На правах рукописи

Лобода Надежда Алексеевна

О СПЕКТРАХ ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Майкоп — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Адыгейский государственный университет»

Научный руководитель:	**Сташ Айдамир Хазретович**, доктор физико-математических наук, доцент.
Официальные оппоненты:	**Починка Ольга Витальевна**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», заведующий лабораторией динамических систем и приложений факультета информатики, математики и компьютерных наук. **Ветохин Александр Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», доцент кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова».

Защита состоится 07 октября 2026 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.073.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620077, г. Екатеринбург, Бокс № 82, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:

https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.01/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук Костоусова Елена Кирилловна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Представленная диссертация является исследовательской работой в области качественной теории дифференциальных уравнений, лежащей на стыке теории устойчивости и теории колебаний.

Теория устойчивости неразрывно связана с характеристическими показателями Ляпунова решений дифференциальных систем, а также с введенными позже показателями Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, характеризующими различные аспекты поведения решений на бесконечности. Исследованию свойств этих показателей посвящены труды многих математиков, среди которых следует выделить Р.Э. Винограда, Д.М. Гробмана, Б.Ф. Былова, В.М. Миллионщикова, Н.А. Изобова, И.Н. Сергеева, А.В. Ильина, Е.А. Барабанова, А.С. Фурсова, А.Н. Ветохина и В.В. Быкова. Полные на момент публикации библиографические обзоры по данной тематике представлены, в частности, в работах[1,2] и монографиях[3,4].

Для всестороннего описания реальных физических процессов недостаточно знать лишь асимптотику роста решений — существенную роль играют также их колебательные (осцилляционные) свойства. Корни теории колебаний уходят к классическим трудам Ж. Штурма и А. Кнезера, заложившим основы качественного анализа осцилляции решений дифференциальных уравнений. Развитие научного направления, связанного с колеблемостью, осуществлялось благодаря исследованиям целой плеяды математиков, включая В.А. Кондратьева, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, А.Ю. Левина, Н.А. Изобова, В.А. Козлова, И.В. Каменева, Дж.Д. Мирзова, И.В. Асташову, С.А. Кащенко, С.Д. Глызина. Обширные библиографические списки по данной проблематике приведены, в частности, в обзоре[5] и монографии[6]. Основное внимание в указанных работах уделялось вопросам существования колеблющихся решений изучаемого уравнения, полному описанию множества таких решений, а также выявлению эффективных условий (в первую очередь — на коэффициенты уравнения), характеризующих осцилляционные поведения.

---

[1]Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Матем. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.

[2]Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, №12. С. 2034–2055.

[3] Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

[4]Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006. 320 с.

[5]Кигурадзе И.Т.,Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 430 с.

[6]Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012.

В последние годы интерес к таким свойствам решений линейных нестационарных систем, как ограниченность, устойчивость и колеблемость, значительно возрос в связи с прикладными задачами, связанными с анализом автоколебательных и хаотических режимов в электронных, лазерных и других нелинейных устройствах. В этом контексте особенно актуальной становится проблема построения аналогов ляпуновских показателей, адекватно характеризующих колебательную динамику решений дифференциальных систем.

В работе изучены следующие ляпуновские показатели колеблемости и блуждаемости: нижние (верхние) сильные показатели колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней; нижние (верхние) слабые показатели колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней; нижний (верхний) сильный показатель блуждаемости; нижний (верхний) слабый показатель блуждаемости.

Показатели колеблемости и блуждаемости. И.Н. Сергеевым были введены и изучены показатели колеблемости и блуждаемости решений линейных однородных дифференциальных систем, которые явились весьма эффективным средством для изучения колебательных свойств[7, 8, 9].

Сильные и слабые показатели колеблемости ранее назывались полными и векторными частотами, а сильные и слабые показатели блуждаемости — показателями блуждаемости и блуждания[10, 11, 12]. Эти показатели имеют схожее строение: сначала определяется некоторый функционал от двух аргументов: решения и правого конца отрезка времени (его левый конец совпадает с нулем), а затем к этому функционалу применяются в разном порядке оператор усреднения по времени и оператор взятия нижней грани. В частности, подсчет показателей колеблемости нулей происходит путем усреднения числа нулей проекции ненулевого решения дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получается слабый показатель колеблемости, а если после —

[7] Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та матем. и инфор. УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183.

[8] Сергеев И.Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем //Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 732–751.

[9] Сергеев И.Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости// Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2019. № 1. С. 21–26.

[10] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. № 6. С. 21–26.

[11] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, №1. С. 149–172.

[12] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119-138.

то сильный показатель колеблемости.

