Y$, и оставляет на месте каждое слагаемое V_i, а группа Y переставляет слагаемые $V_1, \ldots, V_n$.

2.2.2 Вспомогательные утверждения

В этом разделе G и S обозначают $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ и $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ соответственно, r и p — простые числа, r — нечётное число, и p — характеристика поля определения $\mathbb{F}_{\eta q}$ группы G. Пусть

$$U \in \mathrm{Syl}_r(G), P = U \cap S \in \mathrm{Syl}_r(S).$$

Если r не делит $q - \eta = |G : S|$, то $P = U$ и равенство $N_G(U) = N_G(P)$ очевидно. Поэтому всюду далее в этом разделе мы предполагаем, что $q - \eta$ делится на r. Из работы Уэйр [12] следует, что U содержится в подгруппе мономиальных матриц

$\mathrm{GL}_1^{\eta}(q) \wr \mathrm{Sym}_n = \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q) \rtimes \mathrm{Sym}_n$, поэтому $U = R \rtimes T$, где $R \in \mathrm{Syl}_r(\mathrm{Diag}_n^{\eta}(q))$, а $T \in \mathrm{Syl}_r(\mathrm{Sym}_n)$.

Положим $Q = R \cap S$.

Лемма 2.2.1. *Имеют место соотношение $Q \trianglelefteq P$ и изоморфизмы*

$$P/Q \simeq U/R \simeq T.$$

Доказательство. Обозначим $D = \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q)$. Тогда $G = SD$. Далее,

$$Q = R \cap S = U \cap D \cap S = P \cap D.$$

Поскольку U нормализует D, P также нормализует D, и $Q = P \cap D \trianglelefteq P$. Заметим также, что $Q \in \mathrm{Syl}_r(S \cap D)$.

Докажем, что $PD = UD$. Тогда получим

$$P/Q = P/(P \cap D) \simeq PD/D = UD/D \simeq U/(U \cap D) = U/R \simeq T.$$

Достаточно показать, что $|PD| = |UD|$, что равносильно равенству

$$\frac{|P|}{|P \cap D|} = \frac{|U|}{|U \cap D|}.$$

Так как $G = SD$, имеем

$$|U| = |G|_r = \frac{|S|_r |D|_r}{|S \cap D|_r} = \frac{|P||R|}{|Q|}.$$

Отсюда

$$\frac{|U|}{|U \cap D|} = \frac{|U|}{|R|} = \frac{|P|}{|Q|} = \frac{|P|}{|P \cap D|}.$$

□

Лемма 2.2.2. *Справедливо равенство*

$$C_G(Q) = \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q)$$

Доказательство. Включение $C_G(Q) \geqslant \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q)$ очевидно. Установим обратное включение. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}_{\eta q}^*$ имеет порядок r. Любая матрица

$$X^{ij} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1, \lambda^{-1}, 1, \ldots, 1),$$

где λ и λ^{-1} стоят на i-м и j-м ($1 \leqslant i < j \leqslant n$) местах соответственно, лежит в Q. Положим

$$C = C_G(\{X^{ij} \big| 1 \leqslant i < j \leqslant n\})$$

централизатор множества всех таких матриц. Первое включение в цепочке

$$C_G(Q) \leqslant C \leqslant \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q)$$

очевидно. Покажем, что выполнено и второе. Действительно, пусть $Y \in C$. По определению, Y перестановочна с любой матрицей X^{ij}. Зафиксируем i и j. Вектор

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

с единицей в i-й координате и нулём в остальных, является собственным для матрицы X^{ij}, и одновременно образует базис пространства $V(\lambda)$ всех собственных векторов матрицы X^{ij}, соответствующих собственному значению λ (напомним, что $\lambda \neq \lambda^{-1}$, так как $|\lambda| = r$ — нечётное число). В силу перестановочности матриц Y и X^{ij}, $V(\lambda)$ является Y-инвариантным пространством, а следовательно, e_i является собственным вектором для матрицы Y. Аналогично можно показать, что вектор e_j тоже является собственным для матрицы Y. В силу произвольности i и j получаем, что $\{e_1, \ldots, e_n\}$ является базисом собственных векторов для матрицы Y, и следовательно, $Y \in \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q)$. □

Лемма 2.2.3. *В конечном поле порядка q^2 характеристики $\neq 3$ существует элемент β такой, что*

$$\beta^{-2} = 3.$$

Доказательство. Обозначим данное поле через $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{q^2}$, где q — степень простого числа p. Обозначим через α корень многочлена $x^2 - 3$. Рассмотрим два случая.

1. Многочлен $x^2 - 3$ приводим над $\mathbb{F}_p$. Тогда в поле $\mathbb{F}_p$ есть элемент α такой, что $\alpha^2 = 3$. В силу того, что поле $\mathbb{F}_p$ является подполем поля $\mathbb{F}$, имеем $\alpha \in \mathbb{F}$.

2. Многочлен $x^2 - 3$ неприводим над $\mathbb{F}_p$. Тогда $\alpha \in \mathbb{F}_p(\alpha) = \mathbb{F}_{p^2}$. Но p^2 делит q^2, а значит, $\alpha \in \mathbb{F}_{p^2} \leqslant \mathbb{F}$.

Положим $\beta = \alpha^{-1}$. □

Лемма 2.2.4. *Пусть* r, m *— натуральные числа, причём* $r > 1, m \geqslant 1$. *Тогда* $r^m \geqslant mr$, *и равенство* $r^m = mr$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $m = 1$ *или* $r = m = 2$.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по m. При $m = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть $m \geqslant 2$. База индукции ($m = 2$):

$$r^2 = r + r(r-1) \geqslant r + r = 2r,$$

причём равенство имеет место, если только $r = 2$.

Индукционный переход ($m > 2$):

$$r^m = r^{m-1} + r^{m-1}(r-1) \underset{\text{и. п.}}{\geqslant} (m-1)r + r^{m-1}(r-1) > (m-1)r + r = mr.$$

□

Следующие утверждения хорошо известны. Для леммы 2.2.5 не удалось найти ссылку, поэтому она приводится с доказательством.

Лемма 2.2.5. *Пусть* $n \geqslant 2$. *Тогда имеет место следующий изоморфизм*

$$N_{\mathrm{GL}_n^\eta(q)}(\mathrm{Diag}_n^\eta(q)) \simeq \begin{cases} \mathrm{GL}_n^\eta(q), & \text{если } q = 2 \text{ и } \eta = +, \\ \mathrm{Diag}_n^\eta(q) \rtimes \mathrm{Sym}_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Положим $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q), D = \mathrm{Diag}_n^\eta(q)$. Докажем следующий изоморфизм, эквивалентный утверждению леммы:

$$N_G(D) = \begin{cases} G, & \text{если } q - \eta = 1, \\ D \rtimes \mathrm{Sym}_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Условие $q - \eta = 1$ влечёт, что D состоит из одной единичной матрицы, которая, очевидно, перестановочна со всеми матрицами из группы G. Пусть $q - \eta \geqslant 2$. Возьмём произвольно $X = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) \in D$ и $T \in N_G(D)$. Покажем, что в каждом столбце матрицы T ровно один ненулевой элемент. Действительно, предположим, что это не так, т.е. в столбце с номером i у матрицы T есть два ненулевых элемента t_{ji} и $t_{ki}, j \neq k$. В силу того, что $T \in N_G(D)$, существует матрица $Y = \mathrm{diag}(y_1, \dots, y_n) \in D$ такая, что выполнено равенство

$$XT = TY.$$

Имеем следующие цепочки равенств

$$x_j t_{ji} = (XT)_{ji} = (TY)_{ji} = y_i t_{ji},$$
$$x_k t_{ki} = (XT)_{ki} = (TY)_{ki} = y_i t_{ki}.$$

Из первой цепочки получаем $x_j = y_i$, из второй $x_k = y_i$. Таким образом, получили $x_j = y_i = x_j, j \neq k$, что противоречит произвольности выбора матрицы X. Таким образом, T — мономиальная матрица и $N_G(D) \leqslant \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q) \rtimes \mathrm{Sym}_n$. Обратное включение очевидно. $\square$

Лемма 2.2.6. *[42, 8A.2] Порядок транзитивной абелевой подгруппы конечной группы подстановок равен степени этой группы.*

Лемма 2.2.7. *[42, 3A.9(a)] Пусть $W = H \wr G$ — подстановочное сплетение группы H с транзитивной группой подстановок $G \leqslant \mathrm{Sym}_n$ и пусть $B \simeq \underbrace{H \times \ldots \times H}_{n \text{ раз}}$ — база этого сплетения. Тогда*

$$C_B(G) = \{(h, \dots, h) \mid h \in H\} \simeq H.$$

2.2.3 Радикальные r-подгруппы и их нормализаторы в симметрических группах

Следуя [24; 25], зафиксируем обозначения. Радикальной r-подгруппой конечной группы G будем называть r-подгруппу R (возможно, тривиальную) такую, что $R = O_r(N_G(R))$. Для любого натурального числа c пусть A_c — элементарная абелева r-группа порядка r^c. Эта группа однозначно, с точностью до сопряжённости, вкладывается как транзитивная подгруппа в симметрическую группу Sym_{r^c}. При этом $C_{\mathrm{Sym}_{r^c}}(A_c) = A_c$ и $N_{\mathrm{Sym}_{r^c}}(A_c)/A_c \simeq \mathrm{GL}_c(r)$ [24; 43]. Для любой конечной последовательности $\mathfrak{c} = (c_1,c_2,\ldots,c_l)$ натуральных чисел введём обозначение $A_\mathfrak{c}$ следующим образом. Если $\mathfrak{c}$ непустая, то через $A_\mathfrak{c}$ обозначим подстановочное сплетение $A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \ldots \wr A_{c_l}$, вложенное естественным образом как транзитивная подгруппа в группу Sym_{r^d}, где $d = c_1 + c_2 + \cdots + c_l$. Это вложение однозначно с точностью до сопряжённости. Если $\mathfrak{c}$ — пустая последовательность, то $A_\mathfrak{c}$ — тривиальная группа Sym_1.

Лемма 2.2.8. *Имеет место изоморфизм*

$$N_{\mathrm{Sym}_{r^d}}(A_\mathfrak{c})/A_\mathfrak{c} \simeq \mathrm{GL}_{c_1}(r) \times \mathrm{GL}_{c_2}(r) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{c_l}(r).$$

Доказательство. См. [43, лемма 12] и [24, (2.1)]. □

Подгруппу $A_\mathfrak{c}$ будем называть *базисной подгруппой* группы Sym_{r^d}.

Лемма 2.2.9. *Пусть Ω — конечное множество и R — радикальная r-подгруппа группы $\mathrm{Sym}(\Omega)$. Тогда существуют соответствующие друг другу разложения*

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_s,\ \ R = R_0 \times R_1 \times \cdots \times R_s,$$

где $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$, такие, что R_0 — тривиальная подгруппа группы $\mathrm{Sym}(\Omega_0)$, а R_i — базисная подгруппа группы $\mathrm{Sym}(\Omega_i)$ при $i \geqslant 1$

Доказательство. См. [43, теоремы 1 и 2] и [24, (2A)]. □

Пусть множество Ω и подгруппа R группы $\mathrm{Sym}(\Omega)$ выбраны как в условии леммы 2.2.9 и $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_s$, $R = R_0 \times R_1 \times \cdots \times R_s$ — разложения, о которых идёт речь в этой лемме. Для любой конечной последовательности натуральных чисел $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_l)$ пусть $R(\mathfrak{c})$ — произведение тех R_i, для которых $R_i = A_{\mathfrak{c}}$, $\Omega(\mathfrak{c})$ — объединение им соответствующих Ω_i, а $u(\mathfrak{c})$ — их количество. Пусть также $\mathrm{Sym}_{\mathfrak{c}} = \mathrm{Sym}_{r^d}$, где $d = c_1 + c_2 + \cdots + c_l$.

Лемма 2.2.10. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$N_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(R) \simeq \mathrm{Sym}(\Omega_0) \times \prod_{\mathfrak{c}} N_{\mathrm{Sym}(\Omega(\mathfrak{c}))}(R(\mathfrak{c})),$$

$$N_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(R)/R \simeq \mathrm{Sym}(\Omega_0) \times \prod_{\mathfrak{c}} N_{\mathrm{Sym}(\Omega(\mathfrak{c}))}(R(\mathfrak{c}))/R(\mathfrak{c}),$$

$$N_{\mathrm{Sym}(\Omega(\mathfrak{c}))}(R(\mathfrak{c})) \simeq N_{\mathrm{Sym}_{\mathfrak{c}}}(A_{\mathfrak{c}}) \wr \mathrm{Sym}_{u(\mathfrak{c})},$$

$$N_{\mathrm{Sym}(\Omega(\mathfrak{c}))}(R(\mathfrak{c}))/R(\mathfrak{c}) \simeq (N_{\mathrm{Sym}_{\mathfrak{c}}}(A_{\mathfrak{c}})/A_{\mathfrak{c}}) \wr \mathrm{Sym}_{u(\mathfrak{c})}.$$

Доказательство. См. [43, теоремы 1 и 2] и [24, (2B)] (в последней работе лемма доказана при некотором дополнительном предположении). $\square$

2.2.4 Радикальные r-подгруппы и их нормализаторы в линейных и унитарных группах

Пусть $G = \mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$. Можно считать, что группа G совпадает с группой $\mathrm{GL}^{\eta}(U)$ изометрий некоторого векторного пространства U с соответствующей тождественно нулевой или унитарной формой, которое мы будем называть естественным модулем для G. Пусть, как и ранее для линейных и унитарных групп, число a определяется равенством $(q^e - \eta^e)_r = r^a$. Положим $\varepsilon = \eta^e$. Пусть γ — неотрицательное целое число и E_γ — экстраспециальная группа экспоненты r и порядка $r^{2\gamma+1}$ (если $\gamma = 0$, то E_γ — циклическая группа порядка r). Пусть α — неотрицательное целое число и C_α — циклическая группа порядка $r^{a+\alpha}$. Через $R_{\alpha,\gamma}$ обозначим центральное произведение групп E_γ и C_α такое, что

$Z(E_\gamma) = \Omega_1(C_\alpha)$. Известно [24; 25; 44], что группа автоморфизмов группы $R_{\alpha,\gamma}$, оставляющих неподвижными элементы из $Z(E_\gamma)$, содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$, и естественное полупрямое произведение $L_{\alpha,\gamma}$ групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$. Ввиду [26, таблицы 3.5.C, 3.5.E и 3.5.F], группа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$, расширенная полевым автоморфизмом порядка er^α, вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$. Далее, группу $\mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$ посредством отображения

