На правах рукописи

Новосибирский государственный университет
*НАСТОЯЩАЯ НАУКА

Васильев

Васильев Алексей Сергеевич

Надгруппы примарных подгрупп в группах, близких к простым

Специальность 1.1.5 —
«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Ревин Данила Олегович

Официальные оппоненты: **Шлепкин Алексей Анатольевич,**
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»,
профессор кафедры прикладной математики и анализа данных

Бажанова Екатерина Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ГАОУ ВО МГПУ «Московский городской педагогический университет»,
заместитель начальника департамента по научной работе, доцент департамента математики и физики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

Защита состоится «___» ___________ 2025 г. в __________ на заседании диссертационного совета 24.1.073.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН: `https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.02/`.

Автореферат разослан ___ _________ ____ года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.073.02,
канд. физ.-мат. наук — Белоусов Иван Николаевич

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Диссертационная работа относится к классическому направлению теории конечных групп — исследованию подгруппового строения конечных простых и близких к простым групп. В диссертации рассматриваются некоторые надгруппы (то есть подгруппы, содержащие данные подгруппы) определённых примарных подгрупп — подгрупп порядка, равного степени простого числа.

В 1872 году Л. Силов доказал [1] следующую теорему.

Теорема (Л. Силов). *Пусть порядок группы G равен $r^\alpha \cdot m$, где число r*[1] *простое, а m не делится на r. Тогда справедливы следующие утверждения.*

- *Группа G содержит по крайней мере одну подгруппу порядка r^α (т. н. силовскую r-подгруппу).*
- *Любые две силовские r-подгруппы сопряжены.*
- *Всякая r-подгруппа группы G содержится в некоторой силовской r-подгруппе.*

По мнению специалистов теорема Силова является краеугольным камнем теории конечных групп. Изучение различных надгрупп примарных подгрупп в конечных простых группах является важным аспектом этой теории, поскольку позволяет глубже понять структуру конечных групп. Наиболее впечатляющим и известным продвижением в этом направлении считается создание Дж. Томпсоном и другими специалистами локального теоретико-группового анализа.

В центре внимания диссертационной работы находятся сформулированные ниже проблемы 1-3.

Всюду далее символом $\mathfrak{X}$ обозначен фиксированный непустой класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Следуя Х. Виланду [2], будем называть такой класс *полным*. Будем предполагать также, что $\mathfrak{X}$ содержит группу порядка 2 (эквивалентно, содержит некоторую группу чётного порядка, или, эквивалентно, содержит любую 2-группу) и отличен от класса всех конечных групп. Как следует из теоремы Силова, при данных ограничениях любая конечная группа содержит максимальную $\mathfrak{X}$-подгруппу нечётного индекса.

В диссертации рассматривается следующая задача.

Проблема 1. *Для любого полного (т. е. замкнутого относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений) класса конечных групп $\mathfrak{X}$ классифицировать максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в простых группах.*

Решение этой задачи известно в следующих случаях:

[1] Символ p зарезервирован для обозначения характеристики некоторого фиксированного конечного поля.

– силовские 2-подгруппы в Sym_n (т. е. максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс 2-групп) описаны Л. А. Калужниным [3];
– максимальные подгруппы нечётного индекса в Sym_n (т. е. максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс конечных групп, у которых порядки неабелевых композиционных факторов меньше $n!/2$) описаны М. Либеком и Я. Сакслом [4], У. Кантором [5] и детально Н. В. Масловой [6];
– максимальные разрешимые подгруппы нечётного индекса в Sym_n описаны К. Ю. Коротицким и Д. О. Ревиным [7].

Для случая, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех π-групп, где π — произвольное множество простых чисел, известны следующие результаты. Ф. Холл [8, теорема A4] и Дж. Томпсон [9] описали π-холловы подгруппы в симметрических группах, т.е. такие π-подгруппы, у которых индекс не делится на числа из π. К. Купер [10] упростил рассуждения Холла и Томпсона. Он показал, что в симметрической группе холловы подгруппы (и даже несколько более широкий класс максимальных π-подгрупп) нечётного порядка исчерпываются силовскими подгруппами, а максимальные π-подгруппы нечётного индекса должны быть прямыми произведениями итерированных сплетений симметрических групп [10, теорема 1]. Отсюда классификация Холла–Томпсона получается после несложных арифметических вычислений. Результаты Купера о максимальных π-подгруппах нечётного индекса в уточнённой формулировке можно независимым образом извлечь из настоящей диссертации.

В диссертации приводится описание максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в симметрических группах, где $\mathfrak{X}$ — произвольный полный класс конечных групп, содержащий группу порядка 2. Одним из следствий этого результата является описание максимальных и т. н. субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в знакопеременных группах.

В диссертации всюду предполагается, что r — это простое число. В теории конечных групп r-подгруппы и их нормализаторы (т.н. r-локальные подгруппы) играют фундаментальную роль. Изучение таких подгрупп лежит в основе локального теоретико-группового анализа. Особый интерес представляют r-локальные подгруппы в конечных простых группах. Однако даже нормализаторы силовских подгрупп в простых группах к настоящему времени полностью не описаны.

В диссертации изучается следующий вопрос.

Проблема 2. *Описать нормализаторы силовских подгрупп в простых конечных группах.*

Сами силовские подгруппы в конечных простых группах исследовались в работах многих авторов (см., например, [3; 11—15]). В группах лиева типа, составляющих основной массив конечных простых групп, наилучшим образом исследовано строение нормализаторов силовских p-подгрупп для случая, когда

p — характеристика поля определения группы. Строение нормализаторов силовских r-подгрупп в случае, когда r отлично от характеристики поля определения, полностью найдено лишь для $r = 2$. Нормализаторы силовских 2-подгрупп описаны в работах Картера и Фонга [13], А. С. Кондратьева и В. Д. Мазурова [16] и А. С. Кондратьева [17] во всех конечных простых группах. Отметим, что силовская 2-подгруппа во многих случаях совпадает со своим нормализатором. В то же время, в случае нечётного r, силовская r-подгруппа конечной простой группы никогда не совпадает со своим нормализатором: в соответствии с классическим результатом Дж. Глаубермана и Дж. Томпсона [18], если силовская r-подгруппа самонормализуема при $r > 3$, то группа непроста (то же верно и для $r = 3$ [19]). Более того, если нильпотентная подгруппа нечётного порядка самонормализуема, то группа непроста [20].

В диссертации приведено решение проблемы 2 для классических простых групп (линейных и унитарных, а также симплектических и ортогональных групп нечётной характеристики) в случае, когда r — нечётное простое число, отличное от характеристики поля определения. Отметим, что индуктивное описание нормализаторов силовских подгрупп в линейных группах нашёл А. А. Волочков [21]. В настоящей диссертации для линейных и унитарных групп приведено явное унифицированное описание.