Скорость блуждания ненулевого решения дифференциальной системы — средняя по времени скорость, с которой движется центральная проекция решения на единичную сферу. А сильные и слабые показатели блуждаемости — это скорость блуждания решения, но минимизированная по всем системам координат, причем в случае слабого показателя блуждаемости минимизация производится в каждый момент времени. Следовательно, сильные и слабые показатели блуждаемости учитывают только ту информацию о решении, которая не гасится линейными преобразованиями: так, они учитывают обороты решения вокруг нуля, но не учитывают его локального вращения вокруг какого-либо другого вектора[11].

Дальнейшее развитие этой тематики связано с именами В.В. Быкова[13], А.Х. Сташа[14,15], Е.А. Барабанова и А.С. Войделевича[16,17], А.Ю. Горицкого[18], М.В. Смоленцева[19], Д.С. Бурлакова[20], М.Д. Лысака[21], В.В. Миценко[22], Е.М. Шишлянникова[23,24], А.Е. Артисевич[25] и другие. В работах этих авторов найдены возможные спектры (множества значений на всех ненулевых решениях) указанных характеристик для различных типов уравнений и систем, исследована устойчивость главных значений показателей колеблемости и блуждаемости относительно равномерно малых и бесконечно малых возмуще-

[13] Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 419–425.

[14] Сташ А.Х. О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2023. № 1. С. 78–109.

[15] Сташ А.Х. О бесконечных спектрах показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Известия вузов. Математика. 2024. № 4. С. 47–66.

[16] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I //Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320.

[17] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений //Доклады НАН Беларуси. 2016. Т. 60, № 1. С. 24–31.

[18] Горицкий А.Ю., Фисенко Т.Н. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 4. С. 479–486.

[19] Смоленцев М.В. Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1413–1417.

[20] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы// Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93.

[21] Лысак М.Д. Спектры скорости и показателя блуждания для линейных дифференциальных систем специального вида // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 539–544.

[22] Миценко В.В. Спектр верхнего показателя блуждаемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1347–1352.

[23] Шишлянников Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. 2017. № 5. С. 14–21.

[24] Шишлянников Е.М. Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Матем. сборник. 2018. Т. 209, № 12. С. 149–164.

[25] Артисевич А.Е. О подвижности главных значений показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений при бесконечно малых возмущениях // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2025. Т. 31, № 4. С. 26–38.

ний, а также установлены различные соотношения между рассматриваемыми показателями.

Подчеркнем, что показатель Ляпунова

$$\chi(x) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|,$$

задает для роста нормы решения x точную экспоненциальную оценку сверху, а в случае автономной линейной системы совпадает с действительной частью одного из собственных значений ее матрицы[3]. Поэтому показатели Ляпунова могут рассматриваться для систем с переменными коэффициентами как аналоги вещественных частей собственных значений. Аналогами же мнимых частей собственных значений для линейных дифференциальных систем являются показатели колеблемости и блуждаемости[11, 20, 26]. Следовательно, введением этих показателей, характеризующих в определенном смысле асимптотические свойства решений на бесконечности, достигается естественная и необходимая полнота рассмотрения линейных дифференциальных систем[16].

Степень разработанности темы исследования. Все показатели колеблемости и блуждаемости любого нетривиального решения любого линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка по определению равны нулю.

1. На множестве решений линейных однородных автономных дифференциальных систем показатели Ляпунова и Перрона совпадают: их общий спектр фиксированной системы состоит из множества действительных частей собственных значений матрицы системы[3].

Спектры показателей колеблемости и блуждаемости линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами были полностью изучены:

– спектры всех показателей блуждаемости и сильных показателей колеблемости *нулей* (как и набор их главных значений) любой *автономной* системы совпадают с множеством *модулей мнимых частей собственных значений* матрицы системы[11];

– сильные и слабые показатели колеблемости *нулей* любого решения автономной системы совпадают между собой[20];

– на множестве ненулевых решений автономных систем все показатели колеблемости *нестрогих знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* совпадают между собой[26];

[26] Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. 2019. Т. 29, вып. 4. С. 558–568.

– спектры всех показателей колеблемости *строгих знаков* автономных систем зависят от собственных значений матрицы системы и могут состоять не более чем из двух различных значений[26].

Из доказательств результатов работ[11, 20, 26] следует, что все спектры показателей колеблемости и блуждаемости содержат только одно существенное значение (т. е. это значение принимается на решениях, начальные значения которых имеют положительную меру Лебега): для показателей колеблемости строгих знаков это ноль, а для остальных показателей — наименьшее среди модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы.

Множество различных значений показателя Ляпунова на множестве нетривиальных решений любой фиксированной n-мерной линейной однородной дифференциальной системы состоит не более чем из n чисел[3].

