На правах рукописи

Фазлытдинов Марат Флюрович

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ФОРМУЛ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2023

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

Научный руководитель: **Юмагулов Марат Гаязович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Калякин Леонид Анатольевич** доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет», профессор кафедры математики и информатики.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет».

Защита состоится 06 декабря 2023 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета 24.1.073.01 в на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул.Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:
https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.01/

Автореферат разослан «____» __________ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Костоусова Елена Кирилловна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Важную роль в теории бифуркаций динамических систем и ее приложениях играют так называемые бифуркационные формулы. Этим термином можно объединить различные формулы для вычисления числовых характеристик, знание которых позволяет провести качественный анализ различных сценариев бифуркаций. К бифуркационным формулам можно отнести формулы, позволяющие вычислять коэффициенты нормальных форм уравнений вблизи особых точек, формулы для вычисления ляпуновских величин, показатели транскритичности бифуркаций, формулы для аппроксимаций центральных многообразий негиперболических точек равновесия или циклов и др.

В задаче построения бифуркационных формул условно следует выделить два подхода. Первый подход связан с получением бифуркационных формул в терминах исходных уравнений. Получаемые при этом формулы, как правило, достаточно сложны, но основным их преимуществом является именно тот факт, что они позволяют проводить анализ бифуркаций непосредственно в терминах исходных уравнений. Второй подход связан с применением теоремы о центральном многообразии и метода нормальных форм. Получаемые при этом бифуркационные формулы оказываются достаточно простыми и эффективными для анализа бифуркации, но следует отметить, что их получение требует предварительного преобразования исходных уравнений, что далеко не всегда является тривиальной задачей. Вопрос о том, какой из подходов лучше, не имеет однозначного ответа, так как разные классы задач обладают различными свойствами, следовательно, в одних ситуациях какие-либо методы предпочтительнее других, а в других – наоборот.

В научной школе профессора М.А. Красносельского были предложены новые подходы исследования локальных бифуркаций динамических систем, основанные на топологических и операторных методах изучения нелинейных задач с параметрами. Эти подходы позволили получить как новые общие признаки различных сценариев бифуркаций, так и привели к формулам и алгоритмам, позволяющим (в терминах исходных уравнений) провести детальное исследование бифуркаций, включая анализ устойчивости решений и их приближенное построение. Оказалось, что многие полученные при этом формулы идейно близки к бифуркационным формулам.

Представляется актуальным дальнейшее развитие указанных операторных методов с целью получения новых бифуркационных формул для основных сценариев локальных бифуркаций как в непрерывных, так и дискретных динамических системах. Здесь особо важными представляются разработки общих подходов в задаче построения новых формул для вычисления ляпуновских величин, показателей транскритичности, второй и третьей аппроксимаций центральных многообразий негиперболических точек равновесия или циклов.

Степень разработанности темы. Задаче построения бифуркационных формул посвящены исследования многих авторов (Л.А. Калякин, Ю.А. Кузнецов, Л.П. Шильников, J. Guckenheimer, B.D. Hassard, N.D. Kazarinov, J.E. Marsden, M. McCracken, U.-H. Wan, Sh-N. Chow, Ch. Li, D. Wang и др.). Особое внимание в их исследованиях уделяется получению формул для расчета коэффициентов нормальных форм уравнений вблизи особых точек, ляпуновских величин, аппроксимаций центральных многообразий.

В задаче вычисления ляпуновских величин в первую очередь следует указать на подходы, связанные с применением теоремы о центральном многообразии и метода нормальных форм (В.И. Арнольд, А.Д. Брюно, С.М. Воронин, В.А Плисс, S.-E. Chow, A. Kelley, C. Li, D. Wang и др.). Эти подходы позволяют для задач об основных сценариях локальных бифуркаций преобразовать исходные уравнения к весьма простому (каноническому) виду, коэффициенты нелинейности которого и определяют ляпуновские величины.

Другое направление исследований связано с вычислением ляпуновских величин в терминах исходных уравнений, которому посвящены работы многих авторов (Н.Н. Баутин, Д.В. Тураев, Л.П. Шильников, L.O. Chua, J. Guckenheimer, P. Holmes, J.E. Marsden, M. McCracken и др.). Следует также отметить подходы, основанные на применении современной компьютерной техники и пакетов символьных вычислений. В то время как явные выражения первой и второй ляпуновских величин для многих сценариев бифуркаций были получены еще в 1940–1950-е гг., следующие ляпуновские величины в виде символьных выражений были получены относительно недавно (Г.А. Леонов, Н.В. Кузнецов, Е.В. Кудряшова, S. Lynch и др.).

В работах Ю.А. Кузнецова, Е.В. Никульчева, Л.П. Шильникова, E. Freire, J. Guckenheimer, B.D. Hassard, P. Holmes и др. был предложен ряд эффективных подходов, позволяющих получать приближенное представление центрального многообразия. В частности, детально изучены ситуации, когда матрица линеаризации имеет простое нулевое собственное значение или пару простых чисто мнимых значений. Отметим также предложенные рядом авторов (Ю.А. Кузнецов, M. Ait Babram, M.L. Hbid, B. Hamzi, R. Qesmi, G. Santin, D. Wittwar и др.) подходы, основанные на применении современной компьютерной техники и пакетов символьных вычислений. Эти подходы позволили существенно продвинуться в построении центральных многообразий, в частности, в задаче вычисления аппроксимаций третьего и более высоких порядков.

В задачах исследования поведения динамических систем в окрестностях особых точек широкое распространение получили подходы, основанные на применении методов функционального анализа, топологических и геометрических методов и в частности, метода функционализации параметра. Эти подходы, которые можно называть операторными, показали свою эффективность в работах М.М. Вайнберга, П.П. Забрейко, М.А. Красносельского, В.С. Козякина, Э.М. Мухамадиева, Д.И. Рачинского, Е.Н. Розенвассера, В.А. Треногина, М.Г. Юмагулова и других математиков. На основе разработанных ими методов удалось решить ряд важных для теории и практики задач, в частности, классифицировать основные типы локальных бифуркаций в нелинейных динамических системах, получить эффективные признаки различных ветвлений и бифуркаций, провести анализ устойчивости решений, предложить методы построения решений и др.