Пусть G — конечная группа, а V — конечный точный вполне приводимый G-модуль. Изучение орбит действия G на V является классической темой. Одним из самых важных и естественных вопросов об орбитах является установление существования орбиты определённой мощности. В течение длительного времени в литературе изучался вопрос о существовании регулярных орбит, то есть орбит мощности, равной порядку группы. Это изучение имеет множество применений к важным вопросам теории характеров и классов сопряжённости конечных групп. В работе [22] Пальфи и Пибер задались следующим вопросом.

Проблема 3. *Классифицировать все пары групп G, A с $(|G|, |A|) = 1$, такие что $G \leq \mathrm{Aut}(A)$ имеет регулярную орбиту на A.*

В диссертации получено продвижение в этом вопросе для примитивных разрешимых групп $G \leqslant \mathrm{Aut}(V)$, где V — конечное векторное пространство. Сами такие группы G (как подгруппы в линейных группах), а также естественные полупрямые произведения $V \rtimes G$ (как подгруппы в симметрических группах) являются надгруппами важных классов примарных подгрупп.

Основные результаты диссертации.

1. Для любого полного (т.е. замкнутого относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений), класса $\mathfrak{X}$ конечных групп, содержащего группу порядка 2, описаны (совместно с Д. О. Ревиным) с точностью до сопряжённости максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в симметрических группах. Как следствие, классифицированы также субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы нечётного индекса в знакопеременных группах.

2. Для любого нечётного простого числа r, отличного от 2 и от характеристики основного поля, описаны нормализаторы силовских r-подгрупп в полных и простых классических конечных группах: линейных и унитарных, а над полями нечётной характеристики также симплектических и ортогональных.
3. Доказано (совместно с Е. П. Вдовиным и Ю. Яном), что за конечным числом исключений конечная разрешимая, но не метациклическая группа, действующая точно и квазипримитивно на конечном векторном пространстве, обладает регулярной орбитой. Указаны все возможные исключения.

Результат 1 получен в соавторстве с Д. О. Ревиным с решающим вкладом соискателя. Результат 2 получен автором лично. Результат 3 получен в соавторстве с Е. П. Вдовиным и Ю. Яном. Вклад соискателя заключается в доказательстве теоремы, являющейся одной из ключевых для результата 3.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [A1—A10]. При этом основные результаты диссертации опубликованы в [A1—A4] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

Новизна и научная значимость работы. Все результаты диссертации являются новыми.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск 2018, 2020), Международной научной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань 2019), Международной конференции «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем», посвящённой 70-летию А.Х. Журтова (Нальчик 2019), Международной (50-ой Всероссийской) молодёжной школе-конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (Екатеринбург 2019), Международной научной студенческой конференции (Новосибирск 2019, 2020, 2021), Международной школе-конференции «Groups and Graphs, Semigroups and Synchronization» (Сочи 2021), семинарах «Теория групп», «Алгебра и логика» Института математики СО РАН и Новосибирского государственного университета, семинаре «Ural Seminar on Group Theory and Combinatorics» Института математики и механики УрО РАН.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения и трёх глав. Полный объем диссертации составляет **107** страниц текста с **9** рисунками и **2** таблицами. Список литературы содержит **58** наименований.

Содержание диссертации

Введение содержит историю изучаемых вопросов, основные определения и обзор основных результатов.

Глава 1.

Ниже собраны результаты работы и необходимые понятия. По аналогии с [7] мы однозначно параметризуем классы сопряжённости максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в группе Sym_n так называемыми допустимыми диаграммами, ассоциированными с числом n, см. основной результат — теорему 1.1.1. С каждым натуральным числом n ассоциировано конечное число допустимых диаграмм. Из описания допустимых диаграмм, представленного ниже, легко выводится алгоритм построения по числу всех допустимых диаграмм, ассоциированных с этим числом.

Теорема 1.1.1 решает [23, проблема 1] и частично [24, проблема 5.19] и вместе с основным результатом [23] позволяет представить описание т. н. субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в знакопеременных группах, см. теорему 1.1.2. Напомним, что субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы были введены Виландом [2]. Подгруппа H группы G называется *субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой*, если существует такое вложение группы G в качестве субнормальной подгруппы в некоторую группу G^*, при котором H совпадёт с пересечением G и подходящей максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы из G^*. В [24] показано, что если бы удалось получить описание субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в простых группах, то, используя соображения индукционного характера, мы бы имели возможность находить максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы в произвольной конечной группе. Теорема 1.1.2 вносит вклад в выполнение данной программы.

Назовём число

$$\Upsilon = \Upsilon(\mathfrak{X}) = \max\{n \mid \mathrm{Sym}_n \in \mathfrak{X}\}$$

симметрической границей класса $\mathfrak{X}$. Ясно, что $\mathrm{Sym}_n \in \mathfrak{X}$ если и только если $n \leqslant \Upsilon$. С помощью этого числа введём понятия расширенной двоичной записи натурального числа n, шаблона диаграммы и $\mathfrak{X}$-допустимой диаграммы, ассоциированной с n.

Пусть имеются последовательности $\overline{a_\nu a_{\nu-1}\dots a_0}$ и $\overline{b_\nu b_{\nu-1}\dots b_0}$, в которых каждый элемент равен 0 или нечётному числу, не превосходящему Υ. Скажем, что последовательность $\overline{b_\nu b_{\nu-1}\dots b_0}$ получена из $\overline{a_\nu a_{\nu-1}\dots a_0}$ *элементарной заменой*, если существует не превосходящее Υ и имеющее каноническую двоичную запись $\overline{d_\tau d_{\tau-1}\dots d_1 1}$ нечётное число d и номер $\alpha \in \{0,\dots,\nu\}$, такие что $a_\iota = b_\iota$ при $0 \leqslant \iota \leqslant \nu$ за исключением следующих случаев:

- $a_\alpha = 1$, $b_\alpha = d$,
- для всех β, таких что $d_\beta = 1$, имеют место равенства $a_{\alpha+\beta} = 1$, $b_{\alpha+\beta} = 0$.