Конечные спектры показателей колеблемости и блуждаемости отдельных классов неавтономных линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на неотрицательной полуоси коэффициентами достаточно разнообразны:

– спектры всех характеристик колеблемости и показателей блуждаемости двумерных систем, отвечающих уравнениям второго порядка, состоят из одного неотрицательного числа[10, 11];

– для любого ненулевого решения любой линейной однородной треугольной дифференциальной системы все показатели колеблемости равны нулю[27];

– спектры всех слабых и нижнего сильного показателя блуждаемости двумерной треугольной дифференциальной системы состоят только из одного нулевого значения, в то время как верхний сильный показатель блуждаемости некоторого нетривиального решения такой системы может принимать положительное значение[22];

– доказано существование двумерной линейной системы с периодическими коэффициентами, спектры всех показателей колеблемости которой содержат любое наперед заданное конечное число существенных значений[28];

– для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная линейная однородная дифференциальная система (периодическая, если эти числа попарно соизмеримы), у которой спектры показателей блуждаемости являются существенными и совпадают с этим множеством[23].

В связи с этим возникает естественный вопрос *о возможной реализации*

[27] Сташ А.Х. Спектры показателей колеблемости и вращаемости решений однородных дифференциальных систем// Владикав. матем. журнал. 2023. Т. 25, вып. 2. С. 136–143.

[28] Сташ А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 157–171.

произвольных конечных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерной линейной однородной ограниченной дифференциальной системы.

Полный ответ на этот вопрос приводится ниже (см. теорему 2.1).

2. Теперь приведем небольшой обзор бесконечных спектров некоторых асимптотических характеристик нестационарных линейных однородных дифференциальных систем:

– спектр показателя Перрона линейной системы может заполнять любой наперед заданный отрезок числовой прямой[29];

– вопросы существования и отсутствия существенных значений показателя Перрона линейной системы обсуждались в работах[30, 31, 32];

– для любого $n \geqslant 2$ существует n-мерная система с *континуальными спектрами* показателей колеблемости[33];

– существует двумерная система, на каждом решении которой все показатели колеблемости и блуждаемости равны, а их общий спектр заполняет невырожденный отрезок[24];

– установлено существование линейной двумерной дифференциальной системы, спектры показателей колеблемости которой содержат счетные существенные (и метрически, и топологически) множества неотрицательной полуоси[28];

– для любого замкнутого ограниченного счетного множества неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой, построена двумерная линейная ограниченная система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны[34].

Заметим, что в случае континуальных спектров рассмотренных асимптотических характеристик принципиально невозможно добиться того, чтобы сразу все его значения оказались существенными. В связи с этим возникает естественный вопрос *о возможной реализации некоторого класса счетных существенных значений какого-либо показателя колеблемости.*

---

[29] Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1843–1853.

[30] Гаргянц А.Г. О метрической типичности старшего показателя Перрона на ршениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 8. С. 1011–1017.

[31] Гаргянц А.Г. О существовании линейной дифференциальной системы с заданными показателями Перрона // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83, № 2. С. 21–39.

[32] Изобов Н.А. О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2168–2170.

[33] Сташ А.Х. О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем // Вест. рос. ун-тов. Матем. 2023. Т. 28, № 141. С. 60–67.

[34] Шишлянников Е.М. Свойства ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем: дис.... к.ф.м.н.: 01.01.02. Моск. гос. ун-т. Москва. 2019. 79 с.

Положительный ответ на этот вопрос дается ниже (см. теорему 2.2).

3. В работах[35, 36, 37] были проведены исследования свойств спектров колеблемости, блуждаемости и вращаемости по первому приближению. В частности, было показано, что одноэлементные спектры линейных показателей блуждаемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения могут быть совершенно произвольными: модуль разности этих чисел может меняться от нуля до бесконечности[36].

Известно, что имеет место эффект смены знака характеристических показателей Ляпунова при переходе от нелинейной системы к системе ее линейного приближения[38, 39]. В работах[40, 41] были построены нелинейные системы, которые еще дополнительно обладали бесконечными спектрами показателей Ляпунова.

В работе[42] построен неожиданный пример линейной двумерной системы с точечным спектром каждого из показателей колеблемости — такой, что у специальной возмущенной нелинейной двумерной системы сразу все перечисленные показатели имеют произвольный наперед заданный конечный или счетный спектр, состоящий из рациональных чисел единичного отрезка, или даже континуальный спектр, содержащий весь этот отрезок.

В связи с последним результатом возникает естественный вопрос *о возможности перенесения этих свойств и на показатели блуждаемости.*

Положительный ответ на этот вопрос дается ниже (см. теоремы 3.1 и 3.2).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является реализация произвольных конечных спектров и некоторого класса счетных спектров ляпуновских показателей колеблемости на пространстве линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами, а также реализация бесконечных

[35] Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.

