На правах рукописи

Зыков Игорь Владимирович

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ: АНАЛИЗ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

1.1.2. — «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Гусев Михаил Иванович,** доктор физико–математических наук
Официальные оппоненты:	**Горнов Александр Юрьевич,** доктор технических наук, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, главный научный сотрудник лаборатории оптимального управления **Точилин Павел Александрович,** кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, доцент кафедры системного анализа ВМК МГУ
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Удмуртский государственный университет»

Защита состоится 06 декабря 2023 г. в $13^{\underline{30}}$ часов на заседании диссертационного совета 24.1.073.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:
`https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.01/`

Автореферат разослан «   »   2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук   Костоусова Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Диссертация посвящена исследованию свойств множеств достижимости управляемых систем с интегральными и комбинированными ограничениями на управление и алгоритмов их построения. Множество достижимости, состоящее из всех состояний систем, в которые можно попасть при помощи управлений из заданного класса, либо под действием возмущений — один из классических объектов изучения в теории управления. Множества достижимости и их обобщения (альтернированный интеграл Л.С. Понтрягина, стабильные мосты Н.Н. Красовского, информационные множества) широко используются в теории дифференциальных игр, задачах управления в условиях неопределенности и многочисленных приложениях. Анализ достижимости играет важную роль в робототехнике, управлении транспортными, аэрокосмическими и энергетическими системами, при исследовании биологических систем[1]. Сказанное свидетельствует об актуальности темы исследования диссертации. Начиная с середины прошлого столетия множества достижимости изучались в работах многих авторов. В основном эти исследования относятся к управляемым системам с *геометрическими ограничениями* на управление (называемые также жесткими или мгновенными). Строение и свойства множеств достижимости изучались в монографиях Н.Н. Красовского[2], Н.Н. Красовского и А.И. Субботина[3], А.Б. Куржанского[4], Ф.Л. Черноусько[5], F. Schweppe[6] и S. Boyd с соавторами[7] и др. Множества достижимости и алгоритмы их построения для систем управления с геометрическими ограничениями на управление были предметом исследований во многих работах по теории оптимального управления: А.Б. Куржанский, Ф.Л. Черноусько, В.Н. Ушаков, С.М. Асеев, А.Ю. Горнов, Х. Гусейнов, Е.К. Костоусова, А.В. Лотов, М.С. Никольский, В.С. Пацко, Е.С. Половинкин, А.А. Толстоногов, Т.Ф. Филиппова, F. Lempio, I.M. Mitchell, J.-P. Saint-Pierre, J.A. Sethian, C. Tomlin, M. Quincampoix, P. Varaiya, V. Veliov, R. Vinter и др.

Для линейных управляемых систем с геометрическими ограничениями на управление множество достижимости может быть построено с помощью вычисления значений опорной функции (см., например,[2,4,8]) на равномерной сетке единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Вычисление опорной функции (опорного полупространства) достаточно простая задача для типичных геометрических ограничений на управление. Для нелинейной управляемой системы вычисление значений опорной функции гораздо сложнее. Кроме того, множества достижимости, как правило, невыпуклы. Поэтому пересечение опорных полупространств дает лишь внешнюю оценку множества достижимости.

Для приближенного построения множеств достижимости можно применять разностные схемы интегрирования многозначных эволюционных уравнений (см.,

---

[1] Althoff M., Frehse G., Girard A. Set Propagation Techniques for Reachability Analysis // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. 2021. Vol. 4, no. 1. P. 369–395.

[2] Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.

[3] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 476 с.

[4] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

[5] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.

[6] Schweppe F.C. Uncertain Dynamic Systems. NJ: Prentice-Hall, 1973. 563 p.

[7] Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 205 p.

[8] Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15, № 1. С. 67–78.

например,[9,10]). Пиксельные методы (или методы "эйлерова типа") предполагают использование априорно заданных сеток в фазовом пространстве и проецирование на них аппроксимаций множеств достижимости в процессе расчетов[11,12]. Применяемые для построения множеств достижимости методы "стохастических аппроксимаций"[13] используют принцип Монте-Карло и основаны на генерации случайных точек, аппроксимирующих множества достижимости. Во многих работах при построении множеств достижимости для систем с геометрическими ограничениями применяются алгоритмы, основанные на решении вспомогательных экстремальных задач и (или) принципе максимума Понтрягина[14,15,16,17].

Приближенное построение множеств достижимости требует, как правило, значительных вычислительных затрат. Однако во многих случаях достаточно знать только оценки, внешние или внутренние, для множеств достижимости. В работах А.Б. Куржанского[18,19], Ф.Л. Черноусько[5], Ф. Швеппе[6] была развита техника аппроксимаций множеств достижимости конечнопараметрическими множествами — эллипсоидами. Были получены внешние и внутренние эллипсоидальные оценки в виде решений некоторых эволюционных уравнений. Доказана возможность получения сколь угодно точных двусторонних приближений для множеств достижимости и многозначных интегралов путем пересечения внешних и объединения внутренних эллипсоидальных оценок по некоторым множествам управляющих параметров[18,19]. Техника эллипсоидальных оценок развивалась в последующем многими авторами, в том числе и для некоторых классов нелинейных систем. Близкие идеи были также заложены в схему построения оценок при помощи другого конечно-параметрического класса множеств — параллелотопов[20,21]. В отличие от аппроксимации при помощи опорных функций, которые требуют значительного количества вычислений, методы эллипсоидальной и полиэдральной аппроксимации позволяют достичь определенного компромисса между количеством вычислений и точностью аппроксимации.

---

[9] Veliov V.M. Approximations to Differential Inclusions by Discrete Inclusions. 1989. P. 1–37.

[10] Lempio F., Veliov V. Discrete approximation of differential inclusion // Bayr.Math.Sehr. 1998. Vol. 54. P. 149–232.

[11] Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 2. С. 179–187.

[12] Незнахин А.А., Ушаков В.Н. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Вычислительная математика и математическая физика. 2001. Т. 41, № 6. С. 895–908.

[13] Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 275 с.

[14] Baier R., Gerdts M., Xausa I. Approximation of Reachable Sets using Optimal Control Algorithms // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2013. Vol. 3, no. 3. P. 519–548.

[15] Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 320–328.

[16] Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. Построение множества достижимости интегратора Брокетта // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, № 5. С. 707–724.

[17] Горнов А.Ю., Финкельштейн Е.А. Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости // Автомат. и телемех. 2015. № 3. С. 22–31.

[18] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhäuser: Boston, 1997. 321 p.

[19] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Birkhäuser: Boston, 2014. 457 p.

[20] Филиппова Т.Ф. Внешние оценки множеств достижимости управляемой системы с неопределенностью и комбинированной нелинейностью // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 262–274.

[21] Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости многошаговых систем с билинейной неопределенностью // Автомат. и телемех. 2011. № 9. С. 49–60

Множество достижимости совпадает с множеством уровня некоторой функции цены (функции Беллмана) для подходящей задачи оптимального управления. Этот факт позволяет применять алгоритмы, основанные на методах решения уравнений и неравенств Гамильтона-Якоби-Беллмана[18,22,23,24,25]. На использовании дифференциальных неравенств и принципа сравнения основан ряд методов получения внешних и внутренних оценок множеств достижимости[26,27,28,29].

Рассматриваемые в диссертации системы с *интегральными (ресурсными) ограничениями* часто возникают в приложениях и изучаются в теории управления и дифференциальных играх. Интегральные (мягкие) ограничения позволяют в каждый момент времени выбирать произвольное управляющее воздействие при условии, что интеграл от реализовавшейся траектории управления не превысит заранее заданной величины, называемой резервом управления. В терминах интегральных ограничений формулируются условия об ограниченности запаса энергии, топлива управляемого объекта. Множества достижимости для систем с интегральными ограничениями изучены в меньшей степени, чем для систем с геометрическими ограничениями. В линейном случае при ограничениях из $\mathbb{L}_2$ известно, что опорная функция множества достижимости вычисляется в явном виде с помощью численного интегрирования линейного матричного дифференциального уравнения Риккати. Для нелинейных систем управления с интегральными ограничениями на управление множества достижимости на конечном интервале времени и алгоритмы их построения были рассмотрены в работах[30,31,32] и других. Алгоритмы построения множеств достижимости, основанные на дискретных аппроксимациях, изучались в[33,34]. Свойства выпуклости и компактности множеств достижимости

---

[22]Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.

[23]Sethian J.A. Level Set Methods and Fast Marching Methods. NewYork: Cambridge Univ. Press, 1999. 404 p.

[24]Mitchell I.M., Tomlin C.J. Overapproximating Reachable Rets by Hamilton–Jacobi Rrojections // J.Sci.Comput. 2003. Vol. 19, no. 1-3. P. 323–346.

[25]Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Физматлит, 1997. 287 с.

[26]Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2006. Т. 110. С. 76–108.

[27]Гусев М.И. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 60–69.

[28]Никольский М.С. Об оценке множества достижимости для некоторых объектов управления // Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина. 2018. С. 194—196.

[29]Точилин П.А. О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1503–1515.