Цели и задачи. Основной целью настоящей работы является разработка общих подходов для получения новых формул для вычисления ляпуновских величин, показателей транскритичности и аппроксимаций центральных многообразий, основанных на операторных методах исследования локальных бифуркаций в нелинейных динамических системах. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: обосновать операторные методы исследования локальных бифуркаций в задаче получения новых бифуркационных формул в терминах исходных уравнений, получить бифуркационные формулы в задачах об основных сценариях локальных бифуркаций точек равновесия нелинейных динамических систем с непрерывным и дискретным временем.

Методы исследования. В работе использованы методы теории динамических систем, теории дифференциальных уравнений, теории локальных бифуркаций, методы малого параметра, операторные методы решения нелинейных уравнений с параметрами.

Научная новизна: Все полученные в работе результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. В работе предложен и обоснован общий подход для вычисления ляпуновских величин и приближенного построения центральных многообразий нелинейных динамических систем в терминах исходных уравнений. Полученные бифуркационные формулы могут быть использованы для анализа локальных бифуркаций в динамических системах с непрерывным и дискретным временем. Полученные результаты доведены до расчетных формул и программ численного построения бифуркационных формул.

Основные положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие результаты:

1. Дано обоснование операторным методам исследования локальных бифуркаций в окрестностях негиперболических точек равновесия нелинейных динамических систем, позволяющих получить новые бифуркационные формулы в

терминах исходных уравнений.

2. Получены новые формулы для вычисления ляпуновских величин и показателей транскритичности в задачах об основных сценариях локальных бифуркаций в нелинейных динамических системах с непрерывным и дискретным временем.

3. Получены новые формулы для второй и третьей аппроксимаций центральных многообразий в основных случаях негиперболичности точек равновесия нелинейных динамических систем с непрерывным и дискретным временем.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность обеспечивается строгостью математических доказательств полученных утверждений. Приводятся примеры, иллюстрирующие применение полученных бифуркационных формул в задачах исследования локальных бифуркаций динамических систем с непрерывным и дискретным временем. Результаты работы докладывались:

1. на Всероссийской конференции с международным участием "Теория управления и математическое моделирование", посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (г. Ижевск, Удмуртский государственный университет, 09–11 июня 2015 г.);

2. на Международной научной конференции "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ" (г. Уфа, БашГУ, 01–03 октября 2015г.);

3. на 3-ей международной конференции "Устойчивость и процессы управления", посвященная 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова (г. Санкт-Петербург, 5–9 октября 2015 г.);

4. на Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании" (г. Уфа, БашГУ, 27 сентября–01 октября 2015 г.);

5. на Международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа-2019" (г. Уфа, БашГУ, 16–19 октября 2019 г.);

6. на Международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа-2020" (г. Уфа, БашГУ, 11–14 ноября 2020 г.);

7. на семинарах кафедр математического анализа и дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета (руководители: профессор З.Ю. Фазуллин, профессор М.Г. Юмагулов, г. Уфа, БашГУ, 2018–2023 гг.);

8. на семинаре отдела динамических систем Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН (руководители: член-корреспондент РАН В.Н. Ушаков, профессор А.М. Тарасьев, г. Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2021 г.);

9. на Международной научной конференции "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения" (г. Уфа, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, 14–18 марта 2022 г.);

10. на общегородском семинаре им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (руководители: профессор Л.А. Калякин, профессор В.Ю. Новокшенов, г. Уфа, ИМВЦ УФИЦ РАН, 18 октября 2022 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых Web of Science и Scopus [1–4], 1 – в научно-техническом журнале [6], 9 – в тезисах докладов [7–15]. Также получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [5].

Личный вклад. Постановки основных задач принадлежат научному руководителю. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В работах [2, 3], выполненных в соавторстве с научным руководителем, соискателю принадлежат доказательства утверждений, а также разработка и обоснование алгоритмов приближенного построения центральных многообразий. При выполнении работы [1], опубликованной в соавторстве, соискателю принадлежат обоснование бифуркационных формул в задачах об основных сценариях локальных бифуркаций в дискретных динамических системах (п. 3), о бифуркации положения равновесия в непрерывных динамических системах (п. 2.2), а также обоснование независимости бифуркационных формул от выбора нормировки векторов в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа в непрерывных динамических системах (п. 2.3, в теоремах 5 и 6). Из совместной работы [1] в диссертации для полноты изложения приведены формулировки вспомогательных утверждений – лемма 3.1 и следствия 3.1, 3.2, которые были получены соавторами.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Главы разбиты на параграфы. Нумерация формул двойная — первая цифра означает номер главы, вторая — номер формулы в главе. Такая же нумерация принята для лемм, теорем, замечаний, примеров и рисунков. Полный объем диссертации 130 страниц текста с 10 рисунками. Список литературы содержит 114 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, приводятся в краткой форме постановки основных задач, излагается научная новизна, теоретическая и практическая значимость представляемой работы, методы исследования, выносимые на защиту положения, а также степень достоверности и апробации.

Первая глава содержит необходимые вспомогательные сведения из теории динамических систем, а также развернутые постановки основных задач.

В **§1.1** приводятся известные сведения из теории центрального многообразия непрерывных динамических систем.

Рассмотрим непрерывную динамическую систему:

$$x' = F(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

где функция $F(x)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N$, $m \geqslant 4$, т.е. функция $F(x)$ в $\mathbb{R}^N$ имеет непрерывные производные всех порядков до m включительно.

Пусть система (1) имеет негиперболическую точку равновесия $x = 0$, т.е. $F(0) = 0$ и матрица Якоби $A = F'_x(0)$ имеет хотя бы одно чисто мнимое собственное значение[1]. А именно, пусть спектр σ матрицы A состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, вещественные части которых равны нулю, а σ^0 – остальные собственные значения. Обозначим через E_0, E^0 – корневые подпространства матрицы A, отвечающие, соответственно, частям σ_0, σ^0 ее спектра. Пусть k_0 и k^0 – это размерности подпространств E_0 и E^0.