[36] Сергеев И.Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 6. С. 726–734.

[37] Сташ А.Х. Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1139–1142.

[38] Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32, Hf. 1. S. 703–728.

[39] Леонов Г.А. Об одной модификации контрпримера Перрона// Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1566—1567.

[40] Изобов Н.А., Ильин А.В. Эффект Перрона бесконечной смены значений характеристических показателей в любой окрестности начала координат// Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1420–1432.

[41] Изобов Н.А., Ильин А.В. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 11. С. 1427–1439.

[42] Сташ А.Х. О спектрах показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 2. С. 207–220.

спектров ляпуновских показателей блуждаемости нелинейных систем по заданному их линейному приближению.

В работе решены следующие задачи:

– для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, построить такую двумерную линейную однородную дифференциальную систему, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с этим множеством и каждое значение из этого спектра является существенным;

– для некоторого класса счетных множеств построить такую двумерную линейную однородную дифференциальную систему, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с этим множеством и каждое значение из этого множества является существенным;

– показать возможность изменения мощности спектра всех показателей блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения.

Объектом исследования являются пространства линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными на временно́й полуоси коэффициентами, а также нелинейные дифференциальные системы с заданными линейными приближениями.

Предметом исследования являются свойства ляпуновских показателей колеблемости решений линейных систем, а также свойства показателей блуждаемости решений нелинейных систем.

Методология и методы исследования. При доказательстве утверждений в диссертации широко используются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, математического анализа, линейной алгебры, а также теории равномерно распределенных последовательностей.

Научная новизна. В диссертации доказаны следующие основные утверждения:

– для любого конечного множества неотрицательных рациональных чисел, содержащего ноль, построена двумерная линейная однородная *периодическая* дифференциальная система, у которой каждый из спектров всех показателей колеблемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

– для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, построена двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой каждый из спектров всех показателей колеблемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

– для любого замкнутого ограниченного счетного множества положительных попарно соизмеримых чисел с единственной нулевой предельной точкой, построена двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой каждый из спектров всех показателей колеблемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны;

– установлена возможность изменения мощности спектра всех показателей блуждаемости линейной двумерной системы при нелинейных возмущениях сколь угодно высокого порядка малости в окрестности начала координат.

Положения, выносимые на защиту.

Реализация произвольных, содержащих ноль, конечных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем.

Реализация любого замкнутого ограниченного счетного множества положительных попарно соизмеримых чисел с единственной нулевой предельной точкой в качестве существенного спектра каждого показателя колеблемости двумерной линейной однородной дифференциальной системы.

Доказательство возможности изменения мощности спектра всех показателей блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет преимущественно теоретическое значение. Полученные результаты могут быть полезны специалистам по качественной теории дифференциальных уравнений, а также специалистам по теории управления при исследовании переключаемых систем. Текст диссертации может составить содержание специального курса для студентов математических и инженерных специальностей.

Степень достоверности. Достоверность полученных соискателем результатов подтверждена строгими математическими выкладками и доказательствами, апробацией на конференциях и семинарах, а также публикациями в рецензируемых научных журналах.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

– Конференция математических центров России (Майкоп, 10–15 октября 2023 г.; Санкт-Петербург, 6–11 августа 2024 г.; Красноярск, 11–16 августа 2025 г.);

– Всероссийская конференция «Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация» (Челябинск, 19-21 мая 2025);

– Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXV», (Воронеж, 26–30 апреля 2024 г.);

– XVII Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 23–28 августа 2025 г.);

– Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – 2025 (OTHA-2025)» (Ростов-на-Дону, 24–29 августа 2025 г.);

– Международная научная конференция «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 13–17 октября 2021 г., 9–13 октября 2025 г.).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих научных семинарах:

– Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова (22 апреля 2022 г., 14 апреля 2023 г., 15 марта 2024 г., 25 апреля 2025 г.);

– Научно-исследовательский семинар «Динамические системы и теория управления» в Адыгейском государственном университете (Майкоп, 24 сентября 2025 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 14 научных работах, из которых 5 изданы в научных журналах категорий К1 [1,2,4,5] и К2 [3] перечня рецензируемых научных изданий ВАК или приравненных к ним. Работы [6–14] опубликованы в тезисах докладов конференций и семинаров.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем [1,2,4–14], А.Х. Сташу принадлежат постановки задач и общая схема их исследования, формулировки и доказательства результатов принадлежат автору диссертации.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 11 разделов, заключения, списка литературы и приложения. Полный объём диссертации составляет 100 страниц текста, список литературы вместе с публикациями соискателя содержит 147 наименований. В главах диссертации принята двойная нумерация формул, определений, замечаний, лемм, утверждений и теорем.