[30]Polyak B.T. Convexity of the Reachable Set of Nonlinear Systems Under L2 Bounded Controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis. 2004. Vol. 11, no. 2. P. 255–267.

[31]Guseinov K.G. Approximation of the attainable sets of the nonlinear control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Analysis. 2009. Vol. 71, no. 1-2. P. 622–645.

[32]Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А. Множество достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление // МТИП. 2023. Т. 15, № 2. С. 89–104.

[33]Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2007. Vol. 14. P. 57–73.

[34]Guseinov K.G., Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2010. Vol. 16, no. 5. P. 261–268.

при интегральных ограничениях исследованы в работах[30,35,36]. Вопросы устойчивости множеств достижимости относительно возмущений параметров и ограничений системы рассматривались в работах[37]. В[38,39,40] исследовались свойства и алгоритмы построения информационных множеств в задачах оценивания и идентификации при интегральных ограничениях на возмущения, эти множества являются аналогами множеств достижимости в задачах управления.

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является изучение свойств множеств достижимости нелинейных управляемых систем с интегральными и комбинированными ограничениями на управление, исследование задач описания границы множества достижимости и получение его внешних оценок, разработка алгоритмов их приближенного построения.

Методология и методы исследования. Предлагаемые исследования основаны на классических результатах теории дифференциальных уравнений и математической теории управления, методах многокритериальной оптимизации, нелинейном и выпуклом анализе. В качестве средства численного моделирования применялся пакет прикладных программ MATLAB.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Для нелинейной управляемой системы с интегральным квадратичным ограничением на управление доказано, что управление, переводящее систему на границу множества достижимости (границу проекции множества достижимости на подпространство), является локальным решением вспомогательной задачи оптимального управления.

2. Предыдущий результат обобщен на случай систем с несколькими совместными интегральными ограничениями на управление и траекторию, в этом случае вспомогательная задача оптимального управления является многокритериальной.

3. Доказан принцип максимума Понтрягина для граничных траекторий в перечисленных выше случаях. Разработаны алгоритмы построения границы множества достижимости на основе принципа максимума. Проведено численное моделирование.

4. Построены внешние оценки множеств достижимости в виде множества уровня некоторой дифференцируемой функции Ляпунова (зависящей только от вектора состояния) для управляемой системы с интегральным ограничением на управление.

5. Предложен и обоснован алгоритм построения множеств достижимости нестационарной линейной системы с комбинированными ограничениями, опирающийся на дискретизацию исходной системы и процедуры конического программирования.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит в основном теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для

---

[35]Huseyin N., Huseyin A. Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affine integral equation // Appl. Math. Comput. 2013. Vol. 219. P. 8416–8424.

[36]Huseyin N., Huseyin A., Guseinov K.G. On the properties of the set of trajectories of nonlinear control systems with integral constraints on the control functions // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Vol. 28, no. 3. P. 274–284.

[37]Ченцов, А. Г. Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления I,II // Изв. вузов. Матем. 1995. № 2,3. С. 60–71, 62–73.

[38]Куржанский А.Б., Пищулина И.Я. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях I,II,III // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 8, 9, 12. С. 1434–1446, 1568–1579, 2149–2158.

[39]Ананьев Б.И. О коррекции движения при коммуникационных ограничениях // Автомат. и телемех. 2010. № 3. С. 3–15.

[40]Gusev M.I. On Optimal Control Problem for the Bundle of Trajectories of Uncertain System // Lecture Notes in Computer Sciences. 2010. Vol. 5910. P. 286–293.

дальнейшего исследования проблем достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях. Разработанные алгоритмы и программы для ЭВМ могут найти применение при решении задач синтеза управлений.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность основных результатов проведенных исследований подтверждается строгостью математических утверждений и их доказательств и публикацией работ в открытой печати в рецензируемых изданиях и апробацией результатов диссертации. Результаты диссертации обсуждались на семинарах отдела оптимального управления ИММ УрО РАН, а также докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях: XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии — 2017» (Иркутск, 2017); XI Международной научной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление — 2017» (Казань, 2017); The 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (Toulouse, France, 2017); 10th and 11th Conferences of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (Albena, Bulgaria, 2018, 2019); Международной научной конференции "КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – VIII. Общие проблемы управления и их приложения" (Тамбов, 2018); 48–54-й международных молодежных школах-конференциях "Современные проблемы математики и ее приложений" (Екатеринбург, 2017–2023); XIII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2019); Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения – XXX" (Воронеж, 2019); III Международном семинаре "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона - Якоби" (Екатеринбург, 2020); Всероссийской конференции с международным участием "Теория управления и математическое моделирование" CTMM2020 (Ижевск, 2020); Конференции международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021); XVI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Москва, 2022); Сателлитной конференции Международного конгресса математиков (ICM 2022) "Теория оптимального управления и приложения (OCTA 2022)" (Екатеринбург, 2022).

Публикации. Основной материал диссертации опубликован в 19 научных работах [1–19]. Из них 11 — статьи в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий списка ВАК или в приравненных к ним изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования (Web of Science и/или Scopus) [1–11], и 2 — свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [12, 13]. Остальные публикации [14–19] — статьи в сборниках материалов международных и всероссийских конференций. Кроме приведенных работ результаты диссертации опубликованы в 9 тезисах конференций (см. диссертацию).

Личный вклад автора. Все основные результаты кандидатской диссертации получены автором самостоятельно. В работах [1, 3–5, 7, 14, 15], выполненных в соавторстве с научным руководителем, М.И. Гусеву принадлежат постановки задач и общие схемы их исследования, а соискателю И.В. Зыкову точные формулировки и доказательства утверждений, а также разработка численных алгоритмов. В [13] И.В. Зыкову принадлежит идея и общая схема алгоритма, а соавтором И.О. Осиповым предложен и программно реализован способ отбора управлений.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 142 страницы, включая 12 рисунков. Список литературы содержит 141 наименование.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность работы, приведен обзор литературы, относящейся к рассматриваемым в диссертации вопросам, определяются цели исследования, раскрывается научная новизна полученных результатов и формулируются основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе раздел 1.1** содержит необходимые определения и вспомогательные сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и оптимального управления: теоремы существования, единственности и продолжимости решений; определения верхнего и нижнего решения дифференциального уравнения и формулировка принципа сравнения для дифференциальных неравенств.

Для нелинейных систем с геометрическими ограничениями в **разделе 1.2** приводится формулировка принципа максимума Понтрягина для управлений, ведущих на границу множества достижимости.

Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t_0 \leq t \leq t_1,\ x(t_0) \in X^0, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление, $X^0 \subset \mathbb{R}^n$ — заданное множество. Допустимыми управлениями являются измеримые функции $u(t)$ из некоторого семейства U на конечном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$.

Определение 3. *Множество достижимости $G(t_1)$ управляемой системы* (1) *состоит из концов всех траекторий $x(t_1) \in \mathbb{R}^n$, соответствующих управлениям $u(\cdot) \in U$ и начальным условиям $x(t_0) \in X^0$.*

Пусть $X^0 = \{x^0\}$, $U = \{u(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty : u(t) \in \Omega$ при п.в. $t \in [t_0, t_1]\}$, где Ω заданное множество в $\mathbb{R}^n$. Ограничение на управление такого вида будем называть *геометрическим.*

Для систем с геометрическими ограничениями известен следующий результат.

Теорема 6.[41] *Рассмотрим систему* (1)*, где $f(x, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ — непрерывные функции, определенные в $\mathbb{R}^{n+r}$. Пусть некоторому управлению $\bar{u}(t) \in U$ соответствует решение $\bar{x}(t)$ с концом $\bar{x}(t_1)$, лежащим на границе множества достижимости $G(t_1)$. Тогда $\bar{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина.*

В **разделе 1.3** приведено исследование некоторых свойств аффинных по управлению нелинейных систем, и топологических свойств пучков траекторий и множеств достижимости данных систем.

На всем протяжении работы используется следующий частный вид нелинейных управляемых систем

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) = x^0 \in X^0, \tag{2}$$

где $t_0 \leq t \leq t_1$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $f_1 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times r}$ — непрерывные отображения, X^0 — заданное подмножество $\mathbb{R}^n$. Такие системы называются аффинными (линейными) по управлению. Далее будем предполагать, что функции f_1 и f_2 непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x, а также удовлетворяют, соответственно, условиям подлинейного роста и ограниченности:

$$\|f_1(t, x)\| \leq l_1(t)(1 + \|x\|), \tag{3}$$

$$\|f_2(t, x)\|_{n \times r} \leq l_2(t), \tag{4}$$

где $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1,\ l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2$. Под (траекторией) системы (2), отвечающей управлению $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, для которой равенство (2) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Для любых $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ существует единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x^0$, которое

[41] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

будем обозначать как $x(t, x^0, u(\cdot))$. Пусть

$$U = \{u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : \ J(u(\cdot)) \le \mu^2, \ \mu > 0\}, \tag{5}$$

где $J(u(\cdot)) := \|u(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2} := \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 dt$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Утверждение 2. *Множество траекторий системы (2),(5) компактно в пространстве $C = C[t_0, t_1]$, если начальное множество X^0 компактно.*

Пусть заданы k интегральных функционалов $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ следующего вида

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left[Q_i(t, x(t)) + u^\top(t) R_i(t, x(t)) u(t)\right] dt, \ i = 1, ..., k, \tag{6}$$

а ограничения на управление и траекторию заданы системой k интегральных неравенств

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \le \mu_i, \quad i = 1, ..., k; \quad x(t_0) = x^0 \in X^0. \tag{7}$$

Здесь $x(t)$ — решение системы (2), отвечающее управлению $u(t)$ и начальному вектору $x^0 \in X^0$, функции $Q_i(t, x)$ и симметричные матрицы $R_i(t, x)$ предполагаются непрерывными на $[t_0, t_1] \times \ \mathbb{R}^n$.