Другими словами, элементарная замена — это замена единиц в подпоследовательности, соответствующей некоторому нечётному числу d, не превосходящему Υ, на нули (всех, кроме последней) и d (последней). Если последовательность $\overline{b_\nu b_{\nu-1}\dots b_0}$ получена из $\overline{a_\nu a_{\nu-1}\dots a_0}$ элементарной заменой, то в силу равенства

$$\sum_{\beta=0}^{\tau} d_\beta 2^{\alpha+\beta} = 2^\alpha d$$

имеем также

$$\sum_{\iota=0}^{\nu} a_\iota 2^\iota = \sum_{\iota=0}^{\nu} b_\iota 2^\iota.$$

Определим расширенную двоичную запись натурального числа n. Рассмотрим сначала каноническое двоичное разложение

$$n = \overline{c_\nu c_{\nu-1} \ldots c_0} = \sum_{\iota=0}^{\infty} c_\iota 2^\iota, \text{ где } c_\iota \in \{0,1\}, c_\iota = 0 \text{ при } \iota > \nu \text{ и } c_\nu = 1.$$

Ясно, что $\nu = [\log n]$; все логарифмы в диссертации по основанию 2. Допустим, последовательность $\overline{a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0}$ получена из канонической записи $\overline{c_\nu c_{\nu-1} \ldots c_0}$ с помощью серии элементарных замен. Тогда запись

$$n = \overline{a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0}, \tag{1}$$

понимаемую как равенство

$$n = \sum_{\iota=0}^{\infty} a_\iota 2^\iota, \tag{2}$$

в котором все a_ι либо нулевые, либо нечётные, не превосходящие Υ, причём $a_\iota = 0$ при $\iota > \nu$, будем называть *расширенной (двоичной) записью числа* n, а коэффициенты a_ι — обобщёнными цифрами такой записи. Заметим, что расширенных двоичных записей данного числа имеется лишь конечное число, и все они могут быть легко найдены. Например, на рис. 1 представлены все расширенные двоичные записи числа $n = 15$ при $\Upsilon = 6$.

С каждой расширенной записью $\overline{a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0}$ числа n ассоциируем *шаблон диаграммы* (рис. 1) следующим образом.

- Первоначально шаблон состоит из $\nu + 1$ столбца, где $\nu = [\log n]$, нумерация ведётся справа и начинается с нуля.
- Высота ι-го столбца равна ι (нулевой столбец имеет нулевую высоту).
- Столбцы выравниваем по нижнему краю.
- Над ι-тым столбцом ставим цифру a_ι из расширенной записи $\overline{a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0}$. Если $a_\iota = 0$, то этот столбец удаляем.

Разрежем снизу вверх столбец шаблона высоты ι на полоски целых высот

$$\lambda_1 = \lambda_1(\iota), \quad \ldots, \quad \lambda_k = \lambda_k(\iota), \quad \mu = \mu(\iota),$$

так, чтобы выполнялись неравенства

1. $\lambda_i > 0 \quad$ и $\quad 2^{\lambda_i} \leqslant \Upsilon \quad$ для любого $i = 1, \ldots, k$;
2. $\mu \geqslant 0 \quad$ и $\quad a_\iota 2^\mu \leqslant \Upsilon$.

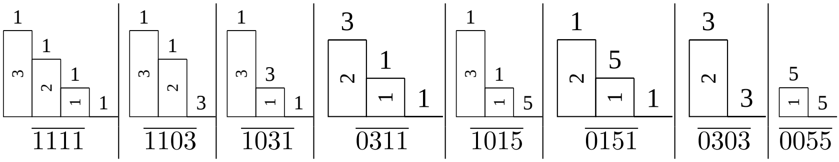


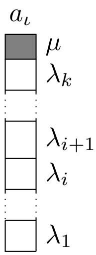
Рис. 1 — Обобщённые двоичные записи и шаблоны диаграмм для $n = 15$ при $\Upsilon = 6$

Число k берётся таким, чтобы столбец допускал возможность указанной процедуры. Верхнюю полоску высоты μ закрасим. Считаем, что полоски высот $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu$ идут в указанном порядке снизу вверх. Такое разрезание столбца соответствует упорядоченному разбиению

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu) \vdash \iota$$

числа $\iota = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k + \mu$. Заметим, что

$$2^{\iota} = 2^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_k + \mu} = 2^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot 2^{\lambda_k} \cdot 2^{\mu}. \tag{3}$$



Будем говорить, что столбец высоты ι разрезан *правильно*, если выполнены неравенства

1. $a_\iota 2^{\lambda_k + \mu} > \Upsilon$;
2. $2^{\lambda_i + \lambda_{i+1}} > \Upsilon$ для всех $i < k$.

Шаблон, столбцы которого разрезаны правильным образом, будем называть *диаграммой, представляющей число* n. Диаграмма считается *недопустимой*, если она содержит два различных столбца высот α и β, $\alpha > \beta$, таких что выполнено одно из следующих утверждений[2].

1. Для закрашенных частей справедливо неравенство

$$a_\alpha 2^{\mu(\alpha)} + a_\beta 2^{\mu(\beta)} \leqslant \Upsilon,$$

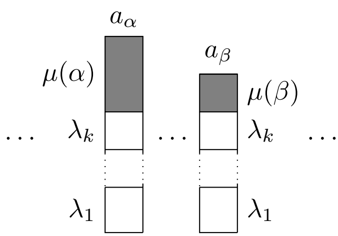
а незакрашенные части столбцов имеют равные высоты и разрезаны одинаковым образом (см. рис. 2).

2. Выполнены соотношения

$$a_\beta = 1 \quad \text{и} \quad a_\alpha 2^{\mu(\alpha)} + 1 \leqslant \Upsilon,$$

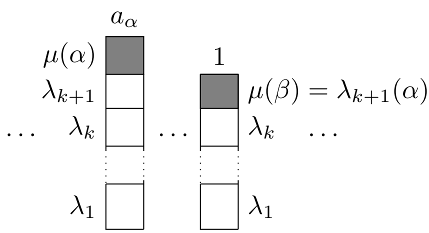
а незакрашенная часть столбца высоты α имеет высоту β, и столбец высоты β получается из незакрашенной части столбца высоты α закрашиванием верхней полоски (см. рис. 3).

[2] На данные два утверждения можно смотреть единообразно, если считать, что закрашивание верхней части любого столбца, над которым стоит цифра 1, произведено условно. Тем самым столбец можно рассматривать и как полностью незакрашенный разрезанный на полоски высот $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu = \lambda_{k+1}$, считая при этом высоту закрашенной части равной нулю.



$k(\alpha) = k(\beta) = k$ и $\lambda_i(\alpha) = \lambda_i(\beta)$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Рис. 2 — столбцы, нарушающие условие 1



$k(\alpha) = k + 1, k(\beta) = k, \lambda_i(\alpha) = \lambda_i(\beta)$ для $i \leqslant k$ и $\lambda_{k+1}(\alpha) = \mu(\beta)$ для некоторого k.

Рис. 3 — столбцы, нарушающие условие 2

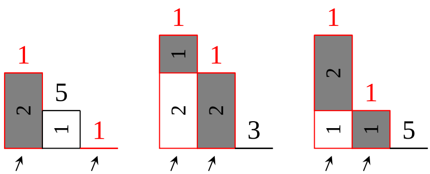


Рис. 4 — Примеры недопустимых диаграмм для $n = 15$ при $\Upsilon = 6$

Например, диаграммы на рис. 4 недопустимы (для помеченных столбцов нарушается одно из условий 1 или 2).

