На правах рукописи

Черникова Анастасия Владимировна

Задачи оптимальной добычи возобновляемого ресурса для моделей популяций, заданных различными динамическими системами

Специальность
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Владимир — 2024

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его приложений федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Научный руководитель:	**Родина Людмила Ивановна,** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Глызин Сергей Дмитриевич,** доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова», заведующий кафедрой компьютерных сетей;
	Корнев Сергей Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный педагогический университет», проректор по научной работе.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Удмуртский государственный университет»

Защита состоится 23 октября 2024 г. в $15^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного совета 24.1.073.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108 Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:
https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.01/.

Автореферат разослан «___» ______________ 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук Костоусова Елена Кирилловна

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Рациональное использование возобновляемых природных ресурсов имеет важное значение в жизни общества. При промысловом воздействии актуальными вопросами являются как сохранение биоразнообразия, так и получение экономической выгоды. Поэтому многие исследования посвящены анализу влияния добычи ресурса на экологию и экономику (см., например, работы C. W. Clark[1], J. M. Conrad, M. D. Smith[2]).

К проблемам оптимального управления эксплуатацией ресурса относятся задачи максимизации характеристик сбора — дохода и эффективности. При этом исследуемые популяции могут иметь сложную структуру (например, быть разделенными на возрастные или типические группы), а процесс восстановления популяции может быть задан различными динамическими системами. К одним из первых моделей, описывающих структурированную популяцию, относятся модель распространения эпидемии Кермака-МакКендрика (1927 г.), матричная модель П. Лесли (1945 г.) и ее обобщение — модель Л. Лефковича (1965 г.). В современных работах по исследованию матричных моделей рассматриваются задачи оптимальной эксплуатации популяции с более сложным способом классификации возрастных групп[3].

Наиболее известные и изученные модели популяций, как правило, заданы непрерывными и дискретными динамическими системами и являются детерминированными. В работах многих авторов, среди которых А. О. Беляков, В. М. Вельов, А. А. Давыдов[4], М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский[5], Т. Упманн[6], рассмотрены задачи максимизации прибыли от эксплуатации возобновляемого ресурса, заданного непрерывными динамическими системами. Исследование популяций, динамика которых описана системами дифференциальных уравнений с запаздываниями, получило свое развитие в Ярославской школе по нелинейной динамике[7].

---

[1] Clark C. W. Mathematical Bioeconomics: The Mathematics of Conservation. Hoboken : John Wiley & Sons, 2010. 392 p.

[2] Conrad J. M., Smith M. D. Nonspatial and spatial models in bioeconomics // Natural Resource Modeling. 2012. Vol. 25, no. 1. P. 52—92.

[3] Смирнов А. И., Мазуров В. Д. Алгоритм решения задачи оптимальной эксплуатации системы с бинарной структурой // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 142—160.

[4] Belyakov A. O., Davydov A. A., Veliov V. M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources // Journal of Dynamical and Control Systems. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 475—494.

[5] Зеликин М. И., Локуциевский Л. В., Скопинцев С. В. Об оптимальном сборе ресурса на окружности // Математические заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 521—532.

[6] Upmann T., Behringer S. Harvesting a remote renewable resource // Theoretical Ecology. 2020. Vol. 13, no. 4. P. 459—480.

[7] Глызин С. Д., Кащенко С. А. Семейство конечномерных отображений, индуцированных логистическим уравнением с запаздыванием // Математическое моделирование. 2020. Т. 32, № 3. С. 19—46.

Вместе с тем, интерес для исследования вызывают модели популяций, развитие которых задано динамическими системами с дискретным временем. Такие системы, являясь, на первый взгляд, достаточно простыми, могут доставлять довольно сложную динамику. В них, например, могут возникать циклические и хаотические режимы (см. работы T.-Y. Li, J. A. Yorke[8], А. Н. Шарковского и его учеников[9]) или могут наблюдаться свойства мультирежимности (см., например, работу А. И. Абакумова, Г. П. Неверовой, Е. Я. Фрисмана[10]).

Однако, детерминированные модели не учитывают случайные факторы, влияющие на динамику популяций или экосистемы в целом. Поэтому одной из важных задач является анализ промысла популяций, заданных моделями со случайными параметрами. В одной из первых работ по данной тематике W. J. Reed[11] показал, что в стохастической модели популяции оптимальной является эксплуатация до определенного уровня; добыча ресурса с максимальным усилием сбора существенно уменьшает экономическую выгоду[12].

С экономической точки зрения важной является задача максимизации характеристик, возникающих при управлении ресурсом, на бесконечном промежутке времени — объемов выпуска и инвестиций в производственный процесс[13], средней временной выгоды[14] и эффективности[15].