Предположение 1. *Существует $\alpha > 0$ такое, что $Q_i(t, x) \ge 0$, $u^\top R_i(t, x) u \ge \alpha \|u\|^2$ для всех $(t, x, u) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, $i = 1, \ldots, k$.*

Лемма 5. *Пусть функции $f_1(t, x), f_2(t, x)$ удовлетворяют условиям* (3) *и* (4)*, множество X^0 ограничено и существует i_0, $1 \le i_0 \le k$, для которого выполнено предположение* 1*. Тогда множество траекторий системы* (2)*, удовлетворяющих ограничению* (7)*, относительно компактно в пространстве $\mathbb{C} = \ \mathbb{C}[t_0, t_1]$.*

Определение 5. *Пусть $u(t)$ — управление из $\mathbb{L}_2$, $x(t)$ — отвечающая этому управлению траектория. Систему $\delta \dot{x} = A(t)\delta x + B(t)\delta u$, где $A(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x(t)) \cdot u(t)]$, $B(t) = f_2(t, x(t))$ назовем линеаризацией системы* (2) *вдоль пары $(x(t), u(t))$.*

Зададим последовательность управлений $u^p(\cdot)$ и начальных векторов x^0_p, которая отображается в последовательность траекторий $x^p(\cdot)$. Линеаризованная вдоль $(x^p(\cdot), u^p(\cdot))$ система задается парой матриц $(A_p(t), B_p(t))$, где $A_p(t) = \ \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x^p(t)) + \frac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x^p(t)) \cdot u^p(t)]$, $B_p(t) = f_2(t, x^p(t))$.

Лемма 7. *Пусть $u^p(\cdot) \to u(\cdot)$ в $\mathbb{L}_2$, $x^0_p \to x^0$, $x(t, x^0_p, u^p(\cdot)) = x_p(t)$, $x(t, x^0, u(\cdot)) = x(t)$ и линеаризованная вдоль $(x(\cdot), u(\cdot))$ система* (2) *вполне управляема. Тогда для всех достаточно больших p линеаризованная вдоль $(x^p(\cdot), u^p(\cdot))$ система также будет вполне управляемой.*

Во **второй главе** рассматриваются управляемые системы вида (2), нелинейные по фазовым переменным и линейные по управлению. Ограничения на управление (либо управление и траекторию) заданы интегральным неравенством или системой неравенств. Изучаются необходимые условия оптимальности для описания граничных точек множеств достижимости данных систем. В **разделе 2.1** получено описание граничных точек множеств достижимости управляемой системы (2) ($X^0 = \{x^0\}$) для множества управлений U вида (5) (теорема 8). В основе доказательства теоремы 8 лежит теорема Люстерника[42]: *если отображение F банахова пространства X в банахово пространство Y непрерывно дифференцируемо в точке $\hat{u}$ и удовлетворяет условию $F'(\hat{u})X = Y$, то существует константа $a > 0$ и окрестность U^0 точки $\hat{u}$ такие, что для любого шара $B_\rho(u) \subset U^0$ имеет место включение $F(B_\rho(u)) \supset B_{a\rho}(F(u))$.* Производная $F'(\hat{u})$ — линейный непрерывный оператор из X в Y. Если $F'(\hat{u})X = Y$, т.е. оператор $F'(\hat{u}) : X \to Y$ сюръективен (является оператором на Y), то говорят, что отображение $F(\hat{u})$ удовлетворяет условию Люстерника в точке $\hat{u}$ (является регулярным в точке $\hat{u}$).

Далее определим отображение $F : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^n$ следующим образом $Fu(\cdot) = x(t_1)$, где

[42]Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. 35:6(216). С. 11-46

$x(t)$ – траектория системы (2), отвечающая $u(\cdot)$. Справедлива

Лемма 9. *Пусть функции $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют условиям* (3) *и* (4). *Тогда оператор F непрерывно дифференцируем по Фреше для $\forall u(\cdot) \in \mathbb{L}_2[t_0,t_1]$, его производная Фреше $F' : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^n$ определена равенством $F'(u(\cdot))\delta u(\cdot) = \delta x(t_1)$. Здесь $\delta x(t)$ – решение линеаризованной вдоль $(x(t),u(t))$ системы (2), отвечающее управлению $\delta u(t)$ и нулевому начальному условию.*

Для данного отображения $F(u)$ условие Люстерника имеет вид $F'(\hat{u})\mathbb{L}_2 = \mathbb{R}^n$, что эквивалентно полной управляемости линеаризованной системы. Из теоремы Люстерника и леммы 9 следует

Теорема 8. *Пусть $u(\cdot) \in U$ управление, переводящее систему из $x(t_0) = x^0$ в $x(t_1) = x^1$, где $x(t)$ — соответствующая этому управлению траектория, и линеаризованная вдоль $(x(t),u(t))$ система* (2) *вполне управляема. Для того, чтобы точка x^1 принадлежала границе множества достижимости $G(t_1)$ необходимо, чтобы управление $u(\cdot)$ доставляло локальный минимум функционалу $J(u(\cdot))$ в задаче*

$$J(u(\cdot)) \to \min,\ u(\cdot) \in \mathbb{L}_2,\ x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = x^1 \tag{8}$$

и $J(u(\cdot)) = \mu^2$.

Из теоремы 8 следует, что управление $u(\cdot)$, переводящее траекторию системы на границу множества достижимости, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Форма принципа максимума, в отличие от аналогичного результата для случая геометрических ограничений на управление, здесь отвечает задаче минимизации интегрального функционала. Функция Понтрягина для данной задачи (8) имеет вид $H(p,t,x,u) = -p_0 u^\top u + p^\top(f_1(t,x) + f_2(t,x)u)$, $p_0 \geq 0$. Локально оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума[43]: существуют $(p_0, p(\cdot)) \neq 0$ такие, что

$$H(p(t),t,x(t),u(t)) = \max\nolimits_{v\in\mathbb{R}^r} H(p(t),t,x(t),v),$$
$$\dot{p}(t) = -\tfrac{\partial f}{\partial x} H(p(t),x(t),u(t)) = -A^\top(t)p(t),$$

где $A(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t)) \cdot u(t)]$. Тогда из принципа максимума получим $u(t) = f_2^\top(t,x(t))p(t)$. Замыкая исходную систему данным управлением, имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(t,x(t)) + f_2(t,x(t))f_2^\top(t,x(t))p(t),\ x(t_0) = x^0 \\ \dot{p}(t) &= -\left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x}^\top(t,x(t)) + D^\top(t,x(t),f_2^\top(t,x(t))p(t))\right)p(t), \end{aligned}$$

где обозначено $D(t,x,v) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2(t,x)v)$.

В **разделе 2.2** исследуется задача описания границы множества достижимости управляемой системы (2) с совместными интегральными ограничениями на управление и траекторию вида (6),(7). В отличие от раздела 2.1 рассматривается система, у которой начальное состояние не фиксировано ($x(t_0) \in X^0 \subset \mathbb{R}^n$), а ограничения заданы системой интегральных неравенств (7). Такие ограничения мы далее называем изопериметрическими. Пару функций $(x(\cdot),u(\cdot))$ назовем *управляемым процессом*, если $(x(\cdot),u(\cdot))$ удовлетворяют уравнению (2).

Определение 8. *Множеством достижимости $G(t_1)$ системы* (2) *будем называть совокупность всех концов траекторий $x(t_1)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих управляемым процессам $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющим условиям* (7).

Всюду далее считаем, что $G(t_1)$ непусто. Обозначим через $J(x(\cdot),u(\cdot)) = (J_1(x(\cdot),u(\cdot)),...,J_k(x(\cdot),u(\cdot)))$ векторный функционал, компонентами которого являются функции $J_i(x(\cdot),u(\cdot))$. Рассмотрим следующую многокритериальную задачу оптимального управления для системы (2)

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) \to \min, \quad x(t_0) \in X^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad u(\cdot) \in \mathbb{L}_2, \tag{9}$$

[43] Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006. 144 с.

где x^1 — заданный вектор из $\mathbb{R}^n$. Управляемый процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ назовем допустимым в задаче (9), если $x(t_0) \in X^0,\ x(t_1) = x^1$. Управляемый процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющий ограничениям (7), будем называть граничным, если $x(t_1) \in \partial G(t_1)$. Доказательство следующей теоремы также опирается на теорему Люстерника и лемму 9.