В противном случае диаграмма считается *допустимой* (точнее, $\mathfrak{X}$-*допустимой*) (рис. 5). Тот факт, что $\mathcal{D}$ является допустимой диаграммой для числа n будем обозначать следующим образом:

$$\mathcal{D} \vDash n.$$

Отметим, что не всякой расширенной двоичной записи может соответствовать допустимая диаграмма. Например, при $\Upsilon = 5$, если

$$n = \overline{\ldots 0151} = \ldots + 1 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

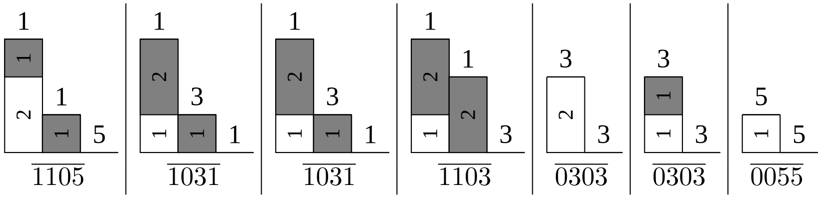


Рис. 5 — Допустимые диаграммы для $n = 15$ при $\Upsilon = 6$

то для столбцов с номерами 2 и 0 любой диаграммы, отвечающей этой расширенной записи, будет справедливо неравенство 1 в виде $2^2 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 5 = \Upsilon$.

Легко видеть, что любые несколько столбцов допустимой диаграммы снова образуют допустимую диаграмму, представляющую некоторое меньшее число. Кроме того, если нижние полоски всех столбцов допустимой диаграммы имеют равную высоту, то, удалив их, мы снова получим допустимую диаграмму. Отметим, что данная процедура допускает удаление закрашенных полосок.

Пусть $\mathcal{D} \vDash n$ — допустимая диаграмма, соответствующая расширенной записи числа $n = \overline{a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0}$. Сопоставим данной диаграмме некоторую подгруппу в Sym_n по следующему правилу. Предположим, что ι-тый столбец диаграммы, соответствующий ненулевой цифре a_ι, разбит на незакрашенные полоски, высоты которых образуют упорядоченный набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, и закрашенную полоску высоты μ. Свяжем с ним сплетение

$$\mathrm{Sym}_{2^{\lambda_1}} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_k}} \wr \mathrm{Sym}_{a_\iota 2^\mu},$$

рассматриваемое как транзитивная подгруппа в группе $\mathrm{Sym}_{a_\iota 2^\iota}$, не зависящая от расстановки скобок (лемма 1.2.7) и определённая однозначно с точностью до сопряжения, см. равенство (3). Всей диаграмме сопоставим прямое произведение сплетений, соответствующих её столбцам[3]:

$$\prod_{\iota=0}^{\nu} \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_1(\iota)}} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{2^{\lambda_{k(\iota)}(\iota)}} \wr \mathrm{Sym}_{a_\iota 2^{\mu(\iota)}}, \text{ где } \nu = [\log n].$$

Ввиду равенства (2), мы естественным образом отождествим это произведение с подгруппой в Sym_n и будем обозначать его символом $S_\mathcal{D}$. Подгруппа $S_\mathcal{D}$ определена с точностью до сопряжения в Sym_n. Довольно очевидно[4], что группы $S_\mathcal{D}$ и $S_\mathcal{E}$ сопряжены, если и только если $\mathcal{D} = \mathcal{E}$.

Имеет место

[3]Отметим, что столбцам шаблона, над которыми записана цифра 0 и которые затем были удалены, при таком подходе можно поставить в соответствие сплетение, равное по определению $\mathrm{Sym}_0 = 1$, т. е. они не вносят никакого вклада в прямое произведение, сопоставленное диаграмме.

[4]Возможно, единственный не вполне тривиальный факт состоит в том, что одна и та же группа не может соответствовать двум разным допустимым диаграммам. Он легко следует из того, что длины орбит такой группы $S_\mathcal{D}$ однозначно задают шаблон диаграммы $\mathcal{D}$, а невозможность двумя различными способами разрезать столбцы этого шаблона для получения допустимой диаграммы, соответствующей группе $S_\mathcal{D}$, легко выводится по индукции из леммы 1.2.9

Теорема 1.1.1. *Пусть $G = \mathrm{Sym}_n$. Тогда отображение $\mathfrak{D} \mapsto S_{\mathfrak{D}}^G$ задаёт биекцию между множеством $\mathfrak{X}$-допустимых диаграмм $\mathfrak{D} \models n$ и множеством классов сопряжённости максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп в Sym_n, имеющих нечётный индекс.*

Для $\mathfrak{X}$-допустимой диаграммы $\mathfrak{D} \models n$ положим

$$A_{\mathfrak{D}} = S_{\mathfrak{D}} \cap \mathrm{Alt}_n\,.$$

Из теоремы 1.1.1 следует, что подгруппа $A_{\mathfrak{D}}$ является субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса в Alt_n, и в соответствии с [23] подгруппы такого типа называют *стандартными* субмаксимальными $\mathfrak{X}$-подгруппами нечётного индекса группы Alt_n. В некоторых случаях Alt_n может обладать и нестандартными субмаксимальными $\mathfrak{X}$-подгруппами нечётного индекса, которые полностью классифицированы в [23, теорема 1]. Таким образом, из теоремы 1.1.1 и [23, теорема 1] получаем следующее утверждение, дающее описание субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в знакопеременных группах.

Теорема 1.1.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — полный класс конечных групп такой, что $\mathbb{Z}_2 \in \mathfrak{X}$. Имеют место следующие утверждения.*

1. *Подгруппа H знакопеременной группы Alt_n является субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой нечётного индекса тогда и только тогда, когда H является группой одного из следующих типов:*
   - (S) *H сопряжена с подгруппой вида $A_{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{D} \models n$;*
   - $(A6)$ *$n = 6$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ и $H \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Alt}_6)$, при этом H изоморфна группе диэдра порядка 8;*
   - $(A7)$ *$n = 7$, $\mathrm{Alt}_7 \notin \mathfrak{X}$, $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$ и $H \cong \mathrm{GL}_3(2)$;*
   - $(A8)$ *$n = 8$, $\mathrm{Alt}_8 \notin \mathfrak{X}$, $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$ и $H \cong 2^3 : \mathrm{GL}_3(2)$.*
2. *Субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы H_1 и H_2 типа (S) сопряжены в Alt_n тогда и только тогда, когда максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы $K_1, K_2 \leqslant \mathrm{Sym}_n$ нечётного индекса, для которых $H_i = K_i \cap \mathrm{Alt}_n$, $i = 1,2$, сопряжены в Sym_n. Таким образом, существует биекция между классами сопряжённости субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп типа (S) в группе Alt_n и максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп нечётного индекса в группе Sym_n. При выполнении ограничений, указанных для типов $(A6)$–$(A8)$ в группе Alt_n, число классов сопряжённости подгрупп типа (An) равно одному при $n = 6$ и двум при $n = 7,8$.*
3. *Класс сопряжённости любой субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы H нечётного индекса в группе Alt_n инвариантен относительно действия группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_n)$ за исключением случаев, когда*
   - *$n = 6$, $\mathbb{Z}_3 \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ и H — подгруппа типа (S); при этом в Alt_6 субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы типа (S) образуют два класса сопряжённости, переставляемые любым автоморфизмом группы Alt_6, не индуцированным элементом из Sym_6, и инвариантные относительно Sym_6;*

