На правах рукописи

ГОМОЮНОВ Михаил Игоревич

Задачи управления системами дробного порядка: формализм уравнений Гамильтона–Якоби и методы построения оптимальных стратегий обратной связи

1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Научный консультант:	Лукоянов Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук, академик РАН.
Официальные оппоненты:	Давыдов Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», заведующий кафедрой теории динамических систем механико-математического факультета.
	Мазалов Владимир Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладных математических исследований — обособленное подразделение ФГБУН ФИЦ «Карельский научный центр Российской академии наук», руководитель лаборатории математической кибернетики.
	Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет», заведующий кафедрой высшей математики физико-математического факультета.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 23 октября 2024 года в 11:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.073.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН: https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.01/.

Автореферат разослан “____” ______________ 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук — Костоусова Елена Кирилловна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию задач управления динамическими системами, эволюция которых описывается при помощи дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. Основное внимание уделяется построению адекватной таким задачам теории уравнений Гамильтона–Якоби (и их обобщенных решений) и разработке методов построения оптимальных стратегий управления по принципу обратной связи. Бóльшая часть представленных результатов получена для антагонистических дифференциальных игр на минимакс–максимин заданного показателя качества, которые могут рассматриваться в качестве естественной формализации задач об управлении системами дробного порядка в условиях конфликта и/или неопределенности с оптимальным гарантированным результатом; отдельные положения формулируются для частного случая — задач оптимального управления. Исследование проводится на базе подходов и методов, развиваемых в Уральской научной школе по математической теории управления.

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. В настоящее время теория дробного интегро-дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений с производными дробного порядка[1,2,3,4] интенсивно развивается и привлекает внимание многих исследователей. В частности, опубликовано большое число работ, в которых такие дифференциальные уравнения применяются для математического моделирования различных процессов в физике, механике, инженерии, биологии, экономике и других областях знаний[5,6]. Как подчеркивают авторы, дифференциальные уравнения с производными дробного порядка по существу отличаются от обыкновенных дифференциальных уравнений тем, что они обладают определенными свойствами наследственности или памяти, обусловленными нелокальным характером дробных производных. В том числе благодаря этому обстоятельству такие уравнения оказываются полезным и удобным в использовании аппаратом для моделирования сложных процессов, в которых наблюдаются подобные эффекты последействия. Задачи оптимального управления динамическими системами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка, стали рассматриваться сравнительно

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

[2] Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999.

[3] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[4] Diethelm K. The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010.

[5] Sun H., Zhang Y., Baleanu D., Chen W., Chen Y. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 2018. Vol. 64. P. 213–231.

[6] Diethelm K., Kiryakova V., Luchko Yu., Machado J.A.T., Tarasov V.E. Trends, directions for further research, and some open problems of fractional calculus // Nonlinear Dynam., 2022. Vol. 107, no. 4. P. 3245–3270.

недавно. Такие задачи имеют приложения в медицине[7], химии[8], инженерии[9], биологии[10], экономике[11] и других областях знаний. Среди основных направлений исследований здесь можно выделить вопросы, связанные с необходимыми условиями оптимальности, в том числе в форме принципа максимума Понтрягина, и развитием численных методов построения оптимальных управлений; изучаются проблемы существования оптимальных управлений; внимание также уделяется линейно-квадратичным задачам. Подчеркнем, что большинство работ сосредоточены на поиске программных оптимальных управлений, в то время как задачи оптимального синтеза управлений и схемы управления по принципу обратной связи практически не рассматриваются. При известных попытках[12,13] формализации принципа динамического программирования в задачах оптимального управления системами дробного порядка и вывода соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби (как уравнения Беллмана) рассуждения проводились по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных систем и не учитывали ключевого для систем дробного порядка эффекта памяти истории движения. Дифференциальные игры в системах дробного порядка также представляют собой достаточно мало изученную область. В основном рассматриваются линейные дифференциальные игры сближения–уклонения[14,15] и линейные задачи группового преследования[16]. Дополнительно отметим, что в литературе также имеются работы по задачам управления системами дробного порядка в условиях помех, но в некоторых других постановках (построение оптимальных регуляторов, компенсация возмущений, восстановление внешних воздействий и др.).

Разница между обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка становится заметнее, если перейти к эквивалентным интегральным уравнениям.

---

[7]Kheiri H., Jafari M. Optimal control of a fractional-order model for the HIV/AIDS epidemic // Int. J. Biomath., 2018. Vol. 11, no. 7. Art. 1850086. 23 p.