Основное содержание работы

Во **введении** описывается предмет исследования, обосновывается актуальность темы диссертации и обсуждается степень разработанности рассматриваемых проблем. Определяются цели и задачи работы, а также формулируются её основные результаты.

Первая глава носит, в основном, вспомогательный характер. В ней приведены необходимые определения и доказаны некоторые свойства показателей колеблемости и блуждаемости.

В разделе 1.1 даны определения ляпуновских показателей колеблемости и приведены основные их свойства.

В разделе 1.2 доказано отсутствие свойства остаточности у всех сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей и корней на множестве всех решений всех линейных однородных трехмерных дифференциальных систем, отвечающих уравнениям третьего порядка. Для этого построены две функции, являющиеся решениями различных уравнений третьего порядка, совпадающие на некоторой полуоси, но при этом имеющие разные сильные показатели колеблемости.

В разделе 1.3 даны определения ляпуновских показателей блуждаемости и приведены основные их свойства.

В разделе 1.4 приведены определения и основные свойства существенных значений ляпуновских показателей линейных однородных дифференциальных систем.

Основные результаты **второй главы**, выносимые на защиту, связаны с утверждениями о возможных спектрах показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами.

В разделе 2.1 представлен обзор близких результатов и сформулированы основные результаты главы.

В разделе 2.2 установлено совпадение спектров каждого показателя блуждаемости взаимно-сопряженных двумерных систем дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами. Для этого было установлено взаимно-однозначное соответствие между ненулевыми решениями взаимно-сопряженных систем, ортогональными на всей неотрицательной полуоси.

В разделе 2.3 для любого конечного множества $S = \{0, a_1, \ldots, a_l\}$ неотрицательных чисел, содержащего нуль, построена двумерная линейная однородная дифференциальная система (периодическая, если все элементы заданного множества попарно соизмеримы), у которой спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с этим множеством, причем все значения указанных показателей существенны. Для этого по заданному набору S сначала выбираем число T, а для каждого числа a_i, $i \in \{1, \ldots, l\}$ строим последовательность $(\lambda_i(k))_{k=1}^{+\infty}$, состоящую из нулей и единиц. Далее с помощью точек $T_k = (k-1)T$ последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ разбиваем полуось на отрезки и каждому из них $[T_k, T_{k+1}]$ поставим в соответствие число $\lambda_i(k)$. После выбираем вектор-функцию $u^i \in C^1\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2_*\right)$, осуществляющую на этом отрезке сначала поворот против часовой стрелки за время $T/2$, а затем поворот по часовой стрелке за это же время и с такой же скоростью (т.е. возвращаясь назад, занимает исходное направление). Модуль каждого угла зависит от соответствующего данному отрезку значения $\lambda_i(k)$: нулевому значению соответствует поворот менее чем на π, а единице — поворот более чем на π. В итоге удается подобрать вектор, на котором реализуется инфимум в определениях показателей колеблемости функции u^i, и доказать, что все функции u^i, $i = \overline{1,l}$ являются решением одной и той же линейной однородной двумерной дифференциальной системы. При этом существенность полученного значения a_i всех показателей колеблемости функции u^i обеспечена тем, что все достаточно близкие в начальный момент времени к $u^i(0)$ решения обладают такими свойствами на указанных отрезках.

В разделе 2.4 доказано существование двумерной линейной ограниченной системы, обладающей тем свойством, что ее спектры всех верхних и нижних, сильных и слабых показателей колеблемости строгих и нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с любым наперед заданным замкнутым ограниченным счетным множеством положительных попарно соизмеримых чисел с единственной нулевой предельной точкой. Более того, для любого ненулевого решения построенной системы все показатели колеблемости совпадают между собой, причем каждое их значение является метрически и топологически существенным. В этом случае проводятся аналогичные рассуждения, но алгоритм построения значительно усложняется. Используя понятие разбиения множества натуральных чисел Е.М. Шишлянникова, для последовательности $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ рациональных чисел, сходящейся к нулю, сначала строим систему $A \in \mathcal{M}^2$, существенные спектры всех показателей колеблемости которой совпадают с множеством $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. В конце убеждаемся, что при любом $l > 0$ у системы $B(t) = A(lt)/l$ спектры показателей колеблемости совпадают с множеством $\{l \cdot a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

В **третьей главе** проведено исследование спектров показателей блуждаемости по первому приближению. Установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров показателей блуждаемости нелинейной системы и системы ее первого приближения.

В разделе 3.1 приведены определения ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем с непрерывными на неотрицательной полуоси коэффициентами.

В разделе 3.2 представлен обзор литературы и сформулированы основные результаты главы.