Начало исследований характеристик сбора ресурса для моделей динамики эксплуатируемых популяций со случайными параметрами положено в Ижевской школе по математической теории управления. Так, в работах Л. И. Родиной и соавторов для вероятностных моделей сбора возобновляемого ресурса получены оценки средней временной выгоды, выполненные

[8]Li T.-Y., Yorke J. A. Period Three Implies Chaos // The American Mathematical Monthly. 1975. Vol. 82, no. 10. P. 985—992.

[9]Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев : Наукова думка, 1986. 280 с.

[10]Неверова Г. П., Абакумов А. И., Фрисман Е. Я. Режимы динамики лимитированной структурированной популяции при избирательном промысле // Математическая биология и биоинформатика. 2017. Т. 12, № 2. С. 327—342.

[11]Reed W. J. The steady state of a stochastic harvesting model // Mathematical Biosciences. 1978. Vol. 41, no. 3/4. P. 273—307.

[12]Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R. Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries // Journal of Environmental Economics and Management. 2018. Vol. 92. P. 659—676.

[13]Кряжимский А. В., Тарасьев А. М., Усова А. А., Ванг В. Пропорциональный экономический рост в условиях ограниченности природных ресурсов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 138—156.

[14]Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия высших учебных заведений. Математика. 2022. № 1. С. 12—24.

[15]Беляков А. О., Давыдов А. А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 38—46.

с вероятностью единица, и описан способ добычи ресурса, при котором сохраняется часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления[16,17].

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является изучение моделей эксплуатируемых популяций, развитие которых задано различными динамическими системами, и исследование задач построения режимов промысла, доставляющих заданные и наибольшие значения характеристик сбора возобновляемого ресурса — средней временной выгоды и эффективности.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Основные утверждения являются новыми, сформулированы в виде теорем и сопровождаются строгими доказательствами. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории дифференциальных уравнений и динамических систем, а также могут найти применение при решении оптимизационных задач, возникающих при моделировании экологических и технологических процессов.

Методология и методы исследования. В работе применяются аналитические методы теории дифференциальных уравнений и динамических систем, математической теории управления и теории вероятностей. Для численного решения задач и графической интерпретации результатов используется пакет прикладных программ MATLAB.

Положения, выносимые на защиту:

1. построены управляющие воздействия, при которых средняя временная выгода и эффективность сбора ресурса достигают заданных и наибольших значений, для моделей динамики популяций с непрерывным временем;
2. построены управления, доставляющие заданные и наибольшие значения средней временной выгоды и эффективности сбора, для моделей популяций, заданных дискретными динамическими системами. Описаны режимы промысла, при которых дисконтированный доход достигает наибольшего значения;
3. доказано существование предела и получены оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица, для дискретных моделей однородных популяций со случайными параметрами.

---

[16] Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 48—58.

[17] Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 41—49.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах (см. [7—23]):

1. Международная научная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика», Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2018 г.;

2. Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2019», Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2019 г.;

3. Студенческая школа-конференция «Математическая весна», Нижний Новгород, НИУ ВШЭ-Нижний Новгород, 2019, 2021 гг.;

4. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовничего, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2019 г.;

5. Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», Нижний Новгород, НИУ ВШЭ-Нижний Новгород, 2019, 2020 гг.;

6. Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН, 2021 г.;

7. II Всероссийская научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», Рязань, РГУ имени С. А. Есенина, 2022 г.;

8. Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова, Ижевск, УдГУ, 2020, 2022 гг.;

9. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем», Суздаль, МИАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, ВлГУ, НИТУ МИСИС, 2022 г.;

10. VIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук», Орел, ОГУ имени И. С. Тургенева, 2022 г.;

11. Международная (Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2019, 2023 гг.

12. IV Международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике», Рязань, РГУ имени С. А. Есенина, 2023 г.;

13. Международная конференция, посвященная памяти академика А. В. Кряжимского «Системный анализ: моделирование и управление», Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, МЦФПМ, ИММ УрО РАН, 2024 г.;

14. Международная школа-семинар молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем», Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, НИТУ МИСИС, МИАН, 2019 г.;

15. Научный семинар «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры функционального анализа и его приложений ВлГУ, 2019-2023 гг.;

16. Научный семинар «Нелинейная динамика и синергетика» математического факультета ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2023 г.;

17. Расширенное заседание семинара отдела динамических систем, Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2023 г.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 23 научных работах [1—23], из которых 6 изданы в научных журналах категории К1 [1—6], включенных в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК или приравненных к ним (из них работы [1—6] опубликованы в научных журналах, индексируемых Scopus, работы [2—4] — в журналах, индексируемых в Web of Science (ESCI), статьи [1—3; 5; 6] включены в наукометрическую базу данных zbMATH, статьи [2—4; 6] — в наукометрическую базу данных MathSciNet, работа [6] опубликована издательством Springer), 6 — в сборниках трудов конференций [7—12], 11 — в тезисах докладов конференций [13—23]. Также получены 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [24—26].

