

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

**Лобода Надежда Алексеевна**

**О СПЕКТРАХ ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ  
КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ  
ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

Специальность 1.1.2 —  
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
доцент Сташ Айдамир Хазретович

Майкоп — 2026

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Основные понятия и факты</b>	<b>17</b>
1.1 Ляпуновские показатели колеблемости . . . . .	17
1.2 Неостаточность сильных показателей колеблемости . . . . .	26
1.3 Ляпуновские показатели блуждаемости . . . . .	30
1.4 Спектр показателя системы . . . . .	36
<b>2 Спектры ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости линейных однородных дифференциальных систем</b>	<b>37</b>
2.1 Обзор литературы и формулировка основных результатов .	38
2.2 Спектры показателей блуждаемости взаимно-сопряженных систем . . . . .	42
2.3 Реализация произвольных конечных существенных спектров показателей колеблемости . . . . .	44
2.4 Реализация счетных существенных спектров показателей колеблемости . . . . .	51
<b>3 Исследование спектров ляпуновских показателей блуждаемости по первому приближению</b>	<b>61</b>
3.1 Показатели колеблемости и блуждаемости нелинейной системы	62
3.2 Обзор литературы и формулировка основных результатов .	65
3.3 Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной системы и системы первого приближения . . . . .	66
<b>Заключение</b>	<b>79</b>
<b>Список литературы</b>	<b>81</b>
<b>Приложение</b>	<b>97</b>

# Введение

**Актуальность темы исследования.** Представленная диссертация является исследовательской работой в области качественной теории дифференциальных уравнений, лежащей на стыке теории устойчивости и теории колебаний.

Теория устойчивости неразрывно связана с характеристическими показателями Ляпунова решений дифференциальных систем, а также с введенными позже показателями Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, характеризующими различные аспекты поведения решений на бесконечности. Исследованию свойств этих показателей посвящены труды многих математиков, среди которых следует выделить Р.Э. Винограда [21, 22], Д.М. Гробмана [27, 28], Б.Ф. Былова [16, 17], В.М. Миллионщикова [63, 64], Н.А. Изобова [34, 35], И.Н. Сергеева [72, 73], А.В. Ильина [41, 43], Е.А. Барабанова [5, 6], А.С. Фурсова [117, 118], А.Н. Ветохина [19, 20] и В.В. Быкова [14, 15]. Полные на момент публикации библиографические обзоры по данной тематике представлены, в частности, в работах [36, 37] и монографиях [18, 40].

Для всестороннего описания реальных физических процессов недостаточно знать лишь асимптотику роста решений — существенную роль играют также их колебательные (осцилляционные) свойства. Корни теории колебаний уходят к классическим трудам Ж. Штурма и А. Кнезера, заложившим основы качественного анализа осцилляции решений дифференциальных уравнений. Развитие научного направления, связанного с колеблемостью, осуществлялось благодаря исследованиям целой плеяды математиков, включая В.А. Кондратьева [53, 54], И.Т. Кигурадзе [49, 51], Т.А. Чантурия [119, 121], А.Ю. Левина [56, 57], Н.А. Изобова [38, 39], В.А. Козлова [129], И.В. Каменева [45, 46], Дж.Д. Мирзова [65], И.В. Асташову [3], С.А. Кащенко [47, 48], С.Д. Глызина [29, 30]. Обширные библиографические списки по данной проблематике приведены, в частности, в обзоре [50] и монографии [4]. Основное внимание в указанных работах уделялось вопросам существования колеблющихся решений изучаемого уравнения, полно-

му описанию множества таких решений, а также выявлению эффективных условий (в первую очередь — на коэффициенты уравнения), характеризующих осцилляционные поведения.

В последние годы интерес к таким свойствам решений линейных нестационарных систем, как ограниченность, устойчивость и колеблемость, значительно возрос в связи с прикладными задачами, связанными с анализом автоколебательных и хаотических режимов в электронных, лазерных и других нелинейных устройствах. В этом контексте особенно актуальной становится проблема построения аналогов ляпуновских показателей, адекватно характеризующих колебательную динамику решений дифференциальных систем.

В работе изучены следующие ляпуновские показатели колеблемости и блуждаемости:

- верхние сильные показатели колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней;
- нижние сильные показатели колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней;
- верхние слабые показатели колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней;
- нижние слабые показатели колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней;
- верхний сильный показатель блуждаемости;
- нижний сильный показатель блуждаемости;
- верхний слабый показатель блуждаемости;
- нижний слабый показатель блуждаемости.

**Показатели колеблемости и блуждаемости.** И.Н. Сергеевым были введены и изучены показатели колеблемости и блуждаемости решений линейных однородных дифференциальных систем, которые явились весьма эффективным средством для изучения колебательных свойств [82, 83, 85, 111].

Сильные и слабые показатели колеблемости (см. [76, 79, 81]) ранее назывались полными и векторными частотами, а сильные и слабые показатели блуждаемости — показателями блуждаемости и блуждания. Эти показатели имеют схожее строение: сначала определяется некоторый функционал

от двух аргументов: решения и правого конца отрезка времени (его левый конец совпадает с нулем), а затем к этому функционалу применяются в разном порядке оператор усреднения по времени и оператор взятия нижней грани [125]. В частности, подсчет показателей колеблемости нулей происходит путем усреднения числа нулей проекции ненулевого решения дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получается слабый показатель колеблемости, а если после — то сильный показатель колеблемости.

Скорость блуждания ненулевого решения дифференциальной системы — средняя по времени скорость, с которой движется центральная проекция решения на единичную сферу. А сильные и слабые показатели блуждаемости — это скорость блуждания решения, но минимизированная по всем системам координат, причем в случае слабого показателя блуждаемости минимизация производится в каждый момент времени. Следовательно, сильные и слабые показатели блуждаемости учитывают только ту информацию о решении, которая не гасится линейными преобразованиями: так, они учитывают обороты решения вокруг нуля, но не учитывают его локального вращения вокруг какого-либо другого вектора [79].

Дальнейшее развитие этой тематики связано с именами В.В. Быкова [13], А.Х. Сташа [102, 104, 108], Е.А. Барабанова и А.С. Войделевича [7, 8], А.Ю. Горицкого [31], М.В. Смоленцева [89, 90, 91], Д.С. Бурлакова [9, 10, 11], М.Д. Лысака [61, 62], В.В. Миценко [66, 68], Е.М. Шишлянникова [122, 123, 124], А.Е. Артисевич [112, 113] и другие. В этих работах найдены возможные спектры (множества значений на всех ненулевых решениях) указанных характеристик для различных типов уравнений и систем, исследована устойчивость главных значений показателей колеблемости и блуждаемости относительно равномерно малых и бесконечно малых возмущений, а также установлены различные соотношения между рассматриваемыми показателями.

Подчеркнем, что показатель Ляпунова

$$\chi(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|,$$

задает для роста нормы решения  $x$  точную экспоненциальную оценку сверху, а в случае автономной линейной системы совпадает с действительной частью одного из собственных значений ее матрицы. Поэтому показатели Ляпунова могут рассматриваться для систем с переменными коэффи-

циентами как аналоги вещественных частей собственных значений. Аналогами же мнимых частей собственных значений для линейных дифференциальных систем являются показатели колеблемости и блуждаемости [10, 79, 97]. Следовательно, введением этих показателей, характеризующих в определенном смысле асимптотические свойства решений на бесконечности, достигается естественная и необходимая полнота рассмотрения линейных дифференциальных систем [7].

**Степень разработанности темы исследования.** Все показатели колеблемости и блуждаемости любого нетривиального решения любого линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка по определению равны нулю.

1. На множестве решений линейных однородных автономных дифференциальных систем показатели Ляпунова и Перрона совпадают: их общий спектр фиксированной системы состоит из множества действительных частей собственных значений матрицы системы [18, глава VII, §22].

Спектры показателей колеблемости и блуждаемости линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами были полностью изучены:

- спектры всех показателей блуждаемости и сильных показателей колеблемости *нулей* (как и набор их главных значений) любой *автономной* системы совпадают с множеством *модулей мнимых частей собственных значений* матрицы системы [79];
- сильные и слабые показатели колеблемости *нулей* любого решения автономной системы совпадают между собой [10];
- на множестве ненулевых решений автономных систем все показатели колеблемости *строгих знаков, нулей, корней и гиперкорней* совпадают между собой [97, 111];
- спектры всех показателей колеблемости *строгих знаков* автономных систем зависят от собственных значений матрицы системы и могут состоять не более чем из двух различных значений [97, 111].

Из доказательств результатов работ [10, 79, 97, 111] следует, что все спектры показателей колеблемости и блуждаемости содержат только одно существенное значение: для показателей колеблемости строгих знаков это ноль, а для остальных показателей — наименьшее среди модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы.

Множество различных значений показателя Ляпунова на множестве нетривиальных решений любой фиксированной  $n$ -мерной линейной однородной дифференциальной системы состоит не более чем из  $n$  чисел [18].

Конечные спектры показателей колеблемости и блуждаемости отдельных классов неавтономных линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на неотрицательной полуоси коэффициентами достаточно разнообразны:

- спектры всех характеристик колеблемости и показателей блуждаемости двумерных систем, отвечающих уравнениям второго порядка, состоят из одного неотрицательного числа [76, 79];
- для любого ненулевого решения любой линейной однородной треугольной дифференциальной системы все показатели колеблемости равны нулю [103, 111];
- спектры всех слабых и нижнего сильного показателя блуждаемости двумерной треугольной дифференциальной системы состоят только из одного нулевого значения, в то время как верхний сильный показатель блуждаемости некоторого нетривиального решения такой системы может принимать положительное значение [66];
- доказано существование двумерной линейной системы с периодическими коэффициентами, спектры всех показателей колеблемости которой содержат любое наперед заданное конечное число существенных значений [107, 111];
- для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная линейная однородная дифференциальная система (периодическая, если эти числа попарно соизмеримы), у которой спектры показателей блуждаемости являются существенными и совпадают с этим множеством [123, 125].

В связи с этим возникает естественный вопрос *о возможной реализации произвольных конечных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерной линейной однородной ограниченной дифференциальной системы.*

Полный ответ на этот вопрос приводится ниже (см. теорему 2.1).

**2.** Теперь приведем небольшой обзор бесконечных спектров некоторых асимптотических характеристик нестационарных линейных однородных дифференциальных систем:

- спектр показателя Перрона линейной системы может заполнять любой наперед заданный отрезок числовой прямой [5];
- вопросы существования и отсутствия существенных значений показателя Перрона линейной системы обсуждались в работах [25, 26, 35];
- для любого  $n \geq 2$  существует  $n$ -мерная система с *континуальными спектрами* показателей колеблемости [106, 111];
- существует двумерная система, на каждом решении которой все показатели колеблемости и блуждаемости равны, а их общий спектр заполняет невырожденный отрезок [122, 124, 125];
- установлено существование линейной двумерной дифференциальной системы, спектры показателей колеблемости которой содержат счетные существенные (и метрически, и топологически) множества неотрицательной полуоси [107, 111];
- для любого замкнутого ограниченного счетного множества неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой, построена двумерная линейная ограниченная система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны [125].

Заметим, что в случае континуальных спектров рассмотренных асимптотических характеристик принципиально невозможно добиться того, чтобы сразу все его значения оказались существенными. В связи с этим возникает естественный вопрос *о возможной реализации некоторого класса счетных существенных значений какого-либо показателя колеблемости.*

Положительный ответ на этот вопрос дается ниже (см. теорему 2.2).

**3.** В работах [86, 87, 88, 111] были проведены исследования свойств спектров колеблемости, блуждаемости и вращаемости по первому приближению. В частности, в [87] было показано, что одноэлементные спектры линейных показателей блуждаемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения могут быть совершенно произвольными: модуль разности этих чисел может меняться от нуля до бесконечности.

Эффект смены знака характеристических показателей Ляпунова при переходе от нелинейной системы к системе ее линейного приближения был продемонстрирован в [58, 133], а в работах [42, 43] были построены нелинейные системы, которые еще дополнительно обладали бесконечными спектрами показателей Ляпунова.

В работе [110, 111] построен неожиданный пример линейной двумерной системы с точечным спектром каждого из показателей колеблемости — такой, что у специальной возмущенной нелинейной двумерной системы сразу все перечисленные показатели имеют произвольный наперед заданный конечный или счетный спектр, состоящий из рациональных чисел единичного отрезка, или даже континуальный спектр, содержащий весь этот отрезок.

В связи с последним результатом возникает естественный вопрос *о возможности перенесения этих свойств и на показатели блуждаемости.*

Положительный ответ на этот вопрос дается ниже (см. теоремы 3.1 и 3.2).

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является реализация произвольных конечных спектров и некоторого класса счетных спектров ляпуновских показателей колеблемости на пространстве линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами, а также реализация бесконечных спектров ляпуновских показателей блуждаемости нелинейных систем по заданному их линейному приближению.

В работе решены следующие задачи:

- для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, построить такую двумерную линейную однородную дифференциальную систему, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с этим множеством и каждое значение из этого спектра является существенным (т. е. это значение принимается на решениях, начальные значения которых имеют положительную меру Лебега);
- для некоторого класса счетных множеств построить такую двумерную линейную однородную дифференциальную систему, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с этим множеством и каждое значение из этого множества является существенным;
- показать возможность изменения мощности спектра всех показателей блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения.

*Объектом исследования* являются пространства линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными на временной полуоси коэффициентами, а также нелинейные дифференциальные системы с заданными линейными приближениями.

*Предметом исследования* являются свойства ляпуновских показателей колеблемости решений линейных систем, а также свойства показателей блуждаемости решений нелинейных систем.

**Методология и методы исследования.** При доказательстве утверждений в диссертации широко используются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, математического анализа, линейной алгебры, а также теории равномерно распределенных последовательностей.

**Научная новизна.** В диссертации доказаны следующие основные утверждения:

- для любого конечного множества неотрицательных рациональных чисел, содержащего ноль, построена двумерная линейная однородная *периодическая* дифференциальная система, у которой каждый из спектров всех показателей колеблемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;
- для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, построена двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой каждый из спектров всех показателей колеблемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;
- для любого замкнутого ограниченного счетного множества положительных попарно соизмеримых чисел с единственной нулевой предельной точкой, построена двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой каждый из спектров всех показателей колеблемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;
- установлена возможность изменения мощности спектра всех показателей блуждаемости линейной двумерной системы при нелинейных возмущениях сколь угодно высокого порядка малости в окрестности начала координат.

**Положения, выносимые на защиту.**

- Реализация произвольных, содержащих ноль, конечных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем.

- Реализация любого замкнутого ограниченного счетного множества положительных попарно соизмеримых чисел с единственной нулевой предельной точкой в качестве существенного спектра каждого показателя колеблемости двумерной линейной однородной дифференциальной системы.
- Доказательство возможности изменения мощности спектра всех показателей блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа имеет преимущественно теоретическое значение. Полученные результаты могут быть полезны специалистам по качественной теории дифференциальных уравнений, а также специалистам по теории управления при исследовании переключаемых систем. Текст диссертации может составить содержание специального курса для студентов математических и инженерных специальностей.

**Степень достоверности.** Достоверность полученных соискателем результатов подтверждена строгими математическими выкладками и доказательствами, апробацией на конференциях и семинарах, а также публикациями в рецензируемых научных журналах.

**Апробация результатов.** Основные результаты диссертации и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

- Конференция математических центров России (Майкоп, 10–15 октября 2023 г.; Санкт-Петербург, 6–11 августа 2024 г.; Красноярск, 11–16 августа 2025 г.);
- Всероссийская конференция «Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация» (Челябинск, 19-21 мая 2025);
- Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXV», (Воронеж, 26–30 апреля 2024 г.);
- XVII Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 23–28 августа 2025 г.);
- Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – 2025 (ОТНА-2025)» (Ростов-на-Дону, 24–29 августа 2025 г.);

- Международная научная конференция «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 13–17 октября 2021 г., 9–13 октября 2025 г.).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих научных семинарах:

- Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова (22 апреля 2022 г., 14 апреля 2023 г., 15 марта 2024 г., 25 апреля 2025 г.);
- Научно-исследовательский семинар «Динамические системы и теория управления» в Адыгейском государственном университете (Майкоп, 24 сентября 2025 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в 14 научных работах, из которых 5 изданы в научных журналах категорий К1 [134, 135, 137, 138] и К2 [136] перечня рецензируемых научных изданий ВАК или приравненных к ним. Работы [139]–[147] опубликованы в тезисах докладов конференций и семинаров.

**Личный вклад автора.** Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем [134, 135, 137, 138], А.Х. Сташу принадлежат постановки задач и общая схема их исследования, формулировки и доказательства результатов принадлежат автору диссертации.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 11 разделов, заключения, списка литературы и приложения. Полный объём диссертации составляет 100 страниц текста, список литературы вместе с публикациями соискателя содержит 147 наименований. В главах диссертации принята двойная нумерация формул, определений, замечаний, лемм, утверждений и теорем.

**Формулировки основных результатов.** Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\mathcal{M}^n$  множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями  $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$  (будем отождествлять их с соответствующими системами). Множество всех ненулевых решений системы  $A \in \mathcal{M}^n$  обозначим через  $\mathcal{S}_*(A)$  и положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

**Определение I** [74, 76, 81]. Для вектора  $m \in \mathbb{R}_*^n$  и вектор-функции  $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$  введем следующие обозначения для количеств специфических точек на промежутке  $(0, t]$ :

- $\nu^-(x, m, t)$  — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения  $\langle x, m \rangle$ , т. е. таких, что в любой окрестности каждой из них оно принимает как положительные, так и отрицательные значения;
- $\nu^\sim(x, m, t)$  — число точек *нестрогой смены знака* функции  $y$ , т. е. таких, что в любой проколотой окрестности каждой из них она принимает как неположительные, так и неотрицательные значения;
- $\nu^0(x, m, t)$  — число *нулей* скалярного произведения  $\langle x, m \rangle$ ;
- $\nu^+(x, m, t)$  — число *корней* функции  $\langle x, m \rangle$ , т. е. ее нулей с учетом их *кратности*;
- $\nu^*(x, m, t)$  — число *гиперкратных корней* функции  $\langle x, m \rangle$ : при его подсчете каждый ее некрatный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

**Определение II** [79, 81, 82]. *Верхние (нижние) сильные и слабые показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* решения  $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$  зададим при  $\alpha = -, \sim, 0, +, *$  соответственно формулами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left( \check{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left( \check{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right). \end{aligned}$$

**Определение III** [79]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели блуждаемости* решения  $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$  зададим соответственно формулами

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\bullet(x) &\equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t) & \left( \check{\rho}_\bullet(x) &\equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t) \right), \\ \hat{\rho}_\circ(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} P(Lx, t) & \left( \check{\rho}_\circ(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} P(Lx, t) \right), \end{aligned}$$

где  $\text{Aut } \mathbb{R}^n$  — множество всех невырожденных линейных операторов  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и

$$P(Lx, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(Lx, \tau) \right| d\tau, \quad e(Lx, \tau) \equiv \frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|}.$$

**Определение IV** [82]. Для функции  $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$  условимся о следующем:

1) если значение некоторого верхнего (с крышечкой) показателя колеблемости или блуждаемости совпадает со значением одноименного нижнего (с галочкой) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;

2) если значение некоторого слабого (с пустым кружочком) показателя колеблемости или блуждаемости совпадает со значением одноименного сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

**Определение V** [77, 78]. Множество всех значений показателя  $\varkappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}_+$  назовём *спектром* этого показателя системы  $A \in \mathcal{M}^n$ , причем значение  $a \in \varkappa(\mathcal{S}_*(A))$  назовем

1) *метрически существенным*, если подмножество

$$\{x(0) \mid x \in \mathcal{S}_*(A), \varkappa(x) = a\} \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

имеет положительную меру Лебега;

2) *топологически существенным*, если подмножество (1) заполняет некоторое непустое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра*, т.е. счетного объединения нигде не плотных подмножеств;

3) *существенным*, если оно является метрически и топологически существенным.

Через  $\text{ess } \varkappa(\mathcal{S}_*(A))$  обозначим множество всех *существенных значений* показателя  $\varkappa$  для системы  $A$  и назовем его *существенным спектром* системы  $A$ .

Возможность реализации конечных и счетных существенных спектров показателей колеблемости двумерной дифференциальной системы демонстрируют следующие две теоремы.

**Теорема 2.1** [135]. Для любого конечного множества  $S$  неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует такая система  $A \in \mathcal{M}^2$  (периодическая, если элементы множества  $S$  попарно соизмеримы), что справедливы равенства

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = S,$$

причем

$$\nu^-(x) = \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A).$$

**Теорема 2.2** [137]. Для любых  $l > 0$  и последовательности  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  положительных рациональных чисел, сходящейся к нулю, существует такая двумерная система  $A \in \mathcal{M}^2$ , что справедлива цепочка равенств

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \{l \cdot q_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\},$$

причем

$$\nu^-(x) = \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A).$$

В евклидовой фазовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \\ |f(t, x)| &\leq a_f(t)|x| + b_f(t), \quad a_f, b_f \in C(\mathbb{R}_+), \end{aligned} \quad (2)$$

допускающую нулевое решение, существование и единственность решений задач Коши, определенных на  $\mathbb{R}_+$ .

**Определение VI.** С системой (2) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv g(t, x), \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad (3)$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - g(t, x)| = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Через  $\mathcal{S}_*(f)$  будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (2), а через  $x_f(\cdot, x_0)$  то из них, которое удовлетворяет начальному условию  $x_f(0, x_0) = x_0$ .

**Теорема 3.1** [138]. Для любых заданных  $p > 1$  и непустого подмножества  $S \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  существует *нелинейная система вида (2) с линейным приближением*

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv g(t, x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2} \sin t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

удовлетворяющие условиям

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - g(t, x)| \leq |x|^p \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$\rho(\mathcal{S}_*(g)) = \{1\}, \quad \rho(\mathcal{S}_*(f)) = S \cup \{1\}, \quad (6)$$

причем при любом  $\varepsilon > 0$  выполнено равенство

$$\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\} = \rho(\mathcal{S}_*(f)).$$

**Теорема 3.2** [138]. Для любого интервала  $S = (a, b) \subset [0, 1]$  или  $S = [0, 1]$  существует нелинейная система вида (2) с первым приближением (4), связанные соотношениями (5), спектры показателей блуждаемости которых обладают соответственно свойствами (6), причем при  $S = [0, 1]$  для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\}$  имеет мощность континуума.

**Благодарности.** Автор диссертации выражает благодарность и искреннюю признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту Стасу Айдамиру Хазретовичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Диссертационная работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074/5 по проекту «Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов».

# Глава 1

## Основные понятия и факты

Настоящая глава носит, в основном, вспомогательный характер. В ней приведены необходимые определения и доказаны некоторые свойства показателей колеблемости и блуждаемости.

В разделе 1.1 даны определения ляпуновских показателей колеблемости и приведены основные их свойства.

В разделе 1.2 доказано отсутствие свойства остаточности у всех сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей и корней на множестве всех решений всех линейных однородных трехмерных дифференциальных систем, отвечающих уравнениям третьего порядка [140, 143]. Для этого построены две функции, являющиеся решениями различных уравнений третьего порядка, совпадающие на некоторой полуоси, но при этом имеющие разные сильные показатели колеблемости.

В разделе 1.3 даны определения ляпуновских показателей блуждаемости и приведены основные их свойства.

В разделе 1.4 приведены определения и основные свойства существенных значений ляпуновских показателей линейных однородных дифференциальных систем.

### 1.1 Ляпуновские показатели колеблемости

Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\mathcal{M}^n$  множество *линейных систем*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty), \quad (1.1)$$

с *непрерывными ограниченными* оператор-функциями  $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ , каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой. Обозначим через  $\mathcal{C}^n$ , подмножество множества  $\mathcal{M}^n$ , состоящие из *автономных* систем.

Фиксировав в  $\mathbb{R}^n$  базис, естественным образом выделим в множестве  $\mathcal{M}^n$  подмножество  $\mathcal{E}^n$  систем, задаваемых матрицами вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

и отвечающих *линейным однородным уравнениям  $n$ -го порядка*

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad (1.2)$$

каждое из которых, задаваясь своей непрерывной вектор-функцией

$$a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

преобразуется в систему  $A$  стандартным переходом от скалярной переменной  $y$  к векторной

$$x = \psi^n y \equiv (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

и отождествляется с этой системой (см. [79]).