- $n \in \{7,8\}$, H — *подгруппа типа* (An); *при этом в* Alt_n *два класса сопряжённости субмаксимальных* $\mathfrak{X}$*-подгрупп типа* (An) *переставляются любым автоморфизмом группы* Alt_n, *индуцированным нечётной подстановкой.*

4. *Всякая субмаксимальная* $\mathfrak{X}$*-подгруппа* H *нечётного индекса в* Alt_n *пронормальна, т. е. для любого* $g \in \mathrm{Alt}_n$ *подгруппы* H *и* H^g *сопряжены в* $\langle H,H^g\rangle$.
5. *Субмаксимальная* $\mathfrak{X}$*-подгруппа* H *нечётного индекса в группе* Alt_n *является максимальной* $\mathfrak{X}$*-подгруппой за исключением следующих случаев:*
   - $n = 6$, $\mathbb{Z}_3 \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_6 \notin \mathfrak{X}$ *и* H — *подгруппа типа* $(A6)$; *в этом случае* H *содержится в двух подгруппах*

     $$(\mathrm{Sym}_2 \times \mathrm{Sym}_4) \cap \mathrm{Alt}_6 \text{ и } (\mathrm{Sym}_2 \wr \mathrm{Sym}_3) \cap \mathrm{Alt}_6$$

     типа (S), *переставляемых автоморфизмом из* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_6) \setminus \mathrm{Sym}_6$.
   - $n = 8$, $\mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{Alt}_8 \notin \mathfrak{X}$ *и* $H = (\mathrm{Sym}_2 \wr \mathrm{Sym}_4) \cap \mathrm{Alt}_8$ — *подгруппа типа* (S); *в этом случае* H *содержится в подгруппах типа* $(A8)$, *принадлежащих обоим классам сопряжённости.*

Глава 2.

В этой главе описаны нормализаторы силовских r-подгрупп в классических (линейных и унитарных, а также ортогональных и симплектических нечётной характеристики) простых и полных группах для простого числа r, отличного от характеристики основного поля: указано строение нормализатора и описано действие нормализатора на секциях некоторого нормального ряда силовской подгруппы. Основываясь на результатах о так называемых радикальных подгруппах и их нормализаторах, полученных в работах Дж. Альперина и П. Фонга [25] и Цз. Аня [26], мы докажем теоремы 2.1.3-2.1.7, которые дают описание нормализаторов силовских r-подгрупп для нечётного простого числа r, отличного от характеристики в полных линейных и унитарных группах, а также в полных ортогональных и симплектических группах нечётной характеристики. Теорема 2.1.1 сводит вопрос изучения нормализаторов силовских r-подгрупп в группах $\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ к аналогичному вопросу для $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$. Предложение 2.1.8 ниже указывает на соответствие между строением нормализаторов силовских подгрупп в простых и полных симплектических и ортогональных группах. Таким образом, для того, чтобы завершить описание нормализаторов силовских подгрупп в классических простых группах, остаётся лишь случай ортогональных и симплектических групп характеристики 2.

Зафиксируем следующие обозначения. Через q обозначается натуральная степень простого числа p. Через η обозначается число ± 1 или знак этого числа. Следуя [27], будем использовать единое обозначение $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ для полной линейной (в случае $\eta = +$) и унитарной (в случае $\eta = -$) групп и аналогичные обозначения $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ и $\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ для специальных и проективных специальных групп. Через $\mathrm{Sp}_n(q)$ обозначаются симплектические группы — группы изометрий n-мерного векторного пространства над полем $\mathbb{F}_q$ с соответствующей невырожденной симплектической формой, а через $\mathrm{O}_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-,\circ\}$ (где $\circ$ — пустой символ, возникающий тогда и только тогда, когда n нечётно), обозначаются ортогональные группы — группы изометрий n-мерного векторного пространства над тем же полем из q элементов размерности n с соответствующей невырожденной квадратичной формой. Через $\mathrm{SO}_n^\varepsilon(q)$ обозначаются специальные ортогональные группы, состоящие из элементов группы $\mathrm{O}_n^\varepsilon(q)$ с определителем 1. Через $\Omega_n^\varepsilon(q)$ обозначается подгруппа индекса 2 в группе $\mathrm{SO}_n^\varepsilon(q)$. Для натурального числа n через n_r обозначается r-часть числа n, т. е. наибольшая степень числа r, которая делит n. Через $n_{r'}$ обозначим частное n/n_r.

Теорема 2.1.1. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q), S = \mathrm{SL}_n^\eta(q)$, r — нечётное простое число такое, что $(q,r) = 1$, $U \in \mathrm{Syl}_r(G), P = U \cap S \in \mathrm{Syl}_r(S)$. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) $(r,n,(q-\eta)_r) = (3,3,3)$, $N_S(P) > N_G(U) \cap S$ *и*

$$P \simeq 3_+^{1+2}, N_S(P) \simeq \mathrm{SU}_3(2)$$

где 3_+^{1+2} — это экстраспециальная группа порядка 27 периода 3;

(2) $N_S(P) = N_G(U) \cap S$.

Кроме того, если $\overline{} : S \to S/Z(S) = \mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ — канонический эпиморфизм, то

$$\overline{P} \in \mathrm{Syl}_r(\overline{S}) \text{ и } N_{\overline{S}}(\overline{P}) = \overline{N_S(P)}.$$

Предложение 2.1.8. *Пусть $G \in \{\mathrm{Sp}_n(q), \mathrm{O}_n^\varepsilon(q)\}$, $S = G$ в случае $G = \mathrm{Sp}_n(q)$ и $S = \Omega_n^\varepsilon(q)$ — это подгруппа индекса 2 в специальной ортогональной группе $\mathrm{SO}_n^\varepsilon(q)$ в случае $G = \mathrm{O}_n^\varepsilon(q)$. Пусть r — нечётное простое число, взаимно простое с q, $U \in \mathrm{Syl}_r(G)$. Тогда $U \leqslant S$. Кроме того, если $\overline{} : S \to S/Z(S)$ — канонический эпиморфизм, то*

$$\overline{U} \in \mathrm{Syl}_r(\overline{S}) \text{ и } N_{\overline{S}}(\overline{U}) = \overline{N_S(U)}.$$