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}$$

можно вложить в группу $G_{m,\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$. Обозначим образы групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $L_{\alpha,\gamma}$ относительно этого вложения в $G_{m,\alpha,\gamma}$ через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $L_{m,\alpha,\gamma}$ соответственно. Положим также

$$C_{m,\alpha,\gamma} = C_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma}), N_{m,\alpha,\gamma} = N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$$

и

$$N^0_{m,\alpha,\gamma} = \{g \in N_{m,\alpha,\gamma} \mid [g, Z(R_{m,\alpha,\gamma})] = 1\}.$$

Лемма 2.2.11. *Имеет место изоморфизм $C_{m,\alpha,\gamma} \simeq \mathrm{GL}^{\varepsilon}_m(q^{er^\alpha}) \otimes I_\gamma$, где I_γ — единичная матрица размера r^γ, а через $\otimes$ обозначено кронекерово произведение матриц; $N^0_{m,\alpha,\gamma}$ совпадает с центральным произведением $L_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$; фактор-группа $N_{m,\alpha,\gamma}/N^0_{m,\alpha,\gamma}$ является циклической группой порядка er^α.*

Доказательство. См. [24, 3C и п. 4] и [25, п. 2]. □

Пусть, как и в предыдущем разделе, $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, \dots, c_l)$, где $c_1, c_2, \dots, c_l$ — натуральные числа, A_{c_i} — транзитивная элементарная абелева подгруппа порядка r^{c_i} симметрической группы $\mathrm{Sym}_{r^{c_i}}$ для любого $i = 1, \dots, l$ и $A_{\mathfrak{c}}$ — подстановочное сплетение $A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \dots \wr A_{c_l}$. Пусть также $u = r^{c_1+c_2+\dots+c_l}$, $d = mer^{\alpha+\gamma}u$. Группу $A_{\mathfrak{c}}$ можно естественным образом отождествить с подгруппой из Sym_u. Кроме того, положим $G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = \mathrm{GL}^{\eta}_d(q)$. Согласно [24, п. 4] и [25, п. 2] группа $R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = R_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\mathfrak{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, определяется в ней однозначно с точностью до сопряжения и называется её *базисной подгруппой.*

Лемма 2.2.12. *Пусть числа q, n, r и группа G зафиксированы те же, что и ранее. Пусть $H = G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$ и $R = R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$: из определения группы R следует, что R является полупрямым произведением группы $R_1 \times \cdots \times R_u$, где $u = r^{c_1+\cdots+c_l}$ и каждая из групп R_i является группой $R_{m,\alpha,\gamma}$, и группы $A_{\mathfrak{c}}$. Пусть V — естественный модуль группы H и $V_i = [V,R_i]$ — подпространство, которое можно отождествить с естественным модулем группы R_i. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $C_H(R) \simeq C_{m,\alpha,\gamma} \otimes I_{\mathfrak{c}}$, *где $I_{\mathfrak{c}}$ — единичная матрица размера u.*

(2) $N_H(R) \simeq (N_{m,\alpha,\gamma}/R_{m,\alpha,\gamma}) \circledast N_{\mathrm{Sym}_u}(A_{\mathfrak{c}})$,

$$N_H(R)/R \simeq (N_{m,\alpha,\gamma}/R_{m,\alpha,\gamma}) \times \mathrm{GL}_{c_1}(r) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{c_l}(r).$$

(3) *Группа R действует на множестве $\{V_1, \ldots, V_u\}$ естественным образом. При этом подгруппа $R_1 \times \cdots \times R_u$ совпадает с ядром этого действия, а подгруппа $A_{\mathfrak{c}}$ действует как подгруппа из Sym_u.*

Доказательство. См. [24, (1.4), (4.1) с доказательством] и [25, (2.1), (2.2), доказательство (2C), (2.4), (2.5) и доказательство (2E)]. □

Лемма 2.2.13. *Пусть группа G зафиксирована тем же образом, что и ранее, и V — естественный модуль для G, снабжённый соответствующей формой. Пусть R — радикальная r-подгруппа группы G. Тогда существуют соответствующие друг другу разложения (символ $\textcircled{\perp}$ обозначает прямую ортогональную сумму подпространств)*

$$V = V_0 \textcircled{\perp} V_1 \textcircled{\perp} \cdots \textcircled{\perp} V_t, \; R = R_0 \times R_1 \times \cdots \times R_t$$

такие, что R_0 — тривиальная подгруппа группы $\mathrm{GL}^{\eta}(V_0)$ и R_i — базисная подгруппа группы $\mathrm{GL}^{\eta}(V_i)$ при $i \geqslant 1$.

Доказательство. См. [24, (4A)] и [25, (2B), (2D)]. □

Пусть теперь в прежних обозначениях R — радикальная r-подгруппа группы G, V — естественный модуль для G и

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_t,\ R = R_0 \times R_1 \times \cdots \times R_t \text{ —}$$

разложения, о которых идёт речь в лемме 2.2.13. Пусть $R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, $V(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i, а $u(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — число таких R_i. Пусть также $G(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) = \mathrm{GL}^{\eta}(V(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}))$ — соответствующая группа изометрий, отождествляемая с соответствующей подгруппой в G.

Следующая лемма описывает строение нормализаторов радикальных подгрупп в группе G.

Лемма 2.2.14. *Имеют место изоморфизмы*

$$N_G(R) \simeq \mathrm{GL}^{\eta}(V_0) \times \prod_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} N_{G(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})),$$

$$N_G(R)/R \simeq \mathrm{GL}^{\eta}(V_0) \times \prod_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} N_{G(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}))/R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}),$$

$$N_{G(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})) \simeq N_{G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}}(R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}) \wr \mathrm{Sym}_{u(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})},$$

$$N_{G(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}))/R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) \simeq \\ (N_{G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}}(R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}})/R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}) \wr \mathrm{Sym}_{u(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}.$$

Доказательство. Эта лемма доказана в [24, (4B)], [25, (2C), (2E)] и [45, Лемма 11]. □

2.2.5 Радикальные подгруппы в симплектических и ортогональных группах

Пусть r — нечётное простое число, n — натуральное число, q — нетривиальная степень простого числа p, отличного от r. Пусть далее G — одна из групп $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $\mathrm{O}_{2n+1}(q)$, $\mathrm{O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$, причём q предполагается нечётным. Поскольку q нечётно, всегда можно считать, что группа G совпадает с группой $I(V)$ изометрий некоторого векторного пространства V с соответствующей невырожденной кососимметрической или симметрической билинейной формой, которое мы будем называть естественным модулем для G. В соответствии с [24], подгруппа R группы G называется *радикальной* подгруппой группы G, если $R = O_r(N(R))$. В данном разделе приведено описание радикальных r-подгрупп в симплектических и ортогональных группах согласно [25, разделы 1 и 2]. Пусть

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть число a определяется равенством $(q^{2f}-1)_r = r^a$. Пусть γ — неотрицательное целое число и E_γ — экстраспециальная группа экспоненты r и порядка $r^{2\gamma+1}$ (если $\gamma = 0$, то E_γ — циклическая группа порядка r). Пусть α — неотрицательное целое число и Z_α — циклическая группа порядка $r^{a+\alpha}$. Пусть $R_{\alpha,\gamma}$ — центральное произведение групп E_γ и Z_α такое, что $Z(E_\gamma) = \Omega_1(Z_\alpha)$. Известно [24; 25; 44], что группа автоморфизмов группы $R_{\alpha,\gamma}$, оставляющих неподвижными элементы из $Z(E_\gamma)$, изоморфна группе $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$, и естественное полупрямое произведение $L_{\alpha,\gamma}$ групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\delta}_{r^\gamma}(q^{fr^\alpha})$. В свою очередь [26, таблицы 3.5.C, 3.5.E и 3.5.F], группа $\mathrm{GL}^{\delta}_{r^\gamma}(q^{fr^\alpha})$, расширенная элементом порядка $2fr^\alpha$ вкладывается в группу $I(V_{\alpha,\gamma})$, где $V_{\alpha,\gamma}$ — симплектическое или ортогональное пространство над полем $\mathbb{F}_q$ размерности $2fr^{\alpha+\gamma}$ и $\varepsilon(V_{\alpha,\gamma})$, т.е. знак сужения квадратичной формы на $V_{\alpha,\gamma}$, совпадает с δ, если $V_{\alpha,\gamma}$ — ортогональное пространство. Далее, группу $I(V_{\alpha,\gamma})$ посредством вложения

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}$$

можно вложить в группу $I(V_{m,\alpha,\gamma})$, где

$$V_{m,\alpha,\gamma} = \underbrace{V_{\alpha,\gamma} \perp \cdots \perp V_{\alpha,\gamma}}_{m \text{ раз}}$$

и в ортогональном случае $\varepsilon(V_{m,\alpha,\gamma}) = \delta^m$. Обозначим через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $L_{m,\alpha,\gamma}$ образы в группе $G_{m,\alpha,\gamma}$ групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $L_{\alpha,\gamma}$ относительно этих вложений. Положим также $C_{m,\alpha,\gamma} = C_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$, $N_{m,\alpha,\gamma} = N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$ и $N^0_{m,\alpha,\gamma} = \{g \in N_{m,\alpha,\gamma} \mid [g,Z(R_{m,\alpha,\gamma})] = 1\}$.

Далее, пусть $\mathfrak{c} = (c_1,c_2,\ldots,c_l)$, где $c_1,c_2,\ldots,c_l$ — натуральные числа. Пусть A_{c_i} — транзитивная элементарная абелева подгруппа порядка r^{c_i} симметрической группы $S_{r^{c_i}}$ для любого $i = 1,\ldots,l$ и $A_{\mathfrak{c}}$ — подстановочное сплетение $A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \cdots \wr A_{c_l}$. Пусть также $u = r^{c_1+c_2+\cdots+c_l}$. Группу $A_{\mathfrak{c}}$ можно естественным образом отождествить с подгруппой из S_u. Кроме того, положим $G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = I(V_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}})$, где

$$V_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = \underbrace{V_{m,\alpha,\gamma} \perp \cdots \perp V_{m,\alpha,\gamma}}_{u \text{ раз}},$$

причём в ортогональном случае $\varepsilon(V_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}) = \delta^m$. Согласно [24, п. 4] и [25, п. 2] группа $R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = R_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\mathfrak{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, определяется в ней однозначно с точностью до сопряжения и называется её *базисной подгруппой*.

Пусть R — радикальная r-подгруппа группы G. Тогда [46, Лемма 10] существуют соответствующие друг другу разложения

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \cdots \perp V_t,\ R = R_0 \times R_1 \times \cdots \times R_t$$

такие, что R_0 — тривиальная подгруппа $I(V_0)$ и R_i — базисная подгруппа группы $I(V_i)$ при $i \geqslant 1$. Пусть $R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, $V(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i, а $u(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — число таких R_i. Пусть также $G(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) = I(V(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}))$ — соответствующая группа изометрий, отождествляемая с соответствующей подгруппой в G.

2.2.6 Силовские подгруппы в линейных и унитарных группах

Очевидно, что силовские подгруппы являются радикальными. Строение силовских подгрупп в классических группах подробно описано в [12]. В этом разделе кратко описано строение силовских r-подгрупп в линейных и унитарных группах (для r, взаимно простого с q), а также приведены параметры, соответствующие разложению силовской r-подгруппы, рассматриваемой как радикальная r-подгруппа, в прямое произведение базисных подгрупп.

Будем использовать обозначения, введённые в теореме 2.1.3. Порядок группы $G = \mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$ равен

$$|G| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-\eta)(q^2-\eta^2)\dots(q^n-\eta^n).$$

Силовская подгруппа R_0 группы $\mathrm{GL}_e^{\eta}(q)$ является циклической группой порядка r^a и соответствует группе $R_{m,\alpha,\gamma}$ для $(m,\alpha,\gamma) = (1,0,0)$ в обозначениях раздела 2.2.4. Группу $R_i = R_{i-1} \wr C_r$, $1 \leqslant i \leqslant \nu$ можно рассматривать как подгруппу в $\mathrm{GL}_{er^i}^{\eta}(q)$, а порядок группы R_i равен $r^{ar^i+\mu_i(r)}$, где $\mu_i(r) = 1 + r + \ldots + r^{i-1}$. В силу того, что

$$|\,\mathrm{GL}_{er^i}^{\eta}(q)|_r = r^{ar^i+\mu_i(r)} = |R_i|,$$

подгруппа R_i является r-силовской подгруппой группы $G_i = \mathrm{GL}_{er^i}^{\eta}(q)$. Кроме того, в обозначениях раздела 2.2.4, имеем

$$R_i = R_0 \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}} = R_{1,0,0} \wr A_{\mathfrak{c}_i} = R_{1,0,0,\mathfrak{c}_i}, \text{ где } \mathfrak{c}_i = \underbrace{(1,\ldots,1)}_{i \text{ раз}}.$$

Ясно, что группу $R = 1_c \times R_0^{b_0} \times \ldots \times R_{\nu}^{b_{\nu}}$ можно рассматривать как подгруппу в группе $\mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$. Её порядок равен $|R| = r^N$, где $N = ar + \sum\limits_{i=0}^{\nu} b_i\mu_i(r)$, и несложно проверить, что r-часть порядка группы $\mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$ в точности равна r^N. Таким образом, группа R действительно является r-силовской подгруппой в группе $\mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$. Кроме того, для R как для радикальной подгруппы выполнено разложение

$$R = 1_c \times \prod_{(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})} R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) = 1_c \times \prod_{i=0}^{\nu} R(1,0,0,\mathfrak{c}_i) = 1_c \times \prod_{i=0}^{\nu} R_{1,0,0,\mathfrak{c}_i}^{b_i}.$$

2.2.7 Силовские подгруппы в симплектических и ортогональных группах

Очевидно, что силовские подгруппы являются радикальными. Строение силовских подгрупп в классических группах описано в [12]. Нам будет удобно использовать адаптированный вариант этого описания из работы [41]. В этом разделе кратко описано строение силовских r-подгрупп в симплектических и ортогональных группах, а также приведены параметры, соответствующие разложению силовской r-подгруппы, рассматриваемой как радикальная r-подгруппа, в прямое произведение базисных подгрупп.