Совокупность всех решений системы (1.1) и уравнения (1.2) обозначим соответственно через  $\mathcal{S}(A)$  и  $\mathcal{S}(a)$ . Положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \equiv \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a),$$

где

$$\mathcal{S}_*(A) = \mathcal{S}(A) \setminus \{0\}, \quad \mathcal{S}_*(a) = \mathcal{S}(a) \setminus \{0\}.$$

Для определения характеристик колеблемости нам понадобятся следующие два вспомогательных определения.

**Определение 1.1** [74, 76]. Скажем, что в точке  $t > 0$  происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции  $y \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , если в любой проколотой окрестности этой точки функция  $y$  принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

**Определение 1.2** [76, 79, 81]. Для заданных положительного момента времени, вектора и вектор-функции

$$t > 0, \quad m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}_*^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_*^n$$

рассмотрим скалярное произведение

$$\langle x(\tau), m \rangle = m_1 x_1(\tau) + \dots + m_n x_n(\tau), \quad \tau \in (0, t],$$

для которого введем следующие обозначения:

- $\nu^-(x, m, t)$  — число точек его *строгой смены знака* на промежутке  $(0, t]$ ;
- $\nu^\sim(x, m, t)$  — число точек его *нестрогой смены знака* на промежутке  $(0, t]$ ;
- $\nu^0(x, m, t)$  — число его *нулей* на промежутке  $(0, t]$ ;
- $\nu^+(x, m, t)$  — число его *корней* (т.е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке  $(0, t]$ ;
- $\nu^*(x, m, t)$  — число его *гиперкратных корней* на промежутке  $(0, t]$ : при его подсчете каждый некрратный корень берется ровно один раз, а любой кратный корень — бесконечно много раз независимо от его фактической кратности. Другими словами, как только хотя бы в одной точке  $\tau_0 \in (0, t]$  выполнены равенства

$$\langle x(\tau_0), m \rangle = \langle \dot{x}(\tau_0), m \rangle = 0,$$

так сразу полагаем  $\nu^*(x, m, t) = +\infty$ , в противном случае величина  $\nu^*(x, m, t)$  равна числу нулей функции  $\langle x(\cdot), m \rangle$  на промежутке  $(0, t]$ .

В случае  $m = 0$  имеем

$$\nu^-(x, m, t) = 0, \quad \nu^\alpha(x, m, t) = +\infty, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}.$$

К последнему определению для любых  $t > s \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{R}_*^n$  и  $x \in \mathcal{S}_M^n$  добавим обозначения

$$\nu^\alpha(x, m, s, t) \equiv \nu^\alpha(x, m, t) - \nu^\alpha(x, m, s), \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

**Определение 1.3** [79, 81, 82]. *Верхние (нижние) сильные и слабые показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции  $x \in \mathcal{S}_M^n$  зададим при  $\alpha = -, \sim, 0, +, *$  соответственно формулами

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \quad \left( \check{\nu}_\bullet^\alpha(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \quad \left( \check{\nu}_\circ^\alpha(x) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right).$$

**Замечание 1.1** [111]. Для любых  $m \in \mathbb{R}_*^n$ ,  $x \in \mathcal{S}_M^n$  и  $t > s \geq 0$  справедливы следующие неравенства:

$$\nu^\alpha(x, m, t, s) \geq 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}. \quad (1.3)$$

**Лемма 1.1.** Все ляпуновские показатели колеблемости любой функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  неотрицательны.

**Доказательство** леммы 1.1 автоматически вытекает из равенств (1.3). Лемма 1.1 доказана.

**Лемма 1.2.** Для любой функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  справедливы оценки

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_{\circ}^{-}(x) &\leq \hat{\nu}_{\circ}^{\sim}(x) \leq \hat{\nu}_{\circ}^0(x) \leq \hat{\nu}_{\circ}^{+}(x) \leq \hat{\nu}_{\circ}^{*}(x), \\ \hat{\nu}_{\bullet}^{-}(x) &\leq \hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}(x) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^0(x) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{+}(x) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{*}(x), \\ \check{\nu}_{\circ}^{-}(x) &\leq \check{\nu}_{\circ}^{\sim}(x) \leq \check{\nu}_{\circ}^0(x) \leq \check{\nu}_{\circ}^{+}(x) \leq \check{\nu}_{\circ}^{*}(x), \\ \check{\nu}_{\bullet}^{-}(x) &\leq \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}(x) \leq \check{\nu}_{\bullet}^0(x) \leq \check{\nu}_{\bullet}^{+}(x) \leq \check{\nu}_{\bullet}^{*}(x).\end{aligned}$$

**Доказательство** леммы 1.2 вытекает из определений 1.2 и 1.3. Действительно, для любых вектор-функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  и вектора  $m \in \mathbb{R}_{*}^n$  каждая точка строгой смены знака функции  $\langle x(\cdot), m \rangle$  является нестрогой, каждая ее точка нестрогой смены знака является нулем, каждый ее нуль является корнем, каждый ее корень является гиперкратным, но обратные утверждения не верны.

Лемма 1.2 доказана.

**Лемма 1.3.** Для любых  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  и  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$  нижние показатели колеблемости не превышают соответствующих верхних

$$\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) \leq \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x), \quad \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x).$$

**Доказательство** леммы 1.3 вытекает из свойств верхних и нижних пределов функций (см. [32, с. 124]).

Лемма 1.3 доказана.

**Лемма 1.4.** Для любых  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  и  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$  слабые показатели колеблемости не превышают соответствующих сильных

$$\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) \leq \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x), \quad \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x).$$

**Доказательство.** Для заданной функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  при любом  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$  справедливы оценки

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_{*}^n} \nu^{\alpha}(x, m, t) \leq \nu^{\alpha}(x, m, t), \quad t > 0, \quad m \in \mathbb{R}_{*}^n.$$

Умножая обе части последнего неравенства на  $\pi/t$  и переходя к соответствующим пределам, будем иметь

$$\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_{*}^n} \nu^{\alpha}(x, m, t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha(x, m, t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t).$$

Беря точные нижние грани по всем векторам  $m \in \mathbb{R}_*^n$  от обеих частей последних двух цепочек соотношений, окончательно получим

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(x) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \check{\nu}_\circ^\alpha(x) \leq \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(x),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(x) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) \leq \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x).$$

Лемма 1.4 доказана.

**Лемма 1.5.** Для произвольной вектор-функции  $x \in \mathcal{S}_M^n$ , числа  $\lambda > 0$  и функции  $y$ , заданной равенством  $y(t) = x(\lambda t)$ , верно

$$\varkappa(y) = \lambda \varkappa(x), \quad \varkappa = \check{\nu}_\circ^\alpha, \hat{\nu}_\circ^\alpha, \check{\nu}_\bullet^\alpha, \hat{\nu}_\bullet^\alpha, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

**Доказательство.** Пусть заданы  $x \in \mathcal{S}_M^n$  и  $\lambda > 0$ . Тогда для любого вектора  $m \in \mathbb{R}_*^n$  будем иметь

$$\nu^\alpha(y, m, t) = \nu^\alpha(x, m, \lambda t), \quad t > 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Далее, делая замену  $\tau = \lambda t$ , вычислим следующие пределы

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(y) = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha(y, m, t) = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \pi}{\lambda t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha(x, m, \lambda t) =$$

$$= \lambda \cdot \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\tau} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha(x, m, \tau) = \lambda \cdot \check{\nu}_\circ^\alpha(x),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(y) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha(y, m, t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \pi}{\lambda t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha(x, m, \lambda t) =$$

$$= \lambda \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\tau} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha(x, m, \tau) = \lambda \cdot \hat{\nu}_\circ^\alpha(x),$$

$$\check{\nu}_\bullet^\alpha(y) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \pi}{\lambda t} \nu^\alpha(x, m, \lambda t) =$$

$$= \lambda \cdot \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\tau} \nu^\alpha(x, m, \tau) = \lambda \cdot \check{\nu}_\bullet^\alpha(x),$$

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(y) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \pi}{\lambda t} \nu^\alpha(x, m, \lambda t) =$$

$$= \lambda \cdot \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\tau} \nu^\alpha(x, m, \tau) = \lambda \cdot \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x).$$

Лемма 1.5 доказана.

**Замечание 1.2** [134]. Минимумы в определениях показателей колеблемости можно брать не по всем ненулевым векторам  $m$ , а лишь по единичным  $m \in S^{n-1}$ .

Можно рассматривать единичную сферу  $S^{n-1}$  в  $\mathbb{R}^n$  как самостоятельное топологическое пространство с индуцированной из  $\mathbb{R}^n$  топологией и со стандартной мерой  $\text{mes}$ , являющаяся  $(n-1)$ -мерной площадью поверхности.

**Утверждение 1.1** (Сергеев И.Н. [81]). Для любой функции  $x \in \mathcal{S}_M^n$  и любого значения  $t > 0$  множество всех векторов  $m \in S^{n-1}$ , удовлетворяющих условию

$$\langle x(\tau_0), m \rangle = \langle \dot{x}(\tau_0), m \rangle = 0, \quad \tau_0 \in [0; t]$$

имеет на сфере  $S^{n-1}$  меру нуль, замкнуто и нигде не плотно.

**Определение 1.4** [79, 82, 111]. Если значение некоторого верхнего показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого нижнего, то будем называть это значение точным, записывая его без галочки и крышечки. Если значение некоторого слабого (с обозначением  $\circ$ ) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого сильного (с обозначением  $\bullet$ ) показателя, то будем называть это значение абсолютным, записывая его без знаков  $\circ$  и  $\bullet$ .

**Пример 1.** Для функции  $x(t) = (\sin t, \cos t) \in \mathcal{S}_M^2$  все показатели колеблемости совпадают, т.е. все показатели являются точными и абсолютными.

**Решение.** Для любого вектора  $m \in \mathbb{R}_*^2$  найдется такой  $t_m$  вспомогательный аргумент, что справедливо представление

$$\langle x(t), m \rangle = A \sin(t - t_m), \quad A \neq 0,$$

поэтому при любом  $t > 0$  для каждого  $\alpha = \{-, \sim, 0, +, *\}$  имеем равенство

$$\nu^\alpha(x, m, t) = \left[ \frac{t - t_m}{\pi} \right].$$

Следовательно, для функции  $x$  будем иметь

$$\nu^\alpha(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \left[ \frac{t - t_m}{\pi} \right] = 1, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

**Утверждение 1.2.** Существует функция  $x \in \mathcal{S}_E^2$ , все показатели колеблемости которой являются абсолютными, но не точными, т.е.

$$\check{\nu}^-(x) = \check{\nu}^\sim(x) = \check{\nu}^0(x) = \check{\nu}^+(x) = \check{\nu}^*(x) <$$

$$\langle \hat{\nu}^-(x) = \hat{\nu}^\sim(x) = \hat{\nu}^0(x) = \hat{\nu}^+(x) = \hat{\nu}^*(x).$$

**Доказательство.** Фиксируем какую-либо бесконечно дифференцируемую функцию  $\theta: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0; 1]$ , удовлетворяющую условию

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Пусть уравнение  $a \in \mathcal{E}^2$  для некоторой последовательности

$$r'_1 \equiv 0 < r_1 < s'_1 \equiv r_1 + 1 < s_1 < r'_2 \equiv s_1 + 1 < \dots$$

имеет вид

$$\ddot{y} + q(t)y = 0, \quad q(t) = \begin{cases} 0, & t \in [r'_p; r_p), \\ \theta(t - r_p), & t \in [r_p; s'_p), \\ 1, & t \in [s'_p; s_p), \\ 1 - \theta(t - s_p), & t \in [s_p; r'_{p+1}), \end{cases} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Тогда любое решение  $y \in \mathcal{S}_*(a)$  на каждом участке вида  $[r'_p; r_p)$  будет совпадать с некоторой линейной функцией  $A_p t + B_p$ , а на каждом участке вида  $[s'_p; s_p)$  — с некоторой синусоидой  $C_p \sin(t + \varphi_p)$ .

Для полного задания уравнения  $a$  теперь остается только построить последовательность чисел  $r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots$ , что мы и сделаем индукцией по  $p \in \mathbb{N}$ : итак, если уже определены все элементы этой последовательности до некоторого  $s_{p-1}$  включительно (при  $p = 1$  они могут считаться определенными по умолчанию, поскольку отсутствуют), то выберем последовательно числа  $r_p$  и  $s_p$  настолько большими, чтобы при любом  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$  выполнялись неравенства

$$\frac{\pi}{s_p} \nu^\alpha(y, m^1, s_p) < 0 + \frac{1}{p}, \quad \frac{\pi}{r_p} \nu^\alpha(y, m^1, r_p) > 1 - \frac{1}{p}, \quad m^1 = (1, 0).$$

В данном случае инфимум в определениях показателей колеблемости реализуется на любом векторе  $m \in \mathbb{R}_*^2$ , для которого скалярное произведение  $\langle \psi^2 y, m \rangle$  не равно тождественно нулю ни на каком участке положительной полуоси. Следовательно, будем иметь цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \check{\nu}^\alpha(y) &= \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m^1, t) \leq \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{s_p} \nu^\alpha(y, m^1, s_p) \leq 0 < \\ < 1 \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{r_p} \nu^\alpha(y, m^1, r_p) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m^1, t) = \hat{\nu}^\alpha(y), \end{aligned}$$

в которой, все нестрогие неравенства обращаются в равенства, поскольку показатели колеблемости не могут быть меньше нуля и, по теореме сравнения Штурма [116], расстояние между любыми нулями решения  $y$  не меньше  $\pi$ .

Утверждение 1.2 доказано.

Примеры несовпадения сильных и слабых показателей колеблемости построены в работах [82, 83, 84, 98]. Покажем возможность одновременного выполнения этого свойства сразу для всех показателей.

**Утверждение 1.3.** Существует функция  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$ , все показатели колеблемости которой являются точными, но не абсолютными, т.е.

$$\begin{aligned} \nu_{\circ}^{-}(x) = \nu_{\circ}^{\sim}(x) = \nu_{\circ}^0(x) = \nu_{\circ}^{+}(x) = \nu_{\circ}^{*}(x) < \\ < \nu_{\bullet}^{-}(x) = \nu_{\bullet}^{\sim}(x) = \nu_{\bullet}^0(x) = \nu_{\bullet}^{+}(x) = \nu_{\bullet}^{*}(x). \end{aligned}$$

**Доказательство.** 1. Для заданного ортонормированного базиса  $e_1, e_2$  в  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим систему

$$A_{t_0, v, \varphi}^2(t) = a(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a(t) = \begin{cases} 0, & t = t_0, t_1, \\ 2v, & t = t^*, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$0 \leq t_0 < t_1, \quad t_1 = t_0 + \frac{\varphi}{v}, \quad t^* = \frac{t_0 + t_1}{2},$$

а скалярная функция  $a \in C([t_0, t_1])$  линейна на каждом из отрезков  $[t_0, t^*]$  и  $[t^*, t_1]$ . Заметим, что система (1.4) осуществляет поворот плоскости на угол  $\varphi$  со средней скоростью  $|v|$  при  $t \in [t_0, t_1]$ . Действительно оператор Коши  $X(t_1, t_0)$  системы (1.4) представляет собой ортогональный поворот плоскости на угол

$$\int_{t_0}^{t_1} a(\tau) d\tau = v(t^* - t_0) + v(t_1 - t^*) = v(t_1 - t_0) = \varphi$$

в направлении от  $e_1$  к  $e_2$  со средней скоростью  $v$ . Аналогичный поворот, но в противоположном направлении или, в прежней ориентации, с той же средней скоростью  $|v|$  на угол  $-\varphi$ , осуществляет система  $-A_{t_0, v, \varphi}^2$ .

2. Сначала выберем последовательность  $\varepsilon_p \in (0, 1)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , сходящуюся к нулю. Теперь построим двумерную дифференциальную систему  $A \in \mathcal{M}^2$ , осуществляющую на последовательно примыкающих друг к другу отрезках, начиная с момента  $t_0 = 0$ , повороты плоскости на углы:

$$\pi - \varepsilon_1, \quad -(\pi - \varepsilon_1), \quad \pi - \varepsilon_2, \quad -(\pi - \varepsilon_2), \dots$$

со средней скоростью  $|v| = 1$ .

Фиксируем произвольный ненулевой вектор  $e \in \mathbb{R}^2$ . Тогда решение  $x$  построенной системы, сонаправленное в начальный момент с вектором  $e$ , совершает следующие повороты то в одну, то в другую сторону (см. п.1 настоящего доказательства): сначала вперед до тех пор, пока не образует с вектором  $-e$  (не доходя до него) угол  $\varepsilon_1$ , затем возвращаясь назад, занимает исходное направление, затем снова вперед, пока не образует с вектором  $-e$  угол  $\varepsilon_2$ , и после занимает исходное направление, и т. д.

Таким образом, решение  $x$ , находясь все время строго в одной полуплоскости относительно прямой, натянутой на вектор  $e$ , составляет последовательно в моменты  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \dots$  (в которые начинаются очередные повороты) сходящиеся к нулю углы  $0, \varepsilon_1, 0, \varepsilon_2, \dots$  с векторами  $e, -e, e, -e, \dots$ .

3. Для любого  $t_k$  найдется такой вектор  $m_k$ , что выполняется

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \nu^*(x, m, t_k) = \nu^*(x, m_k, t_k) = 0,$$

а значит, справедливы равенства

$$\nu_{\circ}^{\alpha}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \nu^{\alpha}(x, m, t) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

4. Для любого вектора  $m \in \mathbb{R}_*^2$  найдется такой момент  $t_m$ , начиная с которого скалярное произведение  $\langle x, m \rangle$  на каждом промежутке длины  $\pi$  будет иметь один нуль, являющийся строгой сменой знака, поэтому

$$\nu_{\bullet}^{\alpha}(x) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) = 1, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Утверждение 1.3 доказано.

Вычисление характеристик колеблемости упрощает следующая

**Лемма 1.6** [107]. *Пусть строго возрастающая последовательность положительных чисел  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  удовлетворяет условиям*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1. \quad (1.5)$$

Тогда для любой функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  при каждом  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ :

1) справедливы равенства

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(x, m, t_k), \quad (1.6)$$

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(x, m, t_k), \quad (1.7)$$

$$\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(x, m, t_k), \quad (1.8)$$

$$\hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(x, m, t_k); \quad (1.9)$$

2) если последовательности  $T_1, T_2, \dots \geq 0$  и  $\nu_1, \nu_2, \dots \geq 0$  удовлетворяют условиям

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{T_k}{t_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\nu_k}{t_k} = 0,$$

то после уменьшения в правых частях формул (1.6)–(1.9) каждого из чисел  $t_k$  в знаменателе дроби — на  $T_k$ , а каждого из чисел  $\nu^{\alpha}(x, m, t_k)$  — на  $\nu_k$  значение этих правых частей не изменятся.

## 1.2 Неостаточность сильных показателей колеблемости

Для формулировки и доказательства основных результатов данного раздела нам понадобятся следующие вспомогательные определения и факты (см. [134]).

Для нормированного пространства  $\mathcal{G}$  квадратных матриц  $n$ -го порядка с положительными определителями введем обозначение

$$\mathcal{B}_r(H_0) = \{H \in \mathcal{G} \mid \|H - H_0\| \leq r\}$$

(норма в пространстве матриц определяется как максимум модулей их элементов).

Возможность управления фундаментальной системой решений линейного дифференциального уравнения гарантирует следующая

**Лемма 1.7** [75]. Для каждой пары уравнений  $a, b \in \mathcal{E}^n$ , произвольных  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$  и пары фундаментальных систем решений  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}(a)$ ,  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{S}(b)$  с образованной ими парой фундаментальных матриц  $X(t_0), Y(t_1) \in \mathcal{G}$  найдется уравнение  $c \in \mathcal{E}^n$  с фундаментальной системой решений  $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{S}(c)$ , удовлетворяющей условиям

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ y_i(t), & t \geq t_1. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

а если, кроме того, фиксирована пара матриц  $H_0, H_1 \in \mathcal{G}$ , то существует такое  $\delta > 0$ , что указанное уравнение можно выбрать еще и для каждой пары матриц  $X(t_0) \in \mathcal{B}_\delta(H_0)$ ,  $Y(t_1) \in \mathcal{B}_\delta(H_1)$  бесконечно дифференцируемым по ним (как по параметрам).

Важным свойством ляпуновских характеристик, призванным облегчить их исследование, является *остаточность*, т. е. инвариантность относительно изменения решения на любом конечном участке полуоси времени.

**Определение 1.5** [72]. Для заданных множеств  $M$  и  $F = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow M\}$  назовем функцию  $\lambda : F \rightarrow \mathbb{R}$  *остаточной*, если для любых функций  $f, g \in F$ , удовлетворяющих хотя бы для одного  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  условию  $f(t) = g(t)$  при всех  $t \geq t_0$ , имеет место равенство  $\lambda(f) = \lambda(g)$ .

Свойство остаточности на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений произвольного порядка сначала для характеристических частот строгих смен знаков и нулей было установлено И.Н. Сергеевым в [74] (аналогично доказывается и остаточность частот корней). Слабые показатели колеблемости гиперкорней любых решений, как оказалось [81], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными.

На множестве всех ненулевых решений всех линейных однородных дифференциальных уравнений до второго порядка включительно все верхние (нижние) характеристические частоты совпадают со всеми верхними (нижними) показателями колеблемости [76, 79]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости.

Отсутствие свойства остаточности у всех сильных показателей колеблемости решений дифференциальных систем доказано в работах [96, 98], а у сильных показателей колеблемости гиперкорней на множестве решений уравнений третьего порядка установлено в [95]. Оказалось, что последнее свойство справедливо и для показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей и корней.

**Теорема 1.1** [134]. *Каждый из функционалов*

$$\hat{\nu}_\bullet^\sim, \check{\nu}_\bullet^\sim, \hat{\nu}_\bullet^0, \check{\nu}_\bullet^0, \hat{\nu}_\bullet^+, \check{\nu}_\bullet^+, : \mathcal{S}_\mathcal{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

*не является остаточным.*

Все показатели колеблемости одновременно могут быть точными, но не абсолютными, как показывает следующая

**Теорема 1.2** [134]. *Существует функция  $y \in \mathcal{S}_\mathcal{E}^3$ , удовлетворяющая со-*

ОТНОШЕНИЯМ

$$\nu_{\bullet}^{\sim}(y) = \nu_{\bullet}^0(y) = \nu_{\bullet}^+(y) > \nu_{\circ}^0(y) = \nu_{\circ}^+(y) = \nu_{\circ}^{\sim}(y).$$

**Доказательство теорем 1.1 и 1.2.**

1. Для уравнения  $\ddot{y} + 9\dot{y} = 0$  с постоянной строкой коэффициентов  $a = (0, 9, 0) \in \mathcal{E}^3$  упорядочим фундаментальную систему решений

$$x_1 = \cos 3t, \quad x_2 = \sin 3t, \quad x_3 = 1 \quad (1.10)$$

и заметим положительность определителя Вронского

$$\begin{vmatrix} \cos 3t & \sin 3t & 1 \\ -3 \sin 3t & 3 \cos 3t & 0 \\ -9 \cos 3t & -9 \sin 3t & 0 \end{vmatrix} = 27 \sin^2 t + 27 \cos^2 t = 27 > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

По выбранной системе из трех функций

$$y_1 = \sin 3t, \quad y_2 = e^{-t}, \quad y_3 = \cos 3t \quad (1.11)$$

с положительным определителем Вронского

$$\Delta(t) \equiv \begin{vmatrix} \sin 3t & e^{-t} & \cos 3t \\ 3 \cos 3t & -e^{-t} & -3 \sin 3t \\ -9 \sin 3t & e^{-t} & -9 \cos 3t \end{vmatrix} = 30e^{-t}$$

восстановим линейное однородное уравнение  $b \in \mathcal{E}^n$  вида

$$\frac{1}{\Delta(t)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 & \dot{y} \\ \ddot{y}_1 & \ddot{y}_2 & \ddot{y}_3 & \ddot{y} \\ \dddot{y}_1 & \dddot{y}_2 & \dddot{y}_3 & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0,$$

решениями которого они являются (см. [116]). Раскладывая определитель по элементам последнего столбца, убеждаемся, что коэффициенты построенного уравнения являются ограниченными функциями на  $\mathbb{R}_+$ .