[8]Flores-Tlacuahuac A., Biegler L.T. Optimization of fractional order dynamic chemical processing systems // Ind. Eng. Chem. Res., 2014. Vol. 53, no. 13. P. 5110–5127.

[9]Kaczorek T. Minimum energy control of fractional positive electrical circuits with bounded inputs // Circ. Syst. Signal Process., 2016. Vol. 35, no. 6. P. 1815–1829.

[10]Toledo-Hernandez R., Rico-Ramirez V., Rico-Martinez R., Hernandez-Castro S., Diwekar U.M. A fractional calculus approach to the dynamic optimization of biological reactive systems. Part II: numerical solution of fractional optimal control problems // Chem. Eng. Sci., 2014. Vol. 117. P. 239–247.

[11]Hajipour A., Hajipour M., Baleanu D. On the adaptive sliding mode controller for a hyperchaotic fractional-order financial system // Physica A, 2018. Vol. 497. P. 139–153.

[12]Jumarie G. Fractional Hamilton–Jacobi equation for the optimal control of nonrandom fractional dynamics with fractional cost function // J. Appl. Math. Comput., 2007. Vol. 23, no. 1. P. 215–228.

[13]Razminia A., Asadizadehshiraz M., Torres D.F.M. Fractional order version of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation // J. Comput. Nonlinear Dynam., 2018. Vol. 14, no. 1. Art. 011005. 6 p.

[14]Чикрий А.А., Матичин И.И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2009. Т. 15, № 3. С. 262–278.

[15]Matychyn I., Onyshchenko V. Game-theoretical problems for fractional-order nonstationary systems // Fract. Calc. Appl. Anal., 2023. Vol. 26, no. 3. P. 1031–1051.

[16]Петров Н.Н. К задаче группового преследования в дифференциальной игре с дробными производными, фазовыми ограничениями и простой матрицей // Дифференц. уравнения, 2019. Т. 55, № 6.С. 857–864.

А именно, по сравнению с обыкновенным случаем в интегральном операторе Вольтерра появляется ядро, зависящее от разности аргументов, которое к тому же является слабо сингулярным (задается степенной функцией с отрицательным показателем $\alpha - 1$, где $\alpha \in (0, 1)$ — порядок дифференцирования). Таким образом, теория дифференциальных уравнений с производными дробного порядка по сути представляет собой теорию интегральных уравнений Вольтерра со слабо сингулярными ядрами указанного специального вида. В литературе имеется достаточно большое число работ, посвященных задачам оптимального управления динамическими системами, движение которых описывается интегральными уравнениями Вольтерра, но, в основном, с несингулярными ядрами. В том числе, исследования[17] отчасти затрагивают вопросы, связанные с принципом динамического программирования и уравнениями Гамильтона–Якоби в таких задачах. В частности, предлагается в качестве позиции изучаемой динамической системы рассматривать пары, состоящие из текущего момента времени и сложившейся к этому моменту истории управляющих воздействий. Подчеркнем, что в игровой ситуации применение этого подхода особенно затруднительно, поскольку приводит к тому, что под позицией системы понимается текущий момент времени и история управляющих воздействий обоих игроков, в то время как информация о всей истории управления оппонента зачастую недоступна, например, если его воздействия интерпретируются как неизвестное динамическое возмущение. С другой стороны, работ по исследованию динамических игр для интегральных уравнений Вольтерра в литературе крайне мало: рассматриваются игры с линейной динамикой и предлагаются методы построения оптимальных позиционных стратегий управления игроков в так называемом регулярном случае[18]; изучаются линейно-квадратичные игры[19]; для игр, в которых каждый игрок управляет своей собственной системой, описываемой достаточно общим функционально-операторным уравнением, доказывается существование ε-равновесия в кусочно-программных стратегиях[20]; для неантагонистических игр исследуется вопрос существования равновесия по Нэшу в программных управлениях[21].

Вообще говоря, от дифференциального уравнения с производной дробного порядка путем подходящей замены переменных можно перейти к экви-

[17]Belbas S.A. A new method for optimal control of Volterra integral equations // Appl. Math. Comput., 2007. Vol. 189, no. 2. P. 1902–1915.

[18]Пасиков В.Л. Экстремальное прицеливание в игре линейных систем Вольтерра // Дифференц. уравнения, 1986. Т. 22, № 5. С. 907–909.

[19]You Y. Quadratic integral games and causal synthesis // Trans. Amer. Math. Soc., 2000. Vol. 352, no. 6. P. 2737–2764.