Теорема 9. *Пусть управляемый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ является граничным, и пусть линеаризация системы* (2) *вдоль $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ вполне управляема. Тогда $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ является локально слабо эффективным решением*[44] *в задаче* (9)*, где $x^1 = \hat{x}(t_1)$ и $J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \mu_i$ хотя бы для одного $i,\ 1 \le i \le k$.*

Рассмотрим функцию Понтрягина следующего вида $H(t,p,\nu,x,u) = p^\top(f_1(t,x) + f_2(t,x)u) - \sum_{i=1}^k \nu_i \left(Q_i(t,x) + u^\top R_i(t,x)u\right)$.

Теорема 10. *Пусть допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ есть локально слабо эффективное решение в задаче* (9)*. Тогда существует вектор $\nu = (\nu_1, ..., \nu_k) \neq 0$ с неотрицательными координатами и решение $p(t)$ дифференциального уравнения $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t, p(t), \nu, \hat{x}(t), \hat{u}(t)\right)$ такие, что $H(t, p(t), \nu, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in \mathbb{R}^r} H(t, p(t), \nu, \hat{x}(t), u)$ и, следовательно, $\hat{u}(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^k \nu_i R_i(t, \hat{x}(t))\right)^{-1} f_2\left(t, \hat{x}(t)\right) p(t)$.*

Переход от x^0 к X^0 приводит к появлению дополнительных условий трансверсальности. Предположим далее, что X^0 имеет вид $X^0 = \{x : g_j(x) \le 0,\ j = 1, ..., m\},\ m \ge 1$, где $g_j(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Теорема 11. *Пусть допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ есть локальное решение задачи* (9) *и линеаризованная вдоль $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ система вполне управляема. Тогда существуют векторы $\nu \ge 0,\ \nu \neq 0,\ \gamma \ge 0$ и вектор-функция $p(t)$ такие, что выполнены условия из предыдущей теоремы* 10 *и $p(t_0) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \nabla g_j(\hat{x}(t_0)),\ \gamma_j g_j(\hat{x}(t_0)) = 0,\ j = 1, ..., m$.*

Пусть управляемая система линейна

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{10}$$

вполне управляема на $[t_0, t_1]$, функционалы $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ имеют вид $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left[x^\top(t) Q_i(t) x(t) + u(t)^\top R_i(t) u(t)\right] dt$, где $Q_i(t), R_i(t)$ — непрерывные симметричные матрицы; $Q_i(t)$ неотрицательно определена, $R_i(t)$ положительно определена для всех $t \in [t_0, t_1]$; множество X^0 — выпукло.

Теорема 12. *Пусть пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ является граничным процессом. Тогда $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ есть Парето оптимальное решение*[44] *задачи* (9)*, где $x^1 = \hat{x}(t_1)$.*

Задачу нахождения Парето оптимального решения можно заменить задачей минимизации линейной свертки функционалов с коэффициентами $w_i \ge 0,\ \sum w_i = 1$. Обозначим $Q_w(t) = \sum_{i=1}^k w_i Q_i(t),\ R_w(t) = \sum_{i=1}^k w_i R_i(t)$, матрица $Q_w(t)$ неотрицательно определена, $R_w(t)$ положительно определена для любого $t \in\ [t_0, t_1]$. Пусть для простоты $X^0 = \{x^0\}$. Из принципа максимума, учитывая полную управляемость системы (10), следует, что существует решение $p(t)$ сопряженной системы такое, что $\hat{u}(t) = \frac{1}{2} R_w^{-1}(t) B^\top(t) p(t)$. Для пары $(x(t), p(t))$ ($x(t)$ — отвечающая $\hat{u}$ траектория) получим линейную систему дифференциальных уравнений $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2} B(t) R_w^{-1}(t) B^\top(t) \\ 2Q_w(t) & -A^\top(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$, $x(t_0) = x^0,\quad p(t_0) = p^0$. Ограничения $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \le \mu_i$ можно заменить системой квадратичных неравенств ${x^0}^\top S_w^{1i} x^0 + {x^0}^\top S_w^{2i} p^0 + {p^0}^\top S_w^{3i} p^0 \le \mu_i,\ i = 1, ..., k$, относительно p^0. Здесь $S_w^{1i},\ S_w^{2i},\ S_w^{3i}$ — $n \times n$ матрицы, S_w^{1i} неотрицательно определены, а S_w^{3i} положительно определены. Хотя бы одно из неравенств должно выполняться как равенство. Все граничные точки области достижимости содержатся среди решений управляемой системы, порождаемых решениями p^0. Более подробно метод решения квадратичной системы

[44] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.

неравенств разбирается для случая двух ограничений в четвертой главе.

В **разделе 2.3** изучаются граничные точки проекции множества достижимости на заданное линейное подпространство. Рассмотрим систему (2) с одним интегральным функционалом $J(x(\cdot),u(\cdot))$, который определен равенством

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(Q(t,x(t)) + u^\top(t)R(t)u(t)\big)\,dt, \tag{11}$$

где $Q(t,x)$ неотрицательная непрерывная функция, а $R(t)$ положительно определенная матрица, непрерывно зависящая от t. Через U обозначим непустое множество тех $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, для которых выполняется совместное интегральное ограничение на управление и траекторию $J(x(\cdot),u(\cdot)) \le \mu^2$, где $\mu > 0$ — заданное число.

Определим линейное отображение $P_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ($k \le n$) следующим образом $y = P_k x$, где матрица $P_k = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & O_{k\times(n-k)} \end{bmatrix}$. Таким образом, y состоит из первых k координат вектора x. Матрицу P_k, которая осуществляет переход от $x \in \mathbb{R}^n$ к $y \in \mathbb{R}^k$, назовем *матрицей проектирования* на подпространство первых k координат.

Определение 11. *Проекцией множества достижимости $G_{1k}(t_1)$ системы (2) на подпространство первых k координат в момент времени t_1 будем называть совокупность векторов y^1 в $\mathbb{R}^k$ вида $y^1 = P_k x(t_1)$, где $x(t)$ — траектории системы (2), отвечающие управлениям из U. Если $G(t_1)$ множество достижимости, то $G_{1k}(t_1) = P_k G(t_1)$.*

Определим отображения $F : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^n$ и $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ следующим образом $F(u(\cdot)) = x(t_1)$, $Sx(t_1) = P_k x(t_1)$, где $x(t)$ — траектория системы (2) отвечающая $u(\cdot)$. Тогда их композиция $H : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^k$ есть не что иное, как $H(u(\cdot)) = P_k F(u(\cdot)) = P_k x(t_1)$.

Лемма 11. *Пусть функции $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют условиям (3) и (4). Тогда функция H непрерывно дифференцируема по Фреше для $\forall u(\cdot) \in \mathbb{L}_2[t_0,t_1]$, ее производная Фреше $H' : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^k$ определена равенством $H'(u(\cdot))\delta u(\cdot) = P_k \delta x(t_1)$. Здесь $\delta x(t)$ — решение линеаризованной вдоль $(x(t),u(t))$ системы (2), отвечающее управлению $\delta u(t)$ и нулевому начальному условию.*

Для данного отображения $H(u)$ условие Люстерника имеет вид $H'(\hat{u})\mathbb{L}_2 = \mathbb{R}^k$, что эквивалентно полной управляемости линеаризованной системы по первым k координатам. Из теоремы Люстерника и леммы 11 следует

Теорема 13. *Пусть $u(\cdot) \in U$ управление, переводящее систему из $x(t_0) = x^0$ в $x(t_1)$ такую, что $P_k x(t_1) = y^1$, где $x(t)$ — соответствующая этому управлению траектория, и линеаризованная вдоль $(x(t),u(t))$ система (2) управляема по $y = P_k x$ на $[t_0,t_1]$. Для того, чтобы точка y^1 принадлежала границе множества достижимости $G_{1k}(t_1)$ необходимо, чтобы управление $u(\cdot)$ доставляло локальный минимум функционалу $J(u(\cdot))$ при ограничениях $x(t_0) = x^0$, $P_k x(t_1) = y^1$ в задаче*

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) \to \min,\ u(\cdot) \in \mathbb{L}_2,\ x(t_0) = x^0,\ P_k x(t_1) = y^1 \tag{12}$$

и $J(u(\cdot)) = \mu^2$.