В случае, когда число $q-\eta = |\,\mathrm{GL}_n^\eta(q) : \mathrm{SL}_n^\eta(q)|$ не делится на r, утверждение теоремы 2.1.1 тривиально, потому что в этом случае множества силовских r-подгрупп в группах $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ и $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ совпадают. Ключевым шагом в доказательстве теоремы 2.1.1 является следующее

Предложение 2.1.2. *Пусть r — нечётный простой делитель числа $q - \eta$. Тогда нормализатор в $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ силовской r-подгруппы группы $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ содержится в группе мономиальных матриц, если и только если*

$$(r,n,(q-\eta)_r) \neq (3,3,3).$$

Поясним, что означает символ “$\circledast$” в формулировках теорем 2.1.3-2.1.7. Пусть R и N — подгруппы группы $\mathrm{GL}_n(q)$, причём $R \trianglelefteq N$, а S — некоторая группа подстановок на m элементах, рассматриваемая как группа подстановочных матриц степени m (подстановке π соответствует матрица, в которой на местах $(i, i\pi)$ стоят единицы, а на остальных — нули). Рассмотрим произвольную матрицу из S и заменим все её единичные элементы на матрицы из N, лежащие в одном и том же смежном классе группы N по подгруппе R, а все её нулевые элементы на нулевые матрицы степени n. Обозначим через $(N/R) \circledast S$ множество всех матриц степени nm, полученных таким способом[5]. Ясно, что это множество образует подгруппу в группе $\mathrm{GL}_{nm}(q)$. Легко видеть, что $(N/R) \circledast S$ — это подгруппа в подстановочном сплетении $N \wr S$, естественным образом вложенном в $\mathrm{GL}_{nm}(q)$. Эта подгруппа содержит нормальную подгруппу $\underbrace{R \times \ldots \times R}_{m}$ из базы сплетения, фактор по которой изоморфен группе $(N/R) \times S$. Через Sym_k обозначим симметрическую группу степени k. Через C_k обозначается циклическая группа порядка k, отождествлённая с соответствующей регулярной подгруппой в Sym_k.

Теорема 2.1.3. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$, r — нечётное простое число, такое, что $(q,r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geq 1 \mid (\eta q)^k \equiv 1 \pmod r\}.$$

Пусть неотрицательные числа b и c — соответственно частное и остаток от деления n на e. Зафиксируем r-ичное представление числа b:

$$b = b_0 + b_1 r + \ldots + b_\nu r^\nu, 0 \leq b_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R \simeq 1_c \times R_0^{b_0} \times \ldots \times R_\nu^{b_\nu}, \tag{2.1}$$

где 1_c — тривиальная подгруппа в $\mathrm{GL}_c^{\eta}(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{GL}_{er^i}^{\eta}(q)$, и возведение группы R_i в степень b_i означает прямое произведение b_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) \simeq \mathrm{GL}_c^{\eta}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{b_i}\,, \tag{2.2}$$

$$N_G(R)/R \simeq \mathrm{GL}_c^{\eta}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{b_i}, \tag{2.3}$$

[5]Отметим, что эта конструкция была введена в [25]. Однако, там вместо символа $\circledast$ использовался символ $\otimes$, что нам кажется менее удачным выбором, поскольку он явно конфликтует с символом кронекерова произведения матриц.

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. *Кроме того,*

$$R_i \simeq C_{(q^e-\eta^e)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \tag{2.4}$$

$$N_i \simeq (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}), \tag{2.5}$$

и

$$N_i/R_i \simeq \big(C_{(q^e-\eta^e)_{r'}} \rtimes C_e\big) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1.4. *Пусть* $G = \mathrm{Sp}_n(q)$, *где* q *— степень нечётного простого числа, а* n *чётно, и* r *— простое число, такое, что* $(2q, r) = 1$. *Положим*

$$e = \min\{k \geq 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть числа m *и* d *обозначают частное и остаток от деления* n *на* $2f$, *то есть*

$$n = 2fm + d,\ 0 \leq d < 2f.$$

Зафиксируем r*-ичное представление числа* m*:*

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leq m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r*-подгруппы* R *группы* G *справедливо разложение*

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d *— тривиальная подгруппа в группе* $\mathrm{Sp}_d(q)$, R_i *— силовская* r*-подгруппа группы* $G_i = \mathrm{Sp}_{2fr^i}(q)$, *и возведение* R_i *в степень* m_i *означает прямое произведение* m_i *копий группы* R_i. *Для нормализатора подгруппы* R *имеют место разложения*

$$N_G(R) = \mathrm{Sp}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

$$N_G(R)/R = \mathrm{Sp}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. *Кроме того,*

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$

$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \big(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\big) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Теорема 2.1.5. *Пусть n — нечётное число и $G = \mathrm{O}_n(q)$, где q — степень нечётного простого числа, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geq 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Пусть числа m и d обозначают частное и остаток от деления n на $2f$, то есть

$$n = 2fm + d,\ 0 \leq d < 2f.$$

Зафиксируем r-ичное представление числа m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leq m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{O}_d(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{O}^\delta_{2fr^i}(q)$, и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{O}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$
$$N_G(R)/R = \mathrm{O}_d(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$
$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Теорема 2.1.6. *Пусть n — чётное число и $G = \mathrm{O}^\varepsilon_n(q)$, где q — степень нечётного простого числа, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geq 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Определим число m следующим образом:

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2f} - 1, & \text{если } 2f \text{ делит } n \text{ и } (\delta)^{n/2f} \neq \varepsilon \\ [\frac{n}{2f}], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $d = n - 2fm$. Обозначим через K группу $\mathrm{O}_d^{\delta^m}(q)$, где $d = n - 2fm$. Зафиксируем r-ичное представление числа m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leq m_i < r \text{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu},$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе $\mathrm{O}_d^{\delta^m}(q)$, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{O}_{2fr^i}^{\delta}(q)$, и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = \mathrm{O}_d^{\delta^m}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$
$$N_G(R)/R = \mathrm{O}_d^{\delta^m}(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}},$$
$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}),$$

и

$$N_i/R_i = \big(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\big) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}.$$

Мы будем доказывать теоремы 2.1.4-2.1.6 в унифицированной форме, которая представлена в следующей теореме.