2. Выберем такие числа  $t_1$  и  $t_2$ , что  $t_1 < t_2$ . В соответствии с леммой 1 построим на участке  $[t_1, t_2]$  уравнение  $c \in \mathcal{E}^3$  (с гладкими коэффициентами), переводящее набор (1.10) решений, заданных на отрезке  $[0, t_1]$ , в набор (1.11) решений, заданных на луче  $[t_2, +\infty)$ : слева от отрезка  $[t_1, t_2]$  уравнение  $c$  совпадает с уравнением  $a$ , а справа — с уравнением  $b$ . Здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, а третье — в третье. Обозначим полученные кусочно составленные решения этого уравнения через  $z_1, z_2, z_3$  соответственно, т. е.

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & t \in [0, t_1], \\ y_i(t), & t \in [t_2, +\infty), \end{cases} \quad i = \overline{1, 3}.$$

3. Рассмотрим два решения

$$z = z_1 + z_2 \in \mathcal{S}_*(c), \quad y = y_1 + y_2 \in \mathcal{S}_*(b),$$

совпадающие друг с другом на луче  $[t_2, +\infty)$ . Для вектора  $m_1 = (9, 0, 1)$  имеем представление

$$\langle \psi y(t), m_1 \rangle = 10e^{-t} > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.12)$$

$$\langle \psi z(t), m_1 \rangle = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ \langle \psi y(t), m_1 \rangle, & t \in [t_2, +\infty). \end{cases} \quad (1.13)$$

Для любых  $s \in \{\sim, 0, +\}$  и  $t > 0$  из неравенства (1.12) вытекает равенство  $\nu^s(y, m_1, t) = 0$ , а значит, сильные показатели колеблемости равны нулю

$$\hat{\nu}_\bullet^s(y) = \check{\nu}_\bullet^s(y) = 0. \quad (1.14)$$

Из представления (1.13) при любом  $s \in \{\sim, 0, +\}$  имеем  $\nu^s(z, m_1, t_1) = \infty$ . Последнее равенство означает, что на векторе  $m_1$  не реализуется инфимум в определениях показателей колеблемости функции  $z$ .

Для любого вектора  $m = (\alpha, \beta, \gamma)$  при  $t \geq t_2$  имеем представление

$$\langle \psi z(t), m \rangle = A_1 \sin(3t) + A_2 \cos(3t) + A_3 e^{-t},$$

где  $A_1 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 10$  при  $m \rightarrow m_1$ . Поэтому скалярное произведение  $\langle \psi z(t), m \rangle$  отделено от нуля на промежутке  $[t_2, +\infty)$ , при этом согласно теореме 2 [81] выполнено  $\nu^*(z, m, t_2) < \infty$ , а значит, при каждом  $s \in \{\sim, 0, +\}$  справедливы равенства

$$\check{\nu}_\circ^s(z) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^s(z, m, t) = 0. \quad (1.15)$$

4. При любом  $m$ , неколлинеарном  $m_1$ , скалярное произведение  $\langle \psi z(t), m \rangle$ , начиная с некоторого достаточно большого значения  $t_3(m)$ , на любом промежутке длины  $\pi$  будет иметь ровно 3 нуля. При этом для многих векторов  $m$ , согласно теореме 2 [81], выполнено неравенство  $\nu^*(z, m, t_3(m)) < \infty$ . Следовательно, при любом  $s \in \{\sim, 0, +\}$  справедливо

$$\hat{\nu}_\bullet^s(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^s(z, m, t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \left[ \frac{3t}{\pi} \right] = 3,$$

где  $[s]$  — целая часть числа  $s$ .

Для нижних сильных показателей колеблемости решения  $z$  имеют место аналогичные равенства, поэтому справедлива цепочка равенств

$$\hat{\nu}_{\bullet}^s(z) = \check{\nu}_{\bullet}^s(z) = 3. \quad (1.16)$$

Несовпадение друг с другом чисел (1.15) и (1.16) завершает доказательство теоремы 1.2.

Неравенство значений (1.14) и (1.16) означает неостаточность сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей и корней на множестве всех решений всех линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка.

Теоремы 1.1 и 1.2 доказаны.

В работе [109] теоремы 1.1 и 1.2 были обобщены на произвольный порядок уравнений.

### 1.3 Ляпуновские показатели блуждаемости

Сначала сформулируем вспомогательные определения и раскроем их геометрические интерпретации.

**Определение 1.6** [79]. Определим *вариацию следа* функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  за время от 0 до  $t$  формулой

$$\gamma(x, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(x, \tau) \right| d\tau,$$

где

$$e(x, \tau) \equiv \frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}, \quad |x(\tau)| \equiv \sqrt{x_1^2(\tau) + \dots + x_n^2(\tau)}.$$

В работе будем использовать обозначение вариации следа функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  за время от  $t_1$  до  $t_2$

$$\gamma(x, t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(x, \tau) \right| d\tau.$$

**Замечание 1.3.** Геометрический смысл вариации следа функции  $x$  — это полная *длина пути* на сфере

$$S^{n-1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

конца единичного вектора  $e(x, \tau)$  при  $\tau \in [0; t]$ .

**Определение 1.7** [79]. Для каждой функции  $x \in \mathcal{S}_M^n$  определим ее нижнюю и верхнюю скорости блуждания соответственно формулами

$$\check{\mu}(x) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t), \quad \hat{\mu}(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t).$$

**Определение 1.8** [79]. Если значение верхней (с крышечкой) скорости блуждания функции  $x$  совпадает со значением нижней (с галочкой), то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки.

**Замечание 1.4.** Скорость блуждания решения — это средняя по времени скорость, с которой движется центральная проекция решения на единичную сферу.

Для произвольной вектор-функции  $z \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^2)$  однозначно определим функцию  $\phi_z \in C^1(\mathbb{R}_+)$  соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos \phi_z(t), \sin \phi_z(t))^\top = z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

**Замечание 1.5.** Вариацию следа функции  $z$  за время от 0 до  $t$  можно вычислять по формуле

$$\gamma(z, t) = \int_0^t |\dot{\phi}_z(\tau)| d\tau,$$

так как

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(z, \tau) \right| &= \left| \frac{d}{d\tau} (\cos \phi_z(\tau), \sin \phi_z(\tau))^\top \right| = \\ &= |(-\sin \phi_z(\tau), \cos \phi_z(\tau))^\top \dot{\phi}_z(\tau)| = |\dot{\phi}_z(\tau)|. \end{aligned}$$

Теперь дадим определения показателей блуждаемости.

**Определение 1.9** [79, 82]. Нижние (верхние) сильный и слабый показатели блуждаемости вектор-функции  $x \in \mathcal{S}_M^n$  зададим соответственно с помощью формул

$$\begin{aligned} \check{\rho}_\bullet(x) &\equiv \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \check{\mu}(Lx) & \left( \hat{\rho}_\bullet(x) &\equiv \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx) \right), \\ \check{\rho}_\circ(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t) & \left( \hat{\rho}_\circ(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t) \right), \end{aligned}$$

где  $\text{Aut} \mathbb{R}^n$  — множество всех невырожденных линейных операторов  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.10** [82, 111]. Если значение некоторого верхнего показателя блуждаемости совпадает со значением одноимённого нижнего, то будем называть это значение точным, записывая его без галочки и крышечки. Если значение некоторого слабого (с обозначением  $\circ$ ) показателя блуждаемости совпадает со значением одноимённого сильного (с обозначением  $\bullet$ ) показателя, то будем называть это значение абсолютным, записывая его без знаков  $\circ$  и  $\bullet$ .

Для сравнения напомним, что *показатели Ляпунова и Перрона* функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ , задаваемые равенствами

$$\hat{\chi}(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|}, \quad \check{\chi}(x) = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|},$$

отвечают за экспоненциальный рост нормы вектор-функции  $x$ . Далее отметим следующие факты:

1) показатели Ляпунова и Перрона согласно цепочке равенств

$$\begin{aligned} \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|} &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d \ln \langle x(\tau), x(\tau) \rangle}{d\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\langle A(\tau)x(\tau), x(\tau) \rangle + \langle x(\tau), A(\tau)x(\tau) \rangle}{\langle x(\tau), x(\tau) \rangle} d\tau = \\ &= \int_0^t \langle A(\tau)e(x, \tau), e(x, \tau) \rangle d\tau \end{aligned}$$

совпадают соответственно с верхним и нижним временными средними величины  $\langle A(\tau)e(x, \tau), e(x, \tau) \rangle$ , равной радиальной составляющей фазовых скоростей  $A(\tau)e(x, \tau)$  решений, проходящих через точки траектории  $e(x, \tau)$  на единичной сфере [79];

2) временное среднее вдоль той же траектории  $e(x, \tau)$ , но от модуля другой составляющей, перпендикулярной к радиусу (или касательной к сфере) и равной

$$\frac{d}{d\tau} e(x, \tau) = A(\tau)e(x, \tau) - \langle A(\tau)e(x, \tau), e(x, \tau) \rangle e(x, \tau),$$

является скоростью блуждания решения  $x$  [79].

Любопытное равенство, связывающее число гиперкратных корней вектор-функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  на отрезке с длиной пути ее следа на сфере, устанавливает

**Утверждение 1.4** (Сергеев И.Н. [81]). Для любых  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  и момента  $t > 0$  справедливо равенство

$$\frac{1}{\text{mes } S^{n-1}} \cdot \int_{S^{n-1}} \nu^*(x, m, t) dm = \frac{1}{\pi} \cdot \gamma(x, t). \quad (1.17)$$

**Утверждение 1.5.** Пусть неограниченно возрастающая последовательность  $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$  положительных чисел и функция  $x \in \mathcal{S}_M^n$  удовлетворяют условиям

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{t_{p+1}}{t_p} = 1, \quad (1.18)$$

$$\underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Lx, t_p, t_{p+1})}{t_{p+1} - t_p} \geq \underline{\rho}, \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Lx, t_p, t_{p+1})}{t_{p+1} - t_p} \leq \bar{\rho}, \quad L \in \text{Aut}\mathbb{R}^n,$$

где значения  $\underline{\rho}, \bar{\rho} \geq 0$  конечны. Тогда справедливы неравенства

$$\check{\rho}_\circ(x) \geq \underline{\rho}, \quad \hat{\rho}_\bullet(x) \leq \bar{\rho}.$$

**Доказательство.** Условие (1.18) вытекает, в частности, из оценки

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} (t_{p+1} - t_p) < +\infty.$$

Во-первых, обозначим через  $T$  последнее выражение. Тогда если  $T < +\infty$ , то

$$0 + 1 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{T}{t_p} + 1 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{t_{p+1} - t_p}{t_p} + \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{t_p}{t_p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{t_{p+1}}{t_p},$$

откуда следует существование последнего предела и его равенство числу 1.

Во-вторых, пусть выполнены условия леммы. Тогда при любом  $\underline{\rho}' < \underline{\rho}$  для некоторого  $P \in \mathbb{N}$  верны оценки

$$\frac{\gamma(Lx, t_p, t_{p+1})}{t_{p+1} - t_p} \geq \underline{\rho}', \quad L \in \text{Aut}\mathbb{R}^n, \quad p \geq P,$$

из которых для нижнего предела получаем цепочку

$$\begin{aligned} \check{\rho}_\circ(x) &= \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{\gamma(Lx, t)}{t} \geq \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{\gamma(Lx, t_p)}{t_{p+1}} = \\ &= \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{\gamma(Lx, t_P, t_p)}{t_p - t_P} \cdot \frac{t_p - t_P}{t_{p+1}} \geq \underline{\rho}', \end{aligned}$$

откуда, с учетом произвольности числа  $\underline{\rho}' < \underline{\rho}$ , имеем  $\check{\rho}_\circ(x) \geq \underline{\rho}$ .

При любом  $\bar{\rho}' > \bar{\rho}$  для некоторого  $P \in \mathbb{N}$  верны оценки

$$\frac{\gamma(Lx, t_P, t_p)}{t_{p+1} - t_P} \leq \bar{\rho}', \quad L \in \text{Aut}\mathbb{R}^n, \quad p \geq P,$$

из которых для верхнего предела также получаем цепочку

$$\hat{\rho}_\bullet(x) = \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Lx, t)}{t} \leq \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^n} \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Lx, t_p)}{t_{p+1}} =$$

$$= \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Lx, t_p, t_p)}{t_p - t_P} \cdot \frac{t_p - t_P}{t_{p+1}} \leq \bar{\rho}'.$$

Утверждение 1.5 доказано.

**Утверждение 1.6.** Для произвольной вектор-функции  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ , числа  $\lambda > 0$  и функции  $y$ , заданной равенством  $y(t) = x(\lambda t)$ , верно

$$\varkappa(y) = \lambda \varkappa(x), \quad \varkappa = \check{\rho}_{\bullet}, \hat{\rho}_{\bullet}, \check{\rho}_{\circ}, \hat{\rho}_{\circ}.$$

**Доказательство.** Пусть заданы  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  и  $\lambda > 0$ . Тогда для любого преобразования  $L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n$  будем иметь

$$\gamma(Ly, t) = \gamma(Lx, \lambda t), \quad t > 0.$$

Далее, делая замену  $\tau = \lambda t$ , получим цепочку соотношений для нижнего слабого показателя блуждаемости

$$\begin{aligned} \check{\rho}_{\circ}(y) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{\gamma(Ly, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{\lambda}{\lambda t} \gamma(Lx, \lambda t) = \\ &= \lambda \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{\tau} \gamma(Lx, \tau) = \lambda \check{\rho}_{\circ}(x). \end{aligned}$$

Для остальных показателей блуждаемости проводятся аналогичные рассуждения:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\circ}(y) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{\gamma(Ly, t)}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{\lambda}{\lambda t} \gamma(Lx, \lambda t) = \lambda \hat{\rho}_{\circ}(x); \\ \check{\rho}_{\bullet}(y) &= \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Ly, t)}{t} = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{\lambda t} \gamma(Lx, \lambda t) = \lambda \check{\rho}_{\bullet}(x); \\ \hat{\rho}_{\bullet}(y) &= \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Ly, t)}{t} = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{\lambda t} \gamma(Lx, \lambda t) = \lambda \hat{\rho}_{\bullet}(x). \end{aligned}$$

Утверждение 1.6 доказано.

Инвариантность показателей блуждаемости относительно выбора базиса гарантирует следующая

**Лемма 1.8.** Для подобных векторов  $x, y \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  справедливо равенство

$$\varkappa(x) = \varkappa(y), \quad \varkappa = \check{\rho}_{\bullet}, \hat{\rho}_{\bullet}, \check{\rho}_{\circ}, \hat{\rho}_{\circ}.$$

**Доказательство.** Для подобных вектор-функции  $x, y \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$  найдется невырожденная матрица  $C \in \mathcal{C}^n$ , удовлетворяющая равенству  $y = Cx$ . Далее, учитывая равенства

$$\{LCx \mid L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n\} = \{Lx \mid L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n\},$$

для каждого показателя блуждаемости будем иметь

$$\check{\rho}_\circ(y) = \varliminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \gamma(Ly, t) = \varliminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \gamma(LCx, t) = \check{\rho}_\circ(x);$$

$$\hat{\rho}_\circ(y) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \gamma(Ly, t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \gamma(LCx, t) = \hat{\rho}_\circ(x);$$

$$\check{\rho}_\bullet(y) = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \varliminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \gamma(Ly, t) = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \varliminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \gamma(LCx, t) = \check{\rho}_\bullet(x);$$

$$\hat{\rho}_\bullet(y) = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \gamma(Ly, t) = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \gamma(LCx, t) = \hat{\rho}_\bullet(x).$$

Лемма 1.8 доказана.

Для любой системы  $A \in \mathcal{M}^n$  определим величину

$$\|A\|_I \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|A(\tau)\| d\tau,$$

где

$$\|A(\tau)\| \equiv \sup_{|u|=1} |A(\tau)u|,$$

принимающей только конечные значения [82].

**Утверждение 1.7** (Сергеев И.Н. [79, 84]). Для любого решения  $x \in \mathcal{S}(A)$  любой системы  $A \in \mathcal{M}^n$  верны оценки

$$0 \leq \check{\rho}_\circ(x) \leq \hat{\rho}_\circ(x), \quad \check{\rho}_\bullet(x) \leq \hat{\rho}_\bullet(x); \quad (1.19)$$

$$\check{\rho}_\circ(x) \leq \check{\rho}_\bullet(x), \quad \hat{\rho}_\circ(x) \leq \hat{\rho}_\bullet(x); \quad (1.20)$$

$$\hat{\rho}_\bullet(x) \leq \|A\|_I. \quad (1.21)$$

**Утверждение 1.8** (Сергеев И.Н. [84]). Существует такая система  $A \in \mathcal{M}^2$ , удовлетворяющая условию  $\|A\|_I = 0$ , что все ее решения  $x \in \mathcal{S}_*(A)$  имеют показатели

$$0 = \rho(x) < \hat{\nu}_\bullet(x) = +\infty.$$

**Утверждение 1.9** (Сергеев И.Н. [84]). Существует система  $A \in \mathcal{M}^2$ , имеющая решение  $x \in \mathcal{S}_*(A)$  с точными показателями

$$0 = \nu^*(x) < \rho_\bullet(x) = 1.$$

## 1.4 Спектр показателя системы

С каждым из показателей колеблемости и блуждаемости  $\varkappa$  и с каждой системой  $A \in \mathcal{M}^n$  можно связать функционал

$$\varkappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \equiv \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}. \quad (1.22)$$

**Определение 1.11.** *Спектром* показателя  $\varkappa$  (1.22) системы  $A \in \mathcal{M}^n$  назовем множество  $\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ , а значение показателя  $\varkappa$ , принадлежащее спектру системы  $A$ , назовем:

а) *метрически типичным* [77], если оно принимается на решениях  $x \in \mathcal{S}_*(A)$ , множество наборов  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  начальных значений которых имеет полную меру в  $\mathbb{R}^n$ ;

б) *метрически существенным* [77], если оно принимается на решениях  $x \in \mathcal{S}_*(A)$ , множество наборов  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  начальных значений которых содержит множество положительной меры в  $\mathbb{R}^n$ ;

в) *топологически типичным* [78], если оно принимается на решениях  $x \in \mathcal{S}_*(A)$ , множество наборов  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  начальных значений которых служит дополнением к множеству первой категории Бэра [55], или содержит всюду плотное множество типа  $G_\delta$  (т. е. представимое в виде счетного пересечения открытых и всюду плотных множеств);

г) *топологически существенным* [78], если оно принимается на решениях  $x \in \mathcal{S}_*(A)$ , множество наборов  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  начальных значений которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством  $U \subset \mathbb{R}^n$ , служит дополнением в  $U$  к множеству первой категории Бэра.

д) *существенным*, если оно является метрически и топологически существенным.

Через  $\text{ess } \varkappa(\mathcal{S}_*(A))$  обозначим множество всех *существенных значений* показателя  $\varkappa$  для системы  $A$  и назовем его *существенным спектром* системы  $A$ .

**Замечание 1.6.** Спектр показателя  $\varkappa$  (1.22) любой системы  $A \in \mathcal{M}^n$  содержит не более чем счетное множество метрически (топологически) существенных значений и не более одного метрически (топологически) типичного значения.

## Глава 2

# Спектры ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости линейных однородных дифференциальных систем

Основные результаты данной главы, выносимые на защиту, связаны с утверждениями о возможных спектрах показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами [147].

В разделе 2.1 представлен обзор близких результатов и сформулированы основные результаты главы.

В разделе 2.2 установлено совпадение спектров каждого показателя блуждаемости взаимно-сопряженных двумерных систем дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами. Для этого было установлено взаимно-однозначное соответствие между ненулевыми решениями взаимно-сопряженных систем, ортогональными на всей неотрицательной полуоси.

В разделе 2.3 для любого конечного множества  $S = \{0, a_1, \dots, a_l\}$  неотрицательных чисел, содержащего нуль, построена двумерная линейная однородная дифференциальная система (периодическая, если все элементы заданного множества попарно соизмеримы), у которой спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с этим множеством, причем все значения указанных показателей существенны [139, 144]. Для этого по заданному набору  $S$  сначала выбираем число  $T$ , а для каждого числа  $a_i$ ,  $i \in \{1, \dots, l\}$  строим последовательность  $(\lambda_i(k))_{k=1}^{+\infty}$ , состоящую из нулей и единиц. Далее с помощью точек  $T_k = (k-1)T$  последовательности  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  разбиваем полуось на отрезки и каждому из них  $[T_k, T_{k+1}]$  поставим в соответствие число  $\lambda_i(k)$ . После выбираем век-

тор-функцию  $u^i \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^2)$ , осуществляющую на этом отрезке сначала поворот против часовой стрелки за время  $T/2$ , а затем поворот по часовой стрелке за это же время и с такой же скоростью (т.е. возвращаясь назад, занимает исходное направление). Модуль каждого угла зависит от соответствующего данному отрезку значения  $\lambda_i(k)$ : нулевому значению соответствует поворот менее чем на  $\pi$ , а единице — поворот более чем на  $\pi$ . В итоге удастся подобрать вектор, на котором реализуется инфимум в определениях показателей колеблемости функции  $u^i$ , и доказать, что все функции  $u^i$ ,  $i = \overline{1, l}$  являются решением одной и той же линейной однородной двумерной дифференциальной системы. При этом существенность полученного значения  $a_i$  всех показателей колеблемости функции  $u^i$  обеспечена тем, что все достаточно близкие в начальный момент времени к  $u^i(0)$  решения обладают такими свойствами на указанных отрезках.

В разделе 2.4 доказано существование двумерной линейной ограниченной системы, обладающей тем свойством, что ее спектры всех верхних и нижних, сильных и слабых показателей колеблемости строгих и нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с любым наперед заданным замкнутым ограниченным счетным множеством положительных попарно соизмеримых чисел с единственной нулевой предельной точкой [137, 141]. Более того, для любого ненулевого решения построенной системы все показатели колеблемости совпадают между собой, причем каждое их значение является метрически и топологически существенным [144, 146]. В этом случае проводятся аналогичные рассуждения, но алгоритм построения значительно усложняется. Используя понятие разбиения множества натуральных чисел Е.М. Шишлянникова, для последовательности  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  рациональных чисел, сходящейся к нулю, сначала строим систему  $A \in \mathcal{M}^2$ , существенные спектры всех показателей колеблемости которой совпадают с множеством  $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ . В конце убеждаемся, что при любом  $l > 0$  у системы  $B(t) = A(lt)/l$  спектры показателей колеблемости совпадают с множеством  $\{l \cdot a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ .

## 2.1 Обзор литературы и формулировка основных результатов

В работе [79] установлено, что для любого решения системы  $A \in \mathcal{C}^n$  сильный показатель колеблемости нулей является точным, а его спектр совпадает с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы  $A \in \mathcal{C}^n$ .

**Утверждение 2.1** (Сергеев И.Н. [79]). *Для любой системы  $A \in \mathcal{C}^n$*

сильный показатель колеблемости нулей удовлетворяет соотношениям

$$\check{\nu}_{\bullet}^0(x) = \hat{\nu}_{\bullet}^0(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A),$$

$$\nu_{\bullet}^0(\mathcal{S}_*(A)) = \{|\operatorname{Im} \lambda_1(A)|, \dots, |\operatorname{Im} \lambda_n(A)|\},$$

где  $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$  собственные значения матрицы  $A$ .

Оказалось, что сильные показатели колеблемости нулей, нестрогих знаков, корней и гиперкорней любого нетривиального решения автономной системы совпадают с соответствующими слабыми, но из этого списка выбиваются показатели колеблемости строгих знаков.

**Утверждение 2.2** (Бурлаков Д.С. [10]). *Для любого решения  $x \in \mathcal{S}_*(A)$  любой системы  $A \in \mathcal{C}^n$  справедливы равенства*

$$\nu_{\bullet}^0(x) = \check{\nu}_{\circ}^0(x) = \hat{\nu}_{\circ}^0(x).$$

**Утверждение 2.3** (Сташ А.Х. [97, 111]). *Для любой системы  $A \in \mathcal{C}^n$  выполняются следующие соотношения*

$$\nu^0(x) = \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) = \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) = \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A), \quad \alpha \in \{\sim, +, *\},$$

при этом спектры показателей колеблемости строгих знаков состоят не более чем из двух чисел.

Из доказательства утверждений 2.1 – 2.3 следует, что каждый из спектров показателей колеблемости автономных систем может содержать только одно существенное значение.