[20]Чернов А.В. О существовании ε-равновесия в вольтерровых функционально-операторных играх без дискриминации // Матем. теория игр и ее приложения, 2012. Т. 4, № 1. С. 74–92.

[21]Carlson D.A. Open-loop Nash equilibria for dynamic games involving Volterra integral equations // Advances in Dynamic and Mean Field Games. Theory, Applications, and Numerical Methods. Cham: Springer, 2017. P. 169–197.

валентному функционально-дифференциальному уравнению (уже с обычной производной первого порядка). Поскольку правая часть получаемого таким образом уравнения в явном виде зависит от истории значений производной искомой функции, в терминологии теории функционально-дифференциальных уравнений это уравнение следует классифицировать как уравнение нейтрального типа. Изучению дифференциальных игр для динамических систем, описываемых нелинейными уравнениями нейтрального типа, имеющими, в основном, некоторый специальный вид (так называемую форму Хейла), и развитию соответствующей теории уравнений Гамильтона–Якоби и их обобщенных решений посвящено достаточно много работ[22,23,24]. Тем не менее, оказывается, что рассматриваемые в них классы уравнений по существу не охватывают те уравнения нейтрального типа, которые получаются в результате перехода от уравнений с производными дробного порядка.

Проведенный выше анализ литературы обосновывает актуальность тематики диссертации, призванной ответить на естественным образом возникающие в процессе развития теории управления системами дробного порядка фундаментальные вопросы о построении адекватной теории уравнений Гамильтона–Якоби и разработке методов оптимального управления по принципу обратной связи. С другой стороны, рассматриваемые в диссертации дифференциальные игры для нелинейных систем дробного порядка на минимакс–максимин заданного показателя качества ранее не изучались; более того, в смежных областях (задачи управления интегральными уравнениями Вольтерра и функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа) также отсутствуют результаты и методы, которые могли бы быть напрямую применены для их исследования.

Теория дифференциальных игр активно развивается последние несколько десятилетий. Становление этой теории в первую очередь связано с именами Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Б.Н. Пшеничного, R. Isaacs, W.H. Fleming и A. Friedman. В том числе, в работах Н.Н. Красовского и его сотрудников[25,26] была предложена и развита концепция позиционных дифференциальных игр, в рамках которой выполнена диссертация.

Одно из центральных мест в теории дифференциальных игр занимает уравнение Гамильтона–Якоби (также называемое уравнением Айзекса или Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса), представляющее собой уравнение с

[22] Максимов В.И. Дифференциальная игра наведения для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Задачи динамического управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 33–45.

[23] Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. К теории позиционных дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2019. Т. 25, № 3. С. 118–128.

[24] Плаксин А.Р. О минимаксном решении уравнений Гамильтона–Якоби для систем нейтрального типа: случай неоднородного гамильтониана // Дифференц. уравнения, 2021. Т. 57, № 11. С. 1536–1545.

[25] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[26] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

частными производными первого порядка. С содержательной точки зрения данное уравнение служит выражением в инфинитезимальной форме принципа динамического программирования и описывает функцию цены игры в предположении, что эта функция является достаточно гладкой. Однако в действительности нелинейные уравнения Гамильтона–Якоби, как правило, не имеют надлежащего классического (непрерывно дифференцируемого) решения. В то же время, в теории дифференциальных игр известны содержательные примеры, в которых функция цены является негладкой. Данные обстоятельства во многом стимулировали развитие для уравнений Гамильтона–Якоби теории обобщенных (негладких) решений. Известны несколько подходов к понятию обобщенного решения различных краевых задач для уравнений Гамильтона–Якоби. По мнению автора диссертации, среди них выделяются два — минимаксный и вязкостный, которые и получили наибольшее развитие. Минимаксный подход, разработанный А.И. Субботиным[27], имеет своей основой унификационные конструкции из теории позиционных дифференциальных игр[28]. В рамках этого подхода обобщенное (минимаксное) решение определяется как функция, удовлетворяющая паре нелокальных условий, выражающих свойства слабой инвариантности ее надграфика и подграфика относительно так называемых характеристических дифференциальных включений. В инфинитезимальной форме эти условия выражаются при помощи неравенств для нижних и верхних производных минимаксного решения по направлениям. Получаемая пара дифференциальных неравенств может рассматриваться как обобщение уравнения Гамильтона–Якоби на негладкий случай. Вязкостный подход, который разработали M.G. Crandall и P.-L. Lions[29], идейно восходит к методу «исчезающей вязкости» и теоремам сравнения из математической физики. Согласно этому подходу обобщенное (вязкостное) решение определяется как функция, удовлетворяющая паре условий, включающих гладкие подстилающие (тестовые) функции. Выражение этих условий в инфинитезимальной форме приводит к обобщению уравнения Гамильтона–Якоби в виде неравенств для суб- и суперградиентов вязкостного решения. Хотя понятия минимаксных и вязкостных решений имеют различные основы, при достаточно общих предположениях эти понятия эквивалентны. При этом именно в минимаксном подходе особое внимание уделяется приложению теории обобщенных решений для разработки методов построения оптимальных стратегий управления по принципу обратной связи. В части построения теории обобщенных решений рассматриваемого нового класса уравнений Га-