Будем использовать обозначения, введённые в теореме 2.1.7. Порядок группы G равен

$$|G| = \begin{cases} q^{\frac{n^2}{4}}(q^2-1)(q^4-1)\ldots(q^n-1), & G = \mathrm{Sp}_n(q), \\ 2q^{k^2}(q^2-1)(q^4-1)\ldots(q^{2k}-1), & G = \mathrm{O}_{2k+1}(q), \\ 2q^{k(k-1)}(q^2-1)(q^4-1)\ldots(q^{2k-2})(q^k-\varepsilon), & G = \mathrm{O}^{\varepsilon}_{2k}(q). \end{cases}$$

Силовская r-подгруппа R_0 группы $G_0 = \mathrm{O}^{\varepsilon}_{2f}(q)$ является циклической группой порядка $(q^f-\delta)_r = r^a$ и соответствует группе $R_{m,\alpha,\gamma}$ для $(m,\alpha,\gamma) = (1{,}0{,}0)$ в обозначениях раздела 2.2.5. Группу $R_i = R_{i-1} \wr C_r$, $1 \leqslant i \leqslant \nu$ можно рассматривать как подгруппу в $G_i \in \{\mathrm{Sp}_{2fr^i}(q), \mathrm{O}^{\varepsilon\delta}_{2fr^i}(q)\}$, а порядок группы R_i равен $r^{ar^i+\mu_i(r)}$, где $\mu_i(r) = 1 + r + \ldots + r^{i-1}$. В силу того, что

$$|G_i|_r = |R_i|,$$

подгруппа R_i является r-силовской подгруппой группы G_i. Кроме того, в обозначениях раздела 2.2.5 имеем

$$R_i = R_0 \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}} = R_{1,0,0} \wr A_{\mathfrak{c}_i}, \text{ где } \mathfrak{c}_i = \underbrace{(1,\ldots,1)}_{i \text{ раз}}.$$

Ясно, что группу $R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu}$ можно рассматривать как подгруппу в группе G. Её порядок равен $|R| = r^N$, где $N = ar + \sum\limits_{i=0}^{\nu} m_i\mu_i(r)$, и несложно убедиться в том, что r-часть порядка группы G в точности равна r^N. Таким образом, группа R действительно является r-силовской подгруппой в группе G. Кроме того, для R как для радикальной подгруппы выполнено разложение

$$R = 1_d \times \prod_{(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})} R(m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) = 1_d \times \prod_{i=0}^{\nu} R(1{,}0{,}0{,}\mathfrak{c}_i) = 1_d \times \prod_{i=0}^{\nu} R_{1,0,0,\mathfrak{c}_i}^{m_i},$$

в частности, в обозначениях раздела 2.2.5, имеем

$$R(1{,}0{,}0{,}\mathfrak{c}_i) = R_{1,0,0,\mathfrak{c}_i}^{m_i}, \quad u(1{,}0{,}0{,}\mathfrak{c}_i) = m_i, \quad G(1{,}0{,}0{,}\mathfrak{c}_i) = G_i^{m_i}. \tag{2.1}$$

2.3 Доказательство основных утверждений о линейных и унитарных группах

2.3.1 Доказательство предложения 2.1.2

Доказательство разбито на два предложения, соответствующие двум случаям в условии предложения 2.1.2.

Предложение 2.3.1. *Пусть $q-\eta$ делится на r. Обозначим $(q-\eta)_r$ через r^a. Предположим, что выполнено по крайней мере одно из условий*

$$n \neq r, \quad r > 3, \quad a > 1.$$

Тогда силовская r-подгруппа диагональной подгруппы группы $\mathrm{SL}_n^{\eta}(q)$ имеет порядок $r^{a(n-1)}$ и является единственной абелевой подгруппой такого порядка в любой силовской r-подгруппе, её содержащей. В частности, она является характеристической в любой содержащей её силовской r-подгруппе группы $\mathrm{SL}_n^{\eta}(q)$.

Замечание. Из предложения 2.3.1, в частности, следует, что подгруппа Томпсона (понимаемая в смысле [47]) любой силовской r-подгруппы в $\mathrm{SL}_n^{\eta}(q)$ сопряжена с силовской r-подгруппой группы диагональных матриц $\mathrm{Diag}_n^{\eta}(q) \cap \mathrm{SL}_n^{\eta}(q)$ для любого нечётного простого делителя r числа $q-\eta$, за исключением случая, когда $(n,r,(q-\eta)_r) = (3,3,3)$.

Доказательство. Используем следующие обозначения:

- $R \in \mathrm{Syl}_r(\mathrm{Diag}_n^{\eta}(q)), R \simeq \underbrace{Z_{r^a} \times \ldots \times Z_{r^a}}_{n \text{ раз}},$
- $Q = R \cap \mathrm{SL}_n(q) \in \mathrm{Syl}_r(\mathrm{SL}_n^{\eta}(q) \cap \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q)), Q \simeq \underbrace{Z_{r^a} \times \ldots \times Z_{r^a}}_{n-1 \text{ раз}},$
- $T \in \mathrm{Syl}_r(\mathrm{Sym}_n)$.

Имеем $R \rtimes T \in \mathrm{Syl}_r(\mathrm{GL}_n^{\eta}(q)), P = (R \rtimes T) \cap \mathrm{SL}_n^{\eta}(q) \in \mathrm{Syl}_r(\mathrm{SL}_n^{\eta}(q))$, причём в силу леммы 2.2.1 выполнено $Q = R \cap \mathrm{SL}_n^{\eta}(q) \trianglelefteq P$ и $P/Q \simeq T$. Обозначим через $^{-} : R \rtimes T \to T$ эпиморфизм, который элемент $vt \in R \rtimes T$, где $v \in R$ и $t \in T$, переводит в t.

Ясно, что $|Q| = r^{a(n-1)}$. Мы покажем, что в P не существует других абелевых подгрупп порядка $r^{a(n-1)}$, кроме Q.

Пусть $A \leqslant P$ — абелева группа, такая, что $A \not\subseteq Q$. Тогда $\overline{A} > 1$. Обозначим $|\overline{A}| = r^k, k \geqslant 1$.

Покажем, что при выполнении условий предложения выполнено неравенство $|A| < |Q|$. Далее всюду слово “орбита” означает “орбита действия группы $\overline{A}$ на множестве $\{1, \ldots, n\}$” (данное соглашение корректно, так как $A \leqslant T \leqslant \mathrm{Sym}_n$).

Обозначим через $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ орбиты, содержащие не меньше двух элементов, а через d количество одноэлементных орбит. Для любого фиксированного $i = 1, \ldots, l$ в силу того, что подгруппа $\overline{A} \leqslant \mathrm{Sym}_n$ абелева, для проекции $\overline{A}$ на $\mathrm{Sym}(\Omega_i)$ справедлива лемма 2.2.6 — порядок Ω_i равен порядку этой проекции, в частности, является степенью числа r. Положим

$$|\Omega_i| = r^{m_i}, m_i \geqslant 1. \tag{2.2}$$

Тогда количество одноэлементных орбит равно $d = n - \sum\limits_{i=1}^{l} r^{m_i}$.

Отметим, что

$$k \leqslant m_1 + \ldots + m_l. \tag{2.3}$$

Действительно, $\overline{A} \leqslant \pi_1(\overline{A}) \times \ldots \times \pi_l(\overline{A})$, где через $\pi_i(\overline{A})$ обозначена проекция $\overline{A}$ на $\mathrm{Sym}(\Omega_i)$. Поэтому

$$r^k = |\overline{A}| \leqslant |\pi_1(\overline{A})| \ldots |\pi_l(\overline{A})| = r^{m_1} \ldots r^{m_l} = r^{m_1+\ldots+m_l}.$$

Напомним, что любой элемент u группы A как элемент группы $R \rtimes T$ можно единственным образом записать в виде $u = v_u t_u$, где $v_u \in R, t_u \in T$, причём $\overline{u} = t_u$. Так как A и R абелевы и $A \cap Q \leqslant R$, мы получаем, что для любого $u \in A$, элемент t_u централизует $A \cap Q$, т. е. $A \cap Q$ содержится в $C_R(\overline{A})$. Рассмотрим подгруппу $C_R(\overline{A})$. Пусть x — элемент из $\mathbb{F}_{\eta q}^*$ порядка r^a. Для данной орбиты Δ введём матрицу $X_\Delta \in R$, у которой на i-м месте главной диагонали стоит элемент x, если $i \in \Delta$, и 1 в ином случае. Очевидно, что любая такая матрица централизует $\overline{A}$. Очевидно также, что группы $\langle X_\Delta \rangle$ и $\langle X_\Gamma \rangle$, порождённые матрицами, соответствующими различным орбитам Δ и Γ, пересекаются по единице. Кроме того, из леммы 2.2.7 следует, что для любых i и j из одной орбиты и любого элемента $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n) \in C_R(\overline{A})$ его координаты c_i и c_j совпадают. Это значит, что

$$C = X_{\omega_1}^{i_1} \ldots X_{\omega_d}^{i_d} X_{\Omega_1}^{j_1} \ldots X_{\Omega_l}^{j_l},$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_d$ — всевозможные одноэлементные орбиты, а

$$i_1, \ldots, i_d, j_1, \ldots, j_l \in \{0, \ldots, r^a - 1\}.$$

Поэтому

$$C_R(\overline{A}) = \langle X_{\omega_1} \rangle \times \ldots \times \langle X_{\omega_d} \rangle \times \langle X_{\Omega_1} \rangle \times \ldots \times \langle X_{\Omega_l} \rangle,$$

в частности,

$$|C_R(\overline{A})| = |x|^{d+l} = |x|^{n - \sum r^{m_i} + l} = r^{a(n - \sum r^{m_i} + l)}.$$

Теперь мы можем оценить порядок A:

$$|A| = |A \cap Q||\overline{A}| \leqslant |C_R(\overline{A})||\overline{A}| = r^{a(n - \sum r^{m_i} + l) + k}.$$

Рассмотрим отдельно показатель в правой части. В случае, когда количество неодноэлементных орбит l не превосходит k, имеем

$$a(n-\sum r^{m_i}+l)+k \underset{\text{Лемма 2.2.4}}{\leqslant} a(n-r\sum m_i+l)+k \underset{(2.3)}{\leqslant} a(n-kr+k)+k = \\ = a(n-k(r-2))-k(a-1).$$

В случае, когда количество орбит l больше k, имеем

$$a(n-\sum_{i=1}^{l} r^{m_i}+l)+k \underset{\text{Лемма 2.2.4}}{\leqslant} a(n-lr+l)+k = \\ = a(n-l(r-1))+k < a(n-k(r-1))+k = a(n-k(r-2))-k(a-1).$$

Таким образом, для любого l получили неравенство

$$|A| \leqslant r^{a(n-k(r-2))-k(a-1)}$$

В случае $k(r-2)>1$ и в случае, когда $k(r-2)=1$, но $a>1$, мы установили, что $|A|<r^{a(n-1)}=|Q|$, откуда следует, что Q единственная подгруппа порядка Q.

Остаётся рассмотреть случай $k=1=a$, $r=3$. Из условия следует, что $n>3=r$. Так как $|\overline{A}|=r^k=3$, у группы $\overline{A}$ есть ровно одна неодноэлементная орбита порядка 3. В самом деле, если l, как и выше, число неодноэлементных (в данном случае, трёхэлементных) орбит, то число одноэлементных орбит равно $n-3l$ и

$$3^{n-1}=|A|=|A\cap Q||\overline{A}|\leqslant|C_R(\overline{A})||\overline{A}|=3^{l+n-3l}\cdot 3=3^{n-2l+1}.$$

Отсюда $l\leqslant 1$. Но по крайней мере одна неодноэлементная орбита есть (иначе $A\leqslant \mathrm{Diag}_n^{\mathfrak{n}}(q)$), поэтому $l=1$. Условие $n>3$ влечёт, что есть ещё по крайней мере одна одноэлементная орбита, поэтому в $C_R(\overline{A})$ есть матрицы с определителем, отличным от единицы. Значит, порядок централизатора $\overline{A}$ в Q строго меньше порядка централизатора $\overline{A}$ в R. Порядок $C_R(\overline{A})$ будет равен

$$|C_R(\overline{A})|=3^{(n-3)+1}=3^{n-2}$$

Остаётся оценить порядок A:

$$|A| = |A \cap Q||\overline{A}| \leqslant |C_Q(\overline{A})||\overline{A}| < |C_R(\overline{A})||\overline{A}| = 3^{n-1} = |Q|$$

Снова получили $|A| < |Q|$ и доказали единственность подгруппы порядка $|Q|$ в P и, как следствие, её характеристичность в P. □

Предложение 2.3.2. *Пусть* $(q - \eta)_3 = 3$. *Тогда силовская* 3*-подгруппа диагональной подгруппы группы* $\mathrm{SL}_3^{\eta}(q)$ *не является характеристической в силовской* 3*-подгруппе группы* $\mathrm{SL}_3^{\eta}(q)$. *Более того, нормализатор силовской* 3*-подгруппы группы* $\mathrm{SL}_3^{\eta}(q)$ *в группе* $\mathrm{GL}_3^{\eta}(q)$ *не содержится в группе мономиальных матриц.*

Доказательство. Используем обозначения из доказательства предложения 2.3.1. В этих обозначениях

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x_i^3 = 1 \\ x_1 x_2 x_3 = 1 \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим подгруппу $A = \langle xE, S \rangle$ группы $\mathrm{SL}_3^{\eta}(q)$, где $x \in \mathbb{F}_{\eta q}^*$ — элемент порядка 3, E — единичная матрица,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Несложно убедиться в том, что $|A| = |Q| = 9$, и в том, что A и Q не совпадают. С другой стороны, $A \leqslant \mathrm{Diag}_3^{\eta}(3) \rtimes \mathrm{Sym}_3$, поэтому A нормализует Q. Следовательно, $AQ \leqslant \mathrm{SL}_3^{\eta}(q), |AQ| = 27$, т. е. AQ — силовская 3-подгруппа группы $\mathrm{SL}_3^{\eta}(q)$. Считаем, что $AQ = P$.

Определим матрицы B_η следующим образом:

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x \end{pmatrix} \in GL_3^+(q), \quad B_- = \beta B_+ \in GL_3^-(q),$$

где $\beta \in \mathbb{F}_{q^2}$, $\beta^{-2} = 3$. Существование такого β доказано в лемме 2.2.3 (из условия предложения следует, что q не является степенью тройки).