Личный вклад. Все основные результаты кандидатской диссертации получены автором самостоятельно. В работах [2—4; 6], выполненных в соавторстве с научным руководителем, Л. И. Родиной принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю А. В. Черниковой — точные формулировки, доказательства результатов и исследование примеров с численной и графической реализацией (с помощью пакета прикладных программ MATLAB). В работе [3] соавтору А. А. Родину принадлежит компьютерное моделирование, выполненное в примере 2, и решение задачи об оптимальной эксплуатации популяции методом динамического программирования, приведенное в §3 данной статьи. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 115 страниц, включая 8 рисунков. Список литературы содержит 92 наименования.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, дается общая характеристика рассматриваемых в диссертации вопросов, приведен краткий обзор работ предшественников по данной тематике, определена цель работы и сформулированы основные полученные результаты.

В **первой главе** исследуются модели однородных и структурированных популяций. Обозначим через $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ численность каждого из n видов популяции в момент времени $t \geqslant 0$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i = f_i(x)$ — вещественные непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}^n_+ \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\big\}$. Эта система описывает развитие популяции *при отсутствии эксплуатации.*

Эксплуатация популяции состоит в извлечении в моменты времени $\tau_k = kd$, $d > 0$ некоторой доли ресурса $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k)) \in [0,1]^n$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим множество

$$U \doteq \big\{\overline{u} : \overline{u} = \big(u(1), \ldots, u(k), \ldots\big)\big\} = [0,1]^n \times [0,1]^n \times \ldots \tag{2}$$

и исследуем задачу выбора управлений $\overline{u} \in U$, доставляющих определенный результат сбора ресурса. Эксплуатация приводит к системе с импульсным воздействием:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= \big(1 - u_i(k)\big) \cdot x_i(kd - 0), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ — количество i-го вида ресурса до и после сбора в момент времени $\tau_k = kd$, $k = 1, 2, \ldots$ соответственно. Обозначим через $X(k) = \big(X_1(k), \ldots, X_n(k)\big)$, $X_i(k) = x_i(kd-0)$ количество особей i-го вида популяции до сбора в момент τ_k, $k = 1, 2, \ldots$; $x(0) = (x_1(0), \ldots, x_n(0))$, $x_i(0)$ — начальную численность i-го вида популяции, $i = 1, \ldots, n$. Предполагаем, что решения системы (3) непрерывны справа.

Поскольку системы (1) и (3) описывают динамику популяции, предполагаем, что их решения неотрицательные при любых неотрицательных начальных условиях, то есть выполнено условие квазиположительности[18].

Обозначим через $C_i \geqslant 0$ агрегированную стоимость условной единицы i-го вида, $i = 1, \ldots, n$. Будем исследовать две характеристики сбора ресурса. Первая из них — *средняя временная выгода*, которая задается функцией

$$H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,, \tag{4}$$

а вторая — *эффективность* сбора

$$E_*\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j) \Bigg(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} u_i(j)\Bigg)^{-1}, \tag{5}$$

[18] Кузенков О. А., Рябова Е. А., Круподерова К. Р. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2010. 133 с.

где $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(1) > 0$. Отметим, что если существуют пределы в правых частях равенств (4) и (5), то среднюю временную выгоду и эффективность сбора будем обозначать $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ и $E\big(\overline{u}, x(0)\big)$ соответственно.

Предполагаем, что решение системы (1) существует и единственно на $[0, d]$ при любом $x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^n_+$. Система (1) в силу автономности порождает динамическую систему $\varphi(t, \cdot) = \big(\varphi_1(t, \cdot), \ldots, \varphi_n(t, \cdot)\big)$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, где $\varphi(t, x_0)$ — решение системы (1) при любом начальном условии $x_0 = x(0)$.

Рассмотрим *стационарный режим эксплуатации* популяции, когда извлекаемая доля ресурса постоянна. При таком режиме промысла развитие популяции описывается динамической управляемой системой с дискретным временем, порожденной динамической системой $\varphi(t, \cdot)$, соответствующей управляемой системе (3),

$$X(k+1, u) = \varphi\big(d, (1-u)X(k, u)\big), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $(1-u)X(k, u) = \big((1-u_1)X_1(k, u), \ldots, (1-u_n)X_n(k, u)\big)$, $(1-u_i)X_i(k, u)$ — количество ресурса после сбора ресурса в момент $\tau_k = kd$, $i = 1, \ldots, n$ (далее будем вместо $X(k, u)$ писать $X(k)$).