Известно [82, 12, 100, 111], что спектры показателей ориентированной вращаемости автономных систем содержат множество модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы, но вообще говоря не совпадает с ним. Для широкого класса систем с постоянными коэффициентами ноль является типичным значением данного показателя ориентированной вращаемости [12].

Показатели колеблемости и ориентированной вращаемости каждого нетривиального решения любой линейной однородной треугольной дифференциальной системы равны нулю [103, 111]. Понятно, что это единственное значение является типичным, а значит, и существенным.

Подобный результат для всех слабых и нижних сильных показателей блуждаемости двумерных треугольных систем был установлен в [66]. Там же была доказана теорема о существовании решения некоторой двумерной треугольной системы с положительным значением верхнего сильного показателя блуждаемости.

Спектры показателей колеблемости и блуждаемости могут достигать мощности континуума.

**Утверждение 2.4** (Сташ А.Х. [94, 106, 111]). *Для любого порядка  $n \geq 2$  и любых несоизмеримых чисел  $\omega_2 > \omega_1 > 0$  найдется такая система  $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$  с неограниченными коэффициентами, что справедливы соотношения*

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = [\omega_1, \omega_2], \quad \text{если } n = 2;$$

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(A)) = \begin{cases} [\omega_1, \omega_2], & \text{если } n \text{ четное;} \\ [\omega_1, \omega_2] \cup \{0\}, & \text{если } n \text{ нечетное;} \end{cases} \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}.$$

**Утверждение 2.5** (Шишлянников Е.М. [122, 124, 125]). *Существует система  $A \in \mathcal{M}^2$  с точными, абсолютными и совпадающими спектрами показателей колеблемости и блуждаемости*

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(A)) = \rho(\mathcal{S}_*(A)) = [0, 1], \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Известно, что [107] спектры показателей колеблемости двумерной системы с периодическими коэффициентами могут содержать наборы, состоящие из сколь угодно большего количества существенных значений.

**Утверждение 2.6** (Сташ А.Х. [107]). *Для любого  $N \in \mathbb{N}$  существует система  $A \in \mathcal{P}^2$ , имеющая такие  $N$  решений  $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{S}_*(A)$ , удовлетворяющие условиям*

$$\nu^\alpha(x_i) = \frac{i}{N}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

*причем все эти значения показателей колеблемости являются существенными (и метрически, и топологически).*

Если отказаться от периодичности коэффициентов двумерной системы, то спектры могут содержать счетные множества существенных значений.

**Утверждение 2.7** (Сташ А.Х. [107]). *Существует система  $A \in \mathcal{M}^2$ , имеющая такую последовательность решений  $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{S}_*(A)$ , что выполнено*

$$\nu^\alpha(x_i) = 1 - 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

*причем все эти значения являются существенными (и метрически, и топологически).*

Возможность реализации не более чем счетных существенных спектров показателей блуждаемости двумерной дифференциальной системы гарантируют следующие два утверждения.

**Утверждение 2.8** (Шишлянников Е.М. [123, 125]). Для любого конечного множества  $S \subset (0, +\infty)$  существует система  $A \in \mathcal{M}^2$  (периодическая, если все числа из множества  $S$  попарно соизмеримы) с точными и абсолютными показателями блуждаемости, удовлетворяющая равенствам

$$\rho(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \rho(\mathcal{S}_*(A)) = S \cup \{0\}.$$

Обозначим через  $\mathcal{I}$  класс, состоящий из всех счетных ограниченных подмножеств  $X \subset (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$  ( $\mathbb{Q}$  – множество рациональных чисел), у каждого из которых 0 – единственная предельная точка.

**Утверждение 2.9** (Шишлянников Е.М. [125]). Для любого множества  $X \in \mathcal{I}$  существует такая система  $A \in \mathcal{M}^2$  с точными и абсолютными показателями блуждаемости, удовлетворяющая равенствам

$$\rho(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \rho(\mathcal{S}_*(A)) = X \cup \{0\}.$$

Оказалось, что утверждения 2.8 и 2.9 можно обобщить и на все показатели колеблемости.

**Теорема 2.1** [135]. Для любого конечного множества  $S$  неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует такая система  $A \in \mathcal{M}^2$  (периодическая, если элементы множества  $S$  попарно соизмеримы), что справедливы равенства

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = S, \quad (2.1)$$

причем

$$\nu^-(x) = \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A). \quad (2.2)$$

**Теорема 2.2** [137]. Для любых  $l > 0$  и последовательности  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  положительных рациональных чисел, сходящейся к нулю, существует такая двумерная система  $A \in \mathcal{M}^2$ , что справедлива цепочка равенств

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \{l \cdot q_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, \quad (2.3)$$

причем

$$\nu^-(x) = \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A). \quad (2.4)$$

**Определение 2.1** [32]. Система  $-A^\top \in \mathcal{M}^n$  называется сопряженной для системы  $A \in \mathcal{M}^n$ .

**Замечание 2.1.** Заметим, что систему  $A \in \mathcal{M}^n$  можно рассматривать и как сопряженную для системы  $-A^\top \in \mathcal{M}^n$ . Другими словами, системы  $A$  и  $-A^\top$  взаимно-сопряженные.

Спектры каждого показателя колеблемости взаимно-сопряженных двумерных систем совпадают между собой.

**Утверждение 2.10** (Сташ А.Х. [103]). Для любой системы  $A \in \mathcal{M}^2$  и любого показателя колеблемости

$$\varkappa = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}, \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\} \quad (2.5)$$

справедливо равенство

$$\text{Спес}_{\varkappa}(A) = \text{Спес}_{\varkappa}(-A^{\top}).$$

Оказалось, что это свойство справедливо и для всех показателей блуждаемости.

**Теорема 2.3.** Для любой системы  $A \in \mathcal{M}^2$  и любого показателя блуждаемости  $\varkappa = \check{\rho}_{\bullet}, \hat{\rho}_{\bullet}, \check{\rho}_{\circ}, \hat{\rho}_{\circ}$  справедливо равенство

$$\text{Спес}_{\varkappa}(A) = \text{Спес}_{\varkappa}(-A^{\top}).$$

Ниже приводятся доказательства сформулированных теорем.

## 2.2 Спектры показателей блуждаемости взаимно-сопряженных систем

В этом разделе приводим доказательство совпадения спектров каждого из показателей блуждаемости взаимно-сопряженных двумерных дифференциальных систем.

Сначала рассмотрим вспомогательное утверждение, а для этого дадим следующее

**Определение 2.2** [82, 111]. Для функции  $x, y \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$  и конечного момента времени  $t > 0$  определим функционал  $\Theta(x, t)$ , как такую непрерывную ветвь ориентированного угла между векторами  $x(t)$  и  $x(0)$ , что  $\Theta(x, 0) = 0$ .

**Лемма 2.1** [127]. Для произвольной вектор-функции  $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$  и невырожденной матрицы второго порядка  $L$  положим  $z(t) = Ly(t)$ .

а) Пусть  $\det L > 0$ . Если при некоторых  $k \in \mathbb{Z}$  и  $T > 0$  выполнено равенство  $\Theta(y, T) = \pi k$  или  $\pi k \leq \Theta(y, T) \leq \pi(k+1)$ , то справедливо соответственно  $\Theta(Ly, T) = \pi k$  или  $\pi k \leq \Theta(Ly, T) \leq \pi(k+1)$ .

б) Пусть  $\det L < 0$ . Если при некоторых  $k \in \mathbb{Z}$  и  $T > 0$  выполнено  $\Theta(y, T) = \pi k$  или  $\pi k \leq \Theta(y, T) \leq \pi(k+1)$ , то справедливо соответственно  $\Theta(Ly, T) = -\pi k$  или  $\pi k \leq -\Theta(Ly, T) \leq \pi(k+1)$ .

**Доказательство теоремы 2.3.** 1. Пусть задана система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.6)$$

и выбраны произвольные решения  $x \in \mathcal{S}_*(A)$  и  $y \in \mathcal{S}_*(-A^\top)$ . Тогда вектор-строка  $y^\top$ , очевидно, удовлетворяет равенству

$$\dot{y}^\top = -y^\top A(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.7)$$

Из уравнений (2.6) и (2.7) получаем

$$y^\top \dot{x} = y^\top A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

и

$$\dot{y}^\top x = -y^\top A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Складывая последние равенства, будем иметь

$$y^\top \dot{x} + \dot{y}^\top x = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

или

$$\frac{d}{dt} \langle x(t), y(t) \rangle = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно, скалярное произведение тождественно равно нулю

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \text{const}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.8)$$

2. Каждому решению  $x \in \mathcal{S}(A)$  дифференциальной системы  $A$  с начальным направлением  $x(0) = (c_1, c_2)$  поставим в соответствие решение  $y \in \mathcal{S}(-A^\top)$  сопряженной системы  $-A^\top$  с начальным условием  $y(0) = (-c_2, c_1)$ . Тогда для вектор-функций  $x$  и  $y$  выполнено тождество (2.8), а значит, на основании леммы 2.1  $x(t) \perp y(t)$  при любом  $t \in \mathbb{R}_+$  и соответственно будем иметь

$$\left[ \frac{\gamma(Lx, t)}{\pi} \right] = \left[ \frac{\gamma(Ly, t)}{\pi} \right], \quad L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

где  $[\cdot]$  — целая часть числа.

Следовательно, выполняются две цепочки равенств

$$\begin{aligned} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \left[ \frac{\gamma(Lx, t)}{\pi} \right] &= \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \left[ \frac{\gamma(Ly, t)}{\pi} \right], \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \frac{\gamma(Lx, t)}{\pi} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left[ \frac{\gamma(Lx, t)}{\pi} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left[ \frac{\gamma(Ly, t)}{\pi} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \frac{\gamma(Ly, t)}{\pi}, \end{aligned}$$

из которых следуют совпадение соответствующих нижних показателей блуждаемости выбранных решений  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\check{\rho}_\circ(x)}{\pi} &= \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{\pi t} \gamma(Lx, t) = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \left[ \frac{\gamma(Lx, t)}{\pi} \right] = \\ &= \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \left[ \frac{\gamma(Ly, t)}{\pi} \right] = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \frac{\gamma(Lx, t)}{\pi} = \frac{\check{\rho}_\circ(y)}{\pi}, \\ \check{\rho}_\bullet(x) &= \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Lx, t)}{t} = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Ly, t)}{t} = \check{\rho}_\bullet(y).\end{aligned}$$

Теперь перейдем к доказательству равенства верхних показателей блуждаемости. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\rho}_\circ(x)}{\pi} &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{\pi t} \gamma(Lx, t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \left[ \frac{\gamma(Lx, t)}{\pi} \right] = \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \left[ \frac{\gamma(Ly, t)}{\pi} \right] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \frac{\gamma(Lx, t)}{\pi} = \frac{\hat{\rho}_\circ(y)}{\pi}, \\ \hat{\rho}_\bullet(x) &= \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Lx, t)}{t} = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Ly, t)}{t} = \hat{\rho}_\bullet(y).\end{aligned}$$

Теорема 2.3 доказана.

### 2.3 Реализация произвольных конечных существенных спектров показателей колеблемости

В данном разделе построена линейная однородная двумерная дифференциальная система с наперед заданным произвольным конечным существенным спектром каждого из всех показателей колеблемости.

Сначала приведём свойства специальных вектор-функций, необходимые для доказательства основного результата.

Для произвольной вектор-функции  $z \in C^1(E, \mathbb{R}_*^2)$  ( $E$  – либо отрезок вида  $[0, T]$ , либо полуось  $\mathbb{R}_+$ ) однозначно определим функцию  $\phi_z : E \rightarrow \mathbb{R}$  соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos \phi_z(t), \sin \phi_z(t))^\top = z(t), \quad t \in E, \quad \phi_z \in C^1(E).$$

Для любых  $T > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ ,  $\delta \in (0, \pi/2]$  обозначим через  $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$  и  $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0, \delta)$  множества, состоящие из вектор-функций  $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$ , удовлетворяющих условиям:

- 1)  $\phi(0) = \varphi_0$ , где  $\phi = \phi_u$ ;

- 2) функция  $\phi$  нестрого монотонна на отрезках  $[0, T/4]$  и  $[T/4, T/2]$ ;  
3) при каждом  $t \in (0, T/2]$  верно равенство  $\phi(T/2 + t) = \phi(T/2 - t)$ ;  
4) для  $u \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$  при каждом  $t \in (0, T/2]$  выполнено включение  $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi - \delta]$ ;  
5) для  $u \in \mathcal{A}_1(T, \varphi_0, \delta)$  функция  $\phi$  нестрого возрастает на отрезке  $[0, T/2]$  и  $\pi \leq \phi(T/2) - \varphi_0 \leq 3\pi/2$ .

Для любой функции  $z \in \mathcal{S}_M^2$  и для любых чисел  $i \in \mathbb{N}$  и  $T > 0$  определим функцию  $u^i \equiv u_z^{T,i} \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$  с помощью равенства

$$u_z^{T,i}(t) \equiv z((i-1)T + t), \quad t \in [0, T].$$

Вычисление значений показателей колеблемости для некоторых функций из множества  $\mathcal{S}_M^2$  упрощает следующая

**Лемма 2.2** [135]. *Если для чисел  $a \in [0, 1]$ ,  $T > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ ,  $\delta \in (0, \pi/2]$ , последовательности  $l_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , и решения  $z \in \mathcal{S}_M^2$  имеют место соотношения*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i = a,$$

$$u^i \in \mathcal{A}_{l_i}(T, \varphi_0, \delta), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

то справедлива цепочка равенств

$$\check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \check{\nu}_\circ^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = 2a\pi/T, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}. \quad (2.10)$$

**Доказательство.** Из определений множеств  $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$ ,  $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0, \delta)$  и условия (2.9) следует существование вектора  $m_z \in \mathbb{R}_*^2$  для наперед выбранного решения  $z \in \mathcal{S}_M^2$ , что при любых  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  выполняется

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \nu^\alpha(z, m, (i-1)T, iT) = \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) = \begin{cases} 2, & l_i = 1, \\ 0, & l_i = 0. \end{cases}$$

Откуда для нижних слабых показателей колеблемости будем иметь

$$\begin{aligned} \check{\nu}_\circ^\alpha(z) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m, t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{pT} \nu^\alpha(z, m, pT) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m, (i-1)T, iT) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p 2l_i = \frac{2\pi}{T} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i = \frac{2\pi}{T} a.$$

С учетом установленных равенств и определений показателей колеблемости, получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T} a &= \check{\nu}_\circ^\alpha(z) \leq \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) \leq \\ &\leq \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m, t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m_z, t) = \\ &= \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \nu^\alpha(z, m_z, pT) = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) = \frac{2\pi}{T} a, \end{aligned}$$

все нестрогие неравенства которого превращаются в равенства, а значит, справедливость цепочки равенств (2.10) установлена.

Лемма 2.2 доказана.

Для вектор-функций из определенных выше классов справедлива следующая

**Лемма 2.3** [123, 125]. *Для любых чисел  $T > 0$  и  $1 < c^- < c^+$  существуют вектор-функции  $u, v \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$ , число  $\varepsilon > 0$  и функция*

$$d : \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+] \rightarrow (0, \pi/2],$$

для которых верны следующие утверждения:

(i) выполняются равенства

$$u(0) = u(T) = (1, 0)^\top, \quad v(0) = v(T) = (0, 1)^\top,$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}(T) = \dot{v}(0) = \dot{v}(T) = (0, 0)^\top;$$

(ii) при всех  $t \in [0, T]$  справедлива оценка  $\det(u(t), v(t)) \geq \varepsilon$ ;

(iii) имеет место включение  $u \in \mathcal{A}_0(T, 0, \pi/2)$  и для любого  $c \in \mathbb{R}$  верно одно из включений

$$cu + v \in \begin{cases} \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d(c)), & c \in \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+], \\ \mathcal{A}_1(T, \varphi_c, d(c)), & c \in [c^-, c^+], \end{cases}$$

где  $\varphi_c \equiv \pi/2 - \arctg c$ .

**Замечание 2.2.** Для каждого значения параметра  $c \in \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+]$  величина  $d(c)$  определяет зазор, с которым функция  $cu + v$  принадлежит множеству  $\mathcal{A}_0$ .

**Замечание 2.3.** Лемма 2.3 позволяет строить такую специальную пару вектор-функций  $u$  и  $v$ , что их линейная комбинация  $cu + v$  попадает в  $\mathcal{A}_1$  при  $c \in [c^-, c^+]$ , а иначе лежит в  $\mathcal{A}_0$ .

Теперь с помощью методов работ [123, 125] перейдем к доказательству основного результата этого раздела.

**Доказательство теоремы 2.1** (см. [134]).

1. Пусть при некотором  $l \in \mathbb{N}$  задано множество  $S = \{0, a_1, \dots, a_l\}$  и  $a_l = \max S$ . Для каждого  $k \in \{1, \dots, l\}$  определим последовательность из целых чисел

$$(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$$

с помощью равенств:

$$a'_k \equiv \frac{a_k}{a_l}, \quad \lambda_k(j) \equiv [ja'_k] - [(j-1)a'_k],$$

где  $[\cdot]$  – целая часть числа.

Из представления

$$\lambda_k(j) = a'_k - \{ja'_k\} + \{(j-1)a'_k\}$$

(здесь  $\{\cdot\}$  – дробная часть числа) и неравенства  $a'_k \leq 1$  следует, что  $\lambda_k(j) < 2$ , поэтому верны включения

$$\lambda_k(j) \in \{0, 1\}, \quad k \in \{1, \dots, l\}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

2. Разобьем множество натуральных чисел на блоки: числа  $k$ -го блока – числа

$$(k-1)l + 1, \dots, kl;$$

считаем, что число

$$(k-1)l + i, \quad 1 \leq i \leq l,$$

$k$ -го блока имеет в нем номер  $i$ . Другими словами, если  $r \in \mathbb{N}$ , то  $j_r = [r/l] + 1$  – номер блока, которому принадлежит  $r$ , а  $r - (j_r - 1)l$  – номер числа  $r$  в этом блоке.

Для каждого  $k \in \{1, \dots, l\}$  по последовательности  $(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$  построим подмножество  $\Lambda_k \subset \mathbb{N}$ , определив его характеристическую функцию равенством

$$\chi_{\Lambda_k}(i) = \begin{cases} \lambda_k(j_i), & k_i = k, \\ 0, & k_i \neq k. \end{cases} \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.11) следует, что формула (2.12) корректно задает подмножество  $\Lambda_k$ . Заметим, что элементы  $\Lambda_k$  могут встречаться только на местах, имеющих номер  $k$  внутри блоков, поэтому верны соотношения

$$\Lambda_k \cap \Lambda_h = \emptyset, \quad k, h \in \{1, \dots, l\}, \quad k \neq h. \quad (2.13)$$

Далее определим множество

$$\Lambda_0 \equiv \mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^l \Lambda_k,$$

удовлетворяющее равенству

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{h=0}^l \Lambda_h. \quad (2.14)$$

3. Фиксируем значения

$$1 < c_1^- < c_1^+ < \dots < c_l^- < c_l^+$$

и для каждого  $k \in \{1, \dots, l\}$  по набору из чисел  $T \equiv \frac{2\pi}{la_l}$ ,  $c_k^-$  и  $c_k^+$  построим функции  $u_k, v_k, d_k$  и значение  $\varepsilon_k$  в соответствии с леммой 2.3.

Для любого  $i \in \mathbb{N}$  выберем  $h \in \{0, 1, \dots, l\}$  такое, что  $i \in \Lambda_h$  и положим  $\kappa(i) \equiv h$ , определив тем самым функцию  $\kappa : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, l\}$ . Из соотношений (2.13) и (2.14) следует, что функция  $\kappa$  корректно определена.

Теперь построим решения  $z_1$  и  $z_2$ , положив для каждого  $i$

$$u_{z_1}^{T,i} \equiv u_{\kappa(i)}, \quad u_{z_2}^{T,i} \equiv v_{\kappa(i)}, \quad (2.15)$$

где

$$u_0(t) \equiv (1, 0)^\top, \quad v_0(t) \equiv (0, 1)^\top, \quad t \in [0, T].$$

Из утверждения (i) леммы 2.3 следует, что функции  $z_1$  и  $z_2$  непрерывно дифференцируемы, а поскольку они построены из конечного числа непрерывных элементов, при некотором  $b > 0$  и для всех  $t \in \mathbb{R}_+$  выполнено условие

$$|z_1(t)|, |z_2(t)|, |\dot{z}_1(t)|, |\dot{z}_2(t)| \leq b.$$

Из утверждения (ii) леммы 2.3 и равенства  $\det(u_0, v_0) = 1$  следует оценка снизу

$$\det(z_1(t), z_2(t)) \geq \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где  $\varepsilon \equiv \min\{1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l\}$ .

Следовательно, матрица

$$Z = (z_1(t), z_2(t)) = (z_{ij})$$

является фундаментальной для ограниченной системы

$$A = \dot{Z}Z^{-1} = (\dot{z}_{ij})(Z_{jk})/\det Z \in \mathcal{M}^2,$$

где  $Z_{jk}$  – алгебраическое дополнение элемента  $z_{jk}$ .

4. Если элементы множества  $S$  попарно соизмеримы, то для каждого  $k \in \{1, \dots, l\}$  число  $a'_k$  рационально, а значит, при некоторых  $p_k, q_k \in \mathbb{N}$  верно равенство  $a'_k = p_k/q_k$ . Поэтому для любого  $j \in \mathbb{N}$  цепочка равенств

$$\begin{aligned} \lambda_k(j + q_k) &\equiv [(j + q_k)a'_k] - [(j + q_k - 1)a'_k] = \\ &= [p_k + ja'_k] - [p_k + (j - 1)a'_k] = \lambda_k(j), \end{aligned}$$

начинает выполняться только с  $j = q_k$ , до этого значения  $j$  имеем  $\lambda_k(j) = 0$ . Такое свойство функции будем называть *периодичностью в положительном направлении*, начиная с некоторого числа, т. е. последовательность  $(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$  имеет период  $q_k$  в положительном направлении, начиная с  $j = q_k$ .

Из определения (2.12), получаем, что функция  $\kappa$  имеет период

$$Q \equiv l \prod_{k=1}^l q_k$$

в положительном направлении, а значит, в силу определения (2.15) функции  $z_1$  и  $z_2$  имеют период  $QT$  в положительном направлении.

5. Для любой функции

$$z \in \mathcal{Z} \equiv \{cz_1 + z_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{z_1\},$$

опираясь на формулы (2.15) и утверждение (iii) леммы 2.3, для любого  $i \in \mathbb{N}$  определим тип функции  $u^i \equiv u_z^{T,i}$  в каждом из следующих трех случаев.

Пусть  $c \in C_k \equiv [c_k^-, c_k^+]$  при некотором  $k \in \{1, \dots, l\}$ . Если  $z = cz_1 + z_2$ , то при

$$\delta = \min_{j \in \{1, \dots, l\} \setminus \{k\}} d_j(c), \quad \varphi_0 = \varphi_c$$

получим,

$$u^i \in \mathcal{A}_{l_i}(T, \varphi_c, \delta), \quad l_i \equiv \chi_{\Lambda_k}(i).$$

Обозначив для любого  $p \geq nl + 1$  величины

$$n_p \equiv j_p - 1, \quad \Delta_p \equiv \sum_{i=nl+1}^p l_i \leq 1,$$

будем иметь цепочку равенств

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p l_i &= \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=(j-1)l+1}^{jl} l_i + \Delta_p = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_k(j) + \Delta_p = \\ &= \sum_{j=1}^{n_p} ([ja'_k] - [(j-1)a'_k]) + \Delta_p = [n_p a'_k] + \Delta_p, \end{aligned}$$

с учетом которой найдем значение

$$a = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i = \frac{1}{l} \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{n_p l}{p} \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{[n_p a'_k]}{n_p} = \frac{a'_k}{l}.$$

Откуда на основании леммы 2.2 получим

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(z) = \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(z) = \frac{2\pi}{lT a_l} a_k = a_k, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Пусть теперь

$$c \in C_0 \equiv \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^l C_k.$$

Тогда если  $z = cz_1 + z_2$ , то имеет место равенство  $u^i = cu_{\kappa(i)} + v_{\kappa(i)}$  и определены значения  $d_1(c), \dots, d_l(c)$ , поэтому при

$$\delta = \min\{d_1(c), \dots, d_l(c)\}$$

верны соотношения

$$u^i \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d_{\kappa(i)}(c)) \subset \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, \delta), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Если  $z = z_1$ , то из равенства  $u^i = u_{\kappa(i)}$  получим включение  $u^i \in \mathcal{A}_0(T, 0, \pi/2)$ .