Выпишем необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для задачи (12), предполагая, что $Q(t,x)$ непрерывно дифференцируема. Функция Понтрягина имеет вид $H(p,t,x,u) = -p_0\big(Q(t,x) + u^\top R(t)u\big) + p^\top(f_1(t,x) + f_2(t,x)u)$, $p_0 \ge 0$. Локально оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума: существуют $(p_0, p(\cdot)) \ne 0$ такие, что

$$H(p(t),t,x(t),u(t)) = \max\nolimits_{v\in\mathbb{R}^r} H(p(t),t,x(t),v).$$
$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial}{\partial x}H(p(t),t,x(t),u(t)) = -A^\top(t)p(t) + p_0\nabla^\top Q(t,x(t)),$$
$$p_j(t_1) = 0,\ j = k+1,...,n.$$

Из принципа максимума следует, что управление ведущее на границу имеет вид

$u(t) = R^{-1}(t) f_2^\top(t, x(t)) p(t)$. Замыкая исходную систему данным управлением, имеем

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t)) v(t),\ x(t_0) = x^0, \\ \dot{p}(t) = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}^\top(t, x(t)) + D^\top(t, x(t), v)\right) p(t) + \frac{1}{2} \nabla^\top Q(t, x(t)), \\ p_j(t_1) = 0,\ j = k+1, ..., n.\end{gathered} \tag{13}$$

где обозначено $D(t, x, v) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2(t, x) v)$, $v = R^{-1}(t) f_2^\top(t, x(t)) p(t)$.

Третья глава посвящена внешним оценкам множеств достижимости управляемых систем. В случае систем с геометрическими ограничениями на управляющее воздействие хорошо известны методы, основанные на оценках решений дифференциальных уравнений и неравенств типа Гамильтона-Якоби[19,22,23,24,25]. В диссертации показано, что метод получения внешних оценок, предложенный для систем с геометрическими ограничениями в работе М.С. Никольского[28], может быть адаптирован для систем с интегральными ограничениями.

В **разделе 3.1** предлагается способ построения внешних оценок для нелинейных управляемых систем с интегральным квадратичным ограничением на управление с помощью множества уровня функций Ляпунова, зависящих только от вектора состояния системы. Рассмотрим автономную линейную по управлению систему вида

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2(x(t)) u(t), \quad 0 \le t \le t_1, \quad x(0) = x^0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление; $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times r}$ — непрерывные отображения. Интегральное ограничение на управление имеет вид $u(\cdot) \in U$, где $U = \left\{ u(\cdot) \in \mathbb{L}_p : \int_0^{t_1} \|u(t)\|^p \, dt \le \mu^p \right\}$, $p > 1$, $\mu > 0$. Пусть известно множество $D \subset \mathbb{R}^n$, которое содержит точки всех допустимых траекторий, удовлетворяющих заданному начальному условию и интегральному ограничению на управление. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $v(x)$ на D такую, что $v(x^0) = 0$.

Предположение 3. *Пусть на множестве D выполняются неравенства $\nabla v(x) f_1(x) \le -\alpha v(x)$ и $\|\nabla v(x) f_2(x)\|_r{}^q \le \beta^q v(x)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Здесь $\alpha \ge 0$ и $\beta > 0$ заданные константы, через $\nabla v(x)$ обозначен градиент функции v.*

В следующей теореме получены эволюционные уравнения, описывающие динамику внешних оценок. Доказательство базируется на интегральных оценках и принципе сравнения[45] для дифференциальных неравенств.

Теорема 15. *Пусть предположение 3 выполнено.*
Тогда $G(t) \subset \{x \in D : v(x) \le \ \psi(t)\}$, $t \in [0, t_1]$, где $\psi(t) = p\left(\frac{\mu\beta}{p}\right)^p t^{p-1}$ в случае $\alpha = 0$. В случае $\alpha > 0$ можно положить $\psi(t) = \alpha\left(\frac{\mu\beta}{\alpha}\right)^p \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{p} t\right)\right)^{p-1}$, либо (что дает более точную оценку) $\psi(t) = \begin{cases} \frac{\mu^2\beta^2}{\alpha}\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t\right)\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t\right) & \text{если } t < \frac{p \ln p}{\alpha}, \\ \frac{\alpha}{p-1}\left(\frac{\mu\beta}{\alpha}\right)^p \left(\frac{p-1}{p}\right)^p & \text{если } t \ge \frac{p \ln p}{\alpha} \end{cases}$. Здесь $G(t)$ — множество достижимости системы в момент t.

Приведены результаты численного моделирования для осциллятора Дуффинга, математического маятника и модели Лотки-Волтерра. Заметим, что даже если применять выше приведенную схему к линейным управляемым системам и в качестве функций Ляпунова брать квадратичные функции, то полученные оценки, имеющие вид эллипсоидов, получаются довольно грубыми. Более того, требуются дополнительные предположения относительно коэффициентов системы — например, в стационарном случае матрица должна быть гурвицевой. Использование нескольких функций позволяет получить более точную оценку в виде пересечения соответсвующих множеств.

В **разделе 3.2** изучается возможность получения более точных оценок за счет

[45]Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. Киев: Наук. думка, 1989. 272 с.

использования времени в числе аргументов функции Ляпунова. В линейном случае последние могут совпадать с множеством достижимости. Рассмотрим линейную систему (10) с фиксированным начальным состоянием $x(t_0) = x^0$. Ограничение на управление определено интегральным квадратичным неравенством $u(\cdot) \in U$, где U определено в (5). Пусть $X(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, где $\Phi(t)$ матрица Коши, удовлетворяющая уравнению $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = I$. Решение (10) имеет вид $x(t) = \hat{x}(t) + \int_{t_0}^{t} X(t,s)B(s)u(s)\,ds$, где $\hat{x}(t) = X(t,t_0)x^0$. Симметрическая матрица $W(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,s)B(s)B^\top(s)X^\top(t,s)\,ds$ удовлетворяет следующему матричному дифференциальному уравнению $\dot{W}(t) = A(t)W(t) + W(t)A^\top(t) + B(t)B^\top(t),\ W(t_0) = 0$. Функцию $v : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ будем искать в виде $v(t, x-\hat{x}) = (x-\hat{x})^\top Q(t)(x-\hat{x}) \geq 0, \quad Q^\top = Q$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение Бернулли для матрицы $Q(t)$:

$$\dot{Q}(t) + Q(t)A(t) + A^\top(t)Q(t) = -Q(t)B(t)B^\top(t)Q(t). \tag{14}$$

Теорема 16. *Пусть существует положительно определенное на* $[t_0, t_1]$ *решение уравнения* (14). *Тогда для множества достижимости системы* (10) *справедлива оценка*

$$G(t_1) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : v(t_1, x) = (x - \hat{x}(t_1))^\top Q(t_1)(x - \hat{x}(t_1)) \leq \mu^2\}, \quad t_1 > t_0. \tag{15}$$

Матрица $W^{-1}(t)$ является решением уравнения Бернулли (14). Если в качестве $Q(t)$ взять $W^{-1}(t)$, то оценка (15) совпадает с множеством достижимости. Однако, заметим, что $W(t_0) = 0$ и, следовательно, $W^{-1}(t)$ не определена при $t = t_0$. Кроме того, обращение $W(t)$ возможно, если система вполне управляема на любом отрезке $[t_0, t]$. Последнее условие выполняется по умолчанию для стационарных систем в предположении полной управляемости.

Теорема 17. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой положительно определенной матрицы* $\overline{Q}$, *матрица* $Q_\varepsilon(t)$, *определяемая равенством*

$$Q_\varepsilon(t) = [W(t) + \varepsilon N(t)\overline{Q}^{-1}N^\top(t)]^{-1}, \quad \dot{N}(t) = A(t)N(t),\ N(t_0) = I, \quad t \geq t_0 :$$

удовлетворяет уравнению Бернулли (14), *где* $Q_\varepsilon(t_0) = \frac{1}{\varepsilon}\overline{Q}$; *выполняется включение* $G(t) \subset G_\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - \hat{x}(t))^\top Q_\varepsilon(t)(x - \hat{x}(t)) \leq \mu^2\}, \quad \hat{x}(t) = N(t)x^0$; *существуют* $k_1,\ k_2 > 0$ *такие, что*

$$h(G_\varepsilon(t), G(t)) \leq \phi(\varepsilon) = \begin{cases} k_1\varepsilon, & \text{если система вполне управляема,} \\ k_2\sqrt{\varepsilon}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При надлежащем выборе начальных значений можно получить сколь угодно точную аппроксимацию (в метрике Хаусдорфа) множества достижимости.

В **четвертой главе** исследуются некоторые численные методы построения множеств достижимости для систем с интегральными ограничениями. В начале обсуждаются алгоритмы нахождения границы множеств достижимости на основе соотношений принципа максимума, связанные с решением вспомогательных экстремальных задач при вычислении границы множества достижимости для аффинной по управлению системы с интегральными ограничениями на управляющие параметры и траекторию системы. Применительно к линейной системе подробно исследован случай двух квадратичных изопериметрических ограничений. Далее рассматривается аналог метода Монте-Карло для аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями, который использует разложение управления по ортонормированным полиномам со случайным выбором коэффициентов разложения. В последнем разделе главы обсуждается алгоритм построения границы множеств достижимости линейных управляемых систем с комбинированными ограничениями (управление стеснено одновременно геометрическим и несколькими интегральными ограничениями), основанный на переходе к дискретной системе и решении набора задач конического программирования для вычисления опорных функций множеств.