Имеет место следующая фундаментальная теорема о центральном многообразии.

Теорема 1.1 *Существует δ_0-окрестность $T(0, \delta_0)$ точки $x = 0$ такая, что система (1) имеет в этой окрестности C^m-гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие W_c, касающееся в точке $x = 0$ подпространства E_0.*
Многообразие W_c называют *центральным многообразием* системы (1).

В **§1.2** рассматривается непрерывная динамическая система, зависящая от скалярного параметра μ :

$$x' = F(x, \mu)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N,\, \mu \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где функция $F(x, \mu)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $m \geqslant 4$.

[1] Здесь и ниже под термином “чисто мнимое собственное значение” будет пониматься собственное значение вида $\lambda = i\omega$, где $\omega \in R$; в частности, собственное значение $\lambda = 0$ также будет считаться чисто мнимым.

Предполагается, что при некотором $\mu = \mu_0$ система (2) имеет *негиперболическую* точку равновесия $x = 0$, т.е. $F(0, \mu_0) = 0$ и матрица Якоби $A_0 = F'_x(0, \mu_0)$ имеет хотя бы одно чисто мнимое собственное значение. В этом случае при переходе параметра μ через μ_0 в системе (2) в окрестности точки $x = 0$ возможны различные сценарии бифуркации. Значение μ_0 называется *точкой бифуркации* системы (2).

Основными характеристиками, позволяющими проводить качественный анализ соответствующих бифуркаций, являются ляпуновские величины и показатели транскритичности. Приведем в краткой форме соответствующие сведения в следующих основных случаях:

S1. матрица $A_0 = F'_x(0, \mu_0)$ имеет простое собственное значение 0;

S2. матрица $A_0 = F'_x(0, \mu_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$.

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют ненулевые вещественные части.

Основным сценарием в случае S1 является бифуркация кратного равновесия, связанная с возникновением у системы (2) в окрестности точки равновесия $x = 0$ новых точек равновесия. Методы, основанные на теореме о центральном многообразии, позволяют свести N-мерную систему (2) (при $\mu = \mu_0$) к одномерному уравнению:

$$u' = l_2 u^2 + l_3 u^3 + \ldots + l_m u^m + o(u^m)\,. \tag{3}$$

Числа l_2, l_3,..., называют *ляпуновскими величинами (первой, второй и т.д.)* в задаче о бифуркации кратного равновесия системы (2).

Основным сценарием в случае S2 является бифуркация Андронова-Хопфа, связанная с возникновением у системы (2) в окрестности точки равновесия $x = 0$ нестационарных периодических колебаний. Теорема о центральном многообразии и теория нормальных форм позволяют свести N-мерную систему (2) (при $\mu = \mu_0$) к двумерной системе вида:

$$\begin{cases} x_1' = -\omega_0 x_2 + (L_1 x_1 - \Omega_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + o(r^3)\,, \\ x_2' = \omega_0 x_1 + (\Omega_1 x_1 + L_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + o(r^3)\,, \end{cases} \tag{4}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Число L_1 называют *первой ляпуновской величиной* системы (2) в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа.

Реализация того или иного сценария бифуркаций системы (2) требует выполнения некоторого условия невырожденности правой части системы. Формулы, приводящие к такому условию, позволяют вычислять некоторую числовую характеристику, которую будем называть *показателем транскритичности*.

В **§1.3** рассматривается дискретная динамическая система:

$$x_{n+1} = F(x_n)\,,\ n = 0, 1, 2, \dots\,,\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{5}$$

где функция $F(x)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N$, $m \geqslant 4$.

Пусть система (5) имеет негиперболическую точку равновесия $x = 0$, т.е. $F(0) = 0$ и матрица Якоби $A = F'_x(0)$ имеет хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю. А именно, пусть спектр σ матрицы A состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, модули которых равны единице, а σ^0 – остальные собственные значения. Обозначим через E_0, E^0 – корневые подпространства матрицы A, отвечающие, соответственно, частям σ_0, σ^0 ее спектра. Пусть k_0 и k^0 – это размерности подпространств E_0 и E^0.

Имеет место следующий аналог теоремы 1.1 о центральном многообразии.

Теорема 1.2 *Существует δ_0-окрестность $T(0, \delta_0)$ точки $x = 0$ такая, что система (5) имеет в этой окрестности C^m-гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие W_c, касающееся в точке $x = 0$ подпространства E_0.*
Многообразие W_c называют *центральным многообразием* системы (5).

Далее, в **§1.4** рассматривается дискретная динамическая система, зависящая от скалярного параметра μ

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu)\,,\ n = 0, 1, \dots\,,\ x \in \mathbb{R}^N,\ \mu \in \mathbb{R}\,, \tag{6}$$

где функция $F(x, \mu)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $m \geqslant 4$.

Предполагается, что при некотором $\mu = \mu_0$ система (6) имеет *негиперболическую* точку равновесия $x = 0$, т.е. $F(0, \mu_0) = 0$ и матрица Якоби $A_0 = F'_x(0, \mu_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю. В этом случае при переходе параметра μ через μ_0 в системе (6) в окрестности точки $x = 0$ возможны различные сценарии бифуркации. Значение μ_0 называется *точкой бифуркации* системы (6).

Как и для непрерывной системы (2), ляпуновские величины и показатели транскритичности позволяют провести качественный анализ соответствующих бифуркаций в системе (6). Приведем в краткой форме соответствующие сведения в следующих основных случаях:

P1. матрица $A_0 = F'_x(0, \mu_0)$ имеет простое собственное значение 1;

P2. матрица $A_0 = F'_x(0, \mu_0)$ имеет простое собственное значение -1;

P3. матрица $A_0 = F'_x(0, \mu_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где θ_0 – иррационально или $\theta_0 = p/q$, где p/q – рациональная несократимая дробь, причем $q \geqslant 5$.

Во всех этих случаях предполагается, что модули остальных собственных значений матрицы A_0 не равный одному.