В последних двух случаях функция  $z$  удовлетворяет условиям леммы 2.2 при  $l_i = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$  и  $a = 0$ , поэтому

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(z) = \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(z) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Для остальных решений построенной системы  $A \in \mathcal{M}^2$  полученные выше значения показателей колеблемости из множества  $S$  повторяются, поскольку для любого решения  $\bar{z} \in \mathcal{S}_*(A) \setminus \mathcal{Z}$  существует такая функция  $z \in \mathcal{Z}$ , что при некотором  $r \neq 0$  выполнено равенство  $\bar{z} = rz$ , а значит, выполнено равенство (2.2).

6. При любом фиксированном  $k \in \{0, 1, \dots, l\}$  для значения  $a_k \in S$  ( $a_0 \equiv 0$ ) и при всех

$$\varkappa = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}, \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$$

имеет место включение

$$\begin{aligned} & \{z(0) \mid z \in \mathcal{S}_*(A), \varkappa(z) = a_k\} \supset \\ & \supset \{q(cz_1(0) + z_2(0)) \mid c \in C_k, q > 0\} \equiv \Omega(a_k). \end{aligned}$$

Векторы  $z_1(0)$  и  $z_2(0)$  линейно независимы, поэтому множество

$$\{cz_1(0) + z_2(0) \mid c \in C_k\}$$

представляет собой отрезок, не проходящий через 0, а значит, множество  $\Omega(a_k)$  — внутренняя область некоторого ненулевого угла, следовательно, имеет положительную меру и содержит некоторое открытое подмножество. Таким образом, выполнено равенство (2.1).

Теорема 2.1 доказана.

## 2.4 Реализация счетных существенных спектров показателей колеблемости

В данном разделе построена линейная однородная двумерная дифференциальная система с наперед заданным счетным существенным спектром каждого из всех показателей колеблемости.

Сначала рассмотрим свойства специальных вектор-функций, необходимые для доказательства основного результата.

Для произвольной вектор-функций  $z \in C^1(E, \mathbb{R}_*^2)$  ( $E$  — либо отрезок вида  $[0, T]$ , либо полуось  $\mathbb{R}_+$ ) определим скалярную функцию  $\phi_z : E \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую условиям

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos \phi_z(t), \sin \phi_z(t))^{\top} = z(t), \quad t \in E, \quad \phi_z \in C^1(E).$$

Для заданных  $T > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ ,  $\delta \in (0, \pi/2]$  обозначим через  $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$ ,  $\overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0)$  и  $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$  множества, состоящие из всех вектор-функций  $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$ , удовлетворяющих условиям:

- 1)  $\phi(0) = \varphi_0$ , где  $\phi = \phi_u$ ;
- 2) функция  $\phi$  монотонна на отрезках  $[0, T/4]$  и  $[T/4, T/2]$ ;
- 3) при каждом  $t \in (0, T/2]$  верно равенство  $\phi(T/2 + t) = \phi(T/2 - t)$ ;
- 4) для множества  $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$  при каждом  $t \in (0, T/2]$  выполнено включение  $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi - \delta]$ ;

5) для множества  $\overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0)$  при каждом  $t \in (0, T/2]$  выполнено включение  $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi)$ ;

6) для множества  $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$  функция  $\phi$  нестрого возрастает на отрезке  $[0, T/2]$  и  $\pi \leq \phi(T/2) - \varphi_0 \leq 3\pi/2$ .

Для любой функции  $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$  и для любых чисел  $i \in \mathbb{N}$  и  $T > 0$  определим функцию  $u^i \equiv u_z^{T,i} \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$  с помощью равенства

$$u_z^{T,i}(t) \equiv z((i-1)T + t), \quad t \in [0, T].$$

Если все составляющие функции  $z$ , как в условии леммы 2.2, начинаются в точке с угловой координатой  $\varphi_0$  и все не совершают полный поворот (т.е. не лежат в множестве  $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$ ), то возможно отсутствие такого общего зазора  $\delta$ , чтобы сразу все части решения лежали в множестве  $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$ . В этом случае мы не сможем применять лемму 2.2 при  $l_i = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , и тогда будем пользоваться следующей леммой (см. [125]).

**Лемма 2.4** [137]. Пусть заданы произвольные решения  $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$ , неотрицательный угол  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$  и положительное число  $T$ . Если существуют подмножество  $N \subset \mathbb{N}$  и положительный острый угол  $\delta \in (0, \pi/2]$  такие, что

$$u^i \in \begin{cases} \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), & i \in N' \equiv \mathbb{N} \setminus N, \\ \overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0) \setminus \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), & i \in N, \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \chi_N(i) = 0, \quad (2.17)$$

где  $\chi_N$  — характеристическая функция множества  $N$ , т.е.

$$\chi_N(k) \equiv \begin{cases} 1, & k \in N, \\ 0, & k \notin N, \end{cases}$$

то выполняются равенства

$$\nu^-(z) = \nu^\sim(z) = \nu^0(z) = \nu^+(z) = \nu^*(z) = 0. \quad (2.18)$$

**Доказательство.** По заданным  $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$ ,  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ ,  $T > 0$  выберем подмножество  $N \subset \mathbb{N}$  и угол  $\delta \in (0, \pi/2]$ , для которых верны соотношения (2.16) и (2.17). Заметим, что для любой функции  $u \in \overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0)$  найдется вектор  $m_u \in \mathbb{R}_*^2$ , для которых справедливы оценки

$$\nu^\alpha(u, m_u, T) \leq \begin{cases} 0, & u \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), \\ 2, & u \in \overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0) \setminus \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), \end{cases} \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

а значит, для функции  $z$  и некоторого вектора  $m_z \in \mathbb{R}_*^2$  при любых  $t > 0$  и  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$  будем иметь

$$\begin{aligned} & \nu^\alpha(z, m_z, t) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{\lfloor t/T \rfloor} \nu^\alpha(u^i, m_z, (i-1)T, iT) + \nu^\alpha(u^{\lfloor t/T \rfloor + 1}, m_z, \lfloor t/T \rfloor T, (\lfloor t/T \rfloor + 1)T) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{\lfloor t/T \rfloor} \chi_{N^i}(i) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{\lfloor t/T \rfloor} 2\chi_N(i) + 2 \leq \sum_{i=1}^{\lfloor t/T \rfloor} 2\chi_N(i) + 2, \end{aligned}$$

откуда получим

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m_z, t) \leq \\ & \leq \frac{\pi}{T} \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{T \lfloor t/T \rfloor}{t} \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lfloor t/T \rfloor} \left( 2 + \sum_{i=1}^{\lfloor t/T \rfloor} 2\chi_N(i) \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для выбранного решения  $z$  при любом  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$  приходим к оценке сверху его верхних сильных показателей колеблемости

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m, t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m_z, t) = 0.$$

Из определений показателей колеблемости вытекают очевидные неравенства

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z) \leq \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) \leq \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z), \quad \check{\nu}_\circ^\alpha(z) \leq \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) \leq \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z), \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Таким образом, получим справедливость цепочки равенств (2.18).

Лемма 2.4 доказана.

**Определение 2.3** [125]. Семейство множеств  $\{N_k \subset \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}\}$  назовем *разбиением* множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , если выполнены равенство

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k = \mathbb{N}$$

и для любых  $k, k' \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq k'$  соотношение  $N_k \cap N_{k'} = \emptyset$ .

**Лемма 2.5** [125]. *Если последовательность рациональных чисел  $(a_k)$  начинается с числа 1 и строго убывает, то существует такое разбиение  $\{N_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , что при любом  $k$  для множества*

$$\Lambda_k \equiv \bigcup_{h=k}^{+\infty} N_h \tag{2.19}$$

верно равенство

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \chi_{\Lambda_k}(i) = a_k.$$

**Доказательство** этого факта приводится в приложении в связи с его отсутствием в открытой печати.

Для доказательства основного результата нам необходимо уточнить некоторые детали и внести небольшие дополнения в лемму 2.3.

**Лемма 2.6.** *Для любых чисел  $T > 0$  и  $1 < c^- < c^+$  существуют вектор-функции  $u, v \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$ , для которых верны следующие утверждения:*

(j) *выполняются равенства*

$$\begin{aligned} u(0) = u(T) = (1, 0)^\top, \quad v(0) = v(T) = (0, 1)^\top, \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(T) = \dot{v}(0) = \dot{v}(T) = (0, 0)^\top; \end{aligned}$$

(jj) *справедливы оценки*

$$|u|, |v|, |\dot{u}|, |\dot{v}| \leq b \equiv \max\{|(x, y)^\top|, |(x-1, y+1)^\top| \cdot c^-\},$$

где  $x \equiv c^- c^+$ ,  $y \equiv c^- + c^+ - 1$ ;

(jjj) *верна оценка  $\det(u, v) \geq \varepsilon \equiv \sin(3\pi/4 + \arctg(y/x)) > 0$ ;*

(jv) *имеет место включение  $u \in \mathcal{A}_0(T, 0, \pi/2)$  и для любого  $c \in \mathbb{R}$  верно одно из включений*

$$cu + v \in \begin{cases} \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d(c)), & c \in \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+], \\ \mathcal{A}_1(T, \varphi_c), & c \in [c^-, c^+], \end{cases}$$

где  $\varphi_c \equiv \pi/2 - \arctg c$ , а функция

$$d : \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+] \rightarrow (0, \pi/2]$$

определена равенствами

$$d(c) = \begin{cases} \pi/4, & c \in (-\infty, 0], \\ \min\{\pi/2, D(c)\}, & c \in (0, c^-) \cup (c^+, y), \\ \varphi_c, & c \in [y, +\infty), \end{cases}$$

где

$$D : (0, c^-) \cup (c^+, y) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad D(c) = \arctg \frac{1}{c} - \arctg \frac{y-c}{x-c}.$$

**Доказательство.** 1. Сначала определим вектор-функции  $u$  и  $v$  на отрезке  $[0, T]$ . Для этого выберем скалярную функцию  $g \in C^1([0, Q], \mathbb{R}_+)$  ( $Q \equiv T/4$ ), удовлетворяющую следующим соотношениям

$$\begin{aligned} g(0) = \dot{g}(0) = 0, \quad \dot{g}(t) \geq 0, \quad t \in (0, Q), \\ g(Q) = 1, \quad \dot{g}(Q) = 0, \end{aligned}$$

и, определив функцию  $h \in C^1([Q, H], \mathbb{R}_+)$  ( $H \equiv T/2$ ) с помощью равенств

$$h(t) = g(t - Q), \quad t \in [Q, H],$$

при  $t \in [0, H]$  положим

$$\begin{aligned} u|_{[0, Q]}(t) &= (1, g(t))^\top, \quad u|_{[Q, H]}(t) = (1, 1)^\top, \quad u(H - t) = u(H + t), \\ v(H - t) &= v(H + t), \quad v|_{[0, Q]}(t) = (-g(t), 1)^\top, \\ v|_{[Q, H]}(t) &= (-1 - (x - 1)h(t), 1 - (y + 1)h(t))^\top, \end{aligned}$$

где

$$x \equiv c^- c^+ > 1, \quad y \equiv c^- + c^+ - 1 > 1,$$

$$c^- - 1 < (c^- - 1)c^+, \quad c^- + c^+ - 1 < c^- c^+, \quad y < x. \quad (2.20)$$

Очевидно, что вектор-функции  $u, v$  являются непрерывно дифференцируемыми и не принимают нулевых значений на отрезке  $[0, T]$  и соответственно справедливо утверждение (i) леммы 2.3.

Накладывая на функцию  $g$  дополнительное условие  $\dot{g} \leq c^-$ , убеждаемся в справедливости утверждения (j) настоящей леммы.

2. Из следующих соотношений

$$\begin{aligned} |u| \leq |(x, y)^\top|, \quad |\dot{u}| \leq |(x - 1, y + 1)^\top| \cdot \max_{t \in [0, Q]} \dot{g}(t), \\ |v| \leq |(x, y)^\top|, \quad |\dot{v}| \leq |(x - 1, y + 1)^\top| \cdot \max_{t \in [0, Q]} \dot{g}(t), \end{aligned}$$

вытекает справедливость утверждения (jj).

3. Рассуждения, проводимые при доказательстве утверждений (iii) и (iv) леммы 2.3, завершают справедливость соответственно утверждений (jjj) и (jv).

Лемма 2.6 доказана.

Теперь с помощью методов работы [125] переходим к доказательству основного результата этого раздела.

**Доказательство теоремы 2.2** [137]. Пусть задано непустое множество  $X = \{l \cdot q_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  и  $M \equiv \max X$ .

I. Сначала рассмотрим случай  $l = 1$ .

1. Выберем числа  $c^-$ ,  $c^+$  и последовательность  $(c_k^+)$ , удовлетворяющие условиям

$$1 < c^- < c_1^+ < \dots < c_k^+ < \dots < c^+, \quad c^+ < c^- + c_1^+ - 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k^+ = c^+.$$

Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  по тройке чисел  $T \equiv (2\pi)/M$ ,  $c^-$  и  $c_k^+$  в соответствии с леммой 2.6 построим вектор-функции  $u_k, v_k$ , для которых найдем числа  $b_k, \varepsilon_k, x_k, y_k$  и определим функции  $d_k, D_k$ .

2. Положим  $C_0 \equiv \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+]$  и, заметив, что для любого  $k \in \mathbb{N}$  выполнено включение

$$C_0 \subset D(d_k) = \mathbb{R} \setminus [c^-, c_k^+]$$

( $D(\cdot)$  — область определения функции  $d_k$ ), определим функцию  $d : C_0 \rightarrow (0, \pi/2]$  такую, что для каждого  $k \in \mathbb{N}$  при всех  $c \in C_0$  верно неравенство

$$d(c) \leq d_k(c). \quad (2.21)$$

А. Из условия  $c^+ < c^- + c_1^+ - 1 \equiv y_1$  получим неравенство

$$c^+ < c^- + c_k^+ - 1 \equiv y_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

из которого при  $y \equiv c^- + c^+ - 1$ , получим цепочку

$$1 < c^- < c_k^+ < c^+ < y_k < y. \quad (2.22)$$

Б. Если  $c \in (-\infty, 0]$ , то для любого  $k$  неравенство (2.21) верно при  $d(c) = \pi/4$ , а если  $c \in [y, +\infty)$  — при  $d(c) = \varphi_c$ .

В. Заметим, что из цепочки (2.22) следует, что при любом  $k$  верно соотношение

$$C_k \equiv (0, c^-) \cup (c^+, y_k) \subset D(D_k) = (0, c^-) \cup (c_k^+, y_k)$$

и положим  $x \equiv c^- c^+$ . При всех  $c \in C_k$  для разности аргументов арктангенсов функции  $D_k$  верна оценка

$$\frac{1}{c} - \frac{y_k - c}{x_k - c} = \frac{(c - c^-)(c - c_k^+)}{c(x_k - c)} > e(c)(c - c_k^+) > 0, \quad e(c) \equiv \frac{c - c^-}{c(x - c)}, \quad (2.23)$$

причем, если  $c < c^-$ , то верна также оценка

$$|c - c_k^+| = c_k^+ - c \geq c_1^+ - c > 0, \quad (2.24)$$

а если  $c > c^+$ , то – оценка

$$|c - c_k^+| = c - c_k^+ > c - c^+ > 0. \quad (2.25)$$

Г. На множестве  $(0, c^-) \cup (c^+, y)$  положим

$$D(c) = \begin{cases} \omega(c)e(c)(c - c_1), & c \in (0, c^-), \\ \omega(c)e(c)(c - c^+), & c \in (c^+, y), \end{cases}$$

где

$$\omega(c) = \min_{\xi \in (0, \tilde{c}]} \operatorname{arctg}'(\xi) = \operatorname{arctg}'(\tilde{c}) > 0, \quad \tilde{c} = \max\{1, 1/c\}.$$

Из оценок (2.23), (2.24), (2.25) получим, что при любом  $k$  при всех  $c \in C_k$  для функции  $D_k$  верно неравенство  $D(c) \leq D_k(c)$ , откуда следует, что при всех  $c \in (0, c^-) \cup (c^+, y)$  для функции  $d(c) \equiv \min\{D(c), \pi/2, \varphi_c\}$  верно неравенство (2.21). Функция  $d$  определена.

3. Для строго убывающей последовательности  $(a_k)$ , определяемой при любом  $k \geq 2$  равенствами

$$X' \equiv \{a/M \mid a \in X\}, \quad a_1 = 1, \quad a_k \equiv \max(X' \setminus \{a_h \mid h = \overline{1, k-1}\}),$$

в соответствии с леммой 2.5 построим разбиение  $\{N_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Для любого  $i \in \mathbb{N}$  выберем  $k$  так, что  $i \in N_k$  и положим  $\kappa(i) = k$ , задав тем самым функцию  $\kappa : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Определим вектор-функции  $z_1, z_2$  равенствами

$$u_{z_1}^{T,i} \equiv u_{\kappa(i)}, \quad u_{z_2}^{T,i} \equiv v_{\kappa(i)}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

А. Из утверждения (j) леммы 2.6 следует, что вектор-функции  $z_1$  и  $z_2$  непрерывно-дифференцируемы.

Б. Из утверждения (jj) леммы 2.6 и построения (2.26) вытекает, что при

$$b = \sup\{b_k, k \in \mathbb{N}\} = \max\{|(x, y)^\top|, |(x-1, y+1)^\top| \cdot c^-\}$$

и для всех  $t \in \mathbb{R}_+$  выполнено условие

$$|z_1(t)|, |z_2(t)|, |\dot{z}_1(t)|, |\dot{z}_2(t)| \leq b.$$

В. Для любого  $k$  из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{y_k}{x_k} &= \frac{c_k^+ + (c^- - 1)}{c^- c_k^+} = \frac{c_k^+ c_1^+ + c_1^+ (c^- - 1)}{c^- c_k^+ c_1^+} \leq \\ &\leq \frac{c_k^+ c_1^+ + c_k^+ (c^- - 1)}{c^- c_k^+ c_1^+} = \frac{c_1^+ + (c^- - 1)}{c^- c_1^+} = \frac{y_1}{x_1} \end{aligned}$$

выводим цепочку

$$\varepsilon_1 = \sin(3\pi/4 + \arctg(y_1/x_1)) \leq \sin(3\pi/4 + \arctg(y_k/x_k)) = \varepsilon_k,$$

из которой, опираясь на утверждение (jjj) леммы 2.6, получим при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  оценку снизу

$$\det(z_1(t), z_2(t)) \geq \varepsilon_1,$$

а значит, матрица

$$Z = (z_1(\cdot), z_2(\cdot)) = (z_{ij})$$

является фундаментальной для ограниченной системы

$$A = \dot{Z}Z^{-1} = (\dot{z}_{ij})(Z_{jk})/\det Z \in \mathcal{M}^2,$$

где  $Z_{jk}$  – алгебраическое дополнение элемента  $z_{jk}$ .

4. Для произвольной функции

$$z \in \mathcal{Z} \equiv \{cz_1 + z_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{z_1\},$$

на основании равенства (2.26) и утверждения (jv) леммы 2.6, определим значение  $a$ , удовлетворяющее равенству

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = a, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

А. Функция  $z = z_1$  удовлетворяет условиям леммы 2.2 при  $l_i = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$  и  $\delta = \pi/2$ , а значит, выполнены равенства

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}. \quad (2.27)$$

Б. Из построения функции  $d$  в п.2 настоящего доказательства, следует, что для любого решения  $z = cz_1 + z_2$ ,  $c \in C_0$  выполнены условия леммы 2.2 при  $l_i = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a = 0$ ,  $\varphi_0 = \varphi_c$  и  $\delta = d(c)$ . Следовательно, и в этом случае справедливы равенства (2.27).

В. Если  $z = cz_1 + z_2$  и при некотором  $k \in \mathbb{N}$  верно включение  $c \in (c_{k-1}^+, c_k^+]$  (при  $k = 1$  считаем, что  $c_0^+ \equiv c^-$ ), то  $c \notin [c^-, c_h^+]$  при  $h \leq k-1$  и  $c \in [c^-, c_h^+]$  при  $h \geq k$ , поэтому из леммы 2.2 и леммы 2.5 при

$$l_i = \chi_{\Lambda_k}(i), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \Lambda_k \equiv \bigcup_{h=k}^{+\infty} N_h, \quad a = a_k, \quad \varphi_0 = \varphi_c, \quad \delta = \min_{h=1, k-1} d_h(c),$$

( $\delta \in (0, \pi/2]$  – произвольное) учитывая, что

$$\frac{2\pi}{T}a_k = \frac{2\pi M}{2\pi}a_k = Ma_k,$$

получаем

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = Ma_k, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Аналогичные рассуждения при  $z = c^- z_1 + z_2$  приводят к равенствам

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = Ma_1, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Г. Теперь рассмотрим функцию  $z = c^+ z_1 + z_2$ .

а) Из леммы 2.6 вытекает включение

$$c^+ u_k + v_k \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_{c^+}, d_k(c^+)) \subset \overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_{c^+})$$

для любого  $k \in \mathbb{N}$ .

б) Из цепочки (2.22) получим  $c^+ \in (c_k^+, y_k)$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ , поэтому определено значение  $D_k(c^+)$ .

Для разности аргументов арктангенсов в формуле, определяющей  $D_k(c^+)$ , имеет место равенство

$$\frac{1}{c^+} - \frac{y_k - c^+}{x_k - c^+} = \frac{(c^+ - c^-)(c^+ - c_k^+)}{c^+(x_k - c^+)},$$

из которого следует, что последовательность  $(D_k(c^+))$  убывает и стремится к нулю.

в) Пусть номер  $k'$  такой, что выполнено неравенство

$$D_{k'}(c^+) \leq \min\{\pi/2, \varphi_{c^+}\}.$$

г) Нуль является единственной предельной точкой множества  $X$ , поэтому последовательность  $(a_k)$  стремится к нулю. Для любого  $\varepsilon > 0$  выберем такой номер  $k \geq k'$ , что  $a_k < \varepsilon$ . Далее, фиксируем

$$\delta \in (D_k(c^+), D_{k-1}(c^+))$$

и опираясь на п.п. а), б), в) получим

$$c^+ u_h + v_h \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_{c^+}, \delta), \quad h \in \{1, \dots, k-1\}.$$

д) Из п.п. а), г) и построения (2.26) следует, что для решения  $z$  выполнены соотношения (2.16) при  $N = \Lambda_k$ , а в силу леммы 2.5 выполнено и неравенство (2.17), а значит, решение  $z$  удовлетворяет условиям леммы 2.4 при  $\varphi_0 = \varphi_{c^+}$ , откуда получаем снова равенства (2.27).

Для остальных решений построенной системы  $A \in \mathcal{M}^2$  заданные значения показателей колеблемости из множества  $X$  повторяются, поскольку для любого решения  $\tilde{z} \in \mathcal{S}_*(A) \setminus \mathcal{Z}$  существует такая функция  $z \in \mathcal{Z}$ , что при некотором  $r \neq 0$  выполнено равенство  $\tilde{z} = rz$ .

Следовательно, справедливы цепочки равенств (2.4) и

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = \varkappa(\mathcal{Z}) = X \cup \{0\}, \quad \varkappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*.$$

5. При любом фиксированном  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  для значения  $a_k \in X$  ( $a_0 \equiv 0$ ) и при всех

$$\varkappa = \hat{\nu}_\bullet^\alpha, \check{\nu}_\bullet^\alpha, \hat{\nu}_\circ^\alpha, \check{\nu}_\circ^\alpha, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$$

имеет место включение

$$\begin{aligned} & \{z(0) \mid z \in \mathcal{S}_*(A), \varkappa(z) = a_k\} \supset \\ & \supset \{q(cz_1(0) + z_2(0)) \mid c \in C_k, q > 0\} \equiv \Omega(a_k). \end{aligned}$$

Векторы  $z_1(0)$  и  $z_2(0)$  линейно независимы, поэтому множество  $\Omega(a_k)$  — внутренняя область некоторого ненулевого угла. Следовательно, оно имеет положительную меру и содержит некоторое открытое подмножество. Таким образом, выполнено равенство (2.3).

II. Справедливость теоремы 2.2 в случае  $l \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  для системы  $B(t) = A(lt)/l$  следует из леммы 1.5.

Теорема 2.2 доказана.

## Глава 3

# Исследование спектров ляпуновских показателей блуждаемости по первому приближению

В данной главе проведено исследование спектров показателей блуждаемости по первому приближению. Установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров показателей блуждаемости нелинейной системы и системы ее первого приближения [136, 142, 145].