В разделе 3.3 построена двумерная нелинейная система, все нетривиальные решения которой бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей блуждаемости заполняет отрезок $[0,1]$ или совпадает с наперед заданным непустым подмножеством рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а спектры линейной системы ее первого приближения состоят только из одного элемента. Более того, спектры показателей блуждаемости сужения построенной нелинейной двумерной системы на прямое произведение любой открытой окрестности нуля фазовой плоскости и временной полуоси могут состоять из заданного количества элементов, или быть счётными, или даже достигать мощности континуума. Кроме того, доказано существование нелинейной системы, спектры всех показателей блуждаемости которой совпадают с произвольным заранее заданным интервалом отрезка $[0,1]$, а соответствующие спектры линейной системы её первого приближения также состоят из одного неотрицательного числа.

При изучении свойств решений по первому приближению принято переходить от нелинейной системы к системе ее первого приближения. В нашем случае первичным объектом является линейная система, осуществляющая на последовательно примыкающих друг к другу отрезках длины π, начиная с момента $t = 0$, повороты на знакочередующиеся углы π, $-\pi$, π, $-\pi$, $\ldots$ со средней скоростью $|v| = 1$. За счет нелинейной добавки средняя скорость на некоторых участках увеличивается или уменьшается. В итоге для каждого решения x нелинейной системы удается подобрать такое преобразование L, на котором реализуется инфимум в определениях показателей блуждаемости. На тех участках, где модуль угла поворота решения x менее π, модуль угла поворота Lx получается меньше любого наперед заданного положительного числа. На участках, где модуль угла поворота решения x более π, модуль угла поворота Lx получается сколь угодно близкой к π. Это дает возможность реализовать любое рациональное число в качестве значения всех показателей блуждаемости решений, находящихся все время в некотором кольце. В случае континуальных спектров показателей блуждаемости нелинейной системы дополнительно используются свойства равномерно распределенных последовательностей.

В **заключении** приводятся итоги выполненного исследования, рекомендации по использованию полученных результатов и перспективы дальнейшего развития темы.

В **приложении** приводится доказательство вспомогательного утверждения из текста кандидатской диссертации Е.М. Шишлянникова в связи с его отсутствием в открытой печати.

Формулировки основных результатов. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными ограниченными* оператор-функциями $A:\ \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (будем отождествлять их с соответствующими системами). Множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ и положим

$$\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} \equiv \bigcup_{A\in\mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathbb{R}^n_* \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Определение I[11, 12]. Для векторов $m \in \mathbb{R}^n_*$, $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n_*)$ введем следующие обозначения для количеств специфических точек на промежутке $(0,t]$:

$\nu^-(x,m,t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x,m\rangle$, т. е. таких, что в любой окрестности каждой из них оно принимает как положительные, так и отрицательные значения;

$\nu^\sim(x,m,t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x,m\rangle$, т. е. таких, что в любой окрестности каждой из них оно принимает как неположительные, так и неотрицательные значения;

$\nu^0(x,m,t)$ — число *нулей* скалярного произведения $\langle x,m\rangle$;

$\nu^+(x,m,t)$ — число *корней* функции $\langle x,m\rangle$, т. е. ее нулей с учетом их *кратности*;

$\nu^*(x,m,t)$ — число *гиперкратных корней* функции $\langle x,m\rangle$: при его подсчете каждый ее некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Определение II[11, 43]. *Верхние* (*нижние*) *сильные* и *слабые показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* решения $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n_*)$ зададим при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно формулами

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check\nu^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$
$$\hat\nu^\alpha_\circ(x) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check\nu^\alpha_\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right).$$

Определение III[11]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели блуждаемости* решения $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n_*)$ зададим соответственно формулами

$$\hat\rho_\bullet(x) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t) \quad \left(\check\rho_\bullet(x) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t)\right),$$
$$\hat\rho_\circ(x) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t) \quad \left(\check\rho_\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t)\right),$$

[43] Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.

где $\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ — множество всех невырожденных линейных операторов $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и

$$\mathrm{P}(Lx,t)\equiv\int_0^t\left|\frac{\partial}{\partial\tau}e(Lx,\tau)\right|d\tau,\quad e(Lx,\tau)\equiv\frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|}.$$

Определение IV[43]. Для функции $x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n_*)$ условимся о следующем:

1) если значение некоторого верхнего (с крышечкой) показателя колеблемости или блуждаемости совпадает со значением одноименного нижнего (с галочкой) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;

2) если значение некоторого слабого (с пустым кружочком) показателя колеблемости или блуждаемости совпадает со значением одноименного сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

Определение V[44,45]. Множество всех значений показателя $\varkappa\colon\mathcal{S}_*(A)\to\mathbb{R}_+$ назовём *спектром* этого показателя системы $A\in\mathcal{M}^n$, причем значение $a\in\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ назовем

1) *метрически существенным*, если подмножество

$$\{x(0)\mid x\in\mathcal{S}_*(A),\ \varkappa(x)=a\}\subset\mathbb{R}^n \tag{1}$$

имеет положительную меру Лебега;

2) *топологически существенным*, если подмножество (1) заполняет некоторое непустое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра*, т.е. счетного объединения нигде не плотных подмножеств;

3) *существенным*, если оно является метрически и топологически существенным.