Тогда $(B_\eta)^{-1} SB_\eta = J$, где $J = \mathrm{Diag}(1,x,x^2)$ — жорданова форма матрицы S, и группа A при сопряжении матрицей B_η переходит в группу Q. Кроме того,

$$(B_+)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in$$

$$\in Z(\mathrm{GL}_3(q))Q \rtimes \mathrm{Sym}_3 \leqslant N_{\mathrm{GL}_n(q)}(Q);$$

$$(B_-)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_3 \leqslant N_{\mathrm{GL}_n^-(q)}(Q).$$

Итак, получили, что $(B_\eta)^2$ нормализует Q, а значит, $Q^{B_\eta} = Q^{{B_\eta}^{-1}} = A^{B_\eta {B_\eta}^{-1}} = A$. Таким образом, B_η нормализует P, но не является мономиальной матрицей. $\square$

Доказательство предложения 2.1.2. В силу предложения 2.3.1, в случае $(r,n,(q-\eta)_r) \neq (3,3,3)$ подгруппа Q является характеристической в группе P и поэтому в силу леммы 2.2.2 имеет место следующая цепочка

$$N_G(P) \leqslant N_G(Q) \leqslant N_G(C_G(Q)) = N_G(\mathrm{Diag}_n^\eta(q)) \underset{\text{Л. 2.2.5}}{=} \mathrm{Diag}_n^\eta(q) \rtimes \mathrm{Sym}_n\,.$$

Оставляя только левую и правую части, получим $N_G(P) \leqslant \mathrm{Diag}_n^\eta(q) \rtimes \mathrm{Sym}_n$.

В силу предложения 2.3.2, в случае $(r,n,(q-\eta)_r) = (3,3,3)$ нормализатор подгруппы $\mathrm{SL}_3^\eta(q)$ в группе $\mathrm{GL}_3^\eta(q)$ не содержится в группе мономиальных матриц. $\square$

2.3.2 Доказательство теоремы 2.1.1

Рассмотрим сначала случай $(r,n,(q-\eta)_r) \neq (3,3,3)$. Включение $N_G(P) \geqslant N_G(U)$ очевидно. Покажем, что справедливо обратное включение. Заметим, что

$$G = \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q) \cdot S \text{ и } U = R \rtimes T = RP$$

в обозначениях, введённых в доказательстве предложения 2.1.2. По предложению 2.1.2, имеем

$$N_G(P) \leqslant \mathrm{Diag}_n^{\eta}(q) \rtimes \mathrm{Sym}_n \leqslant N_G(R),$$

а значит, $N_G(P) \leqslant N_G(RP) = N_G(U)$, ч.т.д.

Пусть теперь $(r,n,(q-\eta)_r) = (3,3,3)$. В этом случае группа Q является экстраспециальной группой 3_+^{1+2} порядка 3^3 и экспоненты 3. С точностью до сопряжённости, она порождается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{F}_{\eta q}^*, |x| = 3.$$

Как следует из раздела 2.2.4, группа автоморфизмов, оставляющих неподвижными элементы центра группы Q, содержит подгруппу, изоморфную группе

$$\mathrm{Sp}_2(3) \simeq 2_-^{1+2} : 3,$$

а естественное полупрямое произведение $N = Q \rtimes \mathrm{Sp}_2(3)$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}_3^{\eta}(q)$. По лемме 2.2.11, нормализатор группы Q в группе $\mathrm{GL}_3^{\eta}(q)$ совпадает с группой N. Пересечение $N \cap \mathrm{SL}_3^{\eta}(q)$ есть ядро гомоморфизма из N в циклическую группу $\mathbb{F}_{\eta q}^*$. Порядок образа группы N при этом гомоморфизме делит 3, так как $|N|_3 = |\,\mathrm{SL}_n^{\eta}(q)| \cdot 3$. В силу того, что у группы $\mathrm{Sp}_2(3)$ есть лишь один циклический гомоморфный образ порядка, делящего 3, имеем $N \cap \mathrm{SL}_3^{\eta}(q) = 3_+^{1+2} \rtimes 2_-^{1+2}$. $\square$

2.3.3 Доказательство предложения 2.1.9

Строение r-силовской подгруппы в группе Sym_n, приведённое в предложении 2.1.9, равенства (2.13) и (2.16) найдено Калужниным [3] и хорошо известно (см., например, [48, 11.3.1, пример III]). Пусть $\mathfrak{c}_i$ обозначает то же, что и в разделе 2.2.6. Группа R_i, рассматриваемая как подгруппа группы S_i, совпадает с группой $R_{\mathfrak{c}_i}$ в обозначениях раздела 2.2.3. В силу единственности r-ичного разложения числа n, группа $R_i^{k_i}$ как подгруппа в группе Sym_k совпадает с группой $R(\mathfrak{c}_i)$ из леммы 2.2.10. В силу леммы 2.2.10, имеют место разложения (2.14) и (2.15). Поскольку $\mathrm{GL}_1(r) \simeq C_{r-1}$, строение (2.17) фактор-группы N_i/R_i определяется из леммы 2.2.8. $\square$

2.3.4 Доказательство теоремы 2.1.3

Строение силовской r-подгруппы в группе $\mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$ и её разложение как радикальной r-подгруппы в прямое произведение базисных подгрупп приведено в разделе 2.2.6. Таким образом, выполнены равенства (2.1) и (2.4). Разложения (2.2) и (2.3) прямо следуют из леммы 2.2.14. Поскольку

$$C_{1,0,0,\mathfrak{c}_i} \simeq \mathrm{GL}_1^{\eta^e}(q^e) \simeq C_{q^e-\eta^e},$$

в силу леммы 2.2.11 имеем

$$N_{1,0,0}/R_{1,0,0} \simeq C_{q^e-\eta^e} \rtimes C_e.$$

С учётом этого, а также того, что $\mathrm{GL}_1(r) \simeq C_{r-1}$, изоморфизмы (2.5), (2.6) следуют из п. 2 леммы 2.2.12. $\square$

2.4 Доказательство основных утверждений о симплектических и ортогональных группах

2.4.1 Доказательство предложения 2.1.8

Утверждение предложения 2.1.8 тривиально, потому что индекс $|G : S|$ равен 1, 2 или 4 [26, c. 2.1.C, 2.1.D]. Следовательно, он не делится на нечётное простое r, и поэтому силовские r-подгруппы в группах G и S совпадают. Центр группы G также является 2-группой, откуда легко следует оставшаяся часть доказываемого утверждения. Предложение 2.1.8 доказано.

2.4.2 Доказательство теорем 2.1.4–2.1.7

Как было сказано ранее, докажем теорему 2.1.7. Строение силовской r-подгруппы в группе G и её разложение как радикальной r-подгруппы в прямое произведение базисных подгрупп приведено в разделе 2.2.7. Исходя из этого, выполнены равенства (2.7) и (2.10).

Далее, применим [46, Лемма 11] для подгруппы R как для радикальной подгруппы группы G. Учитывая соответствие параметров (2.1), из леммы следует справедливость разложений (2.8) и (2.9).

Теперь докажем справедливость равенств (2.11) и (2.12). Применим пункт 2 леммы [46, Лемма 8] для $H = G_i$ и $R = R_i$ (в лемме вместо символа $\circledast$ используется символ $\otimes$). В обозначениях леммы имеем

$$R_{1,0,0,\mathfrak{c}_i} = R_0, \quad N_{1,0,0,\mathfrak{c}_i} = N_0, \quad c_i = 1, \quad u = r^i.$$

Строение нормализатора N_0 силовской r-подгруппы R_0 группы G_0 описано в [41, Глава 3, Case 2 и Case 4] (G_0, R_0, N_0 в наших обозначениях соответствуют L, C, N в обозначениях [41]):

$$N_0 = C_{q^f-\delta} \rtimes C_{2f}$$

$$N_0/R_0 = C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}.$$

Учитывая эти равенства и то, что $GL_1(r) \simeq C_{r-1}$, из пункта 2 леммы напрямую следуют равенства (2.11), (2.12). Теорема 2.1.7 доказана. Формулировки теорем 2.1.4, 2.1.5, и 2.1.6 получены из формулировки теоремы 2.1.7 путём опускания соответствующих случаев, поэтому Теорема 2.1.4, Теорема 2.1.5, и Теорема 2.1.6 также доказаны.

Глава 3. Регулярные орбиты конечных примитивных разрешимых подгрупп

3.1 Обзор основных результатов главы

Целью данной главы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 3.1.1. *Пусть G — разрешимая группа, действующая точно, неприводимо и квазипримитивно на конечном векторном пространстве V, и $|V| > 5^{18}$. Предположим также, что G не метациклическая. Тогда у G есть регулярная орбита на V.*

3.2 Обозначения и предварительные результаты

Обозначения:

1. Пусть G — конечная группа, S — подмножество множества элементов группы G, а π — множество различных простых чисел. Для простого числа s мы обозначаем $\mathrm{SP}_s(S) = \{\langle x\rangle \mid o(x) = s, x \in S\}$ и $\mathrm{EP}_s(S) = \{x \mid o(x) = s, x \in S\}$. Полагаем также $\mathrm{SP}(S) = \bigcup \mathrm{SP}_s(S)$, $\mathrm{EP}(S) = \bigcup \mathrm{EP}_s(S)$ и $\mathrm{EP}_\pi(S) = \bigcup_{s\in\pi} \mathrm{EP}_s(S)$. Мы обозначаем $\mathrm{NEP}(S) = |\mathrm{EP}(S)|$, $\mathrm{NEP}_s(S) = |\mathrm{EP}_s(S)|$ и $\mathrm{NEP}_\pi(S) = |\mathrm{EP}_\pi(S)|$.
2. Пусть n — чётное число, q — степень простого числа. Пусть V — стандартное симплектическое векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}_q$. Мы используем символы $\mathrm{SCRSp}(n,q)$ или $\mathrm{SCRSp}(V)$ для обозначения множества всех разрешимых подгрупп группы $\mathrm{Sp}(V)$, которые действуют вполне приводимо на V.
3. Пусть V — конечное векторное пространство, а $G \leqslant \mathrm{GL}(V)$. Положим $\mathrm{PC}(G,V,s,i) = \{x \mid x \in \mathrm{EP}_s(G)$ и $\dim(\mathbf{C}_V(x)) = i\}$ и $\mathrm{NPC}(G,V,s,i) =$

$|\mathrm{PC}(G,V,s,i)|$. Будем опускать V в обозначении, когда это ясно из контекста.

4. Если V — конечное векторное пространство размерности n над $\mathbb{F}_q$, где q — степень простого числа, мы обозначаем через $\Gamma(q^n) = \Gamma(V)$ подгруппу группы полулинейных преобразований пространства V, определяемую следующим образом:
$$\Gamma(q^n) = \{x \mapsto ax^{\sigma} \mid x \in \mathbb{F}_{q^n}, a \in \mathbb{F}_{q^n}^{\times}, \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n} / \mathbb{F}_q)\}.$$
5. Обозначение $H \wr S$ используется для обозначения подстановочного сплетения H с S, где H — группа, а S — группа подстановок.
6. Пусть n — положительное целое число. Символом $\mathrm{Div}(n)$ обозначается количество различных простых делителей числа n. Очевидно, что если $n = 1$, то $\mathrm{Div}(n) = 0$.

Предложение 3.2.1. *Предположим, что конечная разрешимая группа G действует точно, неприводимо и квазипримитивно на векторном пространстве V размерности d над конечным полем $\mathbb{F}$ характеристики p. Тогда любая нормальная абелева подгруппа группы G является циклической, и G имеет нормальные подгруппы $Z \leqslant U \leqslant F \leqslant A \leqslant G$ и характеристическую подгруппу $E \leqslant F$, такие что:*

1. *$F = EU$ является центральным произведением, где $Z = E \cap U = \mathbf{Z}(E)$ и $\mathbf{C}_G(F) \leqslant F$;*
2. *$F/U \cong E/Z$ является прямой суммой вполне приводимых G/F-модулей;*
3. *Существует разложение $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$, где E_i — экстраспециальная r_i-группа для $i = 1, \ldots, s$ и r_i — различные простые числа, $|E_i| = r_i^{2n_i+1}$ для некоторых $n_i \geqslant 1$. Обозначая $e_i = r_i^{n_i}$, имеем $e = e_1 \cdots e_s$, где e делит d и $\gcd(p,e) = 1$;*
4. *$A = \mathbf{C}_G(U)$ и $G/A \lesssim \mathrm{Aut}(U)$, A/F действует точно на E/Z;*
5. *$A/\mathbf{C}_A(E_i/Z_i) \lesssim \mathrm{Sp}(2n_i,r_i)$;*
6. *U является циклической и действует без неподвижных точек на W, где W — неприводимый подмодуль подмодуля V_U;*

7. $|V| = |W|^{eb}$ *для некоторого целого числа* b*;*
8. G/A *является циклической и* $|G : A| \mid \dim(W)$. $G = A$ *при* $e = d$*;*
9. *Пусть* $g \in G \backslash A$. *Предположим, что* $o(g) = t$*, где* t *— простое число. Тогда* $t \mid a$*, и мы можем рассматривать действие* g *на* U *следующим образом:* $U \leqslant \mathbb{F}_{p^a}^*$ *и* $g \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^a} : \mathbb{F}_p)$.

Доказательство. Это незначительная переформулировка [28, Теорема 2.2]. Заметим, что факт цикличности группы G/A следует из доказательства в [28, Теорема 2.2], хотя в самом результате утверждается, что G/A является абелевой. $\square$

В этой главе рассматриваются только случаи, когда e является степенью простого числа, поэтому Предложение 3.2.1 можно упростить до следующей формулировки.

Предложение 3.2.2. *Предположим, что конечная разрешимая группа* G *действует точно, неприводимо и квазипримитивно на векторном пространстве* V *размерности* d *над конечным полем* $\mathbb{F}$ *характеристики* p. *Тогда любая нормальная абелева подгруппа* G *является циклической, и* G *имеет нормальный ряд* $Z \leqslant U \leqslant F \leqslant A \leqslant G$ *и характеристическую подгруппу* $E \leqslant F$ *как в Предложении 3.2.1. Предположим, что* $|F : U| = e^2$ *является степенью простого числа. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1. U *является циклической,* $|U|$ *делит* $p^a - 1$ *для некоторого* $a \geqslant 1$*, и подмодуль* W *может быть отождествлён с* $\mathbb{F}_{p^a}$*;*
2. $\mathbf{C}_G(F) \leqslant F$*;*
3. E *является экстраспециальной* r*-группой для простого числа* r, $|E/Z| = e^2 = r^{2n}$. *Кроме того,* e *делит* d*, и* r *делит* $p^a - 1$*;*
4. $A = \mathbf{C}_G(U)$ *и* $G/A \lesssim \mathrm{Aut}(U)$, A/F *действует точно на* E/Z*;*
5. $A/\mathbf{C}_A(E/Z) \lesssim \mathrm{Sp}(2n,r)$*;*
6. G/A *является циклической и* $|G : A| \mid \dim(W)$. $G = A$ *при* $e = d$*;*

Следующая Лемма является фактом из линейной алгебры. Она представлена для упрощения чтения доказательства Теоремы 3.3.1.