Теорема 2.1.7. *Пусть $G \in \{\mathrm{Sp}_n(p), \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)\}$, где q — степень нечётного простого числа, и r — простое число, такое, что $(2q, r) = 1$. Положим*

$$e = \min\{k \geq 1 \mid q^k \equiv 1 \pmod r\},\ \delta = (-1)^{e-1},\ f = \frac{e}{(e,2)}.$$

Определим число m следующим образом:

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2f} - 1, & \textit{если } G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q), 2f \textit{ делит } n \textit{ и } (\delta)^{n/2f} \neq \varepsilon \\ [\frac{n}{2f}], & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Положим $d = n - 2fm$. Обозначим через K группу $\mathrm{Sp}_d(q)$ (для $G = \mathrm{Sp}_n(q)$) или $\mathrm{O}_d^{\varepsilon\delta^m}(q)$ (для $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$). Зафиксируем r-ичное представление числа m

$$m = m_0 + m_1 r + \ldots + m_\nu r^\nu, 0 \leq m_i < r \textit{ для всех } i.$$

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R = 1_d \times R_0^{m_0} \times \ldots \times R_\nu^{m_\nu}, \tag{2.7}$$

где 1_d — тривиальная подгруппа в группе K, R_i — силовская r-подгруппа группы $G_i = \mathrm{Sp}_{2fr^i}(q)$ (для $G = \mathrm{Sp}_n(q)$) или[6] $\mathrm{O}_{2fr^i}^{\varepsilon\delta}(q)$ (для $G = \mathrm{O}_n^{\varepsilon}(q)$), и возведение R_i в степень m_i означает прямое произведение m_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) = K \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \tag{2.8}$$

$$N_G(R)/R = K \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{m_i}, \tag{2.9}$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i = C_{(q^f-\delta)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \textit{ раз}}, \tag{2.10}$$

$$N_i = (N_0/R_0) \circledast N_{\mathrm{Sym}_{r^i}}(\underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \textit{ раз}}), \tag{2.11}$$

и

$$N_i/R_i = \left(C_{(q^f-\delta)_{r'}} \rtimes C_{2f}\right) \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \textit{ раз}}. \tag{2.12}$$

Отметим, что из работы [25] также извлекается строение нормализаторов силовских подгрупп в симметрических группах, которое используется в теореме 2.1.3. Это строение приведено в следующем предложении (нечётность числа r не предполагается).

Предложение 2.1.9. *Пусть $G = \mathrm{Sym}_k$, r — простое число. Зафиксируем r-ичное представление числа k:*

$$k = k_0 + k_1 r + \ldots + k_\nu r^\nu, 0 \leq k_i < r \textit{ для всех } i.$$

[6] Если ε — пустой символ, то считаем, что $\varepsilon\delta$ — тоже пустой символ.

Тогда для силовской r-подгруппы R группы G справедливо разложение

$$R \simeq 1_{k_0} \times R_1^{k_1} \times \ldots \times R_\nu^{k_\nu}, \tag{2.13}$$

где 1_{k_0} — тривиальная подгруппа группы Sym_{k_0}, R_i — силовская r-подгруппа группы $S_i = \mathrm{Sym}_{r^i}$, и возведение группы R_i в степень k_i означает прямое произведение k_i копий группы R_i. Для нормализатора подгруппы R имеют место разложения

$$N_G(R) \simeq \mathrm{Sym}_{k_0} \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr \mathrm{Sym}_{k_i}, \tag{2.14}$$

$$N_G(R)/R \simeq \mathrm{Sym}_{k_0} \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr \mathrm{Sym}_{k_i}, \tag{2.15}$$

где $N_i = N_{S_i}(R_i)$. Кроме того,

$$R_i \simeq \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i \text{ раз}}, \tag{2.16}$$

$$N_i/R_i \simeq \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i \text{ раз}}. \tag{2.17}$$

Глава 3.

Предположим, что конечная разрешимая группа G действует точно, неприводимо и квазипримитивно на конечном векторном пространстве V размерности n над конечным полем порядка q характеристики p. Тогда у G есть характеристическая нормальная подгруппа E, которая является прямым произведением экстраспециальных r-групп для различных простых r. Полагаем $e = \sqrt{|E/\mathbf{Z}(E)|}$ (это некоторый инвариант, измеряющий сложность рассматриваемой группы). В [28, Теорема 3.1] и [29, Теорема 3.1] доказано, что если $e = 5{,}6{,}7$ или $e \geq 10$ и $e \neq 16$, то у G всегда существует регулярная орбита на V.

Если V — конечное векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}_q$, где q — степень простого числа, через $\Gamma\mathrm{L}_n(q) = \Gamma\mathrm{L}(V)$ обозначим группу полулинейных преобразований пространства V, а через $\Gamma(q^n) = \Gamma(V)$ — подгруппу группы $\Gamma\mathrm{L}_1(q^n)$, порождённую мультипликативной группой поля $\mathbb{F}_{q^n}$ и автоморфизмом $\sigma^{\log_p q}$, где σ — это автоморфизм Фробениуса поля $\mathbb{F}_{q^n}$. Если $e = 1$, то $G \leq \Gamma(q^n)$, и возможно, что $G = \Gamma(q^n)$, в то время как $\Gamma(q^n)$ не имеет регулярной орбиты при $n \geq 2$. Поэтому для $e = 1$ нельзя ожидать, что у G обязательно существует регулярная орбита. В этом случае G метациклическая, и, следовательно, существует бесконечное число метациклических примитивных линейных групп, не имеющих регулярных орбит.

Основной результат главы состоит в следующем.

Теорема 3.1.1. *Пусть G — разрешимая группа, действующая точно, неприводимо и квазипримитивно на конечном векторном пространстве V, и $|V| > 5^{18}$.*

Предположим также, что G не метациклическая. Тогда у G есть регулярная орбита на V.

Заметим, что известно лишь несколько примеров максимальных неприводимых примитивных разрешимых подгрупп $\mathrm{GL}(V)$, не являющихся метациклическими и не имеющих регулярной орбиты. В работе представлен узкий список всех разрешимых неприводимых примитивных групп, у которых, возможно, нет регулярной орбиты.

Информация о существовании регулярной орбиты использовалась рядом авторов для изучения различных задач в этой области (например [30—35]). Результаты этой главы могут быть использованы для упрощения некоторых доказательств в [30; 31; 34; 36].

Ещё одно применение полученных в этой главе результатов — изучение баз разрешимых групп подстановок и k-замыканий разрешимых групп. В [37] было показано, что если G - примитивная разрешимая группа подстановок, то k-замыкание группы G при $k \geqslant 3$ является разрешимой группой.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *А. С. Васильев*. Нормализаторы силовских подгрупп в линейных и унитарных конечных группах // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, № 1. — С. 3—26.

A2. *А. С. Васильев, Д. О. Ревин*. Относительно максимальные подгруппы нечётного индекса в симметрических группах // Алгебра и логика. — 2022. — Т. 61, № 2. — С. 150—179.

A3. *Yang Y., Vasil'ev A., Vdovin E.* Regular orbits of finite primitive solvable groups, III // Journal of Algebra. — 2022. — Янв. — Т. 590. — С. 139—154.

A4. *А. С. Васильев*. Нормализаторы силовских подгрупп в симплектических и ортогональных группах над конечными полями нечетной характеристики // Труды ИММ УрО РАН. — 2024. — Т. 30, № 1. — С. 61—69.

A5. *Васильев А. С.* О нормализаторах силовских подгрупп в классических группах // МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ: Международная конференция. Тезисы докладов, Новосибирск, 19–22 ноября 2018 года. — Новосибирск : Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева, 2018. — С. 79.