В разделе 3.1 приведены определения ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем с непрерывными на неотрицательной полуоси коэффициентами.

В разделе 3.2 представлен обзор литературы и сформулированы основные результаты главы.

В разделе 3.3 построена двумерная нелинейная система, все нетривиальные решения которой бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей блуждаемости заполняет отрезок  $[0, 1]$  или совпадает с наперед заданным непустым подмножеством рациональных чисел отрезка  $[0, 1]$ , а спектры линейной системы ее первого приближения состоят только из одного элемента. Более того, спектры показателей блуждаемости сужения построенной нелинейной двумерной системы на прямое произведение любой открытой окрестности нуля фазовой плоскости и временной полуоси могут состоять из заданного количества элементов, или быть счётными, или даже достигать мощности континуума. Кроме того, доказано существование нелинейной системы, спектры всех показателей блуждаемости которой совпадают с произвольным заранее заданным интервалом отрезка  $[0, 1]$ , а соответствующие спектры линейной системы её первого приближения также состоят из одного неотрицательного числа.

При изучении свойств решений по первому приближению принято пере-

ходить от нелинейной системы к системе ее первого приближения. В нашем случае первичным объектом является линейная система, осуществляющая на последовательно примыкающих друг к другу отрезках длины  $\pi$ , начиная с момента  $t = 0$ , повороты на знакопередающиеся углы  $\pi, -\pi, \pi, -\pi, \dots$  со средней скоростью  $|v| = 1$ . За счет нелинейной добавки средняя скорость на некоторых участках увеличивается или уменьшается. В итоге для каждого решения  $x$  нелинейной системы удастся подобрать такое преобразование  $L$ , на котором реализуется инфимум в определениях показателей блуждаемости. На тех участках, где модуль угла поворота решения  $x$  менее  $\pi$ , модуль угла поворота  $Lx$  получается меньше любого наперед заданного положительного числа. На участках, где модуль угла поворота решения  $x$  более  $\pi$ , модуль угла поворота  $Lx$  получается сколь угодно близкой к  $\pi$ . Это дает возможность реализовать любое рациональное число в качестве значения всех показателей блуждаемости решений, находящихся все время в некотором кольце. В случае континуальных спектров показателей блуждаемости нелинейной системы дополнительно используются свойства равномерно распределенных последовательностей.

### 3.1 Показатели колеблемости и блуждаемости нелинейной системы

Для заданного натурального  $n > 1$  и заданной открытой окрестности  $G$  точки  $0$  в евклидовом (векторном) фазовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (3.1)$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши [80, с. 55].

Далее предполагаем, что рассматриваемые системы (3.1) обладают еще дополнительным свойством

$$|f(t, x)| \leq a_f(t)|x| + b_f(t), \quad a_f, b_f \in C(\mathbb{R}_+),$$

гарантирующим бесконечную продолжимость вправо всех ненулевых ее решений.

С системой (3.1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f'_x(t, 0)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2)$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f'_x(t, 0)x| = o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Все показатели колеблемости, называемые *линейными* (см. [86]) для решений нелинейных систем, оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определенным на всей положительной полуоси времени. Это затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В работе [86] предпринята первая попытка распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, а именно, определены и изучены *сферические, радиальные и шаровые* функционалы и показатели.

Введем обозначение  $\mathcal{S}_*(f)$  для множества всех *непродолжаемых* (т. е. максимально продолженных) ненулевых решений системы (3.1), а через  $x_f(\cdot, x_0)$  обозначим то решение, которое удовлетворяет начальному условию  $x_f(0, x_0) = x_0$ .

Теперь определим ляпуновские показатели колеблемости и блуждаемости функций из множества  $\mathcal{S}_*(f)$ .

**Определение 3.1** [86]. Для ненулевого вектора  $m \in \mathbb{R}_*^n$  и вектор-функции  $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$  через  $\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0), m, t)$  при  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$  соответственно обозначим:

- число точек *строгой смены знака* скалярного произведения  $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$  на промежутке  $(0, t]$ ;
- число точек *нестрогой смены знака* скалярного произведения  $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$  на промежутке  $(0, t]$ ;
- число *нулей* функции  $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$  на промежутке  $(0, t]$ ;
- число *корней* (т.е. нулей с учетом их *кратности*) функции  $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$  на промежутке  $(0, t]$ ;
- число *гиперкорней* функции  $\langle x_f(\cdot, x_0), m \rangle$  на промежутке  $(0, t]$ , где в процессе подсчета этого количества каждый некрatный корень считается ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

**Определение 3.2** [86]. *Верхние сильный и слабый линейные показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции  $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$  при  $\alpha = -, \sim, 0, +, *$  соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0), m, t),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0), m, t).$$

*Нижние линейные показатели колеблемости*  $\check{\nu}_\bullet^\alpha(x_f(\cdot, x_0))$ ,  $\check{\nu}_\circ^\alpha(x_f(\cdot, x_0))$  *знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции  $x_f(\cdot, x_0)$

при  $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$  определяются соответственно теми же формулами, но с заменой верхнего предела на нижний.

**Определение 3.3** [86]. Для функции  $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$  и числа  $t > 0$  введем *вариацию следа*

$$P(x_f(\cdot, x_0), t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(x_f(\tau, x_0), \tau) \right| d\tau,$$

где

$$e(x_f(\tau, x_0), \tau) \equiv \frac{x_f(\tau, x_0)}{|x_f(\tau, x_0)|},$$

функции  $x_f(\cdot, x_0)$  за время от 0 до  $t$ , причем ситуацию, когда функция  $x_f(\cdot, x_0)$  имеет на отрезке  $[0; t]$  хотя бы один нуль, считаем *вырожденной* и кладем по определению  $P(x_f(\cdot, x_0), t) = +\infty$ .

В работе будем использовать обозначение вариации следа функции  $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$  за время от  $t_1$  до  $t_2$

$$P(x_f(\cdot, x_0), t_1, t_2) \equiv P(x_f(\cdot, x_0), t_2) - P(x_f(\cdot, x_0), t_1).$$

**Определение 3.4** [86]. *Линейные нижние слабый и сильный показатели блуждаемости* решения  $x_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ , заданного на всей полуоси  $\mathbb{R}_+$ , определим формулами

$$\check{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0)) \equiv \liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} P(Lx_f(\cdot, x_0), t),$$

$$\check{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) \equiv \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^n} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx_f(\cdot, x_0), t),$$

где  $\text{Aut} \mathbb{R}^n$  — множество всех невырожденных линейных операторов  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . *Линейные верхние слабый  $\hat{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0))$  и сильный  $\hat{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0))$*  показатели блуждаемости зададим теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов при  $t \rightarrow +\infty$  верхними.

В случае совпадения какого-либо нижнего показателя с одноименным верхним будем называть его *точным*, убирая в его обозначении крышечку и галочку.

В случае совпадения какого-либо слабого показателя с соответствующим сильным будем называть его *абсолютным*, убирая в его обозначении пустой и полный кружки.

## 3.2 Обзор литературы и формулировка основных результатов

В работе [87] для определенных выше показателей нелинейной системы рассматриваются самые разнообразные (как фиксированные, так и вариативные) их взаимосвязи не только друг с другом, но и с аналогичными показателями соответствующей системы линейного приближения. В частности, имеет место

**Утверждение 3.1** (Сергеев И.Н. [87]). При  $n = 2$  и  $G = \mathbb{R}^2$  для любых  $0 \leq \beta < +\infty$  и  $0 \leq \gamma \leq +\infty$  существует система (3.1) с системой первого приближения (3.2) при поточечном условии на нелинейную добавку

$$f(t, x) - f_l(t, x) = o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

удовлетворяющие условиям

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = \{\beta\}, \quad \varkappa(\mathcal{S}_*(f)) = \{\gamma\}, \quad \varkappa = \nu^*, \rho.$$

Этот результат показывает насколько произвольными могут быть показатели (колеблемости гиперкорней и блуждаемости) нелинейной системы и системы ее первого приближения. Возможность изменения мощности спектров всех показателей колеблемости при переходе от нелинейной системы к системе линейного приближения гарантируют следующие утверждения.

**Утверждение 3.2** (Стаж А.Х. [105, 110, 111]). Для любого непустого подмножества  $X \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  или  $X = [0, 1]$  существуют две системы

$$\begin{aligned} \dot{x} = A(t)x + B(t, x) &\equiv f(t, x), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \\ |B(t, x)| &\leq |x|^2 \quad \text{при } x \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_l(t, x), \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.4)$$

с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, обладающие свойствами

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f_l)) = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f)) = \begin{cases} X \cup \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ X \cup \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \quad (3.6)$$

причем для каждого значения  $\alpha = -, \sim, 0, +, *$  при любом  $\varepsilon > 0$  справедливо равенство

$$\text{card}\{\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\} = \text{card } \nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f)).$$

**Утверждение 3.3** (Сташ А.Х. [110, 111]). Для любого интервала  $X = (a, b) \subset [0, 1]$  существуют две системы вида (3.3) и (3.4) с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, спектры показателей колеблемости которых обладают соответственно свойствами (3.5) и (3.6).

Оказалось, что эти свойства обобщаются и на показатели блуждаемости.

**Теорема 3.1** [138]. Для любых заданных  $p > 1$  и непустого подмножества  $S \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  существует система вида (3.1) с линейным приближением

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv f(t, x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2} \sin t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

удовлетворяющие условиям

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f_t(t, x)| \leq |x|^p \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

$$\rho(\mathcal{S}_*(f_t)) = \{1\}, \quad \rho(\mathcal{S}_*(f)) = S \cup \{1\}, \quad (3.9)$$

причем при любом  $\varepsilon > 0$  выполнено равенство

$$\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\} = \rho(\mathcal{S}_*(f)). \quad (3.10)$$

**Теорема 3.2** [138]. Для любого интервала  $S = (a, b) \subset [0, 1]$  или  $S = [0, 1]$  существует система вида (3.1) с линейным приближением (3.7), спектры показателей блуждаемости которых обладают соответственно свойствами (3.8) и (3.9), причем при  $S = [0, 1]$  при любом  $\varepsilon > 0$  множество  $\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\}$  имеет мощность континуума.

Ниже приводятся доказательства этих утверждений.

### 3.3 Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной системы и системы первого приближения

В данном разделе построим двумерную нелинейную систему с наперед заданными конечными, счетными и континуальными спектрами показателей блуждаемости, первое приближение которой совпадает с (3.7). Начнем с формулировки следующих вспомогательных определений и фактов.

Для любого угла  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$  обозначим через  $\mathcal{A}_0$  и  $\mathcal{A}_1$  множества, состоящие из вектор-функций  $u \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}_*^2)$ , удовлетворяющих условиям:

- 1)  $\phi(0) = \varphi_0$ , где  $\phi = \phi_u$ ;

2) функция  $\phi$  нестрого возрастает на отрезке  $[0, \pi]$  (при возрастании  $t \in [0, \pi]$  вектор  $u(t)$  движется против часовой стрелки относительно начала координат);

3) при каждом  $t \in (0, \pi]$  верно равенство  $\phi(\pi + t) = \phi(\pi - t)$ ;

4) для  $u \in \mathcal{A}_0$  при некотором  $\delta \in (0, \pi/4)$  выполнено равенство  $\phi(\pi) - \varphi_0 = \pi - \delta$ ;

5) для  $u \in \mathcal{A}_1$  выполнено двойное неравенство  $\pi < \phi(\pi) - \varphi_0 < 3\pi/2$ .

Для любой функции  $z \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^2)$  и любого номера  $i \in \mathbb{N}$  определим функцию  $z^i \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}_*^2)$  с помощью равенства

$$z^i(t) \equiv z(2\pi(i-1) + t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

**Определение 3.5** [80]. Последовательность дробных долей  $(\theta_i)$  называется равномерно распределенной по модулю 1, если для каждого полуинтервала  $[a, b) \subset [0, 1)$  имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{[a,b)}(\theta_i) = b - a,$$

где  $\chi_{[a,b)}$  – характеристическая функция промежутка  $[a, b)$ .

**Замечание 3.1.** Последовательность  $\theta_i = \{i\pi\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , где  $\{\cdot\}$  – дробная часть числа, является равномерно распределенной по модулю 1 (см. [80]), причем на месте числа  $\pi$  может стоять любое иррациональное число.

Для произвольной непрерывно-дифференцируемой вектор-функции  $z \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^2)$ , не принимающей нулевых значений, и любого номера  $i \in \mathbb{N}$  определим функцию  $z^i \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}_*^2)$  с помощью равенства

$$z^i(t) \equiv z(2\pi(i-1) + t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

С помощью методов работ [105, 110, 111] докажем следующее утверждение.

**Лемма 3.1** [138]. Для некоторой линейной системы вида (3.2) со спектром точного и абсолютного показателя блуждаемости  $\rho(\mathcal{S}_*(f_i)) = \{1\}$  при любых  $p > 1$ ,  $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  и  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leq 3$  найдется возмущенная система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, x) \equiv f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$|B(t, x)| \leq |x|^p \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0,$$

обладающая свойствами

$$\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid |x_0| = \gamma_1 \vee |x_0| = \gamma_2\} = \{1\},$$

$$\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid \gamma_1 < |x_0| < \gamma_2\} = \{q\}.$$

**Доказательство.** 1. Рассмотрим линейную двумерную периодическую систему (3.7), задающую вращение фазовой плоскости вокруг точки  $x = 0$  с мгновенной угловой скоростью  $\zeta(t)$  в каждый момент  $t \in \mathbb{R}_+$ , в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора  $x_0 \in \mathbb{R}_*^2$  за время  $t$  совпадает с функцией

$$\Theta(x_f(\cdot, x_0), t) = \frac{\pi}{2}(1 - \cos t) \in [0, \pi],$$

а значит, справедливы равенства

$$x_f(t_k, x_0) = (-1)^{k-1} x_f(t_1, x_0), \quad t_k \equiv \pi(k-1), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

На каждом промежутке  $(t_k, t_{k+1}]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , решение  $x_f = x_f(t, x_0)$  совершает поворот на угол  $\pi$  и это свойство не меняется под действием любого преобразования  $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ , поэтому

$$\frac{P(Lx_f, t_{k+1}) - P(Lx_f, t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{P(x_f, t_{k+1}) - P(x_f, t_k)}{t_{k+1} - t_k} = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \rho_\circ(x_f) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} P(Lx_f, t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} P(Lx_f, t_{k+1}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^k (P(Lx_f, t_{i+1}) - P(Lx_f, t_i)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=1}^k (P(x_f, t_{i+1}) - P(x_f, t_i)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=1}^k (t_{i+1} - t_i) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t_{k+1} - t_1}{t_{k+1}} = 1, \\ \rho_\bullet(x_f) &= \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} P(Lx_f, t_{k+1}) = \\ &= \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=1}^k (P(Lx_f, t_{i+1}) - P(Lx_f, t_i)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=1}^k (P(x_f, t_{i+1}) - P(x_f, t_i)) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, все показатели блуждаемости совпадают между собой, а их спектр состоит из одного элемента  $\rho(\mathcal{S}_*(f_i)) = \{1\}$ .

2. На отрезке  $r \in [0, 3]$  при любых значениях параметров  $p > 1$ ,  $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq 3$  зададим функции

$$\delta(r, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{r^p(r - \gamma_1)^2(r - \gamma_2)^2}{(r + \gamma_1)^2(r^2 + 10000)^p},$$

$$\psi_{\pm}(r, \gamma_1, \gamma_2) \equiv 1 \pm \frac{\delta(r, \gamma_1, \gamma_2)}{\pi} \in \left(0, \frac{5}{4}\right).$$

Для нелинейной периодической системы

$$\dot{x} = \psi_{-}(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_i(t, x) \equiv g(t, x)$$

при любых  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$  имеем

$$\Theta(x_g(\cdot, x_0), t) = \psi_{-}(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2) \frac{\pi}{2} (1 - \cos t) \in [0, \pi - \delta(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)] \subset [0, \pi),$$

т. е. для любого  $x_0$ , удовлетворяющего условию  $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$ , решение  $x_g(\cdot, x_0)$  не покидает сектор, центральный угол которого меньше чем  $\pi$ , причем зазор между этим сектором и целым полукругом равен  $\delta = \pi - \psi_{-}(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)\pi$ .

Убедимся в том, что можно указать такой поворот  $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ , что вектор  $Lx_g(\cdot, x_0)$  лежит на фазовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  строго в одной полуплоскости относительно заданной прямой  $l \subset \mathbb{R}^2$ . Более того, если оператор  $L$  задавать как композицию указанного поворота и неограниченного удлинения вектора  $e \perp l$ , то при любом  $t > 1$  можно делать сколь угодно малым величину  $t^{-1}P(Lx_g(\cdot, x_0), t)$ . Введем следующие обозначения

$$L_n \equiv S_n R, \quad u_g^i(\cdot) \equiv (\bar{x}_g^i(\cdot), \bar{y}_g^i(\cdot))^{\top} = R x_g^i(\cdot, x_0),$$

$$v_g^i(\cdot) \equiv (\tilde{x}_g^i(\cdot), \tilde{y}_g^i(\cdot))^{\top} = L_n x_g^i(\cdot, x_0),$$

где

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \psi = \phi_{x_g^i}(0) - \delta/2, \quad i, n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что при достаточно больших  $n$  композиция  $L_n$  поворота  $R$  по часовой стрелке на угол  $\psi$  и растяжения  $S_n$  вдоль вертикальной оси является искомым оператором. В самом деле, имеем

$$\phi_{u_g^i}(0) = \phi_{x_g^i}(0) - \psi = \delta/2 \in (0, \pi/8),$$

$$\phi_{u_g^i}(\pi) = \phi_{x_g^i}(\pi) - \phi_{x_g^i}(0) + \delta/2 = \psi_{-}(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)\pi + \delta/2 = \pi - \delta/2,$$

$$\begin{aligned} \phi_{v_g^i}(0) &\in (0, \pi/2), \quad \phi_{v_g^i}(\pi) \in (\pi/2, \pi), \\ \phi_{v_g^i}(0) &= \operatorname{arctg} \frac{\tilde{y}_g^i(0)}{\tilde{x}_g^i(0)} = \operatorname{arctg} \frac{n\bar{y}_g^i(0)}{\bar{x}_g^i(0)} = \operatorname{arctg}(n \operatorname{tg}(\delta/2)), \\ \phi_{v_g^i}(\pi) &= \operatorname{arctg} \frac{\tilde{y}_g^i(\pi)}{\tilde{x}_g^i(\pi)} + \pi = \operatorname{arctg} \frac{n\bar{y}_g^i(\pi)}{\bar{x}_g^i(\pi)} + \pi = \pi - \operatorname{arctg}(n \operatorname{tg}(\delta/2)). \end{aligned}$$

Из нестрогого возрастания функции  $\phi_{x_g^i}$  на отрезке  $[0, \pi]$  и геометрических свойств операторов  $R$  и  $S_n$  следуют соотношения

$$\dot{\phi}_{v_g^i}(t) \geq 0, \quad \phi_{v_g^i}(\pi + t) = \phi_{v_g^i}(\pi - t), \quad t \in [0, \pi],$$

на основании которых при любом  $i \in \mathbb{N}$  получим

$$\begin{aligned} P(L_n x_g^i(\cdot, x_0), 2\pi) &= \int_0^{2\pi} |\dot{\phi}_{v_g^i}(\tau)| d\tau = \\ &= 2(\phi_{v_g^i}(\pi) - \phi_{v_g^i}(0)) = 2\pi - 4 \operatorname{arctg}(n \operatorname{tg}(\delta/2)) \equiv a_n. \end{aligned}$$

Для любого достаточно малого  $\gamma > 0$  в силу условия  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$  найдется такой номер  $n_0$ , что при любом  $i \in \mathbb{N}$  справедлива оценка  $P(L_{n_0} x_g^i(\cdot, x_0), 2\pi) \leq \gamma$ , а значит, выполняется цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\bullet(x_g(\cdot, x_0)) &= \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx_g(\cdot, x_0), t) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(L_{n_0} x_g(\cdot, x_0), t) = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} P(L_{n_0} x_g(\cdot, x_0), 2\pi p) = \\ &= \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} \sum_{i=1}^p P(L_{n_0} x_g^i(\cdot, x_0), 2\pi) \leq \frac{\gamma}{2\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая произвольность  $\gamma > 0$  и соотношения

$$\check{\rho}_\circ(x) \leq \check{\rho}_\bullet(x) \leq \hat{\rho}_\bullet(x), \quad \check{\rho}_\circ(x) \leq \hat{\rho}_\circ(x) \leq \hat{\rho}_\bullet(x), \quad x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^2), \quad (3.12)$$

вытекаемые из определений показателей блуждаемости, для значения  $q = 0$  выберем нелинейную систему

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_l(t, x), & 0 < |x| \leq \gamma_1 \vee |x| \geq \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_- (|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_l(t, x), & \gamma_1 < |x| < \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

3. Для нелинейной периодической системы

$$\dot{x} = \psi_+(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_l(t, x) \equiv h(t, x)$$

при  $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$  будем иметь

$$\{\Theta(x_h(\cdot, x_0), t) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \supset [0, \pi + \delta(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)] \supset [0, \pi].$$

В силу последнего включения каждое решение  $x_h(\cdot, x_0)$ ,  $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$ , не покидает сектор, центральный угол которого больше чем  $\pi$ , причем зазор между этим сектором и целым полукругом равен  $\delta = \psi_+(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)\pi - \pi$ .

3.1. Для произвольного, но фиксированного решения  $x_h(\cdot, x_0)$  положим

$$\begin{aligned} L_n &= S_n R, \quad u_h^i(\cdot) \equiv (\bar{x}_h^i(\cdot), \bar{y}_h^i(\cdot))^\top = R x_h^i(\cdot, x_0), \\ v_h^i(\cdot) &\equiv (\tilde{x}_h^i(\cdot), \tilde{y}_h^i(\cdot))^\top = L_n x_h^i(\cdot, x_0), \end{aligned}$$

где

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \psi = \phi_{x_h^i}(0) - \delta/2, \quad i, n \in \mathbb{N}.$$

Сначала для выбранного решения  $x_h(\cdot, x_0)$  и достаточно малого  $\gamma > 0$  найдем такой номер  $n_0$ , при котором справедливы оценки

$$P(L_{n_0} x_h^i(\cdot, x_0), 2\pi) \leq 2\pi + \gamma, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Для этого вычислим значения

$$\begin{aligned} \phi_{u_h^i}(0) &= \phi_{x_h^i}(0) - \psi = \delta/2, \\ \phi_{u_h^i}(\pi) &= \phi_{x_h^i}(\pi) - \phi_{x_h^i}(0) + \delta/2 = \psi_+(|x_0|, \gamma_1, \gamma_2)\pi + \delta/2 = \pi + 3\delta/2, \\ \phi_{v_h^i}(0) &\in (0, \pi/2), \quad \phi_{v_h^i}(\pi) \in (\pi, 3\pi/2), \\ \phi_{v_h^i}(\pi) &= \pi + \arctg \frac{\tilde{y}_h^i(\pi)}{\tilde{x}_h^i(\pi)} = \pi + \arctg \frac{n \bar{y}_h^i(\pi)}{\bar{x}_h^i(\pi)} = \pi + \arctg(n \operatorname{tg}(3\delta/2)), \end{aligned}$$

и найдем

$$\begin{aligned} P(L_n x_h^i(\cdot, x_0), 2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left| \dot{\phi}_{v_h^i}(\tau) \right| d\tau = 2(\phi_{v_h^i}(\pi) - \phi_{v_h^i}(0)) = \\ &= 2(\pi + \arctg(n \operatorname{tg}(3\delta/2)) - \arctg(n \operatorname{tg}(\delta/2))) \equiv b_n. \end{aligned}$$

Очевидное свойство  $b_n \rightarrow 2\pi$  при  $n \rightarrow +\infty$  последовательности  $(b_n)$  завершает доказательство оценки (3.13).