Лемма 3.2.3. *Предположим, что конечная группа G действует точно и неприводимо на конечном векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$ порядка q. Пусть s — простой делитель числа $q-1$, а $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ — все корни s-той степени из единицы в поле $\mathbb{F}_q$. Пусть $x \in \mathrm{EP}_s(G)$ и $z \in \mathrm{EP}_s(Z(G))$.*

(1) *Существует $1 \leqslant k \leqslant s$ такое, что $vz = \lambda_k v$ для любого $v \in V$.*

(2) *Пространство V раскладывается в прямую сумму $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$ $\langle x\rangle$-подмодулей, таких что $vx = \lambda_i v$ для любого $v \in V_{\lambda_i}$. В частности, если $\lambda_1 = 1$, то $V_{\lambda_1} = \mathbf{C}_V(x)$.*

(3) *Так как s — простое число, получаем $\{\lambda_k^j \mid j = 0,1,\ldots,s-1\} = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s\}$ и*

$$V = \mathbf{C}_V(x) \oplus \mathbf{C}_V(xz) \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}_V(xz^{s-1}).$$

Лемма 3.2.4. *Предположим, что конечная разрешимая группа G действует точно, неприводимо и квазипримитивно на конечном векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$. Пусть $g \in \mathrm{EP}_s(G)$. Тогда в обозначениях Предложения 3.2.2 выполнены следующие утверждения.*

(1) *Если $g \in F$, то $|\mathbf{C}_V(g)| \leqslant |W|^{\frac{1}{s}eb}$.*

(2) *Если $g \in A\backslash F$, то $|\mathbf{C}_V(g)| \leqslant |W|^{\lfloor\frac{3}{4}e\rfloor b}$.*

(3) *Если $g \in A\backslash F$, $s \geqslant 3$ и $s \nmid |E|$, то $|\mathbf{C}_V(g)| \leqslant |W|^{\lfloor\frac{1}{2}e\rfloor b}$.*

(4) *Если $g \in A\backslash F$, $s = 2$ и $s \nmid |E|$, то $|\mathbf{C}_V(g)| \leqslant |W|^{\lfloor\frac{2}{3}e\rfloor b}$.*

(5) *Если $g \in G\backslash A$, то $|\mathbf{C}_V(g)| \leqslant |W|^{\frac{1}{s}eb}$.*

Доказательство. (1) является незначительной модификацией [28, Лемма 2.4(1)]. Рассмотрим случай, когда $s \geqslant 3$. Предположим сначала, что $\langle g\rangle \leqslant F$, $\langle g\rangle \nleqslant U$. Тогда $s \neq r$ и $\langle g\rangle \leqslant E \trianglelefteq G$, где E — экстраспециальная s-группа. Рассмотрим ограничение V_E. Оно является прямой суммой точных неприводимых E-модулей, так как $\mathbf{Z}(E) \leqslant U$ действует без неподвижных точек на V. Поскольку размерности централизаторов не меняются при расширении поля и они складываются в прямых суммах, мы можем считать, что V — неприводимый точный E-модуль над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Если χ — (брауэров) характер, соответствующий V, то, так как $r = \mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq s$, $\chi(x) = 0$ для любого $x \in E\backslash Z(E)$, имеем $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{C}_V(S)) = [\chi_S, 1_S] = \frac{1}{s}\dim_{\mathbb{K}}(V)$, и (1) доказано.

Утверждения (2), (3), (4) и (5) следуют из [28, Лемма 2.4].

□

Лемма 3.2.5. *Предположим, что конечная разрешимая группа G действует точно, неприводимо и квазипримитивно на конечном векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$. Пусть в обозначениях Предложения 3.2.2 $x \in \mathrm{EP}_s(A\backslash F)$ и $(s,\mathrm{char}\mathbb{F}) = 1$. Положим $C/Z = \mathbf{C}_{E/Z}(x)$. Назовём x хорошим элементом, если $[x,C] = 1$, и назовём x плохим элементом в противном случае.*

(1) Предположим, что x — плохой элемент. Положим $\beta = e/s$. Тогда $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{\beta b}$.

(2) Предположим, что x — хороший элемент, и $|\mathbf{C}_{E/Z}(x)| \leqslant a$. Положим

$$\beta = \lfloor\frac{1}{s}(e + (s-1)a^{1/2})\rfloor.$$

Тогда $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{\beta b}$.

Доказательство. См. [27, Лемма 2.6]. □

Лемма 3.2.6. *Предположим, что G удовлетворяет условию Предложения 3.2.2. Пусть в обозначениях Предложения 3.2.2 s — простое число, $x \in \mathrm{EP}_s(A\backslash F)$ и $|\mathbf{C}_{E/Z}(x)| = r^m$. Положим $U_s = \gcd(|U|, s)$. Тогда выполнены следующие утверждения*

(1) $\mathrm{NEP}_s(A\backslash F) \leqslant \mathrm{NEP}_s(A/F)|F|$.

(2) $\mathrm{NEP}_s(xF) \leqslant M \cdot U_s$ *где*

$$M = \left\{\begin{array}{ll} r^{2n} & \text{если } s = r \neq 2; \\ r^{2n-m} & \text{если } s \neq r; \\ 2^m & \text{если } s = r = 2. \end{array}\right\}.$$

(3) Предположим, что $s = 2$ *и* x *— хороший элемент. Положим* $S = \{y \mid y \in \mathrm{EP}_2(xF)$ *и* y *— хороший элемент*$\}$. *Тогда* $|S| \leqslant M \cdot U_2$ *где*

$$M = \left\{ \begin{array}{ll} r^{2n-m} & \text{если } r \neq 2; \\ 2^m & \text{если } r = 2 \text{ и } n \geqslant m; \\ 2^{2n-m} & \text{если } r = 2 \text{ и } n < m. \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Утверждение (1) следует из [27, Лемма 2.7]. Утверждения (2) и (3) являются незначительными обобщениями [27, Лемма 2.7]. Докажем утверждение (2). Из доказательства [27, Лемма 2.7(3)] мы знаем, что $\mathrm{NEP}_s(xF/U) \leqslant M$. Положим $\alpha \in A$ и $o(\alpha) = s$. Рассмотрим $\mathrm{NEP}_s(\alpha U)$. Поскольку $U \leqslant \mathbf{Z}(A)$, $\mathrm{NEP}_s(\alpha U) \leqslant U_s$, откуда следует (2). Утверждение (3) может быть доказано аналогично. □

Лемма 3.2.7. *Пусть* G *— конечная разрешимая группа и* U *— циклическая нормальная подгруппа* G. *Пусть* $\alpha \in G \backslash U$ *и* $o(\alpha) = s$. *Предположим, что мы можем рассматривать действие* α *на* U *следующим образом:* $U \leqslant \mathbb{F}^*_{q^{sn}}$ *и* $\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^{sn}} : \mathbb{F}_q)$. *Тогда* $\mathrm{NEP}_s(\alpha U) \leqslant \frac{q^{sn}-1}{q^n-1}$.

Доказательство. Пусть $u \in U$ и $o(\alpha u) = s$. Тогда $\underbrace{\alpha u \alpha u \ldots \alpha u}_{s \text{ раз}} = 1$.

Это означает, что $\alpha u \alpha^{-1} \alpha^2 u \alpha^{-2} \ldots u \alpha^{s-1} \alpha^s u = 1$ и $u^{q^n} \cdot u^{q^{2n}} \cdots u^{q^{(s-1)n}} \cdot u = u^{\frac{q^{sn}-1}{q^n-1}} = 1$. □

Лемма 3.2.8. *Имеет место* $|\mathrm{SL}(2{,}3)| = 24$, $\mathrm{NEP}_2(\mathrm{SL}(2{,}3)) = 1$ *и* $\mathrm{NEP}_3(\mathrm{SL}(2{,}3)) = 8$.

Доказательство. Непосредственно проверяется □

Лемма 3.2.9. *Пусть* n *— четное натуральное число и* V *— стандартное симплектическое векторное пространство размерности* n *над полем* $\mathbb{F}$. *Пусть* $G \in \mathrm{SCRSp}(n{,}\mathbb{F})$.

(1) Если $(n{,}\mathbb{F}) = (2{,}\mathbb{F}_2)$, *то* $G \lesssim S_3$, $|G| \leqslant 6$, $\mathrm{NEP}_2(G) \leqslant 3$, $\mathrm{NEP}_3(G) \leqslant 2$, $\mathrm{NPC}(G{,}2{,}1) \leqslant 3$.

(2) Если $(n,\mathbb{F}) = (4,\mathbb{F}_2)$, *то* $|G| \leqslant 6^2 \cdot 2$, $\mathrm{NEP}_2(G) \leqslant 21$, $\mathrm{NEP}_3(G) \leqslant 8$, $\mathrm{NEP}_5(G) \leqslant 4$, $\mathrm{NEP}_{\{2,3,5\}'} = 0$, $\mathrm{NEP}(G) \leqslant 29$, $\mathrm{NPC}(G,2,3) \leqslant 6$, $\mathrm{NPC}(G,2,2) \leqslant 15$, $\mathrm{NPC}(G,2,1) = 0$, $\mathrm{NPC}(G,3,2) \leqslant 4$.

(3) Если $(n,\mathbb{F}) = (6,\mathbb{F}_2)$, *то* $|G| \leqslant 6^4$, $\mathrm{NEP}_2(G) \leqslant 135$, $\mathrm{NEP}_3(G) \leqslant 242$, $\mathrm{NEP}_{\{2,3\}'}(G) \leqslant 6$, $\mathrm{NPC}(G,2,5) \leqslant 9$, $\mathrm{NPC}(G,2,4) \leqslant 45$, $\mathrm{NPC}(G,2,3) \leqslant 108$, $\mathrm{NPC}(G,2,2) = 0$, $\mathrm{NPC}(G,2,1) = 0$.

(4) Если $(n,\mathbb{F}) = (8,\mathbb{F}_2)$, *то* $|G| \leqslant 6^4 \cdot 24$, $\mathrm{NEP}(G) \leqslant 1883$, $\mathrm{NPC}(G,2,7) \leqslant 12$, $\mathrm{NPC}(G,2,6) \leqslant 90$, $\mathrm{NPC}(G,2,5) \leqslant 324$, $\mathrm{NPC}(G,2,4) \leqslant 513$, $\mathrm{NPC}(G,2,3) = 0$, $\mathrm{NPC}(G,2,2) = 0$, $\mathrm{NPC}(G,2,1) = 0$.

(5) Если $(n,\mathbb{F}) = (2,\mathbb{F}_3)$, *то* $G \lesssim \mathrm{SL}(2,3)$ *и* $|G| \leqslant 24$. $\mathrm{NEP}_2(G) \leqslant 1$ *и* $\mathrm{NEP}_3(G) \leqslant 8$.

(6) Если $(n,\mathbb{F}) = (4,\mathbb{F}_3)$, *то* $|G| \leqslant 24^2 \cdot 2$ *и* $\mathrm{NEP}(G) \leqslant 107$, $\mathrm{NEP}_2(G) \leqslant 95$, $\mathrm{NEP}_3(G) \leqslant 95$, $\mathrm{NEP}_5(G) \leqslant 64$ *и у* G *не будет элементов другого простого порядка. Предположим, что* $G \not\lesssim \mathrm{SL}(2,3) \wr S_2$, *тогда* $\mathrm{NPC}(G,3,3) = 0$.

Это следует из [27, Лемма 2.17].

3.3 Доказательство теоремы 3.1.1

Мы докажем Теорему 3.1.1, установив справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.3.1. *Предположим, что конечная разрешимая группа* G *действует точно, неприводимо и квазипримитивно на конечном векторном пространстве* V. *Согласно Предложению 3.2.1,* G *содержит характеристическую подгруппу* E, *являющуюся прямым произведением экстраспециальных* r*-групп для различных* r, *и* $e = \sqrt{|E/\mathbf{Z}(E)|}$. *Для* $e \in \{2,3,4,8,9,16\}$ *предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(1) $|W|$ *— простое число, и* $|W|$ *не меньше числа в первой строке таблицы 1;*

(2) $|W|$ *— степень простого числа, и* $|W|$ *не меньше числа во второй строке таблицы 1;*

(3) $b > k, k = 1{,}2{,}3{,}4$*, и* $|W|$ *не меньше числа в строке номер* $2 + k$ *таблицы 1;*

Тогда у G *есть регулярная орбита на* V*.*

Таблица 1 — Нижние границы для $|W|$

	$e = 16$	$e = 9$	$e = 8$	$e = 4$	$e = 3$	$e = 2$
$\|W\|$ - простое число	7	31	23	79	31	31
$\|W\|$ - произвольное число	7	31	27	281	439	5693
$b > 1$	3	7	7	13	13	19
$b > 2$	3	4	5	5	7	7
$b > 3$	3	4	3	5	4	5
$b > 4$	3	4	3	3	4	3

Доказательство. Чтобы показать, что у G есть регулярная орбита на V, достаточно проверить, что

$$\left| \bigcup_{P \in \mathrm{SP}(G)} \mathbf{C}_V(P) \right| < |V|.$$

Ниже во всех случаях мы разобьём множество $\mathrm{SP}(G)$ в объединение некоторых попарно непересекающихся множеств A_i. Очевидно,

$$\left| \bigcup_{P \in \mathrm{SP}(G)} \mathbf{C}_V(P) \right| \leqslant \sum_i \left| \bigcup_{P \in A_i} \mathbf{C}_V(P) \right|.$$

Далее, мы найдём некоторые числа $\beta_i < e$ такие, что

$$|\mathbf{C}_V(P)| \leqslant |W|^{\beta_i b} \tag{3.1}$$

для всех $P \in A_i$. Затем, найдём такие числа a_i такие, что $|A_i| \leqslant a_i$. Поскольку $|V| = |W|^{eb}$, останется проверить, что

$$\sum_i a_i \cdot (|W|^{\beta_i b} - 1) < |W|^{eb} - 1. \tag{$\star$}$$

Пусть $e = 16$. Тогда, в обозначениях Предложения 3.2.2 имеем $|F/U| = |E/Z| = 2^8$, $r = 2$, $2n = 8$, $2 \mid |W| - 1$ и $A/F \in \mathrm{SCRSp}(8,2)$. Из пункта (4) леммы 3.2.9 следует, что $|A/F| \leqslant 6^4 \cdot 24$.