Основным сценарием в случае P1 является бифуркация кратного равновесия, связанная с возникновением у системы (6) в окрестности точки равновесия $x = 0$ новых точек равновесия. Методы, основанные на теореме о центральном многообразии, позволяют свести N-мерную систему (6) (при $\mu = \mu_0$) к одномерному уравнению:

$$u_{n+1} = u_n + l_2 u_n^2 + l_3 u_n^3 + \ldots + l_m u_n^m + o(u_n^m)\,.$$

Числа l_2, l_3,..., называют *ляпуновскими величинами (первой, второй и т.д.)* в задаче о бифуркации кратного равновесия системы (6).

Основным сценарием в случае P2 является бифуркация удвоения периода, связанная с возникновением у системы (6) в окрестности точки равновесия $x = 0$ циклов периода два. Методы, основанные на теореме о центральном многообразии и теории нормальных форм, позволяют свести N-мерную систему (6) (при $\mu = \mu_0$) к скалярному уравнению:

$$u_{n+1} = -u_n - l_3 u_n^3 - l_5 u_n^5 - \ldots - l_m u_n^m - o(u_n^m)\,.$$

Числа l_3, l_5,..., называют ляпуновскими величинами.

Основным сценарием в случае P3 является бифуркация Андронова-Хопфа, связанная с возникновением у системы (6) в окрестности точки $x = 0$ инвариантной кривой $\Gamma(\mu)$, содержащей континуум периодических или квазипериодических решений. Методы, основанные на теореме о центральном многообразии и теории нормальных форм, позволяют свести N-мерную систему (6) (при $\mu = \mu_0$) к двумерной системе:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos 2\pi\theta_0 - y_n \sin 2\pi\theta_0 + (\alpha x_n - \beta y_n)(x_n^2 + y_n^2) + o(r_n^3)\,, \\ y_{n+1} = x_n \sin 2\pi\theta_0 + y_n \cos 2\pi\theta_0 + (\beta x_n + \alpha y_n)(x_n^2 + y_n^2) + o(r_n^3)\,, \end{cases} \tag{7}$$

где $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$. Положим

$$L_1 = \alpha \cos 2\pi\theta_0 + \beta \sin 2\pi\theta_0\,, \quad \Omega_1 = \beta \cos 2\pi\theta_0 - \alpha \sin 2\pi\theta_0\,. \tag{8}$$

Число L_1 называют *первой ляпуновской величиной* системы (6) в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа.

В **§1.5** приводятся развернутые постановки основных задач, изучаемых в диссертации. А именно: задача получения новых формул для построения аппроксимации центрального многообразия; задача получения формул для расчета ляпуновских величин и показателей транскритичности для основных сценариев локальных бифуркаций динамических систем в терминах исходных уравнений.

Основные результаты работы содержатся во второй и третьей главах.

Вторая глава посвящена разработке общей операторной схемы построения аппроксимаций второго и третьего порядка центральных многообразий динамических систем с непрерывным и дискретным временем.

В **§2.1** приведены результаты для непрерывной динамической системы (1). Здесь используются обозначения спектра, корневых подпространств и их размерностей, приведенные на стр. 8.

Пространство $\mathbb{R}^N$ представляется в виде прямой суммы $\mathbb{R}^N = E_0 \bigoplus E^0$ инвариантных для оператора $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ подпространств E_0 и E^0. Обозначим через $P_0 : \mathbb{R}^N \to E_0$ и $P^0 : \mathbb{R}^N \to E^0$ соответствующие операторы спектрального проектирования.

Центральное многообразие в δ_0-окрестности $T(0, \delta_0)$ негиперболической точки равновесия $x = 0$ системы (1) может быть описано равенством вида:

$$W_c = \{x : \; x = u + \psi(u) \;\; | \;\; u \in E_0 \,, \;\; \psi(u) \in E^0 \,, \quad \psi(0) = 0, \psi'(0) = 0 \,\} \,, \tag{9}$$

где $\psi(u)$ является C^m-гладкой функцией; здесь $\psi'(u)$-матрица Якоби. Эту функцию будем строить в виде:

$$\psi(u) = \psi_2(u) + \psi_3(u) + \widehat{\psi}_4(u) \,, \tag{10}$$

где $\psi_p(u)$ – однородные вектор-полиномы порядка p, определенные в E_0 и принимающие значения в E^0, а функция $\widehat{\psi}_4(u)$ является C^m-гладкой в $T(0, \delta_0)$ и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{\psi}_4(u)\| = O(\|u\|^4)$ при $u \to 0$.

Система (1) представима в виде

$$x' = Ax + a(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где $A = F_x'(0)$ – матрица Якоби, а функция $a(x)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет равенствам: $a(0) = 0$ и $a'(0) = 0$; здесь $a'(x)$ – матрица Якоби. Предполагается, что функция $a(x)$ представима в виде:

$$a(x) = a_2(x) + a_3(x) + \widehat{a}_4(x) \,, \tag{11}$$

где $a_2(x)$, $a_3(x)$ – однородные вектор-полиномы порядка 2 и 3 соответственно, а функция $\widehat{a}_4(x)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{a}_4(x)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$.

Для целого $p \geqslant 2$ обозначим через F_p линейное пространство однородных порядка p вектор-полиномов $\psi(u)$, определенных в подпространстве E_0 и принимающих значения в подпространстве E^0.

Через L обозначим действующий в пространстве F_p линейный оператор, сопоставляющий каждой функции $\psi(u) \in F_p$ функцию $L\psi(u) \in F_p$, определенную равенством

$$L\psi(u) = \psi'(u)Au - A\psi(u)\,; \tag{12}$$

здесь $\psi'(u)$ – матрица Якоби. Для простоты будем использовать одно и то же обозначение L для всех действующих в пространствах F_p операторов (12) независимо от значения p.

Рассмотрим уравнение

$$L\psi(u) = b(u)\,, \tag{13}$$

где $\psi(u) \in F_p$ – неизвестная функция, $b(u) \in F_p$ – заданная функция. Уравнения вида (13) называют *гомологическими уравнениями*. Одним из основных результатов работы, полученных при решении задачи построения центрального многообразия системы (1), является следующее утверждение.