Обозначим через $X(k, u, X_0)$, $k = 1, 2, \ldots$ решение системы (6), удовлетворяющее начальному условию $X(1) = X_0 \in \mathbb{R}^n_+$. Если система (6) имеет *неподвижную точку* (*положение равновесия*) $\xi(u) = \big(\xi_1(u), \ldots, \xi_n(u)\big)$, то выполнено $\xi(u) = \varphi\big(d, (1-u)\xi(u)\big)$. Пусть $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Множество начальных точек $X(1) = X_0$, для которых имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} \big\|X(k, u, X_0) - \xi(u)\big\| = 0$, называется *множеством притяжения точки* $\xi(u)$; обозначим его через $A\big(\xi(u)\big)$.

Для построения управлений, доставляющих заданные и наибольшие значения средней временной выгоды, рассмотрим функцию $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d, x) - x_i\big)$ и множество

$$\mathcal{D}_+ \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_i \leqslant \varphi_i(d, x) \neq 0, \;\; i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Теорема 1.2.1. (см. [6]). *Предположим, что функция $D(x)$ достигает значения $\mathcal{H} \in (0, +\infty)$ в точке $x^* \in \mathcal{D}_+$. Тогда $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \mathcal{H}$ для любого $x(0) \in A\big(\varphi(d, x^*)\big)$ при*

$$\overline{u}^* = (u^*, u^*, \ldots), \quad \textit{где} \quad u^* = \left(1 - \frac{x_1^*}{\varphi_1(d, x^*)}, \ldots, 1 - \frac{x_n^*}{\varphi_n(d, x^*)}\right). \tag{7}$$

Кроме того, если наибольшее значение $D(x)$ на множестве $\mathbb{R}^n_+$ достигается в точке $x^* \in \mathcal{D}_+$, то для любых $\overline{u} \in U$, $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ выполнено неравенство

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant H\big(\overline{u}^*, x^*(0)\big) = D(x^*),$$

где $x^*(0) \in A\big(\varphi(d, x^*)\big)$, *а управление* $\overline{u}^* \in U$ *задано* (7).

Далее построим управления, доставляющие заданные и наибольшие значения эффективности сбора. Рассмотрим функцию эффективности

$$E(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d,x) - x_i\big)\Big(n - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\varphi_i(d,x)}\Big)^{-1}$$

и множество $\mathcal{E}_+ \doteq \Big\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{\varphi_i(d,x)} < n;\ x_i \leqslant \varphi_i(d,x) \neq 0,\ i = 1, \ldots, n\Big\}$.

Теорема 1.3.1. (см. [6]). *Пусть* $E(x^*) = \mathcal{L} \in (0, +\infty)$ *для некоторого* $x^* \in \mathcal{E}_+$; *тогда* $E\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \mathcal{L}$ *для любого* $x(0) \in A\big(\varphi(d, x^*)\big)$ *при* $\overline{u}^*$, *заданном равенством* (7). *Кроме того, если наибольшее значение* $E(x)$ *на множестве* $\mathbb{R}^n_+$ *достигается в точке* $x^* \in \mathcal{E}_+$, *то*

$$E\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant E(x^*)$$

для любого стационарного управления $\overline{u} \in U$ *и любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$.

В первой главе также рассмотрены две задачи, первая из которых заключается в нахождении наибольшего значения эффективности при фиксированном значении средней временной выгоды $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \mathcal{H} \leqslant D(x^*)$, а вторая — в нахождении наибольшего значения средней временной выгоды $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$, полагая значение эффективности сбора фиксированным $E\big(\overline{u}, x(0)\big) = \mathcal{L}$. Решение данных задач проиллюстрировано на примерах однородной популяции, заданной логистическим уравнением, и модели взаимодействия двух видов типа «нейтрализм». Кроме того, приведена оценка средней временной выгоды $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ для модели взаимодействия популяции двух видов типа «комменсализм».

Вторая глава посвящена исследованию оптимальной добычи возобновляемого ресурса, заданного динамической системой с дискретным временем. Рассматриваются однородные и структурированные популяции, развитие которых при отсутствии эксплуатации определено дискретной динамической системой

$$x(k+1) = f\big(x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x(k) = \big(x_1(k), \ldots, x_n(k)\big)$, $x_i(k) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ — численность популяции i-го вида либо возрастного класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \ldots$; $f = (f_1, \ldots, f_n)$, f_i, $i = 1, \ldots, n$ — вещественные непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}^n_+$.