Определим множества A_i следующим образом:

(1) $A_1 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(F \backslash U)\}$,

(2) $A_2 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A \backslash F)$, x хороший, и $\mathbf{C}_{\bar{E}}(x) = 2^6\}$,

(3) $A_3 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A \backslash F)$, x хороший, и $\mathbf{C}_{\bar{E}}(x) = 2^4\}$, $A_3' = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A \backslash F)$, x хороший, и $\mathbf{C}_{\bar{E}}(x) = 2^2\}$,

(4) $A_4 = \{\langle x\rangle \mid\ x \in \mathrm{EP}_2(A \backslash F)$ и x плохой$\}$,

(5) $A_5 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_s(A \backslash F)$ для всех простых $s \geqslant 3\}$,

(6) $A_6 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(G \backslash A)\}$,

(7) $A_{7,s} = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_s(G \backslash A)\}$ для $s \geqslant 3$ и $A_7 = \bigcup\limits_{s \geqslant 3} A_{7,s}$.

Для всех $\langle x\rangle \in A_1$ имеем $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{8b}$ по Лемме 3.2.4(1). Поэтому, положим $\beta_1 = 8$ (см. 3.1). Аналогично,

– для всех $\langle x\rangle \in A_2$ имеем $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{12b}$ по Лемме 3.2.5(2),
– для всех $\langle x\rangle \in A_3$ имеем $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{10b}$ по Лемме 3.2.5(2),
– для всех $\langle x\rangle \in A_4$ имеем $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{8b}$ по Лемме 3.2.5(1),
– для всех $\langle x\rangle \in A_5$ имеем $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{8b}$ по Лемме 3.2.4(3),
– для всех $\langle x\rangle \in A_6$ имеем $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{8b}$ по Лемме 3.2.4(5),
– для всех $\langle x\rangle \in A_{7,s}$ для простого $s \geqslant 3$ имеем $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{\frac{16}{s}b}$ по Лемме 3.2.4(5).

Поэтому, положим $\beta_2 = 12$, $\beta_3 = 10$, $\beta_4 = 8$, $\beta_5 = 8$, $\beta_6 = 8$, $\beta_{7,s} = \frac{16}{s}$.

Для оценки порядка $|A_1|$ оценим количество инволюций в F. Любая инволюция из F — это либо инволюция из E, либо элемент вида $ec = e^3c^3$, где $e \in E, c \in U$ и $|e| = |c| = 4$. Заметим, что существует не более двух элементов $c \in U$ порядка 4, так как группа U циклическая по Предложению 3.2.2. В E существует не более 271 инволюции и не более 240 элементов порядка 4, следовательно $|A_1| \leqslant 271 + \frac{240 \cdot 2}{2} - 1 = 510$ и полагаем $a_1 = 510$.

Пусть $\langle x\rangle \in A_2$. Тогда $xF \in \mathrm{PC}(A/F, E/Z, 2, 6)$. По Лемме 3.2.9(4), следует, что $\mathrm{NPC}(A/F, E/Z, 2, 6) \leqslant 90$. По Лемме 3.2.6(3) имеем $\mathrm{NEP}_2(xF) \cap A_2 \leqslant 2^2 \cdot 2$. Таким образом, положим $a_2 = 90 \cdot 2^2 \cdot 2$.

Как и в предыдущем случае, для $\langle x\rangle \in A_3$ имеем $xF \in PC(A/F, E/Z, 2, 4)$, $NPC(A/F, E/Z, 2, 4) \leqslant 513$ по Лемме 3.2.9(4) и $\mathrm{NEP}_2(xF) \cap A_3 \leqslant 2^4 \cdot 2$ по Лемме 3.2.6(3), следовательно можем положить $a_3 = 513 \cdot 2^4 \cdot 2$.

Для $\langle x\rangle \in A_3'$ имеем $xF \in \mathrm{PC}(A/F, E/Z, 2, 2)$ и в силу того, что $NPC(A/F, E/Z, 2, 2) = 0$, по Лемме 3.2.9(4), следует, что $A_3' = \varnothing$.

Пусть $\langle x\rangle \in A_4$. Тогда $xF \in \mathrm{EP}_2(A/F)$. По Лемме 3.2.9(4) имеем $\mathrm{NEP}_2(A/F) \leqslant 12+90+324+513 = 939$. Очевидно, $|\mathbf{C}_{E/Z}(x)| \leqslant |E/Z| = 2^8$. По Лемме 3.2.6(2) имеем $\mathrm{NEP}_2(xF) \leqslant 2^8 \cdot 2$. Таким образом, положим $a_4 = 939 \cdot 2^8 \cdot 2$.

Пусть $\langle x\rangle \in A_5$, $o(x) = s$. Как и в предыдущем случае, имеем $xF \in \mathrm{EP}(A/F)$, $\mathrm{NEP}(A/F) \leqslant 1883$ по Лемме 3.2.9(4) и $\mathrm{NEP}_s(xF) \leqslant 2^8 \cdot s$ по Лемме 3.2.6(2). В силу того, что наибольшее простое число, делящее порядок $\mathrm{Sp}_8(2)$, равно 17, положим $a_5 = 1883 \cdot 2^8 \cdot 17$.

Пусть $\langle x\rangle \in A_6$. Обозначим естественный гомоморфизм из G в $G/U = \overline{G}$ через $\overline{}$. Тогда $\overline{x} = xU \in \mathrm{NEP}_2(\overline{G}\backslash\overline{A})$ и $\overline{x}\overline{A} \in \mathrm{NEP}_2(\overline{G}/\overline{A})$. Из Предложения 3.2.2 следует, что в группе $G/A \simeq \overline{G}/\overline{A}$ существует не более одной подгруппы порядка 2, следовательно, имеем

$$|A_6| \leqslant 1 \cdot \mathrm{NEP}_2(\overline{x}\overline{A}) \cdot \mathrm{NEP}_2(xU) \leqslant |\overline{A}| \cdot \mathrm{NEP}_2(xU) \leqslant |A/F| \cdot |F/U| \cdot \mathrm{NEP}_2(xU).$$

По Лемме 3.2.7 имеем неравенство $\mathrm{NEP}_2(xU) \leqslant |W|^{\frac{1}{2}} + 1$. Таким образом, положим $a_6 = 6^4 \cdot 24 \cdot 2^8 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$.

Аналогично предыдущему случаю, положим $a_{7,s} = 6^4 \cdot 24 \cdot 2^8 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}-1}}$.

Для оценки суммы слагаемых в неравенстве $\star$, соответствующих подгруппам в A_7, сначала заметим, что

$$\frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}(|W|^{\frac{16b}{s}}-1) = \frac{|W|^{\frac{16b}{s}}-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}(|W|-1) =$$
$$= (1 + |W|^{\frac{1}{s}} + \ldots + |W|^{\frac{16b-1}{s}})(|W|-1)$$
$$\leqslant 16b|W|^{\frac{16b-1}{s}}(|W|-1) \leqslant 16b|W|^{\frac{16b-1}{3}}(|W|-1)$$

(последнее верно для $s \geqslant 3$). Теперь, заметим, что s делит число $|G : A|$, которое в свою очередь делит $\dim(W)$ по Предложению 3.2.2(6). Это означает, что существует не более $\mathrm{Div}(\dim(W))$ возможных значений s. Таким образом,

$$\sum_{s \geqslant 3} a_{7,s}(|W|^{\beta_{7,s}} - 1) \leqslant \mathrm{Div}(\dim W) \cdot 6^4 \cdot 24 \cdot 2^8 \cdot 16b \cdot |W|^{\frac{16b-1}{3}}(|W| - 1).$$

В случае, когда $|W|$ является простым числом, множества $A_{7,s}$ и A_6 пусты, и мы полагаем $a_6 = a_{7,s} = 0$.

Легко проверить, что $\star$ выполняется, когда $|W| \geqslant 7$ или $|W| \geqslant 3$ и $b \geqslant 2$.

Пусть $e = 9$. Тогда в обозначениях Предложения 3.2.2 выполнено $|F/U| = |E/Z| = 3^4, r = 3, 2n = 4, 3 \mid |W| - 1$ и $A/F \in \mathrm{SCRSp(4,3)}$. По Лемме 3.2.9(6) имеем $|A/F| \leqslant 24^2 \cdot 2$.

Определим множества A_i следующим образом:

(1) $A_1 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_3(F \backslash U)\}$,

(2) $A_2 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A \backslash F)\}$,

(3) $A_3 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_3(A \backslash F)$, и $|\mathbf{C}_V(x)| \geqslant |W|^{6b}\}$,

(4) $A_4 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_3(A \backslash F)$, и $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{5b}\}$,

(5) $A_5 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_5(A \backslash F)\}$,

(6) $A_6 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(G \backslash A)\}$,

(7) $A_{7,s} = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_s(G/A)\}$ и $A_7 = \bigcup\limits_{s \geqslant 3} A_{6,s}$.

Зададим числа β_i следующим образом:

(1) $\beta_1 = 3$ (см. Лемму 3.2.4(1)),

(2) $\beta_2 = 6$ (см. Лемму 3.2.4(2)),

(3) Пусть $\langle x \rangle \in A_3$. Тогда x является хорошим элементом и $\mathbf{C}_E(x) = 3^3$. Действительно, предположим, что элемент x плохой. Тогда из Леммы 3.2.5(1) следует $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{3b}$. Следовательно, $x \notin A_3$, что противоречит условию. Таким образом, x является хорошим элементом. Поскольку $x \notin F$, имеем $|\mathbf{C}_E(x)| \leqslant 3^3$. Предположим, что $|\mathbf{C}_E(x)| \leqslant 3^2$. Тогда из Леммы 3.2.5(2) следует $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{5b}$. Следовательно,

$x \notin A_3$, что противоречит условию. Таким образом, $|\mathbf{C}_E(x)| = 3^3$ и из Леммы 3.2.5(2) следует $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{6b}$, т.е. $|\mathbf{C}_V(x)| = |W|^{6b}$, и мы положим $\beta_3 = 6$.

(4) $\beta_4 = 5$ (см. определение A_4),

(5) $\beta_5 = 4$ (см. Лемму 3.2.4(3)),

(6) $\beta_6 = 4.5$ (см. Лемму 3.2.4(5)),

(7) $\beta_{7,s} = \frac{9}{s}$ (см. Лемму 3.2.4(5)).

Любая подгруппа в A_1 порождается элементом порядка 3 из E. В E есть не более 242 элементов порядка 3, поэтому подгрупп в A_1 не более $\frac{242}{2}$, и мы полагаем $a_1 = 121$.

Имеем $|A_2| \leqslant 95 \cdot 3^4 \cdot 2$ по Лемме 3.2.9(6) и Лемме 3.2.6(2) (см. случай A_4 для $e = 16$). Таким образом, мы можем положить $a_2 = 95 \cdot 3^4 \cdot 2$

Пусть $x \in \mathrm{EP}_3(A \backslash F)$ такой, что $\langle x \rangle \in A_3$. Как уже было упомянуто, $|\mathbf{C}_V(x)| = |W|^{6b}$. Пусть $z \in U, |z| = 3$. Из Леммы 3.2.3 следует, что существует разложение $V = \mathbf{C}_V(x) \oplus \mathbf{C}_V(xz) \oplus \mathbf{C}_V(xz^2)$. Таким образом, для $y = xz$ и $y = xz^2$ имеем $|\mathbf{C}_V(y)| \leqslant |W|^{9b-6b}$, а значит $y \notin A_3$. Вспоминая, что $\mathbf{C}_E(x) = 3^3$, получим $xF \in \mathrm{PC}(A/F, E/Z,3,3)$. Из Леммы 3.2.9(6) и Леммы 3.2.8 следует, что $\mathrm{NPC}(A/F, E/Z,3,3) \leqslant 8 \cdot 2 = 16$. Из Леммы 3.2.6(2) следует, что $\mathrm{NEP}_3(xF) \leqslant 3^5$. Очевидно, что $xz, xz^2 \in xF$ и $\langle x \rangle = \langle x^2 \rangle$, поэтому мы полагаем $a_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 3^5$.

Имеем $|A_4| \leqslant 95 \cdot 3^5/2$ по Лемме 3.2.9(6) и Лемме 3.2.6(2) (см. случай A_4 для $e = 16$). Полагаем $a_4 \leqslant 95 \cdot 3^5/2$.

Имеем $|A_5| \leqslant 64 \cdot 5 \cdot 3^4/4$ по Лемме 3.2.9(6) и Лемме 3.2.6(2) (см. случай A_4 для $e = 16$). Полагаем $a_5 = 64 \cdot 5 \cdot 3^4/4$.

Аналогично случаю A_6 для $e = 16$, имеем $|A_6| \leqslant 24^2 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$ и $|A_{7,s}| \leqslant 24^2 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$ по Лемме 3.2.9(6) и Лемме 3.2.7. Полагаем $a_6 = 24^2 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$ и $a_{7,s} = 24^2 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$. Как и в случае $e = 16$, получаем следующую оценку для слагаемых в $\star$, соответствующих подгруппам в A_7:

$$\sum_{s \geqslant 3} a_{7,s}(|W|^{\beta_{7,s}} - 1) \leqslant \mathrm{Div}(\dim W) \cdot 9b \cdot 24^2 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot |W|^{\frac{9b-1}{3}}(|W| - 1).$$

Легко проверить, что $\star$ выполняется при $|W| \geqslant 31$. Также $\star$ выполняется, если $|W| \geqslant 7$ и $b \geqslant 2$, или $|W| \geqslant 4$ и $b \geqslant 3$.

Пусть $e = 8$. Тогда в обозначениях Предложения 3.2.2 имеем $|F/U| = |E/Z| = 2^6$, $r = 2$, $2n = 6$, $2 \mid |W| - 1$ и $A/F \in \mathrm{SCRSp}(6{,}2)$. По Лемме 3.2.9(3) получаем, что $|A/F| \leqslant 6^4$.

Определим множества A_i следующим образом:

(1) $A_1 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(F\backslash U)\}$,

(2) $A_2 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A\backslash F)$, x хороший, и $\mathbf{C}_{\bar{E}}(x) = 2^4\}$,

(3) $A_3 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A\backslash F)$, и x плохой$\}$,

(4) $A_4 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_s(A\backslash F)$ для всех простых чисел $s \geqslant 3\}$,

(5) $A_5 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(G\backslash A)\}$,

(6) $A_{6,s} = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_s(G\backslash A),\ s \geqslant 3\}$ и $A_6 = \bigcup\limits_{s\geqslant 3} A_{6,s}$.