Теорема 2.2 *Определенный равенством (12) линейный оператор $L:\, F_p \to F_p$ обратим и, следовательно, гомологическое уравнение (13) однозначно разрешимо для любого $b(u) \in F_p$.*

На основе этого утверждения в работе получены новые формулы для аппроксимации центрального многообразия системы (1). Приведем эти формулы.

Положим для краткости обозначений:

$$a_2 = a_2(u), \quad a_3 = a_3(u), \quad a_2' = a_2'(u)\,; \tag{14}$$

здесь $u \in E_0$.

Теорема 2.4 *В условиях теоремы 1.1 центральное многообразие W_c системы (1) в малой окрестности точки равновесия $x = 0$ может быть описано равенством (9), в котором $u = P_0x$, $\psi(u)$ – функция (10), а $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ определяются равенствами:*

$$\psi_2(u) = L^{-1}P^0a_2\,, \quad \psi_3(u) = L^{-1}P^0[-\psi_2'(u)P_0a_2 + a_2'\psi_2(u) + a_3]\,;$$

здесь L^{-1} – оператор, обратный для оператора (12), $\psi_2'(u)$ – матрица Якоби функции $\psi_2(u)$. Функция $\widehat{\psi}_4(u)$ является C^m-гладкой в $T(0, \delta_0)$ и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{\psi}_4(u)\| = O(\|u\|^4)$ при $u \to 0$.

Для вычисления функций $\psi_2(u), \psi_3(u)$ необходимо знание обратного оператора L^{-1}. В работе предложен алгоритм построения оператора L^{-1}. Получены формулы аппроксимации центрального многообразия для случаев S1 и S2, указанных на стр. 9.

В **§2.2** приведены результаты в задаче построения центральных многообразий дискретных динамических систем (5) в условиях теоремы 1.2 . Здесь используются обозначения спектра, корневых подпространств и их размерностей приведенные на стр. 10.

Пространство $\mathbb{R}^N$ представляется в виде прямой суммы $\mathbb{R}^N = E_0 \bigoplus E^0$ инвариантных для оператора $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ подпространств E_0 и E^0. Обозначим через $P_0 : \mathbb{R}^N \to E_0$ и $P^0 : \mathbb{R}^N \to E^0$ соответствующие операторы спектрального проектирования.

Здесь, как и для непрерывного случая, центральное многообразие может быть описано равенством (9), где неизвестную функцию $\psi(u)$ будем строить в виде (10).

Система (5) представима в виде

$$x_{n+1} = Ax_n + a(x_n)\,, \;\; n = 0, 1, 2, \dots\,, \quad x_n \in \mathbb{R}^N\,,$$

где $A = F'_x(0)$ – матрица Якоби, а функция $a(x)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет равенствам: $a(0) = 0$ и $a'(0) = 0$; здесь $a'(x)$ – матрица Якоби. Предполагается, что функция $a(x)$ имеет вид (11).

Как и выше, через F_p обозначим линейное пространство однородных порядка p вектор-полиномов $\psi(u)$, определенных в подпространстве E_0 и принимающих значения в подпространстве E^0. Через J обозначим линейный оператор, действующий в пространстве F_p и сопоставляющий каждой функции $\psi(u) \in F_p$ функцию

$$J\psi(u) = \psi(Au) - A\psi(u)\,. \tag{15}$$

При этом для простоты будем использовать одно и то же обозначение J для всех действующих в пространствах F_p операторов (15) независимо от значения p.

Рассмотрим уравнение

$$J\psi(u) = b(u)\,, \tag{16}$$

где $\psi(u) \in F_p$ – неизвестная функция, $b(u) \in F_p$ – заданная функция. Уравнения вида (16) называют *гомологическими уравнениями.*

Одним из основных результатов работы, полученных при решении задачи построения центральных многообразий дискретных систем, является следующее утверждение (аналог теоремы 2.2).

Теорема 2.6 *Определенный равенством (15) линейный оператор $J:\ F_p \to F_p$ обратим и, следовательно, гомологическое уравнение (16) однозначно разрешимо для любого $b(u) \in F_p$.*

На основе этого утверждения в работе получены новые формулы для аппроксимации центрального многообразия системы (5). Приведем эти формулы. Для краткости будем использовать обозначения (14).

Теорема 2.9 *В условиях теоремы 1.2 центральное многообразие W_c системы (5) может быть описано равенством (9), в котором $u = P_0x$, $\psi(u)$ – функция*

(10), а $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ определяются равенствами:

$$\psi_2(u) = J^{-1}P^0 a_2\,, \quad \psi_3(u) = J^{-1}P^0[-\psi_2'(Au)P_0 a_2 + a_2'\psi_2(u) + a_3]\,;$$

здесь J^{-1} – оператор, обратный для оператора (15), $\psi_2'(u)$ матрица Якоби функции $\psi_2(u)$. Функция $\widehat{\psi}_4(u)$ является C^m-гладкой в $T(0,\delta_0)$ и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{\psi}_4(u)\| = O(\|u\|^4)$ при $u \to 0$.

В работе предложен алгоритм построения оператора J^{-1}. Получены формулы аппроксимации центрального многообразия для случаев P1-P3, указанных на стр. 10.

Третья глава посвящена разработке общей операторной схемы исследования локальных бифуркаций в системах (2) и (6), позволяющей вычислять ляпуновские величины и показатели транскритичности в терминах исходного уравнения.

В **§3.1** рассматривается указанная задача для непрерывной динамической системы (2). Эта система представима в виде

$$x' = A(\mu)x + a(x,\mu) + u(\mu)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N\,,\ \mu \in \mathbb{R}; \tag{17}$$

здесь $A(\mu) = F_x'(0,\mu)$ – матрица Якоби, $u(\mu) = F(0,\mu)$, а функция $a(x,\mu)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ и удовлетворяет равенствам: $a(0,\mu) = 0$ и $a_x'(0,\mu) = 0$; здесь $a_x'(x,\mu)$ – матрица Якоби. Функция $u(\mu)$ удовлетворяет равенству $u(\mu_0) = 0$.