3.2. Теперь покажем, что для решения  $x_h(\cdot, x_0)$  и любого оператора  $L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2$  выполнена оценка

$$P(L x_h^i(\cdot, x_0), 2\pi) \geq 2\pi, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Действительно, из условия  $x_h^i(0, x_0) = -x_h^i(\pi, x_0)$  (см. (3.11)) вытекает равенство  $\phi_{x_h^i}(0) = \pi + \phi_{x_h^i}(\pi)$ . Поэтому для функции  $z_h^i = L x_h^i(\cdot, x_0)$  вытекает

$$z_h^i(0) = L x_h^i(0, x_0) = L(-x_h^i(\pi, x_0)) = -L(x_h^i(\pi, x_0)) = -z_h^i(\pi), \quad i \in \mathbb{N},$$

а значит, при некотором  $m \in \mathbb{Z}$  верно и следующее

$$\phi_{z_h^i}(0) = \phi_{z_h^i}(\pi) + \pi + 2m\pi.$$

Используя последнее равенство и условие

$$\phi_{z_h^i}(\pi + t) = \phi_{z_h^i}(\pi - t), \quad t \in [0, \pi],$$

выведем требуемое утверждение

$$\begin{aligned} P(Lx_h^i(\cdot, x_0), 2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left| \dot{\phi}_{z_h^i}(\tau) \right| d\tau = 2 \int_0^\pi \left| \dot{\phi}_{z_h^i}(\tau) \right| d\tau \geq \\ &\geq 2 \left| \int_0^\pi \dot{\phi}_{z_h^i}(\tau) d\tau \right| = 2|\pi + 2m\pi| \geq 2\pi, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3.3. Для верхнего сильного показателя блуждаемости решения  $x_h(\cdot, x_0)$  с учетом оценки (3.13) будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\bullet(x_h(\cdot, x_0)) &= \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx_h(\cdot, x_0), t) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(L_{n_0}x_h(\cdot, x_0), t) = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} P(L_{n_0}x_h(\cdot, x_0), 2\pi p) = \\ &= \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} \sum_{i=1}^p P(L_{n_0}x_h^i(\cdot, x_0), 2\pi) \leq \frac{2\pi + \gamma}{2\pi}. \end{aligned}$$

На основании оценки, установленной в п. 3.2 настоящего доказательства, для нижнего слабого показателя блуждаемости решения  $x_h(\cdot, x_0)$  получим

$$\begin{aligned} \check{\rho}_\circ(x_h(\cdot, x_0)) &= \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^2} P(Lx_h(\cdot, x_0), t) = \\ &= \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^2} P(Lx_h(\cdot, x_0), 2\pi p) = \\ &= \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} \inf_{L \in \text{Aut}\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^p P(Lx_h^i(\cdot, x_0), 2\pi) \geq \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{2\pi p}{2\pi p} = 1. \end{aligned}$$

Далее, вспоминая свойства (3.12) показателей блуждаемости, придем к равенствам

$$\check{\rho}_\circ(x_h(\cdot, x_0)) = \check{\rho}_\bullet(x_h(\cdot, x_0)) = \hat{\rho}_\circ(x_h(\cdot, x_0)) = \hat{\rho}_\bullet(x_h(\cdot, x_0)) = 1.$$

Следовательно, для значения  $q = 1$  выберем систему

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_l(t, x), & 0 < |x| \leq \gamma_1 \vee |x| \geq \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_l(t, x), & \gamma_1 < |x| < \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

4. Теперь убедимся в том, что значению  $q = l_1/(l_1 + l_2)$ ,  $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ , соответствует система

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_i(t, x), & 0 < |x| \leq \gamma_1 \vee |x| \geq \gamma_2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_i(t, x), & \gamma_1 < |x| < \gamma_2, \quad t \in [0, 2\pi l_1], \\ \psi_-(|x|, \gamma_1, \gamma_2) \cdot f_i(t, x), & \gamma_1 < |x| < \gamma_2, \quad t \in [2\pi l_1, 2\pi(l_1 + l_2)], \end{cases}$$

где в кольце  $\gamma_1 < |x| < \gamma_2$  функция  $f(t, x)$  периодически (с периодом  $T = 2\pi(l_1 + l_2)$ ) продолжается на всю полуось  $\mathbb{R}_+$ . Действительно, для любого решения  $x_f(\cdot, x_0)$ ,  $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$ , (см. п. 3 настоящего доказательства) с одной стороны выполняется равенство

$$\inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} P(Lx_f(\cdot, x_0), (k-1)T, kT) = 2\pi l_1, \quad k \in \mathbb{N},$$

а с другой стороны, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое преобразование  $L_{n_\varepsilon} \in \text{Aut} \mathbb{R}^2$ , что выполнена оценка

$$P(L_{n_\varepsilon} x_f(\cdot, x_0), (k-1)T, kT) \leq 2\pi l_1 + \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, для показателей блуждаемости будем иметь

$$\begin{aligned} \rho_\circ(x_f(\cdot, x_0)) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} P(Lx_f(\cdot, x_0), t) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{Tp} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} P(Lx_f(\cdot, x_0), Tp) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{Tp} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^p P(Lx_f(\cdot, x_0), (i-1)T, iT) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2\pi l_1 p}{2p\pi(l_1 + l_2)} = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \\ \rho_\circ(x_f(\cdot, x_0)) &\leq \rho_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx_f(\cdot, x_0), t) \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(L_{n_\varepsilon} x_f(\cdot, x_0), t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{pT} P(L_{n_\varepsilon} x_f(\cdot, x_0), pT) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{Tp} \sum_{i=1}^p P(L_{n_\varepsilon} x_f(\cdot, x_0), (i-1)T, iT) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(2\pi l_1 + \varepsilon)p}{2p\pi(l_1 + l_2)} = \frac{2\pi l_1 + \varepsilon}{2\pi(l_1 + l_2)}. \end{aligned}$$

Последние два соотношения в силу произвольности  $\varepsilon > 0$  полностью завершают доказательство леммы.

Лемма 3.1 доказана.

Теперь перейдем к доказательству основных результатов с помощью методов работ [105, 110].

**Доказательство теоремы 3.1.** Сначала фиксируем произвольный порядок малости возмущений  $p > 1$ .

1. Пусть задано бесконечное подмножество  $X \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Занумеровав все рациональные числа из отрезка  $[0, 1]$  натуральными числами, определим последовательность  $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ . По этой последовательности образуем следующую последовательность

$$s_1; s_1, s_2; s_1, s_2, s_3; \dots; s_1, s_2, s_3, \dots, s_k; \dots,$$

которую обозначим через  $(q_p)_{p \in \mathbb{N}}$ .

Множество  $0 < |x| < 1$  разобьем на счетное число колец вида

$$\gamma_{k+1} < |x| < \gamma_k, \quad \gamma_k = 2^{1-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Далее, выберем линейную систему (3.7) и в соответствии с леммой, модифицируем в каждом кольце (3.14) так, чтобы при любом  $k \in \mathbb{N}$  выполнялись равенства

$$\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid \gamma_{k+1} < |x_0| < \gamma_k\} = \{q_k\}.$$

В кольце  $1 \leq |x| < +\infty$  и на каждой окружности  $|x| = \gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , линейную систему (3.7) оставляем без изменения, поэтому

$$\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid |x_0| = \gamma_k \vee 1 < |x_0| < +\infty\} = \{1\}.$$

Следовательно, установили справедливость

$$\rho(\mathcal{S}_*(f)) = S \cup \{1\}$$

и из условия  $\gamma_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$  следует равенство (3.10) при любом  $\varepsilon > 0$ .

2. Пусть задано непустое конечное подмножество

$$X = \{s_1, s_2, \dots, s_N\} \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Тогда определим первые  $T = \frac{N^2+N}{2}$  членов последовательности  $(q_p)_{p \in \mathbb{N}}$

$$q_1 = s_1, \quad q_2 = s_1, \quad q_3 = s_2, \quad q_4 = s_1, \quad q_5 = s_2, \quad q_6 = s_3, \dots,$$

$$q_{T-N+1} = s_1, \quad q_{T-N+2} = s_2, \quad q_{T-N+3} = s_3, \dots, q_T = s_N,$$

а последующие члены – с помощью условия периодичности

$$q_{i+T} = q_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Далее повторяются рассуждения из п. 1 настоящего доказательства.

Теорема 3.1 доказана.

**Доказательство теоремы 3.2.** Фиксируем произвольный порядок  $p > 1$  нелинейности.

1. Сначала рассмотрим случай  $X = [0, 1]$ .

1.1. Определим правую часть двумерной нелинейной системы

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} \psi_-(|x|, 0, \theta_i) \cdot f_i(t, x), & 0 \leq |x| \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, 1) \cdot f_i(t, x), & \theta_i < |x| \leq 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, 1, 2) \cdot f_i(t, x), & 1 < |x| \leq 2, & t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|, 2, 3) \cdot f_i(t, x), & 2 < |x| < 3, & t \in \mathbb{R}_+, \\ f_i(t, x), & |x| \geq 3, & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (3.15)$$

где  $\theta_i = \{ie\}$ ,  $\tau_i = 2\pi(i-1)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Каждому начальному значению  $x_0 \in \mathbb{R}_*^2$  поставим в соответствие единственное  $\theta > 0$  по правилу  $|x_0| = \theta$ . Тогда из (3.15) при  $0 < |x_0| < 1$  следует, что для каждого  $\theta \in (0, 1)$  выполнено включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0, \theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta, 1), \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

1.2. Для каждого значения  $x_0 \in \mathbb{R}_*^2$ , лежащего в кольце  $2 < |x_0| < 3$ , выполнено (см. (3.15)) включение  $x_f^i(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_1$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , а значит, справедлива (см. п. 3 доказательства леммы 3.1) цепочка равенств

$$\check{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \check{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = 1.$$

Для каждого значения  $x_0 \in \mathbb{R}_*^2$ , лежащего в кольце  $1 < |x_0| < 2$ , выполнено (см. (3.15)) включение  $x_f^i(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , а значит, справедлива (см. п. 2 доказательства леммы 3.1) цепочка равенств

$$\check{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \check{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = 0.$$

1.3. Покажем, что при любом  $\theta \in (0, 1)$  для всех соответствующих решений  $x_f(\cdot, x_0)$  выполняется

$$\check{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \check{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = \theta. \quad (3.17)$$

1.3.1. Для всех  $u \in \mathcal{A}_1$  и любого преобразования  $L \in \text{Aut}\mathbb{R}^2$  верна (см. п. 3.2 доказательства леммы 3.1) оценка  $P(Lu, 2\pi) \geq 2\pi$ . Поэтому для

любого момента времени  $t > 0$  на основании соотношений (3.16) будем иметь

$$P(Lx_f(\cdot, x_0), t) \geq \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} P(Lx_f^i(\cdot, x_0), 2\pi) \geq 2\pi \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i),$$

откуда, используя замечание 3.1, выведем оценку снизу

$$\begin{aligned} \check{\rho}_o(x_f(\cdot, x_0)) &= \liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} P(Lx_f(\cdot, x_0), t) \geq \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^2} \frac{2\pi}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \\ &= \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\pi[t/2\pi]}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{[t/2\pi]} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \theta. \end{aligned}$$

1.3.2. Для любой функции  $x_f^i(\cdot, x_0)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  и  $\gamma > 0$  найдется (см. пп. 2 и 3.1 доказательства леммы 3.1) такое преобразование  $L' \in \text{Aut} \mathbb{R}^2$ , что верны соответствующие оценки

$$P(L'x_f^i(\cdot, x_0), 2\pi) \leq \begin{cases} \gamma, & x_f^i(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_0, \\ 2\pi + \gamma, & x_f^i(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_1. \end{cases}$$

При любом  $t > 0$  на основании соотношения (3.16) получим следующую оценку

$$P(L'x_f(\cdot, x_0), t) \leq (2\pi + \gamma) \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) + \gamma \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i) + 3\pi,$$

а затем, снова используя замечание 3.1, вычислим предел

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(L'x_f(\cdot, x_0), t) \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{2\pi + \gamma}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) + \frac{\gamma}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i) + \frac{3\pi}{t} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(2\pi + \gamma)[t/2\pi]}{t} \cdot \frac{1}{[t/2\pi]} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) + \\ &+ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma[t/2\pi]}{t} \cdot \frac{1}{[t/2\pi]} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(\theta,1)}(\theta_i) = \end{aligned}$$

$$= \frac{(2\pi + \gamma)}{2\pi}\theta + \frac{(1 - \theta)\gamma}{2\pi} = \theta + \frac{\gamma\theta}{2\pi} + \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{\gamma\theta}{2\pi} = \theta + \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Из оценки снизу для нижних показателей блуждаемости и последнего равенства получим цепочку соотношений

$$\theta \leq \check{\rho}_\circ(x_f(\cdot, x_0)) \leq \hat{\rho}_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(L'x_f(\cdot, x_0), t) = \theta + \frac{\gamma}{2\pi},$$

из которой в силу произвольности  $\gamma > 0$  с учетом соотношений (3.12) между показателями блуждаемости следует справедливость цепочки равенств (3.17) установлена и при любом и  $\varepsilon > 0$  множество

$$\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\}$$

имеет мощность континуума.

2. Теперь фиксируем произвольный интервал  $(a, b) \subset [0, 1]$ .

2.1. Если  $0 = a < b < 1$ , то выбираем систему  $\dot{x} = f(t, x)$  с правой частью

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} \psi_-(|x|, 0, \theta_i) \cdot f_i(t, x), & 0 \leq |x| \leq \theta_i < b, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, b) \cdot f_i(t, x), & \theta_i < |x| \leq b, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, 0, b) \cdot f_i(t, x), & 0 \leq |x| < b \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, b, \theta_i) \cdot f_i(t, x), & b < |x| \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, \theta_i, 1) \cdot f_i(t, x), & b < \theta_i < |x| < 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, b, 1) \cdot f_i(t, x), & \theta_i < b < |x| < 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_i(t, x), & |x| \geq 1, & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений  $x_f(\cdot, x_0)$  этой системы при каждом  $\theta \in (0, b)$  выполнено включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0, \theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta, b) \cup (b, 1), \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

2.2. Если  $0 < a < b = 1$ , то выбираем систему  $\dot{x} = f(t, x)$  с правой частью

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} \psi_+(|x|, 0, \theta_i) \cdot f_i(t, x), & 0 \leq |x| \leq \theta_i < a, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, a) \cdot f_i(t, x), & \theta_i < |x| \leq a, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, 0, a) \cdot f_i(t, x), & 0 \leq |x| < a \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, a, \theta_i) \cdot f_i(t, x), & a < |x| \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, 1) \cdot f_i(t, x), & a < \theta_i < |x| < 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, a, 1) \cdot f_i(t, x), & \theta_i < a < |x| < 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_i(t, x), & |x| \geq 1, & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений  $x_f(\cdot, x_0)$  этой системы при каждом  $\theta \in (a, 1)$  выполнено

включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0, a) \cup (a, \theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta, 1), \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

2.3. Если  $0 < a < b < 1$ , то выбираем систему  $\dot{x} = f(t, x)$  с правой частью

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} \psi_+(|x|, 0, \theta_i) \cdot f_r(t, x), & 0 \leq |x| \leq \theta_i < a, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, a) \cdot f_r(t, x), & \theta_i < |x| \leq a, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, 0, a) \cdot f_r(t, x), & 0 \leq |x| < a \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, a, \theta_i) \cdot f_r(t, x), & a < |x| \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, b) \cdot f_r(t, x), & a < \theta_i < |x| \leq b, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, a, b) \cdot f_r(t, x), & \theta_i < a < |x| < b, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, a, b) \cdot f_r(t, x), & a < |x| < b < \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, b, \theta_i) \cdot f_r(t, x), & b < |x| \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|, \theta_i, 1) \cdot f_r(t, x), & b < \theta_i < |x| < 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, b, 1) \cdot f_r(t, x), & \theta_i < b < |x| < 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_r(t, x), & |x| \geq 1, & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений  $x_f(\cdot, x_0)$  этой системы при каждом  $\theta \in (a, b)$  выполнено включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0, a) \cup (a, \theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta, b) \cup (b, 1), \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

2.4. Если  $a = 0$ ,  $b = 1$ , то выбираем систему  $\dot{x} = f(t, x)$  с правой частью

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} \psi_-(|x|, 0, \theta_i) \cdot f_r(t, x), & 0 < |x| \leq \theta_i, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|, \theta_i, 1) \cdot f_r(t, x), & \theta_i < |x| < 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_r(t, x), & |x| \geq 1, & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений  $x_f(\cdot, x_0)$  этой системы при каждом  $\theta \in (0, 1)$  выполнено включение (3.16).

Таким образом, каждый из рассмотренных четырех случаев на основании рассуждений, проведенных в п. 1 настоящего доказательства, приводит к равенствам (3.9).

Теорема 3.2 доказана.

## Заключение

В диссертационной работе изучены возможные спектры показателей колеблемости и блуждаемости двумерных дифференциальных систем с непрерывными и ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами. В частности, продемонстрирована возможность реализации произвольных конечных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерной линейной однородной дифференциальной системы. Более того, в классе периодических систем найдены такие, спектры которых состоят из сколь угодно большого конечного числа существенных значений. Интересным остается вопрос о конечности спектров показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами.

Для определенного класса счетных множеств, доказано существование двумерной линейной ограниченной дифференциальной системы, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с заданным множеством из этого класса, причем все значения существенны. Интересным остается вопрос о возможной реализации произвольного счетного существенно спектра какого-либо показателя колеблемости двумерной системы.

Основным результатом третьей главы является демонстрация возможности изменения мощности спектров показателей блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения. Этот результат показывает отсутствие непосредственной связи между мощностями спектров показателей блуждаемости нелинейной системы и системы её первого приближения. В работе [44] доказано существование такой двумерной нелинейной дифференциальной системы с линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные характеристические показатели Ляпунова, и нелинейностью произвольно заданного высшего порядка малости в окрестности начала координат, что все её нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей Ляпунова совпадает с заданным ограниченным суслинским множеством

положительной полуоси. Интересным остаётся вопрос о возможности перенесения аналогичного свойства и на показатели блуждаемости.

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях по асимптотической теории дифференциальных систем, а также при чтении спецкурсов по дифференциальным уравнениям. Дифференциальные системы с наперед заданными свойствами (спектрами показателей колеблемости и блуждаемости) будут несомненно полезны специалистам по теории управления, занимающимся изучением переключаемых систем.

## Список литературы

- [1] Азбелев, Н.В. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка / Н.В.Азбелев, З.Б.Цалюк // Матем. сборник. — 1959. — Т. 51, № 4. — С. 475–486.
- [2] Александров, П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С.Александров. — М.:Наука, 1977. — 368 с.
- [3] Асташова, И.В. Асимптотика колеблющихся решений уравнений со степенной нелинейностью /И.В.Асташова // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — 2017. — Т. 132. — С. 8–13.
- [4] Асташова, И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой. — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. — 648 с.
- [5] Барабанов, Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы /Е.А.Барабанов // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 11. — С. 1843–1853.
- [6] Барабанов, Е.А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям /Е.А.Барабанов // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 12. — С. 1592–1600.
- [7] Барабанов, Е.А. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I / Е.А.Барабанов, А.С.Войделевич //Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 10. — С. 1302–1320.
- [8] Барабанов, Е.А. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений / Е.А.Барабанов, А.С.Войделевич //Доклады НАН Беларуси. — 2016. — Т. 60, № 1. — С. 24–31.

- [9] Бурлаков, Д.С. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы /Д.С.Бурлаков, С.В.Цой // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 75–93.
- [10] Бурлаков, Д.С. Спектр скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов /Д.С.Бурлаков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2015. — № 2. — С. 49–53.
- [11] Бурлаков, Д.С. Оценки скорости блуждания решений линейного дифференциального уравнения через его коэффициенты /Д.С.Бурлаков // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1003–1010.
- [12] Бурлаков, Д.С. Оценки колеблемости и блуждаемости решений линейных систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Моск. гос. ун-т. Москва. 2016. 72 с.
- [13] Быков, В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений / В.В.Быков // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 4. — С. 419–425.
- [14] Быков, В.В. Строение множеств точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси / В.В.Быков // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 441–445.
- [15] Быков, В.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами / В.В.Быков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84, № 6. — С. 3–22.
- [16] Былов, Б.Ф. О геометрическом расположении и оценке роста решений возмущенных систем /Б.Ф.Былов // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 2, № 7. — С. 882–897.
- [17] Былов, Б.Ф. Приведение к блочно-треугольному виду и необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейных систем дифференциальных уравнений /Б.Ф.Былов // Дифференц. уравнения. — 1970. — Т. 6, № 2. — С. 243–252.
- [18] Былов, Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Р.Э.Виноград, Д.М.Гробман, В.В.Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

- [19] Ветохин, А.Н. К бэровской классификации остаточных показателей /А.Н.Ветохин // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 8. — С. 1039–1042.
- [20] Ветохин, А.Н. К бэровской классификации сигма-показателя и старшего экспоненциального показателя Изобова /А.Н.Ветохин // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1302–1311.
- [21] Виноград, Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем /Р.Э.Виноград // Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 91, № 5. — С. 999–1002.
- [22] Виноград, Р.Э. О достижимости центрального показателя /Р.Э.Виноград // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 7. — С. 1212–1217.
- [23] Войделевич, А.С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений /А.С.Войделевич //Изв. НАН Беларуси. Сер. физико-матем. наук. — 2015. — № 3. — С. 17–23.
- [24] Войделевич, А.С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений /А.С.Войделевич //Журнал Белорусского гос. ун-та. Матем. Инфор. — 2019. — № 1. — С. 28–32.
- [25] Гаргянц, А.Г. О метрической типичности старшего показателя Перрона на ршениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами / А.Г.Гаргянц // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1011–1017.
- [26] Гаргянц, А.Г. О существовании линейной дифференциальной системы с заданными показателями Перрона / А.Г.Гаргянц // Изв. РАН. Сер. матем. — 2019. — Т. 83, № 2. — С. 21–39.
- [27] Гробман, Д.М. Гомеоморфность динамических систем /Д.М.Гробман // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 8. — С. 1351–1359.
- [28] Гробман, Д.М. Топологическая эквивалентность в целом систем дифференциальных уравнений /Д.М.Гробман // Матем. сборник. — 1967. — Т. 115, № 4. — С. 600–609.
- [29] Глызин, С.Д. Релаксационные колебания электрически связанных нейрноподобных осцилляторов с запаздыванием /С.Д.Глызин // Модел. и анализ информ. систем. — 2010. — Т. 17, № 2. — С. 28–47.

- [30] Глызин, С.Д. Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием /С.Д.Глызин, А.Ю.Колесов, Н.Х.Розов // Матем. сб. — 2014. — Т. 205, № 6. — С. 21–86.
- [31] Горицкий, А.Ю. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний / А.Ю.Горицкий, Т.Н.Фисенко// Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 4. — С. 479–486.
- [32] Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости /Б.П.Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
- [33] Зорич, В.А. Математический анализ: Учебник. Ч. II. /В.А.Зорич. — М.: Наука, 1984. — 640 с.
- [34] Изобов, Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы /Н.А.Изобов // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1, № 4. — С. 469–477.
- [35] Изобов, Н.А. О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем /Н.А.Изобов // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 12. — С. 2168–2170.
- [36] Изобов, Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений /Н.А.Изобов // Итоги науки и техники. Матем. анализ. — 1974. — Т. 12. — С. 71–146.
- [37] Изобов, Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям /Н.А.Изобов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2034–2055.
- [38] Изобов, Н.А. Об уравнениях Эмдена–Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями /Н.А.Изобов // Матем. заметки. — 1984. — Т. 35, № 2. — С. 189–199.
- [39] Изобов, Н.А. О кнезеровских решениях /Н.А.Изобов // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 4. — С. 581–588.
- [40] Изобов, Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова /Н.А.Изобов. — Мн.: БГУ, 2006. — 320 с.
- [41] Изобов, Н.А. Конечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем /Н.А.Изобов, А.В.Ильин // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 12. — С. 1522–1536.

- [42] Изобов, Н.А. Эффект Перрона бесконечной смены значений характеристических показателей в любой окрестности начала координат /Н.А.Изобов, А.В.Ильин // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1420–1432.
- [43] Изобов, Н.А. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей /Н.А.Изобов, А.В.Ильин// Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1427–1439.
- [44] Изобов, Н.А. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона /Н.А.Изобов, А.В.Ильин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 464–472.
- [45] Каменев, И.В. Об одном интегральном признаке колеблемости линейных дифференциальных уравнений второго порядка /И.В.Каменев // Матем. заметки. — 1978. — Т. 23, № 2. — С. 249–252.
- [46] Каменев, И.В. К теореме В.А. Кондратьева о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения второго порядка /И.В.Каменев// Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 4. — С. 598–603.
- [47] Кащенко, С.А. Асимптотика быстро осциллирующих решений в модифицированном уравнении Камассы–Холма/С.А.Кащенко//Теоретич. и матем. физика. — 2020. — Т. 203, № 1. — С. 40–55.
- [48] Кащенко, С.А. Быстро осциллирующие решения обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза /С.А.Кащенко// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2017. — Т. 57, № 11. — С. 1812–1823.
- [49] Кигурадзе, И.Т. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений /И.Т.Кигурадзе // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 2. — С. 207–219.
- [50] Кигурадзе, И.Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений /И.Т.Кигурадзе, Т.А.Чантурия. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
- [51] Кигурадзе, И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений /И.Т.Кигурадзе. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. — 352 с.