Через $\operatorname{ess}\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя $\varkappa$ системы A и назовем его *существенным спектром* системы A.

Возможность реализации конечных и счетных существенных спектров показателей колеблемости двумерной дифференциальной системы демонстрируют следующие две теоремы.

Теорема I (2.1). *Для любого конечного множества S неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует такая система $A\in\mathcal{M}^2$ (периодическая, если элементы множества S попарно соизмеримы), что справедливы*

[44] Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем// Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1661–1662.

[45] Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем// Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1567–1568.

равенства
$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \operatorname{ess}\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = S,$$
причем
$$\nu^-(x) = \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A).$$

Теорема II (2.2). *Для любых $l > 0$ и последовательности $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ положительных рациональных чисел, сходящейся к нулю, существует такая двумерная система $A \in \mathcal{M}^2$, что справедлива цепочка равенств*
$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \operatorname{ess}\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \{l \cdot q_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\},$$
причем
$$\nu^-(x) = \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A).$$

В евклидовой фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида
$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \\ |f(t,x)| \leqslant a_f(t)|x| + b_f(t), \quad a_f, b_f \in C(\mathbb{R}_+), \end{gathered} \tag{2}$$
допускающую нулевое решение, существование и единственность решений задач Коши, определенных на $\mathbb{R}_+$.

Определение VI. С системой (2) свяжем линейную систему её *первого приближения*
$$\dot{x} = A(t)x \equiv g(t,x), \quad A(t) = f'_x(t,0), \tag{3}$$
при условии
$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t,x) - g(t,x)| = o(x) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (2), а через $x_f(\cdot, x_0)$ то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0, x_0) = x_0$.

Теорема III (3.1). *Для любых заданных $p > 1$ и непустого подмножества $S \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ существует нелинейная система вида (2) с линейным приближением*
$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv g(t,x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2}\sin t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$
удовлетворяющие условиям
$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t,x) - g(t,x)| \leqslant |x|^p \quad \textit{при} \quad x \to 0, \tag{5}$$

$$\rho(\mathcal{S}_*(g)) = \{1\}, \quad \rho(\mathcal{S}_*(f)) = S \cup \{1\}, \tag{6}$$

причем при любом $\varepsilon > 0$ *выполнено равенство*

$$\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\} = \rho(\mathcal{S}_*(f)).$$

Теорема IV (3.2). *Для любого интервала* $S = (a, b) \subset [0, 1]$ *или* $S = [0, 1]$ *существует нелинейная система вида (2) с первым приближением (4), связанные соотношениями* (5), *спектры показателей блуждаемости которых обладают соответственно свойствами* (6), *причем при* $S = [0, 1]$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *множество* $\{\rho(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\}$ *имеет мощность континуума.*

Заключение

В диссертационной работе изучены возможные спектры показателей колеблемости и блуждаемости двумерных дифференциальных систем с непрерывными и ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами. В частности, продемонстрирована возможность реализации произвольных конечных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерной линейной однородной дифференциальной системы. Более того, в классе периодических систем найдены такие, спектры которых состоят из сколь угодно большого конечного числа существенных значений. Интересным остается вопрос о конечности спектров показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами.

Для определенного класса счетных множеств, доказано существование двумерной линейной ограниченной дифференциальной системы, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с заданным множеством из этого класса, причем все значения существенны. Интересным остается вопрос о возможной реализации произвольного счетного существенного спектра какого-либо показателя колеблемости двумерной системы.

В работе продемонстрирована возможность изменения мощности спектров показателей блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения. Этот результат показывает отсутствие непосредственной связи между мощностями спектров показателей блуждаемости нелинейной системы и системы её первого приближения. В работе[46] доказано существование такой двумерной нелинейной дифференциальной системы с линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные

[46] Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 4. С. 464–472.

характеристические показатели Ляпунова, и нелинейностью произвольно заданного высшего порядка малости в окрестности начала координат, что все её нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей Ляпунова совпадает с заданным ограниченным суслинским множеством положительной полуоси. Интересным остаётся вопрос о возможности перенесения аналогичного свойства и на показатели блуждаемости.