A6. *Васильев А. С.* О нормализаторах силовских подгрупп в линейных и унитарных группах // МНСК-2019. Математика: Материалы 57-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 14–19 апреля 2019 года. — Новосибирск : Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2019. — С. 6.

A7. *Васильев А. С.* О нормализаторах силовских подгрупп в линейных и унитарных группах // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем: Тезисы Международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова, Нальчик, 29 июня – 03 июля 2019 года. — Нальчик : Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 2019. — С. 28.

A8. *Васильев А. С.*, *Вдовин Е. П.*, *Янг Й.* О регулярных орбитах конечных примитивных разрешимых групп // Мальцевские чтения: Тезисы докладов Международной конференции, Новосибирск, 16–20 ноября 2020 года. — Новосибирск : Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2020. — С. 141.

A9. *Васильев А. С.* Нормализаторы силовских подгрупп в классических группах // МНСК-2020: Материалы 58-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 10–13 апреля 2020 года. — Новосибирск : Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2020. — С. 5.

A10. *Васильев А. С.* Относительно максимальные подгруппы нечетного индекса в симметрических группах // Математика: Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 12 февраля – 23 2021 года. — Новосибирск : Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2021. — С. 11.

Список литературы

1. *Sylow M. L.* Théorèmes sur les groupes de substitutions // Mathematische Annalen. — 1872. — Дек. — Т. 5, № 4. — С. 584—594.

2. *H. Wielandt.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölder Programm heute // Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979. Т. 37 / под ред. B. Cooperstein, G. Mason. — 1981. — С. 161—173. — (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics).

3. *Kaloujnine L.* La structure des p-groupes de Sylow de groupes symétriques finis // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1948. — Т. 65, n° 3. — P. 239-276.

4. *Liebeck M. W.*, *Saxl J.* The Primitive Permutation Groups of Odd Degree // Journal of the London Mathematical Society. — 1985. — Т. 31, № 2. — С. 250—264.

5. *Kantor W. M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to finite projective planes // Journal of Algebra. — 1987. — Т. 106, № 1. — С. 15—45.

6. *Маслова Н. В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 182—184.
7. *К. Ю. Коротицкий*, *Д. О. Ревин*. Максимальные разрешимые подгруппы нечётного индекса в симметрических группах // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, № 2. — С. 169—189.
8. *Hall P.* Theorems Like Sylow's // Proc. Lond. Math. — 1956. — Т. s3—6. — С. 286—304.
9. *Thompson J. G.* Hall subgroups of the symmetric groups // Journal of Combinatorial Theory. — 1966. — Т. 1, № 2. — С. 271—279.
10. *Cooper C.* Maximal π-subgroups of the symmetric groups // Math. Z. — 1971. — Т. 123. — С. 285—289.
11. *Chevalley C.* Sur certains groupes simples // Tôhoku Math. J. — 1955. — Т. 7. — P. 14-66.
12. *Weir A. J.* Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p // Proc. Amer. Math. Soc. — 1955. — Т. 6, № 4. — С. 529—533.
13. *Carter R.*, *Fong P.* The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups // J. Algebra. — 1964. — Т. 1. — С. 139—151.
14. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. — New York : Wiley Classics Library, 1989.
15. Atlas of finite groups / J. H. Conway [и др.]. — Oxford : OUP, 1985.
16. *Kondratiev A. S.*, *Mazurov V. D.* // Algebra and Logic. — 2003. — Т. 42, № 5. — С. 333—348.
17. *Кондратьев А. С.* Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Матем. заметки. — 2005. — Т. 78, № 3. — С. 338—346.
18. *Huppert B.*, *Blackburn N.* Finite groups III. — Berlin, New York : Springer-Verlag, 1982.
19. *Guralnick R. M.*, *Malle G.*, *Navarro G.* Self-normalizing Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — Т. 132, № 4. — С. 973—979.
20. *Вдовин Е. П.* О строении групп, содержащих картерову подгруппу нечётного порядка // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54, № 2. — С. 158—162.
21. *Волочков А. А.* Нормализаторы силовских подгрупп в общих и специальных линейных группах над конечными полями // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 14—22.
22. *Pálfy P. P.*, *Pyber L.* Small Groups of Automorphisms // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1998. — Т. 30, № 4. — С. 386—390.

23. *Д. О. Ревин*. Субмаксимальные разрешимые подгруппы нечетного индекса в знакопеременных группах // Сибирский математический журнал. — 2021. — Т. 62, № 2. — С. 387—401.

24. *Guo W., Revin D. O.* Pronormality and Submaximal $\mathfrak{X}$-Subgroups on Finite Groups // Communications in Mathematics and Statistics. — 2018. — Т. 6, № 3. — С. 289—317.

25. *Alperin J. L., Fong P.* Weights for symmetric and general linear groups // J. Algebra. — 1990. — Т. 131, № 1. — С. 2—22.

26. *An J.* Weights for classical groups // Trans. Am. Math. Soc. — 1994. — Т. 342, № 1. — С. 1—42.

27. *Kleidman P. B., Liebeck M.* The subgroups structure of finite classical groups. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1990.

28. *Yang Y.* Regular orbits of finite primitive solvable groups // Journal of Algebra. — 2010. — Т. 323, № 10. — С. 2735—2755.

29. *Yang Y.* Regular orbits of finite primitive solvable groups, II // Journal of Algebra. — 2011. — Т. 341, № 1. — С. 23—34.

30. *Dolfi S., Pacifici E.* Zeros of Brauer characters and linear actions of finite groups // Journal of Algebra. — 2011. — Т. 340, № 1. — С. 104—113.

31. *Dolfi S., Pacifici E.* Zeros of Brauer characters and linear actions of finite groups: Small primes // Journal of Algebra. — 2014. — Т. 399. — С. 343—357.

32. *Lewis M. L., Navarro G., Wolf T. R.* p-Parts of character degrees and the index of the Fitting subgroup // Journal of Algebra. — 2014. — Т. 411. — С. 182—190.

33. *Ponomarenko I. N.* Bases of schurian antisymmetric coherent configurations and an isomorphism test for schurian tournaments // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Т. 192, № 3. — С. 316—338.

34. *Yang Y.* Regular orbits of nilpotent subgroups of solvable linear groups // Journal of Algebra. — 2011. — Т. 325, № 1. — С. 56—69.

35. *Yang Y.* Large character degrees of solvable 3'-groups // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2011. — Т. 139, № 9. — С. 3171—3173.

36. *Yang Y.* Blocks of small defect // Journal of Algebra. — 2015. — Т. 429. — С. 192—212.

37. The 3-closure of a solvable permutation group is solvable / E. O'Brien [и др.] // Journal of Algebra. — 2022. — Окт. — Т. 607. — С. 618—637.

Васильев Алексей Сергеевич

Надгруппы примарных подгрупп в группах, близких к простым

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № _____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____