Зададим числа β_i следующим образом:

(1) $\beta_1 = 4$ (см. Лемму 3.2.4(1)),

(2) $\beta_2 = 6$ (см. Лемму 3.2.5(2)),

(3) $\beta_3 = 4$ (см. Лемму 3.2.5(3)),

(4) $\beta_4 = 4$ (см. Лемму 3.2.4(3)),

(5) $\beta_5 = 4$ (см. Лемму 3.2.4(5)),

(6) $\beta_{6,s} = \frac{8}{s}$ (см. Лемму 3.2.4(5)).

Аналогично случаю A_1 для $e = 16$, положим $a_1 = 71 + 56 - 1 = 126$.

Аналогично случаю A_3 для $e = 16$, имеем $|A_2| \leqslant 45 \cdot 2^3 \cdot 2$ по Лемме 3.2.9(3) и Лемме 3.2.6(3). Таким образом, мы полагаем $a_2 = 45 \cdot 2^3 \cdot 2$. Пусть $\langle x\rangle \in A_2, z \in U, |z| = 2$. Очевидно, что $\langle xz\rangle$ также принадлежит A_2. Из Леммы 3.2.3 следует, что $V = \mathbf{C}_V(x) \oplus \mathbf{C}_V(xz)$, и в наихудшем случае имеем $|\mathbf{C}_V(x)| = |W|^{6b}$ и $|\mathbf{C}_V(xz)| = |W|^{2b}$. Таким образом, множество A_2 можно разбить на два непересекающихся подмножества A_{21} и A_{22}, и мы полагаем $\beta_{21} = 6$, $\beta_{22} = 2$ и $a_{21} = a_{22} = \frac{a_2}{2} = 45 \cdot 2^3$.

Аналогично случаю A_4 для $e = 16$ имеем $a_4 \leqslant 135 \cdot 2^6 \cdot 2$ по Лемме 3.2.9(3) и Лемме 3.2.6(2), и мы полагаем $a_4 = 135 \cdot 2^6 \cdot 2$.

Аналогично случаю A_5 для $e = 16$, так как 7 является наибольшим простым числом, делящим $|\mathrm{Sp}_6(2)|$, имеем $|A_4| \leqslant 248 \cdot 2^6 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}$ по Лемме 3.2.9(3) и Лемме 3.2.6(2), и мы полагаем $a_4 = 248 \cdot 2^6 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}$.

Аналогично случаю A_6 для $e = 16$, имеем $|A_5| \leqslant 6^4 \cdot 2^6 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$ и $|A_{6,s}| \leqslant 6^4 \cdot 2^6 \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$ по Лемме 3.2.9(3) и Лемме 3.2.7, и мы полагаем $a_5 = 6^4 \cdot 2^6 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$ и $a_{6,s} \leqslant 6^4 \cdot 2^6 \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$.

Аналогично случаю $e = 16$ получаем следующую оценку для слагаемых в $\star$, соответствующих подгруппам в A_6:

$$\sum_{s \geqslant 3} a_{6,s}(|W|^{\beta_{6,s}} - 1) \leqslant \mathrm{Div}(\dim W) \cdot 8b \cdot 6^4 \cdot 2^6 \cdot |W|^{\frac{8b-1}{3}} \cdot (|W| - 1).$$

Легко проверить, что $\star$ выполняется, когда $|W| \geqslant 23$ и $|W|$ является простым числом, или когда $|W| \geqslant 27$ и $|W|$ является степенью простого числа. Также $\star$ выполняется, если $|W| \geqslant 7$ и $b \geqslant 2$, или $|W| \geqslant 4$ и $b \geqslant 3$, или $|W| \geqslant 3$ и $b \geqslant 4$.

Пусть $e = 4$. Тогда в обозначениях Предложения 3.2.2 имеем $|F/U| = |E/Z| = 2^4$, $r = 2$, $2n = 4$, $2 \mid |W| - 1$ и $A/F \in \mathrm{SCRSp(4{,}2)}$. По Лемме 3.2.9(2) имеем $|A/F| \leqslant 6^2 \cdot 2$.

Определим множества A_i следующим образом:

(1) $A_1 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(F \backslash U)\}$,

(2) $A_2 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A \backslash F)$, x хороший, и $\mathbf{C}_{\bar{E}}(x) = 2^2\}$,

(3) $A_3 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A \backslash F)$, и x плохой$\}$,

(4) $A_4 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_{\{3,5\}}(A \backslash F)\}$,

(5) $A_5 = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(G \backslash A)\}$,

(6) $A_{6,s} = \{\langle x \rangle \mid x \in \mathrm{EP}_s(G \backslash A)\}$ и $A_6 = \bigcup_{s \geqslant 3} A_{6,s}$.

Зададим числа β_i следующим образом:

(1) $\beta_1 = 2$ (см. Лемму 3.2.4(1)),

(2) $\beta_2 = 3$ (см. Лемму 3.2.5(2)),

(3) $\beta_3 = 2$ (см. Лемму 3.2.5(1)),

(4) $\beta_4 = 2$ (см. Лемму 3.2.4(3)),

(5) $\beta_5 = 2$ (см. Лемму 3.2.4(5)),

(6) $\beta_{6,s}$ (см. Лемму 3.2.4(5)).

Аналогично случаю A_1 для $e = 16$ положим $a_1 = 30$.

Имеем $|A_2| \leqslant \mathrm{NPC}(A/F, E/Z,2,2) \cdot \max_{xF\in A/F} \mathrm{NEP}_2(xF) \leqslant 15 \cdot 2^2 \cdot 2$ по Лемме 3.2.9(2) и Лемме 3.2.6(2), поэтому положим $a_2 = 15 \cdot 2^2 \cdot 2$. Пусть $\langle x\rangle \in A_2$. Аналогично случаю A_2 ($e = 8$) имеем разложение $V = \mathbf{C}_V(x) \oplus \mathbf{C}_V(xz)$ для $z \in U, o(z) = 2$. Таким образом, множество A_2 можно разбить на два непересекающихся подмножества A_{21} и A_{22} с соответствующими $\beta_{21} = 3, \beta_{22} = 1, a_{21} = a_{22} = \frac{a_2}{2} = 15 \cdot 2^2$.

Аналогично случаю A_4 для $e = 16$ имеем $|A_3| \leqslant 21 \cdot 2^4 \cdot 2$ по Лемме 3.2.9(2) и Лемме 3.2.6(2), поэтому полагаем $a_3 = 21 \cdot 2^4 \cdot 2$.

Аналогично случаю A_4 для $e = 8$ имеем $|A_4| \leqslant 8 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4}$ по Лемме 3.2.9(2) и Лемме 3.2.6(3), поэтому полагаем $a_4 = 17 \cdot 2^4$.

Аналогично случаю A_6 для $e = 16$ имеем $|A_5| \leqslant 6^2 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$ и $|A_{6,s}| \leqslant 6^2 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$ по Лемме 3.2.9(2) и Лемме 3.2.7, поэтому полагаем $a_5 = 6^2 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$ и $a_{6,s} = 6^2 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$.

Аналогично случаю $e = 16$ получаем следующую оценку для слагаемых в $\star$, соответствующих подгруппам в A_6:

$$\sum_{s\geqslant 3} a_{6,s}(|W|^{\beta_{6,s}} - 1) \leqslant \mathrm{Div}(\dim W) \cdot 4b \cdot 6^2 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot |W|^{\frac{4b-1}{3}} \cdot (|W| - 1).$$

Легко проверить, что $\star$ выполняется, когда $|W| \geqslant 79$ и $|W|$ является простым числом, или когда $|W| \geqslant 281$ и $|W|$ является степенью простого числа. Также $\star$ выполняется, если $b \geqslant 2$ и $|W| \geqslant 13$ или $b \geqslant 3$ и $|W| \geqslant 5$ или $b \geqslant 5$ и $|W| \geqslant 3$.

Пусть $e = 3$. Тогда в обозначениях Предложения 3.2.2 имеем $|F/U| = |E/Z| = 3^2$, $r = 3, 2n = 2$, $3 \mid |W| - 1$, $A/F \lesssim \mathrm{SL}(2,3)$ и $|A/F| \leqslant 24$ по Лемме 3.2.9(5).

Определим множества A_i и числа β_i следующим образом:

(1) $A_1 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_3(F\backslash U)\}$, $\beta_1 = 1$ (см. Лемму 3.2.4(1)),

(2) $A_2 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A\backslash F)\}$, $\beta_2 = 2$ (см. Лемму 3.2.4(2)),

(3) $A_3 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_3(A\backslash F)\}$ (ниже мы разобьём A_3 на три подмножества A_{31}, A_{32}, A_{33} и зададим для них соответствующие числа β_{31}, β_{32}, β_{33}),

(4) $A_4 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(G\backslash A)\}$, $\beta_4 = 1.5$ (см. Лемму 3.2.4(5)),

(5) $A_5 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_3(G\backslash A)\}$, $\beta_5 = 1$ (см. Лемму 3.2.4(5)),

(6) $A_{6,s} = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_s(G\backslash A)\}$ и $A_6 = \bigcup\limits_{s\geqslant 5} A_{6,s}$, $\beta_{6,s} = \frac{3}{s}$ (см. Лемму 3.2.4).

Аналогично случаю A_1 для $e = 9$ имеем $|A_1| \leqslant 13$ поскольку $\mathrm{NEP}_3(E) \leqslant 26$, и мы полагаем $a_1 = 13$.

Аналогично случаю A_2 для $e = 9$ имеем $|A_2| \leqslant 1 \cdot 3^2 \cdot 2$ по Лемме 3.2.9(5) и Лемме 3.2.6(2), и мы полагаем $a_2 = 1 \cdot 3^2 \cdot 2$.

Пусть $\langle x\rangle \in A_3$ и $z \in U, |z| = 3$. Поскольку z централизует A, получаем, что элементы x, xz, и xz^2 либо все хорошие, либо все плохие. Если x является плохим элементом, то $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^b$ по Лемме 3.2.5(1), и то же самое верно для xz и xz^2. Пусть x является хорошим элементом. Поскольку $x \notin F$, имеем $|\mathbf{C}_{\bar{E}}(x)| \leqslant 3$ и $|\mathbf{C}_V(x)| \leqslant |W|^{2b}$ по Лемме 3.2.5(2). По Лемме 3.2.3, у нас есть разложение $V = \mathbf{C}_V(x) \oplus \mathbf{C}_V(xz) \oplus \mathbf{C}_V(xz^2)$, и в худшем случае имеем $|\mathbf{C}_V(x)| = |W|^{2b}$, $|\mathbf{C}_V(x)| = |W|^b$ и $|\mathbf{C}_V(x)| = 1$. Таким образом, мы разбиваем A_3 на три подмножества A_{31}, A_{32} и A_{33} с $\beta_{31} = 2, \beta_{32} = 1, \beta_{33} = 0$ и $a_{31} = a_{32} = a_{33} = 8 \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{3}$ (см. Лемму 3.2.9(5) и Лемму 3.2.6(2)).

Аналогично случаю A_4 для $e = 16$ имеем $|A_4| \leqslant 24 \cdot 3^2 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$ по Лемме 3.2.7. Поэтому полагаем $a_4 = 24 \cdot 3^2 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$.

Аналогично предыдущему случаю, имеем $|A_5| \leqslant 24 \cdot 3^2 \cdot (|W|^{\frac{2}{3}} + |W|^{\frac{1}{3}} + 1)$ и мы полагаем $a_5 = 24 \cdot 3^2 \cdot (|W|^{\frac{2}{3}} + |W|^{\frac{1}{3}} + 1)$.

Аналогично случаю A_7 для $e = 16$ имеем $|A_{6,s}| \leqslant 24 \cdot 3^2 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$ по Лемме 3.2.9(5) и Лемме 3.2.7. Поэтому полагаем $a_{6,s} = 24 \cdot 3^2 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$. Получаем следующую оценку для соответствующих слагаемых в $\star$:

$$\sum_{s\geqslant 5} a_{6,s}(|W|^{\beta_{6,s}} - 1) \leqslant \mathrm{Div}(\dim W) \cdot 3b \cdot 24 \cdot 3^2 \cdot |W|^{\frac{3b-1}{5}} \cdot (|W| - 1).$$

Легко проверить, что $\star$ выполняется, когда $|W| \geqslant 31$ и $|W|$ является простым числом, или когда $|W| \geqslant 439$ и $|W|$ является степенью простого числа. Также $\star$ выполняется, если $|W| \geqslant 13$ и $b \geqslant 2$, или $|W| \geqslant 7$ и $b \geqslant 3$, или $|W| \geqslant 4$ и $b \geqslant 5$.

Пусть $e = 2$. Тогда в обозначениях Предложения 3.2.2 имеем $|F/U| = |E/Z| = 2^2$, $r = 2, 2n = 2$, $2 \mid |W| - 1$, $A/F \lesssim S_3$ и $|A/F| \leqslant 6$ по Лемме 3.2.9(1).

Определим множества A_i и зададим β_i следующим образом:

(1) $A_1 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(F\backslash U)\}$, $\beta_1 = 1$ (см. Лемму 3.2.4(1)),

(2) $A_2 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(A\backslash F)\}$, $\beta_2 = 1$ (см. Лемму 3.2.5(1), Лемму 3.2.5(2) и случай A_3 для $e = 3$),

(3) $A_3 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_3(A\backslash F)\}$, $\beta_3 = 1$ (см. Лемму 3.2.4(3)),

(4) $A_4 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_2(G\backslash A)\}$, $\beta_4 = 1$ (см. Лемму 3.2.4(5)),

(5) $A_5 = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_3(G\backslash A)\}$, $\beta_5 = \frac{2}{3}$ (см. Лемму 3.2.4(5)),

(6) $A_{6,s} = \{\langle x\rangle \mid x \in \mathrm{EP}_s(G\backslash A)\}$ и $A_6 = \bigcup\limits_{s\geqslant 5} A_{6,s}$, $\beta_{6,s} = \frac{2}{s}$ (см. Лемму 3.2.4(5)).

Аналогично случаю A_1 для других чётных e, имеем $|A_1| \leqslant 6$, поскольку $\mathrm{NEP}_2(E) \leqslant 7$, и мы полагаем $a_1 = 6$.