Пусть $x(0) = (x_1(0), \ldots, x_n(0))$, $x_i(0) \geqslant 0$ — начальная численность i-го вида популяции. Предполагаем, что в момент времени $k = 0$ ресурс не извлекается, а в моменты $k = 1, 2, \ldots$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$. Рассмотрим множество U, определенное (2), и исследуем задачу выбора управлений $\overline{u} \in U$, обеспечивающих определенный результат сбора. Будем исследовать модель *эксплуатируемой популяции*, которая определяется динамической системой с дискретным временем

$$X(k+1) = f\big((1-u(k))X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где $X_i(k)$ и $(1-u_i(k))X_i(k)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент времени k соответственно, $i = 1, \ldots, n$, $(1-u(k))X(k) \doteq \big((1-u_1(k))X_1(k), \ldots, (1-u_n(k))X_n(k)\big)$. Отметим, что $X(1) = f(x(0))$.

Для описанной модели популяции, подверженной промыслу, так же рассмотрим две характеристики сбора — *среднюю временную выгоду* и *эффективность* сбора, определенные равенствами (4) и (5) соответственно.

Приведем способы эксплуатации популяции, которые доставляют наибольшее значение характеристик сбора на бесконечном промежутке времени.

Теорема 2.2.1. (см. [4]). *Предположим, что функция*

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i\big)$$

достигает наибольшего значения $D(x^*)$ *в точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $x_i^* \leqslant f_i(x^*) \neq 0$ *для любого* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $x(0) \in A\big(f(x^*)\big)$ *функция* $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает максимального значения* $D(x^*)$ *на множестве всех управлений* U *при*

$$u(k) \equiv u^* = \left(1 - \frac{x_1^*}{f_1(x^*)}, \ldots, 1 - \frac{x_n^*}{f_n(x^*)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Здесь через $A\big(f(x^*)\big)$ обозначено множество притяжения неподвижной точки $f(x^*)$ системы (8) при $u(k)$, заданном (9).

Теорема 2.2.2. (см. [4]). *Предположим, что функция*

$$E(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i\big)\left(n - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f_i(x)}\right)^{-1}$$

достигает наибольшего значения $E(x^*)$ *в точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $x_i^* \leqslant f_i(x^*) \neq 0$ *для любого* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $x(0) \in A\big(f(x^*)\big)$ *функция* $E\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает максимального значения* $E(x^*)$ *на множестве стационарных управлений при* $u(k) \equiv u^*$, *заданных* (9).

Данные утверждения проиллюстрированы на примере вычисления характеристик сбора для структурированной популяции, состоящей из особей младшего и старшего возрастного класса, при различных режимах эксплуатации.

При анализе качества эксплуатации по стоимости сбора, естественно вводить дисконтирование. Функцию

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j}\,,$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент дисконтирования, назовем *дисконтированным доходом* от извлечения ресурса.

Приведем способ эксплуатации, при котором дисконтированный доход достигает наибольшего значения на бесконечном промежутке времени.

Теорема 2.3.4. (см. [1]). *Предположим, что функция*

$$D_\alpha(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i e^{\alpha}\big)$$

достигает максимального значения в точке $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $x^*_i \leqslant f_i(x^*) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *такого, что* $x_i(0) \geqslant x^*_i$, $i = 1, \ldots, n$, *функция* $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \frac{D(x^*)}{e^{2\alpha} - e^{\alpha}} + \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(1) e^{-\alpha}$$

при следующих управлениях: $u^*(1) = \left(1 - \dfrac{x^*_1}{X_1(1)}, \ldots, 1 - \dfrac{x^*_n}{X_n(1)}\right)$, $u^*(k) = \left(1 - \dfrac{x^*_1}{f_1(x^*)}, \ldots, 1 - \dfrac{x^*_n}{f_n(x^*)}\right)$ *для всех* $k \geqslant 2$.

Третья глава посвящена исследованию оптимальной добычи возобновляемого ресурса, заданного дискретной динамической системой со случайными параметрами. Рассмотрим популяцию, развитие которой описано одномерной дискретной динамической системой

$$x(k+1) = f\big(x(k)\big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $x(k)$ — численность популяции в момент времени k, f — вещественная дифференцируемая функция, заданная на отрезке $I = [0, a]$, такая, что $f(I) \subseteq I$.

Предполагаем, что в нулевой момент времени численность популяции равна $x(0) \geqslant 0$, а в моменты времени $k = 1, 2, \ldots$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k) \in \Omega \subseteq [0, 1]$. Эксплуатация прекращается в том случае, когда доля собранного ресурса окажется больше некоторого значения $u(k) \in [0, 1)$ в момент k. Тогда доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell(k) = \ell\big(\omega(k), u(k)\big) = \min\big\{\omega(k), u(k)\big\}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$X(k+1) = f\big((1-\ell(k))X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $X(1) = f(x(0))$, $X(k) = X\big(\ell(1), \ldots, \ell(k-1), x(0)\big)$ — количество ресурса до сбора в момент $k = 2, 3, \ldots$, зависящее от долей ресурса $\ell(1), \ldots, \ell(k-1)$, собранного в предыдущие моменты, и от начальной численности популяции $x(0)$.