Предполагается, что функция $a(x,\mu)$ имеет вид:

$$a(x,\mu) = a_2(x,\mu) + a_3(x,\mu) + \widehat{a}_4(x,\mu)\,, \tag{18}$$

где $a_2(x,\mu)$, $a_3(x,\mu)$ – однородные вектор-полиномы второго и третьего порядка по x соответственно, а $\widehat{a}_4(x,\mu)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющей соотношению: $\|\widehat{a}_4(x,\mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$ равномерно по μ.

Рассматриваются основные ситуации негиперболичности, когда матрица Якоби $A_0 = A(\mu_0) = F_x'(0,\mu_0)$ удовлетворяет условиям одного из случаев S1 и S2, указанных на стр. 9.

Рассмотрим сначала случай S1, соответствующий бифуркации кратного равновесия в системе (17). Приведем утверждение, позволяющее вычислять ляпуновские величины l_2 и l_3 (см. уравнение (3)) непосредственно в терминах исходного уравнения (17).

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно выбрать в соответствии с равенствами

$$\|e\| = 1\,, \quad (e,g) = 1\,. \tag{19}$$

Теорема 3.1 *Ляпуновские величины системы (17) в задаче о бифуркации кратного равновесия определяются равенствами:*

$$l_2 = (a_2, g)\,, \quad l_3 = (a_3, g) + (a_2' B_0^{-1} P^0 a_2, g)\,,$$

где $B_0 = -A_0 + P_0$. Если $a_2(x, \mu) \equiv 0$, то $l_2 = 0$ и $l_3 = (a_3, g)$.
Также в работе приведены формулы для вычисления показателей транскритичности.

Бифуркация кратного равновесия системы (17) может реализовываться по различным сценариям, основными из которых являются седло-узловая бифуркация, транскритическая бифуркация и бифуркация типа вилки. В диссертации указан ряд свойств этих сценариев, основанных на анализе ляпуновских величин и показателей транскритичности.

Рассмотрим теперь случай S2, соответствующий бифуркации Андронова-Хопфа. Приведем операторную схему, позволяющую вычислить ляпуновские величины L_1 и Ω_1 (см. уравнение (4)) в терминах исходного уравнения (17). В этом случае предполагается, что в системе (17) $u(\mu) \equiv 0$.

Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы, удовлетворяющие равенствам

$$A_0(e + ig) = \omega_0 i(e + ig) \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -\omega_0 i(e^* + ig^*)\,,$$

где A_0^* – транспонированная матрица. Векторы e, g, e^*, g^* нормируются в соответствии с равенствами:

$$\|e\| = \|g\| = 1\,,\ (e, e^*) = (g, g^*) = 1\,,\ (e, g^*) = (g, e^*) = 0\,, \tag{20}$$

что позволяет определить оператор P_0 спектрального проектирования посредством равенства $P_0 x = (x, e^*)e + (x, g^*)g$.

Положим $e(t) = e\cos 2\pi t - g\sin 2\pi t$ и определим матрицы:

$$B_0 = e^{T_0 A_0}\,,\ \ B_2 = \int\limits_0^1 e^{(1-t)T_0 A_0} F_2(t)\, dt\,;$$

здесь $F_2(t) = T_0 a_{2x}'(e(t), \mu_0) e^{T_0 A_0 t}$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$, $a_{2x}'(x, \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x, \mu)$ (см. равенство (18)). Отметим, что оператор $I - B_0 + P_0\ : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ обратим. Определим также векторы

$$f_3(t) = a_3(e(t), \mu_0) + F_2(t) \int\limits_0^t e^{-\tau T_0 A_0} a_2(r(\tau), \mu_0)\, d\tau\,,$$

$$\rho_2 = \int_0^1 e^{(1-t)T_0 A_0} a_2(e(t), \mu_0)\, dt \ \ , \quad \rho_3 = \int_0^1 e^{(1-t)T_0 A_0} f_3(t)\, dt \, .$$

В работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 3.8 *Ляпуновские величины L_1 и Ω_1 системы (17) в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа определяются равенствами:*

$$L_1 = (\varphi + \rho_3, e^*), \quad \Omega_1 = -(\varphi + \rho_3, g^*)\, ; \tag{21}$$

здесь $\varphi = B_2(I - B_0 + P_0)^{-1}\rho_2$. При этом числа (21) не зависят от выбора векторов e, g, e^*, g^* в соответствии с равенствами (20).

Положим $\gamma_1 = (A_0' e, e^*) + (A_0' g, g^*)$, где $A_0' = A_\mu'(\mu_0)$. Пусть $\gamma_1 \neq 0$. В этом случае положим

$$\mu_2 = -\frac{2}{\gamma_1} L_1 \, . \tag{22}$$

Число (22) будем называть *показателем транскритичности* в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа для системы (17). Этот показатель в совокупности с первой ляпуновской величиной L_1 позволяет изучить направленность бифуркации и условия устойчивости возникающих бифурцирующих решений системы (17).

Теорема 3.9 *Пусть $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$). Тогда бифурцирующие решения $x(t,\mu)$ системы (17) возникают при $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$).*

Теорема 3.10 *Пусть все отличные от $\pm\omega_0 i$ собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Тогда при всех малых $|\mu - \mu_0|$ существующие в условиях теоремы 3.9 бифурцирующие решения $x(t,\mu)$ системы (17) асимптотически орбитально устойчивы, если $L_1 < 0$; они неустойчивы, если $L_1 > 0$.*

В **§3.2** приведены основные результаты, относящиеся к дискретной динамической системе (6). Она может быть представлена в виде:

$$x_{n+1} = A(\mu)x_n + a(x_n,\mu) + u(\mu)\, , \ \ n = 0, 1, \dots\, , \quad x_n \in \mathbb{R}^N\, , \, \mu \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Здесь $A(\mu) = F_x'(0,\mu)$ – матрица Якоби, $u(\mu) = F(0,\mu)$, а функция $a(x,\mu)$ является C^m-гладкой в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ и удовлетворяет равенствам: $a(0,\mu) = 0$ и $a_x'(0,\mu) = 0$; здесь $a_x'(x,\mu)$ – матрица Якоби. Отметим, что $u(\mu_0) = 0$. Предполагается, что функция $a(x,\mu)$ имеет вид (18).