В **разделе 4.1** рассматриваются алгоритмы, связанные с решением вспомогательных экстремальных задач при вычислении границы проекции множества достижимости на плоскость для аффинной по управлению системы (2) с интегральным ограничением на управление и траекторию $J(x(\cdot),u(\cdot)) \le \mu^2$, где $J(\cdot,\cdot)$ определен в (11), а $X^0 = \{x^0\}$.

Описаны два возможных подхода к построению границы множества достижимости. Выбирая $p(t_0) \neq 0$ и интегрируя систему уравнений принципа максимума Понтрягина (13) (учитывая условия трансверсальности), мы получим управление и траекторию, удовлетворяющие принципу максимума. Перебирая $p(t_0)$ из регулярной сетки, аппроксимирующей область $\{p(t_0) \in \mathbb{R}^n : \ |p_i(t_0)| \le c_i, \ i = 1,2,...,n\}$, интегрируя систему (13) и отбирая те траектории, для которых $|J(u(\cdot)) - \mu^2|$ не превосходит малого $\varepsilon_1 > 0$, мы получим аппроксимацию части границы множества достижимости, образованную точками $y^1 = P_k x(t_1)$, где P_k — матрица проектирования. Помимо этого, при отсеивании траекторий, нужно проверять выполнение условий трансверсальности на правом конце: $|p_j(t_1)| < \varepsilon_2, \ j = k{+}1,...,n$ для малого $\varepsilon_2 > 0$. Для достаточно больших c_i и малых ε_1 и ε_2 аппроксимироваться будет вся граница, если на каждой из возможных траекторий выполняется условие полной управляемости линеаризованной системы. Данный алгоритм при построении множеств достижимости требует достаточно больших вычислительных затрат и априорной оценки области начальных данных для $p(t_0)$.

Приведен также другой способ, обеспечивающий более экономную схему вычислений. Дадим его описание для двумерного случая и $P_2 = I$. Будем выбирать направления на единичной сфере: $\{p^* \in \mathbb{R}^2 : \ p^* = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}^\top, \ \alpha \in [0;2\pi]\}$. На каждом луче $\{p \in \mathbb{R}^2 : \ p = kp^*, \ k > 0\}$ ищется значение k, для которого достигается минимум $\left(J(u(\cdot)) - \mu^2\right)^2$, на полуинтервале $[0;+\infty)$. Для этой цели можно использовать стандартную процедуру одномерной оптимизации. Найденное значение $\bar{k}$ определяет вектор $p = \bar{k}\bar{p^*}$, выбирая который в качестве начального условия для системы принципа максимума, мы получим точку $x(t_1)$, лежащую на границе множества достижимости. В трехмерном случае рассуждения похожи, если использовать, например, сферические координаты. В диссертации проведено численное моделирование на примерах уницикла (машины Дуббинса) и осциллятора Дуффинга.

В **разделе 4.2** рассматриваются линейные системы с изопериметрическими квадратичными ограничениями. Известно, что в случае одного выпуклого квадратичного изопериметрического ограничения множество достижимости является эллипсоидом, для которого известно конструктивное описание[4]. В случае нескольких ограничений ситуация значительно усложняется. В диссертации подробно исследован случай двух изопериметрических ограничений, получено описание множества достижимости, которое базируется на использовании теоремы Куна-Таккера для задачи выпуклого программирования и принципа максимума Понтрягина. Полученное описание положено в основу алгоритма построения множеств достижимости.

Рассмотрим линейную управляемую систему (10) с фиксированным начальным состоянием $x(t_0) = x^0$. Систему будем считать вполне управляемой на $[t_0, t_1]$. Предполагается, что ограничения на управление и траекторию имеют вид

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[x^\top(t) Q_i(t) x(t) + u(t)^\top R_i(t) u(t)\right] dt \le \mu, \quad i = 1,2.$$

Здесь $Q_i(t)$, $R_i(t)$ — непрерывные симметричные матрицы; $Q_i(t)$ неотрицательно определена, а $R_i(t)$ положительно определена для всех $t \in [t_0, t_1]$. Предполагаем, что внутренность множества достижимости $G(t_1)$ непуста. Обозначим через $G_i(t_1), \ i = 1,2$ множество достижимости для системы с одним интегральным ограничением $J_i(u(\cdot)) \le \ \mu$.

Рассмотрим линейные комбинации матриц $(0 \le \lambda \le 1)$ $Q_\lambda(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i Q_i(t), \ R_\lambda(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i R_i(t), \ \lambda_1 = \lambda, \ \lambda_2 = 1 - \lambda$, где $Q_\lambda(t)$ неотрицательно определена, $R_\lambda(t)$ положительно определена для любого $t \in [t_0, t_1]$. Пусть $\hat{u}$ — управление, ведущее на границу множества достижимости $G(t_1)$. Записывая принцип максимума для линейной свертки критериев в задаче (9) получаем, что существует решение $p(t)$ сопряженной системы такое, что $\hat{u}(t) = \frac{1}{2}R_\lambda^{-1}(t)B^\top(t)p(t)$. Для пары $(x(t), p(t))$ ($x(t)$ — траектория, соответствующая $\hat{u}(t)$) получаем линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \dfrac{1}{2}B(t){R_\lambda}^{-1}(t)B^\top(t) \\ 2Q_\lambda(t) & -A^\top(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$x(t_0) = x^0,\ p(t_0) = p^0$. Определим функции

$$\psi_i^\lambda(p^0) := {x^0}^\top S_{1\lambda}^i x^0 + {x^0}^\top S_{2\lambda}^i p^0 + {p^0}^\top S_{3\lambda}^i p^0 - \mu_i,\ i = 1, 2$$

где $S_{3\lambda}^i$ $(i = 1, 2)$ положительно определенная матрица и

$$S_{j\lambda}^i = a_j \int_{t_0}^{t_1} \left[Y_{1b_j}^i(t)^\top Q_{f_\lambda}(t) Y_{1c_j}^i(t) + \frac{1}{4} Y_{2b_j}^i(t)^\top B(t) {R_{f_\lambda}}^{-1}(t)^\top B(t)^\top Y_{2c_j}^i(t) \right] dt,$$

где $j = 1, 2, 3$; $f_\lambda = \lambda + 2\mathrm{sign}([1-\lambda])$, $\lambda \in [0, 1]$; $a_j = -j^2 + 4j - 2$, $b_j = \frac{1}{2}j^2 - \frac{3}{2}j + 2$, $c_j = -\frac{1}{2}j^2 + \frac{5}{2}j - 1$. Здесь $[1-\lambda]$ обозначает целую часть числа $1-\lambda$. Для вычисления границы $G(t_1)$ необходимо решить систему двух квадратных уравнений $(0 < \lambda < 1)$, возникающую из условий дополняющей нежесткости $\psi_i^\lambda(p^0) = 0$, $i = 1, 2$ или систему из уравнения и неравенства $\psi_1^\lambda(p^0) = 0$, $\psi_2^\lambda(p^0) \le 0$ в случае $\lambda = 1$ и $\psi_1^\lambda(p^0) \le 0$, $\psi_2^\lambda(p^0) = 0$ в случае $\lambda = 0$. Обозначим множества решений для предыдущих соотношений, соответственно, как C_λ, C_1, C_2.

Теорема 18. *Граница $G(t_1)$ представляется как объединение множеств*

$$\partial G(t_1) = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

где $D_i = T_i(C_i)$, $i = 1, 2$, $D_3 = \bigcup_{0<\lambda<1} T_\lambda(C_\lambda)$, T_i, T_λ — линейные операторы сдвига вдоль траекторий соответствующей системы вида (16). *Справедливы включения $D_i \in \partial G_i(t_1)$, $i = 1, 2$.*

Множества D_i, $i = 1, 2, 3$ могут быть пустыми, но их объединение непусто. Данная схема достаточно сложна в программной реализации в отличие от одного изопериметрического ограничения, поэтому мы ограничились случаем двух ограничений, что не умаляет общности. В диссертации на примере двойного интегратора и двух совместных ограничений было проведено моделирование. Алгоритм был реализован в виде программы, на которую получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (РосПатент) [12].

Применительно к нелинейным управляемым системам в **разделе 4.3** представлен алгоритм, который использует разложение управления по ортонормированным полиномам со случайным выбором коэффициентов разложения (аналог метода Монте-Карло). Аналоги метода Монте-Карло для систем с геометрическими ограничениями на управление исследовались, например, в монографии А.Ю. Горнова[13].

Рассматривается система вида (2) с интегральным ограничением на управление $\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}^2 = \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2\, dt \le \mu^2$. Управление $u(t)$ приближенно заменяется линейной комбинацией ортонормированных полиномов на $[t_0, t_1]$: $u(t) \approx C \cdot \varphi(t)$, $C = \{c_{ik}\}_{i=1,k=0}^{r,N}$, $\varphi(t) = [\varphi_0(t)\ \dots\ \varphi_N(t)]^\top$. В качестве ортонормированной системы используются многочлены Лежандра. Ограничение на управление заменяется следующим неравенством $\sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^N |c_{ik}|^2 \le \mu^2$ (которое следует из неравенства Бесселя). Последнее можно переписать в виде: $\|C\|_2 \le \mu$, где $\|\cdot\|_2$ — норма Фробениуса.