Так же как в первой и второй главах рассмотрим две характеристики сбора ресурса: *среднюю временную выгоду*

$$H_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X(k)\ell(k), \qquad \text{где } \ \overline{\ell} \doteq (\ell(1), \ldots, \ell(k), \ldots), \tag{12}$$

и *эффективность* сбора ресурса

$$E_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} X(k)\ell(k) \left(\sum_{k=1}^{n} \ell(k)\right)^{-1}. \tag{13}$$

Рассмотрим множество $U \doteq \big\{\overline{u} : \overline{u} = (u(1), \ldots, u(k), \ldots)\big\}$, $u(k) \in [0,1]$, и исследуем задачу выбора управления сбором $\overline{u} \in U$, ограничивающего долю добываемого ресурса в каждый момент времени k, при котором пределы в правых частях (12) и (13) существуют и их значения можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

Приведем описание вероятностной модели $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, параметризующей динамическую систему (11). Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств $\Omega \subseteq [0,1]$, на которой с помощью функции распределения G определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$ следующим образом: $\widetilde{\mu}\big((\alpha, \beta]\big) = G(\beta) - G(\alpha)$. Предполагаем, что $G(0) < 1$. Пусть $\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega(1), \ldots, \omega(k), \ldots)\}$, $\omega(k) \in \Omega$, $\mathfrak{A}$ — наименьшая сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами

$$D(k) \doteq \big\{\sigma \in \Sigma : \omega(1) \in A(1), \ldots, \omega(k) \in A(k)\big\}, \quad \text{где } A(1) \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ldots, A(k) \in \widetilde{\mathfrak{A}},$$

зададим меру $\widetilde{\mu}\big(D(k)\big) \doteq \widetilde{\mu}\big(A(1)\big) \cdot \widetilde{\mu}\big(A(2)\big) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}\big(A(k)\big)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Пусть задана функция $u : I \mapsto [0,1]$. Для каждого $x \in I$ функция $\ell(\omega, u(x)) \doteq \min\big\{\omega, u(x)\big\}$ является случайной величиной на множестве Ω; обозначим через $M\ell(\omega, u(x))$ ее математическое ожидание. Пусть $\widetilde{x} \in I$ и $\widetilde{x} < \max\limits_{x\in I} f(x)$; рассмотрим отрезок $P(\widetilde{x}) \doteq \big[\widetilde{x}, \max\limits_{x\in I} f(x)\big]$. Обозначим через $x(k)$ размер популяции после извлечения ресурса; тогда $x(k) = (1-\ell(k))X(k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 3.2.1. (см. [3]). *Пусть точка* $\widetilde{x} \in I$ *такова, что* $\widetilde{x} \leqslant f(\widetilde{x}) \leqslant f(x)$ *для всех* $x \in P(\widetilde{x})$. *Тогда для любого* $x(0) \in P(\widetilde{x})$ *существует управление* $\overline{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства*

$$f(\widetilde{x}) M\ell(\omega, u(\widetilde{x})) \leqslant H_*(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant \max_{x \in I} f(x) \cdot M\ell(\omega, u(\widetilde{x})),$$

где $u(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$.

Теорема 3.2.2. *Предположим, что точка* $\widetilde{x} \in I$ *такова, что* $\widetilde{x} \leqslant f(\widetilde{x}) \leqslant f(x)$ *для всех* $x \in P(\widetilde{x})$. *Тогда для любого* $x(0) \in P(\widetilde{x})$ *существует управление* $\overline{u} \in U$ *такое, что для всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства*

$$f(\widetilde{x}) \leqslant E_*(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant \max_{x \in I} f(x).$$

Положением равновесия (*неподвижной точкой*) уравнения (10) называется решение вида $x(k) \equiv const = x^*$. Отметим, что $x^* = f\big(x^*\big)$.