Для системы (23) рассматриваются основные случаи негиперболичности, когда матрица Якоби $A_0 = A(\mu_0) = F_x'(0,\mu_0)$ удовлетворяет условиям одного из случаев P1-P3, указанных на стр. 10.

В случае P1 получаемые результаты и утверждения аналогичны (при соответствующих модификациях) случаю S1 для непрерывной динамической системы (2).

В случае P2 основным сценарием бифуркации является бифуркация удвоения периода. Здесь предполагается, что $u(\mu) \equiv 0$. Приведем утверждение, позволяющее вычислять ляпуновскую величину l_3 в терминах исходного уравнения.

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению -1. Эти векторы можно выбрать в соответствии с равенствами (19), что позволяет определить оператор P_0 спектрального проектирования посредством равенства $P_0x = (x, g)e$. Отметим, что по построению линейный оператор $I - A_0^2 + P_0 \,:\, R^N \to R^N$ обратим. Положим $\Gamma_0 = (I - A_0^2 + P_0)^{-1} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

Теорема 3.15 *Ляпуновская величина l_3 системы (23) в задаче о бифуркации удвоения периода определяется равенством:*

$$l_3 = -\frac{(2a_3(e,\mu_0) + a_2'(e,\mu_0)[I + \Gamma_0(I + A_0)^2]a_2(e,\mu_0), g)}{2}\,.$$

Положим $\gamma_1 = (A_0'e, g)$, где $A_0' = A_\mu'(\mu_0)$. Пусть $\gamma_1 \neq 0$. В этом случае положим

$$\mu_2 = l_3/\gamma_1\,. \tag{24}$$

Число (24) будем называть *показателем транскритичности* в задаче о бифуркации удвоения периода для системы (23). В диссертации указаны свойства сценария бифуркации удвоения периода, основанные на анализе ляпуновской величины и показателя транскритичности.

Рассмотрим случай P3. В этом случае реализуется сценарий бифуркации Андронова-Хопфа. Здесь ляпуновские величины L_1 и Ω_1 определены в (7) и (8). Приведем формулы, позволяющие вычислять ляпуновские величины L_1 и Ω_1 в терминах исходного уравнения (23). Также как и в случае P2, здесь $u(\mu) \equiv 0$.

Рассматривается случай $N = 2$, т.е. система (23) является двумерной системой вида:

$$x_{n+1} = A(\mu)x_n + a(x_n,\mu),\ \ x_n \in \mathbb{R}^2,\ \mu \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, ..., \tag{25}$$

при этом будем считать, что матрица $A(\mu)$ имеет вид

$$A(\mu) = \rho(\mu)\begin{pmatrix} \cos 2\pi(\theta_0 + \omega(\mu)) & -\sin 2\pi(\theta_0 + \omega(\mu)) \\ \sin 2\pi(\theta_0 + \omega(\mu)) & \cos 2\pi(\theta_0 + \omega(\mu)) \end{pmatrix},$$

где число θ_0 удовлетворяет условиям рассматриваемого случая P3, а гладкие функции $\rho(\mu)$ и $\omega(\mu)$ – условиям: $\rho(\mu_0) = 1$ и $\omega(\mu_0) = 0$. При этом нелинейность $a(x,\mu)$ в этом уравнении начинается с кубического слагаемого.

Положим

$$\chi(\varphi) = (a_3(e(\varphi),\mu_0), h(\varphi))\,, \quad \psi(\varphi) = (a_3(g(\varphi),\mu_0), h(\varphi))\,,$$

где

$$e(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad g(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad h(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + 2\pi\theta_0) \\ \sin(\varphi + 2\pi\theta_0) \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.17 *Ляпуновские величины L_1 и Ω_1 двумерной системы (25) в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа определяются равенствами:*

$$L_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \chi(\varphi)\,d\varphi. \quad \Omega_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(\varphi)\,d\varphi.$$

В сценарии бифуркации Андронова–Хопфа системы (23), возникающая инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$ может быть аттрактором системы (23) (т.е. притягивать все траектории, стартующие из некоторой окрестности этой кривой); в этом случае кривую $\Gamma(\mu)$ будем называть *асимптотически устойчивой*. Естественным образом будем определять и понятие *неустойчивой кривой* $\Gamma(\mu)$.

Приведем утверждение о свойствах направленности и устойчивости в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа в системе (25). Положим: $\gamma_1 = \rho'(\mu_0)$.

Теорема 3.18 *Пусть $\gamma_1 L_1 \neq 0$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (25). Если $\gamma_1 L_1 < 0$ ($\gamma_1 L_1 > 0$), то замкнутая инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$ возникает при $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$). Эта кривая является асимптотически устойчивой, если $L_1 < 0$; неустойчивой, если $L_1 > 0$.*

Заключение

Диссертационная работа посвящена задаче качественного исследования локальных бифуркаций динамических систем с непрерывным и дискретным временем. На основе операторных методов исследования локальных бифуркаций предложен общий подход получения новых формул вычисления ляпуновских величин, показателей транскритичности и аппроксимаций центральных многообразий в терминах исходных уравнений. Рассмотрены основные случаи негиперболичности точки равновесия непрерывных и дискретных динамических систем. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Дано обоснование операторным методам исследования локальных бифуркаций в окрестностях негиперболических точек равновесия нелинейных динамических систем, позволяющих получить новые бифуркационные формулы в терминах исходных уравнений.

2. Получены новые формулы для вычисления ляпуновских величин и показателей транскритичности в задачах об основных сценариях локальных бифур-

каций в нелинейных динамических системах с непрерывным и дискретным временем.

3. Получены новые формулы для второй и третьей аппроксимаций центральных многообразий в основных случаях негиперболичности точек равновесия нелинейных динамических систем с непрерывным и дискретным временем.

Полученные результаты проиллюстрированы примерами, разработаны алгоритмы аппроксимаций центральных многообразий, которые реализованы в виде программ численного расчета.

Перечислим некоторые возможные направления развития исследований, проведенных в диссертационной работе.

1. Исследование задачи аппроксимации устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий в окрестностях негиперболических точек равновесия динамических систем.