Принципиальная схема алгоритма приближенного получения точек множеств достижимости нелинейной системы (1) в случае $r = 1$ выглядит следующим образом: на 1-м шаге задаем желаемое количество элементов ортонормированной системы, равное $N+1$; на 2-м шаге задаем случайный набор коэффициентов разложения c_k, $k = 0, \dots, N$, который удовлетворяет неравенству $\sum_{k=0}^N {c_k}^2 \le \mu^2$. Иначе говоря, случайный вектор

$c = (c_0 \ \dots \ c_N)$ должен принадлежать шару радиуса μ в $\mathbb{R}^{N+1}$: $\|c\| \le \mu$; на 3-м шаге подставляем полученное управление $\tilde{u}(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k(t)$ в систему (1). Далее интегрируем систему на отрезке $[t_0, t_1]$ и получаем правый конец траектории $\tilde{x}(t_1)$; на 4-м шаге возвращаемся к шагу два и повторяем операции до тех пор, пока не получим желаемую аппроксимацию множества достижимости системы (1). Этот метод, в силу более простой реализации, часто используется для проверки расчетов с применением других алгоритмов. Данный подход использовался в диссертации для контроля результатов работы алгоритма раздела 4.2. Из рисунков диссертации следует, что результаты, полученные с использованием обоих методов, совпадают. Алгоритм был реализован в виде программы, на которую получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (РосПатент) [13].

В **разделе 4.4** рассматривается задача приближенного построения множеств достижимости линейной управляемой системы, когда управляющее воздействие стеснено одновременно геометрическим и несколькими интегральными ограничениями[46].

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in T = [t_0, \theta], \quad x(t_0) = x^0, \tag{17}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управляющий параметр; $A(t)$, $B(t)$ — непрерывные на отрезке T матричные функции соответствующей размерности.

В качестве управлений рассматриваются измеримые по Лебегу функции $u(t)$ на T, удовлетворяющие ограничениям $u(\cdot) \in U_i,\ i = 0, 1, 2$ (совместно или по отдельности).

Здесь $U_0 := \{u(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty : \|Q_0 u(t)\|_\infty \le \mu_0$ при п.в. $t \in T\}$, $U_1 := \left\{u(\cdot) \in \mathbb{L}_1 : \int_{t_0}^{\theta} \|Q_1 u(t)\|_1 \, dt \le \mu_1\right\}$, $U_2 := \left\{u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : \int_{t_0}^{\theta} \|Q_2 u(t)\|^2 \, dt \le {\mu_2}^2\right\}$, где постоянные $\mu_i > 0$, а Q_i — заданные невырожденные квадратные матрицы соответствующей размерности; $\|\cdot\|_\infty$ — чебышевская норма, $\|\cdot\|_1$ — норма в l_1, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. В качестве множества допустимых управлений рассматриваем $U := \bigcap_{\lambda_i \ne 0} U_i,\ \lambda_i \in \{0, 1\},\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \ne 0.$

Значение $\lambda_i = 1$ означает наличие ограничения U_i, а $\lambda_i = 0$ его отсутствие. Вместо системы (17) можно рассматривать равносильную систему

$$\dot{y}(t) = D(t)u(t), \quad y(t_0) = x^0, \quad t \in T, \tag{18}$$

где $y(t) = \Phi^{-1}(t)x(t),\ D(t) = \Phi^{-1}(t)B(t),\ \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t),\ \Phi(t_0) = I,\ t \in T.$

Обозначим $G[\theta, U] := \bigcup_{u(\cdot) \in U} \left\{x^0 + \int_{t_0}^{\theta} D(t)u(t)\, dt\right\}$ — множество достижимости системы (18), которое является выпуклым и ограниченным.

Рассмотрим метод аппроксимации множества достижимости непрерывной системы путем дискретизации ограничений на управляющее воздействие и перехода к дискретной схеме за счет приближенного выбора кусочно-постоянных управлений, где постоянство сохраняется на каждом малом шаге разбиения временного отрезка.

Разобьем отрезок T на N равных частей ($N \ge 1$) точками $t_k = t_0 + \Delta k, \quad k = 0, \dots, N,\ \Delta = (\theta - t_0)/N,\ t_N = \theta$. При малом шаге разбиения по времени систему (18) можно заменить приближенным равенством:

$$y_N = x^0 + \sum_{k=0}^{N-1} D(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t)\, dt = x^0 + \sum_{k=0}^{N-1} D_k v^k,\ v^k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t) dt. \tag{19}$$

Ограничения на управление U_0, U_1 и U_2 принимают для (19) следующий вид: $V_{0,N} = \left\{\{v^k\}_{k=0}^{N-1} : \|Q_0 v^k\|_\infty \le \mu_0 \Delta\right\}$, $V_{1,N} = \left\{\{v^k\}_{k=0}^{N-1} : \sum_{k=0}^{N-1} \|Q_1 v^k\|_1 \le \mu_1\right\}$,

[46] Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.

$V_{2,N} = \left\{ \{v^k\}_{k=0}^{N-1} : \sum_{k=0}^{N-1} \|Q_2 v^k\|^2 \le {\mu_2}^2 \Delta \right\}.$

Множеством достижимости $\widetilde{G}[t_N, V_N]$ в момент времени t_N назовем множество $\widetilde{G}[t_N, V_N] := \bigcup_{\{v^k\}_{k=0}^{N-1} \in V_N} \left\{ x^0 + \sum_{k=0}^{N-1} D_k v^k \right\}$, где $V_N := \bigcap_{\lambda_i \neq 0} V_{i,N}$, $\lambda_i \in \{0, 1\}$, $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Предположение 4. *Матрица $D(\cdot)$ из (18) удовлетворяет условию Липшица с константой L: $\|D(s_2) - D(s_1)\| \le L|s_2 - s_1|, \quad L > 0,\ s_1, s_2 \in T$.*

В следующей теореме будем считать $C_i = +\infty$, если $\lambda_i = 0$, то есть соответствующее ограничение задачи будет отсутствовать.

Теорема 20. *При $N \to +\infty$ последовательность выпуклых множеств $\widetilde{G}[t_N, V_N]$ стремится к выпуклому множеству $G[\theta, U]$ в смысле метрики Хаусдорфа. Для хаусдорфова расстояния справедлива оценка $h(G[\theta, U], \widetilde{G}[t_N, V_N]) \le \frac{C}{N}$, $\quad N \ge 1$, где $C = L(\theta - t_0) \cdot \min\{C_0, C_1, C_2\}$, $C_0 = \sqrt{p}(\theta - t_0) \cdot \mu_0 \|{Q_0}^{-1}\|_\infty$, $C_1 = \mu_1 \|{Q_1}^{-1}\|_1$, $C_2 = \sqrt{\theta - t_0} \cdot \mu_2 \|{Q_2}^{-1}\|$.*

Учитывая выпуклость множества $G[\theta, U]$, для его приближенного построения достаточно вычислить опорную функцию. Для этого потребуется найти для каждого фиксированного $\psi \in S_1(0)$ набор векторов $\{v^k\}_{k=0}^{N-1}$, который минимизирует $\psi^\top y_N$: $\min_{y_N} \psi^\top y_N = \min_{\{v^k\}_{k=0}^{N-1}} \psi^\top \left(x^0 + \sum_{k=0}^{N-1} D_k v^k \right) = \psi^\top x^0 + \min_{\{v^k\}_{k=0}^{N-1}} \psi^\top \sum_{k=0}^{N-1} D_k v^k$, при ограничениях $\|Q_0 v^k\|_\infty \le \mu_0 \Delta$, $k = 0, \ldots, N-1$; $\sum_{k=0}^{N-1} \|Q_1 v^k\|_1 \le \mu_1$, $\sum_{k=0}^{N-1} \|Q_2 v^k\|^2 \le {\mu_2}^2 \Delta$. Пусть $\{\underline{v}^k(\psi)\}_{k=0}^{N-1} = \arg\min_{\{v^k\}_{k=0}^{N-1}} \psi^\top \sum_{k=0}^{N-1} D_k v^k$. Тогда граница множества достижимости аппроксимирующей системы приближенно представима в виде $\partial \widetilde{G}(t_N, V_N) = \bigcup_{\psi \in S_1(0)} \left\{ x^0 + \sum_{k=0}^{N-1} D_k \underline{v}^k(\psi) \right\}$.

Для вычисления опорных функций используется процедура конического программирования второго порядка SOCP (second-order cone program). Стандартная форма SOCP: $\min_z l^\top z$ при ограничениях

$$\|A_{sc}(i) \cdot z - b_{sc}(i)\| \le d_{sc}^\top(i) \cdot z - \gamma(i),\ 1 \le i \le m,$$
$$A \cdot z \le b, \quad Aeq \cdot z = beq, \quad lb \le z \le ub,$$

где l, z, b, beq, lb и ub являются векторами, а A и Aeq являются матрицами линейных ограничений. Для каждого i матрицы $A_{sc}(i)$, векторы $b_{sc}(i)$, $d_{sc}(i)$ и скаляры $\gamma(i)$ задают конические ограничения второго порядка. Другими словами, задача имеет линейную целевую функцию и линейные ограничения, а также набор конических ограничений второго порядка.