Обозначим $\overline{\ell}(k) \doteq (\ell(1), \ldots, \ell(k))$. Для нахождения оценки средней временной выгоды, выполненной с вероятностью единица, зададим рекуррентным образом случайные величины $A(k,x) = A\big(k, x, \overline{\ell}(k)\big)$, $B(k, x^*) = B\big(k, x^*, \overline{\ell}(k)\big)$:

$$\begin{aligned} A(1,x) &= f(x), \quad A(k+1,x) = f\big((1-\ell(k))A(k,x)\big);\\ B(1,x^*) &= x^*, \quad B(k+1,x^*) = f\big((1-\ell(k))B(k,x^*)\big), \quad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Теорема 3.3.4. (см. [5]). *Предположим, что уравнение* (10) *имеет решение* $x(k) \equiv x^* > 0$ *и существует* $a_1 \in [0, x^*)$ *такое, что* $0 < f'(x) < 1$ *для всех* $x \in (a_1, x^*)$. *Тогда для любого* $x \in (a_1, x^*)$ *найдется управление* $\overline{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *существует положительный предел*

$$H(\overline{\ell}, x(0)) = \lim_{k \to \infty} MA(k,x)\ell(k) = \lim_{k \to \infty} MB(k,x^*)\ell(k),$$

не зависящий от начального значения $x(0) \in (a_1, x^*)$.

Теорема 3.3.5. (см. [5]). *Если уравнение* (10) *имеет решение* $x(k) \equiv x^* > 0$ *и существует* $a_1 \in [0, x^*)$ *такое, что* $0 < f'(x) < 1$ *для всех* $x \in (a_1, x^*)$, *то для любого* $k = 1, 2, \ldots$ *и почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *имеет место неравенство*

$$MA(k,x)\ell(k) \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant MB(k,x^*)\ell(k).$$

Заключение. В работе рассмотрены задачи оптимальной добычи возобновляемого ресурса, заданного различными динамическими системами. Для моделей популяций, описанных динамическими системами с непрерывным временем, построены управления, доставляющие заданное и наибольшее значение характеристик сбора — средней временной выгоды и эффективности. Описан режим эксплуатации популяций, определенных дискретной динамической системой, при котором достигаются наибольшие значения характеристик сбора. Кроме того, для таких моделей построены управления, доставляющие наибольшее значение дисконтированного дохода на конечном и бесконечном промежутках времени. Для моделей однородных популяций, заданных динамическими системами со случайными параметрами, доказано существование предела и получены оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица.

Перечислим некоторые возможные направления развития исследований, проведенных в данной диссертационной работе:

1. для моделей эксплуатируемых популяций, развитие которых определено непрерывными или дискретными динамическими системами, представляет интерес исследование систем с периодической динамикой, в частности систем, описывающих сезонные изменения в развитии популяции. Для таких систем необходимо построить периодические управляющие воздействия, доставляющие наибольшие значения характеристик сбора возобновляемого ресурса;

2. построить управления, доставляющие наибольшие значения средней временной выгоды и эффективности сбора возобновляемого ресурса, развитие которого задано динамической системой с запаздыванием. В качестве примеров рассмотреть модель Хатчинсона и уравнение Рикера с запаздыванием;

3. исследовать задачу управления моментами сбора возобновляемого ресурса, заданного различными динамическими системами, для достижения наибольших значений средней временной выгоды и эффективности.

Благодарность. Автор диссертации выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Л. И. Родиной за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Егорова А. В. Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу // Вестник российских университетов. Математика. — 2021. — Т. 26, № 133. — С. 15—25. — DOI: 10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25.

2. Егорова А. В., Родина Л. И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, № 4. — С. 501—517. — DOI: 10.20537/vm190403.

3. Родин А. А., Родина Л. И., Черникова А. В. О способах эксплуатации популяции, заданной разностным уравнением со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2022. — Т. 32, № 2. — С. 211—227. — DOI: 10.35634/vm220204.
4. Родина Л. И., Черникова А. В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 1. — С. 167—179. — DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-167-179.
5. Черникова А. В. О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник российских университетов. Математика. — 2022. — Т. 27, № 140. — С. 386—404. — DOI: 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404.
6. Rodina L. I., Chernikova A. V. Problems of Optimal Resource Harvesting for Infinite Time Horizon // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 270, no. 4. — P. 609—623. — DOI: 10.1007/s10958-023-06372-7.

В сборниках трудов конференций

7. Егорова А. В. Об оптимальном режиме эксплуатации для достижения наибольшего дисконтированного дохода от извлечения ресурса // Теория управления и математическое моделирование (СТММ-2020) : Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова, Ижевск, 15-19 июня 2020. — Ижевск : Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. — С. 66—68. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=44213854.
8. Егорова А. В., Родина Л. И. Об оценке средней временной выгоды для структурированной популяции, подверженной промыслу // Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика. Т. 7, № 1. — 2019. — С. 129—131. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=38585998.
9. Родина Л. И., Черникова А. В. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели динамики популяции // Теория управления и математическое моделирование (СТММ-2022) : Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова, Ижевск, 13-17 июня 2022. — Ижевск : Издательский центр «Удмуртский университет», 2022. — С. 214—217. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=48933306.

10. Родина Л. И., Черникова А. В. Оптимизация характеристик дохода от добычи ресурса на бесконечном промежутке времени // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 4 / под ред. С. С. Мамонов. — Рязань : Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, 2022. — С. 90—93. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49296325.