- [52] Козлов, В.В. Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение / В.В.Козлов // Матем. заметки. — 2005. — Т. 78, № 3. — С. 358–367.
- [53] Кондратьев, В.А. Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнения  $y'' + p(x)y = 0$  / В.А.Кондратьев // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 113, № 4. — С. 742–745.
- [54] Кондратьев, В.А. О колеблемости решений уравнения  $y^{(n)} + p(x)y = 0$  / В.А.Кондратьев // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1961. — Т. 10. — С. 419–436.
- [55] Куратовский, К. Топология / К.Куратовский. В 2-х т. — Т. 1. — М.: Мир, 1966. — 596 с.
- [56] Левин, А.Ю. Неосцилляция решений уравнения  $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$  / А.Ю.Левин // Успехи матем. наук. — 1969. — Т. 24, № 2. — С. 43–96.
- [57] Левин, А.Ю. Абсолютная неосцилляционная устойчивость и смежные вопросы / А.Ю.Левин // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, вып. 1. — С. 154–166.
- [58] Леонов, Г.А. Об одной модификации контрпримера Перрона / Г.А.Леонов // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1566–1567.
- [59] Леонов, Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения / Г.А.Леонов. — М., Ижевск: РХД, 2006. — 168 с.
- [60] Лузин, Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях / Н.Н.Лузин. — М.: Гостехиздат, 1953. — 360 с.
- [61] Лысак, М.Д. Возможные соотношения между спектрами показателей и скоростей блуждания трехмерных систем / М.Д.Лысак // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 6. — С. 825–826.
- [62] Лысак, М.Д. Спектры скорости и показателя блуждания для линейных дифференциальных систем специального вида / М.Д.Лысак // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 4. — С. 539–544.
- [63] Миллиончиков, В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем / В.М.Миллиончиков // Сиб. матем. журнал. — 1969. — Т. 10, № 1. — С. 99–104.

- [64] Миллионщиков, В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I /В.М.Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 8. — С. 1408–1416.
- [65] Мирзов, Дж.Д. Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений /Дж.Д.Мирзов. — Майкоп: РИПО «Адыгея», 1993. — 131 с.
- [66] Миценко, В.В. О блуждаемости решений двумерных диагональных и треугольных дифференциальных систем /В.В.Миценко // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 221–241.
- [67] Миценко, В.В. О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем и линейных уравнений второго порядка /В.В.Миценко // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 6. — С. 851–852.
- [68] Миценко, В.В. Спектр верхнего показателя блуждаемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем /В.В.Миценко // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1347–1352.
- [69] Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной /И.П.Натансон. — М., 1957. — 480 с.
- [70] Починка, О.В. Диффеоморфизмы Морса–Смейла с неблуждающими точками попарно различных индексов Морса на 3-многообразиях /О.В.Починка, Е.А.Таланова // Успехи матем. наук. — 2024. — Т. 79, вып. 1(475). — С. 135–184.
- [71] Починка, О.В. Минимизация числа гетероклинических кривых 3-диффеоморфизма с неподвижными точками, имеющими попарно различные индексы Морса /О.В.Починка, Е.А.Таланова // Теоретич. и матем. физика. — 2023. — Т. 215, № 2. — С. 311–317.
- [72] Сергеев, И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений /И.Н.Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 1983. — Вып. 9. — С. 111–166.
- [73] Сергеев, И.Н. Формула для вычисления минимального показателя трехмерной системы /И.Н.Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 3. — С. 345–354.
- [74] Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения /И.Н.Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294.

- [75] Сергеев, И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения /И.Н.Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2009. — № 3. — С. 25–33.
- [76] Сергеев, И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка /И.Н.Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2011. — № 6. — С. 21–26.
- [77] Сергеев, И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем /И.Н.Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1661–1662.
- [78] Сергеев, И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем /И.Н.Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1567–1568.
- [79] Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы /И.Н.Сергеев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.
- [80] Сергеев, И.Н. Дифференциальные уравнения /И.Н.Сергеев. — М.: Издательский центр «Академия», 2013. — 288 с.
- [81] Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем /И.Н.Сергеев // Матем. сборник. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138.
- [82] Сергеев, И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем /И.Н.Сергеев // Изв. Ин-та матем. и инфор. УдГУ. — 2015. — Вып. 2(46). — С. 171–183.
- [83] Сергеев, И.Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем /И.Н.Сергеев // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 732–751.
- [84] Сергеев, И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем /И.Н.Сергеев // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2016. — Вып. 31. — С. 177–219.
- [85] Сергеев, И.Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости /И.Н.Сергеев // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2019. — № 1. — С. 21–26.

- [86] Сергеев, И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2021. — № 3. — С. 41–46.
- [87] Сергеев, И.Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению /И.Н.Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 726–734.
- [88] Сергеев, И.Н. Исследование полных свойств колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы по первому приближению /И.Н.Сергеев // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115, № 4. — С. 610–618.
- [89] Смоленцев, М.В. О спектрах частот нулей решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Моск. гос. ун-т. Москва. 2013. 72 с.
- [90] Смоленцев, М.В. Существование линейного уравнения третьего порядка со счетным спектром частот /М.В.Смоленцев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 242–251.
- [91] Смоленцев, М.В. Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок /М.В.Смоленцев // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1413–1417.
- [92] Сташ, А.Х. Некоторые свойства частот решений линейных дифференциальных уравнений и систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Моск. гос. ун-т. Москва. 2013. 98 с.
- [93] Сташ, А.Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений /А.Х.Сташ // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1418–1422.
- [94] Сташ, А.Х. Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот /А.Х.Сташ // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 1. — С. 143–144.
- [95] Сташ, А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ // Вест. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. — 2017. — № 2. — С. 65–68.

- [96] Сташ, А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы /А.Х.Сташ // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2019. — № 5. — С. 48–51.
- [97] Сташ, А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем /А.Х.Сташ // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. — 2019. — Т. 29, вып. 4. — С. 558–568.
- [98] Сташ, А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем /А.Х.Сташ // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. — 2021. — Т. 31, вып. 1. — С. 59–69.
- [99] Сташ, А.Х. Свойства характеристик колеблемости Сергеева периодического уравнения второго порядка /А.Х.Сташ // Владикав. матем. журнал. — 2021. — Т. 23, вып. 2. — С. 78–86.
- [100] Сташ, А.Х. Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем /А.Х.Сташ// Владикав. матем. журнал. — 2022. — Т. 24, вып. 3. — С. 120–132.
- [101] Сташ, А.Х. О существенных значениях частот Сергеева и показателей колеблемости решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка /А.Х.Сташ// Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. — 2023. — Т. 33, вып. 1. — С. 141–155.
- [102] Сташ, А.Х. О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем /А.Х.Сташ // Дифференц. уравнения и процессы управления. — 2023. — № 1. — С. 78–109.
- [103] Сташ, А.Х. Спектры показателей колеблемости и вращаемости решений однородных дифференциальных систем /А.Х.Сташ // Владикав. матем. журнал. — 2023. — Т. 25, вып. 2. — С. 136–143.
- [104] Сташ, А.Х. Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 5. — С. 588–595.
- [105] Сташ, А.Х. Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения /А.Х.Сташ // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1139–1142.

- [106] Сташ, А.Х. О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем /А.Х.Сташ // Вест. рос. ун-тов. Матем. — 2023. — Т. 28, № 141. — С. 60–67.
- [107] Сташ, А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы /А.Х.Сташ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 2. — С. 157–171.
- [108] Сташ, А.Х. О бесконечных спектрах показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ // Известия вузов. Математика. — 2024. — № 4. — С. 47–66.
- [109] Сташ, А.Х. О некоторых свойствах сильных показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений /А.Х.Сташ // Владикав. матем. журнал. — 2024. — Т. 26, вып. 2. — С. 122–132.
- [110] Сташ, А.Х. О спектрах показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения /А.Х.Сташ // Дифференц. уравнения. — 2025. — Т. 61, № 2. — С. 207–220.
- [111] Сташ, А.Х. Показатели колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений и систем: дис. ... доктор. физ.-мат. наук: 1.1.2. Моск. гос. ун-т. Москва. 2024. 217 с.
- [112] Сташ, А.Х. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка / А.Х.Сташ, А.Е.Артисевич// Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2023. — № 5. — С. 16–22.
- [113] Сташ, А.Х. О некоторых свойствах главных значений показателей колеблемости знаков линейных дифференциальных уравнений третьего порядка / А.Х.Сташ, А.Е.Артисевич // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. — 2025. — Т. 35, вып. 2. — С. 281–295.
- [114] Тонков, Е.Л. Неосциляция и число переключений в линейной системе, оптимальной по быстродействию / Е.Л.Тонков // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 12. — С. 2180–2185.
- [115] Тыртышников, Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра: Учеб. пособие /Е.Е.Тыртышников. — М.: Физматлит, 2007. — 480 с.

- [116] Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений /А.Ф.Филиппов. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.
- [117] Фурсов, А.С. Радиусы устойчивости и неустойчивости для многочленов третьей и четвертой степеней /А.С.Фурсов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1992. — № 2. — С. 28–33.
- [118] Фурсов, А.С. Критерий существования решения с малым ростом у линейной неоднородной системы /А.С.Фурсов // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 6. — С. 990–1000.
- [119] Чантурия, Т.А. Интегральные признаки колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков /Т.А.Чантурия // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 3. — С. 470–482.
- [120] Чантурия, Т.А. Об осцилляционных свойствах систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений /Т.А.Чантурия // Тр. ин-та прикладной матем. им. И.Н.Векуа. — 1983. — Т. 14. — С. 163–206.
- [121] Чантурия, Т.А. О колеблемости решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида /Т.А.Чантурия // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 11. — С. 1905–1915.
- [122] Шишлянников, Е.М. Пример дифференциальной системы с непрерывным спектром показателя блуждаемости /Е.М.Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. — 2017. — № 1. — С. 64–68.
- [123] Шишлянников, Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости /Е.М.Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. — 2017. — № 5. — С. 14–21.
- [124] Шишлянников, Е.М. Существование двумерной ограниченной системы с непрерывными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости /Е.М.Шишлянников // Матем. сборник. — 2018. — Т. 209, № 12. — С. 149–164.
- [125] Шишлянников, Е.М. Свойства ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем: дис... к.ф.м.н.: 01.01.02. Моск. гос. ун-т. Москва. 2019. 79 с.
- [126] Шумафов, М.М. К задаче стабилизации двумерной линейной дискретной системы /М.М.Шумафов//Известия Вузов. Сев.Кавказ. регион. Естеств. Науки. — 2009. — № 5. — С. 71–74.

- [127] Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения /В.А.Якубович, В.М.Старжинский. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
- [128] Kneser, A.J. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen beigrosser reden /A.J.Kneser// Wethen der Arguments, I. J. Reine und angew. Math. — 1898. — V. 116. — P. 173–212.
- [129] Kozlov, V.A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations /V.A.Kozlov // Ark. Mat. — 1999. — V. 37, № 2. — P. 305–322.
- [130] Palmer, K.J. Exponential dichotomy, integral separation and diagonalizability of linear systems of ordinary differential equations /K.J.Palmer // J. Differ. Equ. — 1982. — V. 43, № 2. — P. 184–203.
- [131] Perron, O. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reel ist (erste Mitteilung) /O.Perron // J. reine und angew. Math. — 1913. — Bd. 142, Hf. 4. — S. 254–270.
- [132] Perron, O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme /O.Perron // Math. Zeitschr. — 1930. — Bd. 31, Hf. 4. — S. 748–766.
- [133] Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen /O.Perron // Math. Zeitschr. — 1930. — Bd. 32, Hf. 1. — S. 703–728.

### Публикации автора по теме диссертации

#### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

- [134] Сташ, А.Х. К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Серия: Матем. Механ. Информ. — 2023. — Т. 23, вып. 3. — С. 348–356. DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356 ВАК K1; WoS (ESCI), Scopus, zbMath, MathSciNet, RSCI.
- [135] Сташ, А.Х. О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 4. — С. 500–507. DOI: 10.31857/S0374064124040053 ВАК; K1: zbMATH, RSCI.

**Переводная версия:** Stash A.Kh. On the realization of finite essential spectra of oscillation exponents of two-dimensional differential systems /A.Kh.Stash, N.A.Loboda // Differ. Equat. — 2024. — Vol. 60, № 4. — P. 472–478. DOI: 10.1134/S0012266124040062 WoS (SCIE), Scopus, MathSciNet, zbMATH, Springer.

- [136] Лобода, Н.А. Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения /Н.А.Лобода// Вестн. рос. ун-тов. Математика. — 2024. — Т. 29, № 146. — С. 176–187. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187 ВАК К2; Scopus, zbMath, RSCI.
- [137] Сташ, А.Х. О реализации счетных существенных спектров показателей колеблемости линейной однородной двумерной дифференциальной системы /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2025. — Т. 31, № 1. — С. 199–209. DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-199-209 ВАК К1; WoS (ESCI), Scopus, MathSciNet, RSCI.
- [138] Сташ, А.Х. Об изменении мощности спектра точного и абсолютно-го показателя блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Дифференц. уравнения. — 2025. — Т. 61, № 3. — С. 316–329. DOI: 10.31857/S0374064125030034 ВАК; К1: zbMATH, RSCI.

**Переводная версия:** Stash, A.Kh. On the difference in cardinalities of the spectra of exact and absolute wandering indicators between a two-dimensional nonlinear system and the first approximation system /A.Kh.Stash, N.A.Loboda// Differ. Equat. — 2025. — Vol. 61, № 3. — P. 286–300. DOI: 10.1134/S0012266125030036 WoS (SCIE), Scopus, MathSciNet, zbMATH, Springer.

**Аннотации докладов на семинаре по качественной теории  
дифференциальных уравнений в МГУ имени  
М.В. Ломоносова**

- [139] Лобода, Н.А. Об управлении конечными спектрами показателей колеблемости гиперкорней двумерных дифференциальных систем / Н.А.Лобода, А.Х.Сташ // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 862–863.

- [140] Сташ, А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода// Дифференц. уравнения — 2022. — Т. 58, № 6. — С. 861–862.
- [141] Лобода, Н.А. Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / Н.А.Лобода, А.Х.Сташ// Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60. № 6. С. 848–850.
- [142] Сташ, А.Х. О спектрах показателей блуждаемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода// Дифференц. уравнения. — 2025. — Т. 61, № 6. — С. 860–862.

### Материалы научных конференций

- [143] Сташ, А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости решений дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода// Материалы IV Межд. научн. конф. «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 13–17 октября 2021 г.). — Майкоп: Изд-во АГУ, 2021. — С. 175–177.
- [144] Лобода, Н.А. О существенных спектрах показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем /Н.А.Лобода, А.Х.Сташ// Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXV: материалы международной Воронежской весенней математической школы (Воронеж, 26–30 апреля 2024 г.). — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2024. — С. 215–216.
- [145] Сташ, А.Х. Об исследовании спектров показателей колеблемости и блуждаемости двумерной дифференциальной системы по первому приближению /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода// Материалы докладов V Конференции математических центров России (Красноярск, 11–16 августа 2025 г.). — Электронные данные. — Красноярск : СФУ, 2025. — 12 Мб. С. 140–143. — Режим доступа: <https://mdm2024.tilda.ws/#rec796105776>
- [146] Лобода, Н.А. О реализации существенных спектров показателей колеблемости нулей двумерных дифференциальных систем / Н.А.Лобода, А.Х.Сташ// Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 69 XVII Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань,

23–28 августа 2025 г.). Сборник трудов. — Казань: КФУ, 2025. — Т. 69. — С. 114–115.

- [147] Лобода, Н.А. О спектрах показателей колеблемости и блуждаемости дифференциальных систем / Н.А.Лобода, А.Х.Стаж // Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация (DGСТО-2025): материалы Всероссийской конференции, посвященной памяти профессора В. И. Ухоботова (Челябинск, 19–21 мая 2025 г.). — Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2025. — С. 135–139.

# Приложение

Для упрощения чтения текста настоящей диссертации приводим доказательство вспомогательного утверждения. Еще раз напомним определение разбиения множества натуральных чисел.

**Определение 2.3** [125]. Семейство множеств  $\{N_k \subset \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}\}$  назовем *разбиением* множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , если выполнены равенство

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k = \mathbb{N}$$

и для любых  $k, k' \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq k'$  соотношение  $N_k \cap N_{k'} = \emptyset$ .

**Лемма 2.5** [125]. *Если последовательность рациональных чисел  $(a_k)$  начинается с числа 1 и строго убывает, то существует такое разбиение  $\{N_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , что при любом  $k$  для множества*

$$\Lambda_k \equiv \bigcup_{h=k}^{+\infty} N_h \tag{3.18}$$

*верно равенство*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \chi_{\Lambda_k}(i) = a_k.$$

**Доказательство.** Для заданного числа  $Q \in \mathbb{N}$  представим множество натуральных чисел в виде блоков:  $\{1, \dots, Q\}$  — первый блок,  $\{Q + 1, \dots, 2Q\}$  — второй, и т.д. по  $Q$  идущих подряд элементов в каждом блоке. Для блока под номером  $j \in \mathbb{N}$  введем обозначение

$$B(Q, j) \equiv \{i \in \mathbb{N} \mid (j-1)Q + 1 \leq i \leq jQ\}$$

и положим  $\Lambda_1 \equiv \mathbb{N}$ . Пусть для любого  $k \in \mathbb{N}$  дробь  $p_k/q_k$  ( $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ ) — это несократимое представление числа  $a_k$ , тогда определив числа

$$Q_0 \equiv 1, \quad Q_k \equiv \prod_{j=1}^k q_j,$$

для каждого  $k \geq 2$  построим множество  $\Lambda_k$  такое, что выполнены неравенство

$$\lambda_k > \lambda_{k-1}, \quad \lambda_k \equiv \min \Lambda_k \quad (3.19)$$

и равенства

$$\text{card}(\Lambda_k \cap B(Q_k, j)) / Q_k = p_k / q_k, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (3.20)$$

где  $\text{card}(X)$  — это мощность множества  $X$  (в случае конечности множества  $X$  это число его элементов).

Будем строить множества  $\{\Lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  по индукции. Если  $k = 1$ , то

$$a_1 = p_1 = q_1 = Q_1 = 1$$

и равенства (3.20) для  $\Lambda_1 = \mathbb{N}$  выполнены. Проведем шаг индукции. Предположим, что множество  $\Lambda_{k-1}$  уже построено.

А. При любом  $j \in \mathbb{N}$  в блоке  $B(Q_k, j)$  укладывается ровно  $q_k$  блоков ширины  $Q_{k-1}$ , а во всех вместе блоках ширины  $Q_k$  стоящих до блока  $B(Q_k, j)$  укладывается ровно  $h_0 \equiv (j-1)q_k$  блоков ширины  $Q_{k-1}$ , поэтому имеем разложение

$$B(Q_k, j) = \bigcup_{h=h_0+1}^{h_0+q_k} B(Q_{k-1}, h),$$

из которого получаем равенство

$$\Lambda_{k-1} \cap B(Q_k, j) = \bigcup_{h=h_0+1}^{h_0+q_k} \Lambda_{k-1} \cap B(Q_{k-1}, h). \quad (3.21)$$

Б. Равенство (3.20) перепишем в виде

$$\text{card}(\Lambda_k \cap B(Q_k, j)) = p_k Q_{k-1},$$

и заметим, что предположение индукции означает, что имеют место равенства

$$\text{card}(\Lambda_{k-1} \cap B(Q_{k-1}, j)) = p_{k-1} Q_{k-2}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.22)$$

В. Из равенств (3.21) и (3.22), получим цепочку

$$\begin{aligned} \text{card}(\Lambda_{k-1} \cap B(Q_k, j)) &= \sum_{h=h_0+1}^{h_0+q_k} \text{card}(\Lambda_{k-1} \cap B(Q_{k-1}, h)) = \\ &= q_k p_{k-1} Q_{k-2} = Q_k \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} > Q_k \frac{p_k}{q_k} = Q_{k-1} p_k. \end{aligned}$$

Г. Рассмотрим случай

$$\Delta \equiv q_k p_{k-1} Q_{k-2} - Q_{k-1} p_k > 0.$$

Для любого подмножества  $\Omega \subset \mathbb{N}$ , такого что  $\text{card}(\Omega) > \Delta$  обозначим через  $\Omega^\Delta \subset \mathbb{N}$  — подмножество, которое получается из  $\Omega$  выкидыванием первых слева  $\Delta$  элементов. Тогда понятно, что

$$\text{card}(\Omega^\Delta) = \text{card}(\Omega) - \Delta.$$

Далее, определим множество  $\Lambda_k$  равенствами

$$\Lambda_k \cap B(Q_k, j) \equiv (\Lambda_{k-1} \cap B(Q_k, j))^\Delta,$$

и заметим, что для  $\Lambda_k$  верны соотношения (3.19) и (3.20).

2. Теперь убедимся в том, что семейство множеств, определяемое равенствами

$$N_k = \Lambda_k \setminus \Lambda_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

является разбиением, и что для него верны равенства (3.18).

А. Из построения в п. 1 следуют справедливость включений

$$\Lambda_{k+1} \subset \Lambda_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

а значит, для любых  $k, k' \in \mathbb{N}$ ,  $k > k'$  имеем соотношения

$$\Lambda_k \subset \Lambda_{k'+1}, \quad N_k \cap N_{k'+1} \subset \Lambda_k \cap (\Lambda_{k'} \setminus \Lambda_{k'+1}) = \emptyset.$$

Б. В силу неравенства (3.19) последовательность  $(\lambda_k)$  возрастает, поэтому для любого  $i \in \mathbb{N}$  определено число  $k_i$  такое, что  $\lambda_{k_i} > i$ .

Из соотношений

$$i \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_{k_i} = \bigcup_{k=1}^{k_i-1} \Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1} = \bigcup_{k=1}^{k_i-1} N_k$$

следует, что при некотором  $k \leq k_i - 1$  имеет место включение  $i \in N_k$ , но число  $i$  — любое, поэтому справедливо представление

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k = \mathbb{N},$$

из которого, учитывая п. А, получаем, что семейство  $\{N_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  является разбиением.

В. При любом  $k \in \mathbb{N}$  для любого  $i \in N_k$  верна цепочка

$$i \in \Lambda_k \setminus \Lambda_{k_i} = \bigcup_{h=k}^{k_i-1} \Lambda_h \setminus \Lambda_{h+1} = \bigcup_{h=k}^{k_i-1} N_h \subset \bigcup_{h=k}^{+\infty} N_h,$$

откуда получаем соотношение

$$\Lambda_k \subset \bigcup_{h=k}^{+\infty} N_k.$$

При любом  $h \geq k$  для любого  $i \in N_k$  имеет место цепочка

$$i \in N_k \subset \Lambda_h \subset \Lambda_k,$$

из которой получаем соотношение

$$\bigcup_{h=k}^{+\infty} N_k \subset \Lambda_k,$$

завершающее доказательство равенства (3.18).

3. Зафиксируем произвольное  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда при каждом  $j \in \mathbb{N}$  будем иметь

$$\sum_{i=(j-1)Q_k+1}^{jQ_k} \chi_{\Lambda_k}(i) = Q_{k-1}p_k,$$

откуда получим

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \chi_{\Lambda_k}(i) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{[p/Q_k]} Q_{k-1}p_k + \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=[p/Q_k]Q_k+1}^p \chi_{\Lambda_k}(i) = \\ &= \frac{1}{Q_k} \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{[p/Q_k]Q_k}{p} \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{[p/Q_k]} \sum_{i=1}^{[p/Q_k]} Q_{k-1}p_k + 0 = \\ &= \frac{Q_{k-1}p_k}{Q_k} = \frac{q_k}{p_k} = a_k. \end{aligned}$$

Лемма 2.5 доказана.