Алгоритм вычисляет не только точки максимума (значения опорной функции), но и точки, в которых достигаются максимумы, так как именно эти точки дают аппроксимацию границы множества достижимости. Наконец, чтобы получить аппроксимацию границы множества достижимости исходной системы, необходимо последним шагом произвести линейное преобразование множества $\partial \widetilde{G}(t_N, V_N)$ с помощью матрицы Коши $\Phi(t_N)$. Данную схему нетрудно редуцировать на более простые случаи, либо перенести на случай произвольного (в зависимости от вычислительных мощностей) числа комбинаций разного вида ограничений. В диссертации приведены результаты моделирования для двойного и тройного интеграторов с разнотипными ограничениями, которые показали довольно быстрое время вычисления.

Заключение. Проведено исследование свойств множеств достижимости аффинно-управляемых систем с квадратичными интегральными ограничениями на управление. Доказано, что любое допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления с квадратичным интегральным функционалом, если соответствующая линеаризованная система вполне управляема. Эти результаты были обобщены на случай нескольких интегральных ограничений, зависящих от управления и траектории. Предложены алгоритмы построения границы множеств достижимости на основе принципа максимума Понтрягина. Предложена новая схема получения внешних оценок множеств достижимости систем с интегральными ограничениями, в основе которых лежат интегральные оценки для производных функций Ляпунова вдоль траекторий систем. Также рассмотрен новый алгоритм решения задачи с комбинированными ограничениями на управление, основанный на дискретизации исходной линейной системы и процедуре конического программирования.

Перечислим некоторые возможные направления развития исследований, проведенных в данной диссертационной работе: исследовать достаточные условия для описания граничных точек множеств достижимости нелинейной управляемой системы при интегральном ограничении на управление; рассмотреть задачу характеризации граничных точек множеств достижимости управляемой системы при ослабленных условиях на интегральное ограничение, а также при наличии не только интегральных, но и геометрических ограничений; исследовать возможность получения внешних оценок множеств достижимости нелинейных управляемых систем при помощи множества уровней функции Ляпунова, зависящей от времени и траектории; реализовать пошаговый алгоритм построения внешних выпуклых оценок множеств достижимости для некоторых классов нелинейных управляемых систем с геометрическими ограничениями на управление и неопределенностью по начальным условиям.

Благодарности. Автор диссертации выражает сердечную благодарность своему научному руководителю Михаилу Ивановичу Гусеву, сотрудникам отдела оптимального управления ИММ УрО РАН за постоянное внимание, помощь и поддержку; своей семье и близким за эмоциональную поддержку.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №16-11-10146 и в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Gusev, M. I. On Extremal Properties of Boundary Points of Reachable Sets for a System with Integrally Constrained Control / M. I. Gusev, I. V. Zykov // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, no. 1. P. 4082–4087.
   DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.792
2. Зыков, И. В. О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями / И. В. Зыков // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Т. 1894. С. 88–97. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt7.pdf
3. Гусев, М.И. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях / М.И.Гусев, И.В.Зыков // Труды Ин-та математики и механики. 2017. Т. 23, № 1. С. 103–115.
   DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-103-115
   Переводная версия: Gusev, M.I. On Extremal Properties of the Boundary Points of Reachable Sets for Control Systems with Integral Constraints / M.I.Gusev, I.V.Zykov // Proc. Steklov Inst. Mathematics. 2018. Vol. 300, suppl. 1. P. S114–S125.
   DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543818020116

4. Gusev, M.I. An Algorithm for Computing Reachable Sets of Control Systems under Isoperimetric Constraints / M.I. Gusev, I.V. Zykov // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol.2025, iss. 1: Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (AMiTaNS'18): 10th Jubilee Intern. Conf., June 20-25, 2018, Albena, Bulgaria. Art. no. 100003. P. 114–125. DOI: `https://doi.org/10.1063/1.5064932`
5. Гусев, М.И. О геометрии множеств достижимости управляемых систем с изопериметрическими ограничениями / М.И. Гусев, И.В. Зыков // Труды Ин-та математики и механики. 2018. Т. 24, № 1. С. 63–75.
DOI: `https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-63-75`
Переводная версия: Gusev, M.I. On the Geometry of Reachable Sets for Control Systems with Isoperimetric Constraints / M.I.Gusev, I.V.Zykov // Proc. Steklov Inst. Mathematics. 2019. Vol. 304, suppl. 1. P. S76–S87.
DOI: `https://doi.org/10.1134/S0081543819020093`
6. Зыков, И.В. Об алгоритме построения множеств достижимости управляемых систем с изопериметрическими ограничениями / И.В. Зыков // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2018. Т. 23, № 122. С. 309–316.
DOI: `https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-122-309-316`
7. Gusev, M.I. External Estimates and Comparison Principle for Trajectory Tubes of Nonlinear Control Systems / M.I. Gusev, I.V. Zykov // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2164, iss.1: Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (AMiTaNS'11): 11th Intern. Conf., June 20–25, 2019, Albena, Bulgaria. Art. no.060008. 10 p. DOI: `https://doi.org/10.1063/1.5130810`
8. Зыков, И. В. О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями / И. В. Зыков // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2019. Т.53. С. 61–72.
DOI: `https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-06`
9. Zykov, I. V. An Algorithm for Constructing Reachable Sets for Systems with Multiple Integral Constraints / I. V. Zykov // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 318 (Mathematical Analysis With Applications). P. 51–60.
DOI: `https://doi.org/10.1007/978-3-030-42176-2_6`
10. Zykov, I. V. Approximation of Reachable Sets of Linear Control Systems under Different Types Constraints on the Control / I. V. Zykov // IEEE Xplore. Proceedings of 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's conference), STAB 2022, Moscow, Russian Federation. 2022. P. 1–4. DOI: `https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807476`
11. Зыков, И. В. Приближенное вычисление множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление / И. В. Зыков // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2022. Т.60. С. 16–33.
DOI: `https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-02`

Патенты и свидетельства о регистрации программ

12. Зыков, И. В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661558 "Алгоритм построения границы множества достижимости при совместных интегральных ограничениях на управление и траекторию" / автор — И.В. Зыков; заявитель и правообладатель — ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РосПатент). Зарегистрировано 24.09.2020. URL: `https://elibrary.ru/item.asp?id=44104692`

13. Зыков, И. В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661557 "Программа для построения методом МонтеКарло множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями на управление" / авторы — И.В. Зыков, И.О. Осипов; заявитель и правообладатель — ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РосПатент). Зарегистрировано 24.09.2020.
URL: `https://elibrary.ru/item.asp?id=44104691`

Прочие публикации

14. Гусев, М.И. О задаче достижимости для нелинейной системы с интегральными ограничениями на управление / М.И. Гусев, И.В. Зыков // Аналитическая механика, устойчивость и управление : XI Междунар. Четаевская конф., Казань, 13–17 июня 2017 г.: труды. Т. 3. Секц. 3. Управление. Ч. I. – Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 190–198. URL: `https://elibrary.ru/item.asp?id=32619283`
15. Гусев, М.И. О задачах достижимости в системах с интегральными ограничениями [Электронный ресурс] / М.И. Гусев, И.В. Зыков // XIII Всерос. совещ. по проблемам управления (ВСПУ 2019), 17–20 июня 2019, Москва, Россия, ИПУ РАН: труды. М., 2019. С. 52–56. DOI: `https://doi.org/10.25728/vspu.2019.0052`
16. Зыков, И. В. О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями / И. В. Зыков // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Тем. обзоры. 2021. Т.190: Материалы Воронежской весенней мат. шк. «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXX», Воронеж, 3–9 мая 2019. Ч. 1. Москва: ВИНИТИ РАН. С. 107–114. DOI: `https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-190-107-114`
17. Зыков, И.В. О способах построения внешних оценок множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями / И.В.Зыков // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби - (CGS'2020): материалы III Междунар. семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина, Екатеринбург, 26–30 окт. 2020. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. С. 167–170. URL: `https://elibrary.ru/item.asp?id=44268760`
18. Зыков, И.В. Аппроксимация множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление / И.В.Зыков // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого): материалы XVI Междунар. научн. конфер. (1-3 июн. 2022 г., Москва) / под общ. ред. В. Н. Тхай ; Ин-т проблем упр. им. В. А. Трапезникова Рос. акад. наук. М.: ИПУ, 2022. С. 208–211. URL: `https://elibrary.ru/item.asp?id=49585506`
19. Зыков, И.В. Приближенное вычисление множеств достижимости линейных управляемых систем при изопериметрических и других типах ограничений / И.В.Зыков // Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022): материалы Международной конференции, (Екатеринбург, 27 июня–1 июля 2022 г.); С. 83–86. URL: `https://elibrary.ru/item.asp?id=49279897`