11. Черникова А. В. О существовании предела средней временной выгоды для стохастических моделей эксплуатируемых популяций // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 4 / под ред. С. С. Мамонов. — Рязань : Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, 2022. — С. 108—110. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49296328.

12. Черникова А. В. Свойства характеристик сбора ресурса для моделей популяций, заданных дифференциальными уравнениями // Современные проблемы физико-математических наук (СПФМН-2022) : Материалы VIII-ой Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Орел, 25-26 ноября 2022. — Орел : ОГУ имени И. С. Тургенева, 2022. — С. 143—149.

Прочие публикации

13. Егорова А. В. О вычислении максимального дохода при эксплуатации структурированной популяции // Студенческая школа-конференция «Математическая весна-2019», Нижний Новгород, 2-5 мая 2019. — Нижний Новгород : НИУ ВШЭ, 2019. — С. 26—27.

14. Егорова А. В. О вычислении средней временной выгоды для эксплуатируемой популяции // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего, Москва, 13-15 мая 2019. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — С. 284—287. — DOI: 10.29003/m978-5-317-06111-1.

15. Егорова А. В. О вычислении средней временной выгоды при эксплуатации структурированной популяции [Электронный ресурс] // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2019», Москва, 8-12 апреля 2019. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2019/data/16172/89954_uid265407_report.pdf.

16. Егорова А. В. Об одной задаче оптимальной добычи возобновляемого ресурса // Современные проблемы математики и ее приложений (СоПроМат-2019) : тезисы докладов Международной (50-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 3-9 февраля 2019. — Екатеринбург : ИММ УрО РАН, УрФУ, 2019. — С. 32—33.

17. Егорова А. В., Родина Л. И. О некоторых задачах оптимальной добычи возобновляемого ресурса // Интегрируемые системы и нелинейная динамика : тезисы докладов Международной научной конференции, Ярославль, 1-5 октября 2018. — Ярославль : ЯрГУ, 2018. — С. 107—109.

18. Егорова А. В., Родина Л. И. Об оценке средней временной выгоды для вероятностной модели динамики популяции // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики : Материалы VI Международной научной конференции, Нальчик, 5-9 декабря 2021. — Нальчик : Издательская типография «Принт Центр», 2021. — С. 75. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=48116591.

19. Родина Л. И., Черникова А. В. Об эксплуатации структурированной популяции, заданной дифференциальными уравнениями, на бесконечном промежутке времени // Современные проблемы математики и ее приложений (СоПроМат-2023) : тезисы докладов Международной (54-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 6-10 и 17 февраля 2023. — Екатеринбург : ИММ УрО РАН, УрФУ, 2023. — С. 104—105. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=56345098.

20. Черникова А. В. Об оценке средней временной выгоды в вероятностной модели эксплуатируемой популяции // Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем» (MOCS-2022). Аннотации лекций и докладов, Суздаль, Владимир, 30 июня – 5 июля, 2022. — Суздаль. Владимир : «Аркаим», 2022. — С. 40—41.

21. Egorova A. V. About optimal harvesting of renewable resource at a finite period of time // Book of Abstracts II International conference «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», Nizhny Novgorod, 9-13 December, 2019. — Nizhny Novgorod : NRU HSE, 2019. — P. 47—48.

22. Egorova A. V. Optimizing discounted income for a structured population subject to harvesting // Book of Abstracts III International conference «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», Nizhny Novgorod, 12-13 December, 2020. — Nizhny Novgorod : NRU HSE, 2020. — P. 27—28.

23. Egorova A. V. Estimation of the average time profit for a probabilistic model of population dynamics // Book of Abstracts III Student Educational School-Conference Mathematical Spring 2021 Invitation to Dynamical Systems, Nizhny Novgorod, 30 March – 1 April, 2021. — Nizhny Novgorod : NRU HSE, 2021. — P. 14—15.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

24. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020665243 РФ. Программа вычисления максимального дохода при эксплуатации структурированной популяции / А. В. Егорова ; заявитель ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых». — № 2020664300 ; заявл. 16.11.2020 ; опубл. 24.11.2020. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=44443028.
25. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020665447 РФ. Программа для реализации алгоритма определения положения равновесия модели динамики однородной популяции, подверженной промыслу / А. В. Егорова ; заявитель ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых». — № 2020664319 ; заявл. 16.11.2020 ; опубл. 27.11.2020. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=44443335.
26. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021618274 РФ. Программа построения оптимальной траектории развития популяции двух видов, подверженных промыслу / А. В. Егорова ; заявитель ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых». — № 2021617311 ; заявл. 12.05.2021 ; опубл. 25.05.2021. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=46312380.