2. Исследование задач аппроксимации центрального многообразия и вычисления ляпуновских величин в окрестностях негиперболических циклов динамических систем.

3. Исследование задач аппроксимации центрального многообразия и вычисления ляпуновских величин в окрестностях негиперболических точек равновесия бесконечномерных динамических систем, в частности, систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями, систем типа “реакция-диффузия” и др.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Гусарова, Н.И. Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем / Н.И. Гусарова, С.А. Муртазина, М.Ф. Фазлытдинов, М.Г. Юмагулов // Уфимск. матем. журн. – 2018. – Т. 10, № 1. – С. 25–49.

Переводная версия:

Gusarova, N.I. Operator methods for calculating Lyapunov values in problems on local bifurcations of dynamical systems / N.I. Gusarova, S.A. Murtazina, M.F. Fazlytdinov, M.G. Yumagulov // Ufa Math. J. – 2018. – Vol. 10, № 1. – P. 25-48. DOI: 10.13108/2018-10-1-25.

[2] Юмагулов, М.Г. Бифуркационные формулы и алгоритмы построения центральных многообразий дискретных динамических систем / М.Г. Юмагулов, М.Ф. Фазлытдинов // Изв. вузов. Матем. – 2019. – № 3. – С. 72–89. DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-72-89.

Переводная версия:

Yumagulov, M.G. Bifurcation formulas and algorithms of constructing central manifolds of discrete dynamical systems. / M.G. Yumagulov, M.F. Fazlytdinov // Russ. Math. (Iz. VUZ). – 2019. – Vol. 63, № 3. – P. 62–77. DOI: 10.3103/S1066369X1903006X.

[3] Юмагулов, М.Г. Приближенные формулы и алгоритмы построения центральных многообразий динамических систем / М.Г. Юмагулов, М.Ф. Фазлытдинов // Автомат. и телемех. – 2020. – № 1. – С. 34–51. DOI: 10.31857/S0005231020010031.

Переводная версия:

Yumagulov, M.G. Approximate formulas and algorithms for constructing central manifolds of dynamic systems / M.G. Yumagulov, M.F. Fazlytdinov // Autom. Remote Control. – 2020. – Vol. 81, № 1. –P. 27–40. DOI: 10.1134/S0005117920010038.

[4] Fazlytdinov M.F. On Solvability of Homological Equations in the Problem of Center Manifold Approximation / M. F. Fazlytdinov // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2023. – Vol. 44, № 3. – P. 1153-1161. DOI: 10.1134/S1995080223030137.

Патенты и свидетельства о регистрации программ

[5] Фазлытдинов, М.Ф. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2021617184 "Численное построение центрального многообразия нелинейной динамической системы в окрестности негиперболической точки равновесия"/ М.Ф. Фазлытдинов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 11.05.2021.

Публикации в других изданиях

[6] Фазлытдинов, М.Ф. Признаки устойчивости циклов в задаче о языках Арнольда / М.Ф. Фазлытдинов, М.Г. Юмагулов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2014. – № 2. – С. 19–23.

[7] Фазлытдинов, М.Ф. Признаки бифуркаций субгармонических колебаний нелинейных динамических систем / М.Ф. Фазлытдинов // Теория управления и математическое моделирование: Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск, 09 – 11 июня 2015 г. – Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2015. – С. 137–138.

[8] Фазлытдинов, М.Ф. Бифуркации и устойчивость субгармонических колебаний динамических систем / М.Ф. Фазлытдинов // Устойчивость и процессы управления: материалы III международной конференции, Санкт-Петербург, 05–09 октября 2015 г. – Санкт-Петербург: Издательский дом Федоровой Г.В., 2015. – С. 95–96.

[9] Фазлытдинов, М.Ф. Бифуркация субгармонических решений систем дифференциальных уравнений / М.Ф. Фазлытдинов // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: Тезисы докладов VIII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых, Уфа, 27 сентября – 01 октября 2015 г. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2015. – С. 238–239.

[10] Фазлытдинов, М.Ф. Бифуркация субгармонических решений систем дифференциальных уравнений / М.Ф. Фазлытдинов // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: Сборник тезисов международной научной конференции. Ответственный редактор Фазуллин З.Ю., Уфа, 01–03 октября 2015 г. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2015. – С. 137–138.

[11] Фазлытдинов, М.Ф. О разрешимости гомологических уравнений в задаче приближенного построения центральных многообразий. / М.Ф. Фазлытдинов // Уфимская осенняя математическая школа: Сборник тезисов Международной научной конференции. Ответственный редактор З.Ю. Фазуллин, Уфа, 16–19 октября 2019 г. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. – С. 244–245.

[12] Юмагулов, М.Г. О приближенном построении центральных многообразий динамических систем /М.Г. Юмагулов, М.Ф. Фазлытдинов // Уфимская осенняя математическая школа: Сборник тезисов Международной научной конференции. Ответственный редактор З.Ю. Фазуллин, Уфа, 16–19 октября 2019 г. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. – С. 266–267.

[13] Фазлытдинов, М.Ф. Центральное многообразие в математической модель реакции Белоусова-Жаботинского / М.Ф. Фазлытдинов // Уфимская осенняя

математическая школа - 2020: Сборник тезисов Международной научной конференции. 2 ч. - Уфа: Изд-во Общество с ограниченной ответственностью "Аэтерна", 2020. – С. 125–126.

[14] Фазлытдинов, М.Ф. О гомологическом уравнении в задаче аппроксимации центрального многообразия / М.Ф. Фазлытдинов // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции. Ответственный редактор Р.Н. Гарифуллин, ИМВЦ УНЦ РАН (Южный Урал, оз. Банное), 14–18 марта 2022 г. - Уфа: "Аэтерна", 2022. – С. 71–72.

[15] Фазлытдинов, М.Ф. Вопрос об устойчивости бифурцирующих точек равновесия в седло-узловой бифуркации / М.Ф. Фазлытдинов // Уфимская осенняя математическая школа. Материалы Международной научной конференции. Отв. редактор З.Ю. Фазуллин. - Уфа, 2022. С. 266-267.