Аналогично случаю A_2, A_4 для $e = 16$, имеем $|A_2| \leqslant 3 \cdot 4$ по Лемме 3.2.9(1) и Лемме 3.2.6(2), и мы полагаем $a_2 = 3 \cdot 4$.

Аналогично случаю A_5 для $e = 16$, имеем $|A_3| \leqslant 2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2}$ по Лемме 3.2.9(1) и Лемме 3.2.6(2), и мы полагаем $a_3 = 2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2}$.

Имеем $|A_4| \leqslant 6 \cdot 2^2 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$ по Лемме 3.2.7, поэтому мы полагаем $a_4 = 6 \cdot 2^2 \cdot (|W|^{\frac{1}{2}} + 1)$.

Аналогично предыдущему случаю, имеем $|A_5| \leqslant 6 \cdot 2^2 \cdot (|W|^{\frac{2}{3}} + |W|^{\frac{1}{3}} + 1)$, поэтому мы полагаем $a_5 = 6 \cdot 2^2 \cdot (|W|^{\frac{2}{3}} + |W|^{\frac{1}{3}} + 1)$.

Аналогично случаю A_6 для $e = 3$, имеем $|A_{6,s}| \leqslant 6 \cdot 2^2 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$, и мы полагаем $a_{6,s} = 6 \cdot 2^2 \cdot \frac{|W|-1}{|W|^{\frac{1}{s}}-1}$. Получаем следующую оценку:

$$\sum_{s \geqslant 3} a_{6,s}(|W|^{\beta_{6,s}} - 1) \leqslant \mathrm{Div}(\dim W) \cdot 2b \cdot 6 \cdot 2^2 \cdot |W|^{\frac{2b-1}{5}} \cdot (|W| - 1).$$

Легко проверить, что $\star$ выполняется, когда $|W| \geqslant 31$ и $|W|$ является простым числом, или когда $|W| \geqslant 5693$ и $|W|$ является степенью простого числа. Также если $b \geqslant 2$ $(3{,}4$ или $5)$, $\star$ выполняется при $|W| \geqslant 19$ $(7{,}5$ или 3 соответственно$)$. $\square$

Следствие 1. *Предположим, что G является разрешимой неприводимой примитивной подгруппой группы $\mathrm{GL}(d,p)$. Предположим, что параметры G равны e, a в обозначениях Предложения 3.2.2, где $e \in \{2,3,4,8,9,16\}$ и $e \cdot a = d$. Предположим, что G не упоминается в Таблице 2. Тогда у G есть регулярная орбита на $V = \mathbb{F}_p^d$.*

Таблица 2 — Список примитивных разрешимых групп, возможно, не имеющих регулярной орбиты

№	e	p	d	a
1	16	3	16	1
2	16	5	16	1
3	9	2	18	2
4	9	7	9	1
5	9	13	9	1
6	9	2	36	4
7	9	19	9	1
8	9	5	18	2
9	8	3	8	1
10	8	5	8	1
11	8	7	8	1
12	8	3	16	2
13	8	11	8	1
14	8	13	8	1
15	8	17	8	1
16	8	19	8	1
17	8	5	16	2
18	8	3	24	3
19	4	3	4	1
20	4	5	4	1
21	4	7	4	1
22	4	3	8	2
23	4	11	4	1
24	4	13	4	1
25	4	17	4	1
26	4	19	4	1
27	4	23	4	1
28	4	5	8	2
29	4	3	12	3
30	4	29	4	1
31	4	31	4	1
32	4	37	4	1
33	4	41	4	1
34	4	43	4	1
35	4	47	4	1
36	4	7	8	2
37	4	53	4	1
38	4	59	4	1
39	4	61	4	1
40	4	67	4	1
41	4	71	4	1
42	4	73	4	1
43	4	3	16	4
44	4	11	8	2
45	4	5	12	3
46	4	13	8	2
47	4	3	20	5
48	3	2	6	2
49	3	7	3	1
50	3	13	3	1
51	3	2	12	4
52	3	19	3	1
53	3	5	6	2
54	3	7	6	2
55	3	2	18	6
56	3	11	6	2
57	3	13	6	2
58	3	2	24	8
59	3	17	6	2
60	3	7	9	3
61	3	19	6	2
62	2	3	2	1
63	2	5	2	1
64	2	7	2	1
65	2	3	4	2
66	2	11	2	1
67	2	13	2	1
68	2	17	2	1
69	2	19	2	1
70	2	23	2	1
71	2	5	4	2
72	2	3	6	3
73	2	29	2	1
74	2	7	4	2
75	2	3	8	4
76	2	11	4	2
77	2	5	6	3
78	2	13	4	2
79	2	3	10	5
80	2	17	4	2
81	2	7	6	3
82	2	19	4	2
83	2	23	4	2
84	2	5	8	4
85	2	3	12	6
86	2	29	4	2
87	2	31	4	2
88	2	11	6	3
89	2	37	4	2
90	2	41	4	2
91	2	43	4	2
92	2	3	14	7
93	2	13	6	3
94	2	47	4	2
95	2	7	8	4
96	2	53	4	2
97	2	5	10	5
98	2	59	4	2
99	2	61	4	2
100	2	67	4	2
101	2	17	6	3
102	2	71	4	2
103	2	73	4	2

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Ревину Д. О. и Вдовину Е. П. за поддержку, помощь и обсуждение результатов. Автор благодарит сотрудников лаборатории теории групп Института математики ИМ СО РАН, участников семинаров «Теория групп», «Алгебра и логика» и семинара Отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН за обсуждение результатов. Автор выражает благодарность и признательность Васильевым М. М. и С. М. и всем, чья поддержка и участие способствовали успешному завершению настоящей работы.

Список литературы

1. *Sylow M. L.* Théorèmes sur les groupes de substitutions // Mathematische Annalen. — 1872. — Дек. — Т. 5, № 4. — С. 584—594.
2. *H. Wielandt*. Zusammengesetzte Gruppen: Hölder Programm heute // Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979. Т. 37 / под ред. B. Cooperstein, G. Mason. — 1981. — С. 161—173. — (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics).
3. *Kaloujnine L.* La structure des p-groupes de Sylow de groupes symétriques finis // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1948. — Т. 65, n^{o} 3. — P. 239-276.
4. *Liebeck M. W., Saxl J.* The Primitive Permutation Groups of Odd Degree // Journal of the London Mathematical Society. — 1985. — Т. 31, № 2. — С. 250—264.
5. *Kantor W. M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to finite projective planes // Journal of Algebra. — 1987. — Т. 106, № 1. — С. 15—45.
6. *Маслова Н. В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 182—184.
7. *К. Ю. Коротицкий, Д. О. Ревин*. Максимальные разрешимые подгруппы нечётного индекса в симметрических группах // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, № 2. — С. 169—189.
8. *Hall P.* Theorems Like Sylow’s // Proc. Lond. Math. — 1956. — Т. s3—6. — С. 286—304.
9. *Thompson J. G.* Hall subgroups of the symmetric groups // Journal of Combinatorial Theory. — 1966. — Т. 1, № 2. — С. 271—279.
10. *Cooper C.* Maximal π-subgroups of the symmetric groups // Math. Z. — 1971. — Т. 123. — С. 285—289.
11. *Chevalley C.* Sur certains groupes simples // Tôhoku Math. J. — 1955. — Т. 7. — P. 14-66.

12. *Weir A. J.* Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p // Proc. Amer. Math. Soc. — 1955. — Т. 6, № 4. — С. 529—533.

13. *Carter R., Fong P.* The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups // J. Algebra. — 1964. — Т. 1. — С. 139—151.

14. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. — New York : Wiley Classics Library, 1989.

15. Atlas of finite groups / J. H. Conway [и др.]. — Oxford : OUP, 1985.

16. *Kondratiev A. S., Mazurov V. D.* // Algebra and Logic. — 2003. — Т. 42, № 5. — С. 333—348.

17. *Кондратьев А. С.* Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Матем. заметки. — 2005. — Т. 78, № 3. — С. 338—346.

18. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups III. — Berlin, New York : Springer-Verlag, 1982.

19. *Guralnick R. M., Malle G., Navarro G.* Self-normalizing Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — Т. 132, № 4. — С. 973—979.

20. *Вдовин Е. П.* О строении групп, содержащих картерову подгруппу нечётного порядка // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54, № 2. — С. 158—162.

21. *Pálfy P. P., Pyber L.* Small Groups of Automorphisms // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1998. — Т. 30, № 4. — С. 386—390.

22. *Д. О. Ревин*. Субмаксимальные разрешимые подгруппы нечетного индекса в знакопеременных группах // Сибирский математический журнал. — 2021. — Т. 62, № 2. — С. 387—401.

23. *Guo W., Revin D. O.* Pronormality and Submaximal $\mathfrak{X}$-Subgroups on Finite Groups // Communications in Mathematics and Statistics. — 2018. — Т. 6, № 3. — С. 289—317.

24. *Alperin J. L., Fong P.* Weights for symmetric and general linear groups // J. Algebra. — 1990. — Т. 131, № 1. — С. 2—22.

25. *An J.* Weights for classical groups // Trans. Am. Math. Soc. — 1994. — T. 342, № 1. — C. 1—42.

26. *Kleidman P. B.*, *Liebeck M.* The subgroups structure of finite classical groups. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1990.

27. *Yang Y.* Regular orbits of finite primitive solvable groups // Journal of Algebra. — 2010. — T. 323, № 10. — C. 2735—2755.

28. *Yang Y.* Regular orbits of finite primitive solvable groups, II // Journal of Algebra. — 2011. — T. 341, № 1. — C. 23—34.

29. *Dolfi S.*, *Pacifici E.* Zeros of Brauer characters and linear actions of finite groups // Journal of Algebra. — 2011. — T. 340, № 1. — C. 104—113.

30. *Dolfi S.*, *Pacifici E.* Zeros of Brauer characters and linear actions of finite groups: Small primes // Journal of Algebra. — 2014. — T. 399. — C. 343—357.

31. *Lewis M. L.*, *Navarro G.*, *Wolf T. R.* p-Parts of character degrees and the index of the Fitting subgroup // Journal of Algebra. — 2014. — T. 411. — C. 182—190.

32. *Ponomarenko I. N.* Bases of schurian antisymmetric coherent configurations and an isomorphism test for schurian tournaments // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — T. 192, № 3. — C. 316—338.

33. *Yang Y.* Regular orbits of nilpotent subgroups of solvable linear groups // Journal of Algebra. — 2011. — T. 325, № 1. — C. 56—69.

34. *Yang Y.* Large character degrees of solvable 3'-groups // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2011. — T. 139, № 9. — C. 3171—3173.

35. *Yang Y.* Blocks of small defect // Journal of Algebra. — 2015. — T. 429. — C. 192—212.

36. The 3-closure of a solvable permutation group is solvable / E. O'Brien [и др.] // Journal of Algebra. — 2022. — Окт. — T. 607. — C. 618—637.

37. *Dixon J.*, *Mortimer B.* Permutation Groups. — Springer New York, 1996. — (Graduate Texts in Mathematics).

38. *Wielandt H.* Finite Permutation Groups. — Academic Press, 1964.

39. *Maslova N. V.* Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: addendum // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 707—718.

40. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Т. 134. — Springer-Verlag, 2013.

41. *Gross F.* Odd order hall subgroups of the classical linear groups // Mathematische Zeitschrift. — 1995. — Т. 220, № 1. — С. 317—336.

42. *Isaacs I. M.* Finite group theory. — Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2008.

43. *Ревин Д. О.* Суперлокалы в симметрических и знакопеременных группах // Алгебра и логика. — 2003. — Т. 42, № 3. — С. 338—365.

44. *Griess R.* Automorphisms of extra special groups and nonvanishing degree 2 cohomology // Pacif. J. Math. — 1973. — Т. 48. — С. 403—411.

45. *Ревин Д. О.* Свойство D_π конечных групп в случае $2 \notin \pi$ // Тр. ИММ УрО РАН. — 2007. — Т. 13, № 1. — С. 166—182.

46. *Revin D. O.* The D_π property of finite groups in the case $2 \notin \pi$ // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2007. — Июль. — Т. 257, S1. — S164—S180.

47. *Thompson J. G.* Normal p-complements for finite groups // J. Algebra. — 1964. — Т. 1. — С. 43—46.

48. *Мерзляков М. И., Каргаполов Ю. И.* Основы теории групп. — Москва : «Наука», 1982.

Публикации автора по теме диссертации

49. *А. С. Васильев.* Нормализаторы силовских подгрупп в линейных и унитарных конечных группах // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, № 1. — С. 3—26.

50. *А. С. Васильев, Д. О. Ревин*. Относительно максимальные подгруппы нечётного индекса в симметрических группах // Алгебра и логика. — 2022. — Т. 61, № 2. — С. 150—179.

51. *Yang Y., Vasil'ev A., Vdovin E.* Regular orbits of finite primitive solvable groups, III // Journal of Algebra. — 2022. — Янв. — Т. 590. — С. 139—154.

52. *А. С. Васильев*. Нормализаторы силовских подгрупп в симплектических и ортогональных группах над конечными полями нечетной характеристики // Труды ИММ УрО РАН. — 2024. — Т. 30, № 1. — С. 61—69.

53. *Васильев А. С.* О нормализаторах силовских подгрупп в классических группах // МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ: Международная конференция. Тезисы докладов, Новосибирск, 19–22 ноября 2018 года. — Новосибирск : Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева, 2018. — С. 79.

54. *Васильев А. С.* О нормализаторах силовских подгрупп в линейных и унитарных группах // МНСК-2019. Математика: Материалы 57-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 14–19 апреля 2019 года. — Новосибирск : Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2019. — С. 6.

55. *Васильев А. С.* О нормализаторах силовских подгрупп в линейных и унитарных группах // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем: Тезисы Международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова, Нальчик, 29 июня – 03 июля 2019 года. — Нальчик : Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 2019. — С. 28.

56. *Васильев А. С., Вдовин Е. П., Янг Й.* О регулярных орбитах конечных примитивных разрешимых групп // Мальцевские чтения: Тезисы докладов Международной конференции, Новосибирск, 16–20 ноября 2020 года. — Новосибирск : Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2020. — С. 141.

57. *Васильев А. С.* Нормализаторы силовских подгрупп в классических группах // МНСК-2020: Материалы 58-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 10–13 апреля 2020 года. — Новосибирск : Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2020. — С. 5.
58. *Васильев А. С.* Относительно максимальные подгруппы нечетного индекса в симметрических группах // Математика: Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 12 февраля – 23 2021 года. — Новосибирск : Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2021. — С. 11.

Список рисунков

Список таблиц