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях по асимптотической теории дифференциальных систем, а также при чтении спецкурсов по дифференциальным уравнениям. Дифференциальные системы с наперед заданными свойствами (спектрами показателей колеблемости и блуждаемости) будут несомненно полезны специалистам по теории управления, занимающимся изучением переключаемых систем.

Благодарности. Автор диссертации выражает благодарность и искреннюю признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту Сташу Айдамиру Хазретовичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Диссертационая работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074/5.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Сташ, А.Х. К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2023. — Т. 23, вып. 3. — С. 348–356. DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356 ВАК К1; WoS (ESCI), Scopus, zbMath, MathSciNet, RSCI.

2. Сташ, А.Х. О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60, № 4. — С. 500–507. DOI: 10.31857/S0374064124040053 ВАК; К1: zbMATH, RSCI.

Переводная версия:

Stash A.Kh. On the realization of finite essential spectra of oscillation exponents of two-dimensional differential systems /A.Kh.Stash, N.A.Loboda // Differential Equations. — 2024. — Vol. 60, № 4. — P. 472–478. DOI: 10.1134/S0012266124040062 WoS (SCIE), Scopus, MathSciNet, zbMATH, Springer.

3. Лобода, Н.А. Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения /Н.А.Лобода// Вестник российских университетов. Математика. — 2024. — Т. 29, № 146. — С. 176–187. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187 ВАК К2; Scopus, zbMath, RSCI.

4. Сташ, А.Х. О реализации счетных существенных спектров показателей колеблемости линейной однородной двумерной дифференциальной системы /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2025. — Т. 31, № 1. — С. 199–209. DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-199-209 ВАК К1; WoS (ESCI), Scopus, MathSciNet, RSCI.

5. Сташ, А.Х. Об изменении мощности спектра точного и абсолютного показателя блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Дифференциальные уравнения. — 2025. — Т. 61, № 3. — С. 316–329. DOI: 10.31857/S0374064125030034 ВАК; К1: zbMATH, RSCI.

Переводная версия:

Stash, A.Kh. On the difference in cardinalities of the spectra of exact and absolute wandering indicators between a two-dimensional nonlinear system and the first approximation system /A.Kh.Stash, N.A.Loboda// Differential Equations. — 2025. — Vol. 61, № 3. — P. 286–300. DOI: 10.1134/S0012266125030036 WoS (SCIE), Scopus, MathSciNet, zbMATH, Springer.

Аннотации докладов на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ имени М.В. Ломоносова

6. Лобода, Н.А. Об управлении конечными спектрами показателей колеблемости гиперкорней двумерных дифференциальных систем / Н.А.Лобода, А.Х.Сташ // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 862–863.

7. Сташ, А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода// Дифференциальные уравнения — 2022. — Т. 58, № 6. — С. 861–862.

8. Лобода, Н.А. Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / Н.А.Лобода, А.Х.Сташ// Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60. № 6. С. 848–850.

9. Сташ, А.Х. О спектрах показателей блуждаемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода // Дифференциальные уравнения. — 2025. — Т. 61, № 6. — С. 860–862.

Материалы научных конференций

10. Сташ, А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости решений дифференциальных уравнений третьего порядка /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода// Материалы IV Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп, 13–17 октября 2021 г.). — Майкоп: Изд-во АГУ, 2021. — С. 175–177.

11. Лобода, Н.А. О существенных спектрах показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем /Н.А.Лобода, А.Х.Сташ// Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXV: материалы международной Воронежской весенней математической школы (Воронеж, 26–30 апреля 2024 г.). — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2024. — С. 215–216.

12. Сташ, А.Х. Об исследовании спектров показателей колеблемости и блуждаемости двумерной дифференциальной системы по первому приближению /А.Х.Сташ, Н.А.Лобода// Материалы докладов V Конференции математических центров России (Красноярск, 11–16 августа 2025 г.). — Электронные данные. — Красноярск: СФУ, 2025. — 12 Мб. С. 140–143. — Режим доступа: https://mdm2024.tilda.ws/#rec796105776

13. Лобода, Н.А. О реализации существенных спектров показателей колеблемости нулей двумерных дифференциальных систем / Н.А.Лобода, А.Х.Сташ// Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 69 XVII Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 23–28 августа 2025 г.). Сборник трудов. — Казань: КФУ, 2025. — Т. 69. — С. 114–115.

14. Лобода, Н.А. О спектрах показателей колеблемости и блуждаемости дифференциальных систем / Н.А.Лобода, А.Х.Сташ // Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация (DGCTO-2025): материалы Всероссийской конференции, посвященной памяти профессора В. И. Ухоботова (Челябинск, 19–21 мая 2025 г.). — Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2025. — С. 135–139.