[27]Subbotin A.I. Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Basel: Birkhäuser, 1995.

[28]Красовский Н.Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР, 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.

[29]Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc., 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.

мильтона–Якоби диссертация следует минимаксному подходу; отдельные результаты посвящены развитию вязкостного подхода.

В диссертации изучается следующая дифференциальная игра. Движение конфликтно-управляемой динамической системы описывается нелинейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Промежуток времени игры зафиксирован. Первый игрок стремится минимизировать значение заданного показателя качества, а второй — максимизировать это значение. Как отмечалось выше, рассматриваемая система обладает эффектом памяти, или, другими словами, является наследственной, то есть скорость изменения ее состояния зависит не только от текущего положения, как в обыкновенном (классическом) случае, но и от всего пройденного пути. Это приводит к тому, что для адекватной формализации конструкций динамического программирования в изучаемой игре под позицией системы следует понимать пару, состоящую из текущего момента времени и реализовавшейся к этому моменту истории движения. Стало быть, во-первых, величина цены игры представляет собой функционал, определенный на бесконечномерном пространстве позиций системы, что играет принципиальную роль как при выводе уравнения Гамильтона–Якоби, описывающего этот функционал, так и при развитии теории обобщенных (минимаксных, вязкостных) решений таких уравнений. Во-вторых, оптимальные позиционные стратегии управления игроков являются стратегиями с памятью истории движения, что осложняет их построение. Данный взгляд на системы дробного порядка составляет отличительную особенность предложенного в диссертации подхода к исследованию задач управления такими системами. В частности, в рамках этого подхода системы дробного порядка с качественной точки зрения становятся близки динамическим системам с запаздыванием, эволюцию которых необходимо[30] рассматривать в подходящем функциональном пространстве историй движения. Как следствие, в диссертации за основу были взяты конструкции, разработанные в теории позиционных дифференциальных игр для систем с запаздыванием и в теории отвечающих таким играм уравнений Гамильтона–Якоби.

В теории уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием можно условно выделить два направления исследований. Первое из них подразумевает непосредственный переход к описанию эволюции системы с запаздыванием при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений в функциональном фазовом пространстве и приводит к уравнениям Гамильтона–Якоби в этом пространстве с производными Фреше. Изучению уравнений Гамильтона–Якоби в абстрактных банаховых пространствах с производными Фреше

[30] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

и развитию теории обобщенных (вязкостных) решений для таких уравнений посвящено достаточно большое число работ. В том числе, с привлечением результатов этой теории проводятся исследования задач управления различными системами с запаздыванием. В рамках второго направления упомянутый переход в явной форме не используется, а непосредственно изучаются свойства цены игры вдоль возможных траекторий системы. При этом удается более детально учесть именно наследственный характер систем с запаздыванием. Для реализации этой концепции классический аппарат производных Фреше становится неудобным, поэтому рассматриваются специальные понятия дифференцируемости функционалов от истории движения и используются адекватные этим понятиям производные. Подходящими оказываются, например, так называемые коинвариантные производные[31]. Идеи инвариантного и коинвариантного дифференцирования функционалов и сами термины инвариантные и коинвариантные производные изначально были предложены в связи со вторым методом Ляпунова в задачах об устойчивости движений систем с запаздыванием[32]. Позднее такие производные нашли приложения и в других разделах теории функционально-дифференциальных уравнений[33,34]. При развитии формализма уравнений Гамильтона–Якоби для систем дробного порядка диссертация придерживается второго из указанных направлений.

Фундаментальный вклад в теорию позиционных дифференциальных игр для динамических систем, движение которых описывается функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа, внесли результаты Ю.С. Осипова и его сотрудников[35,36,37]. Систематическому исследованию соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными посвящена серия работ Н.Ю. Лукоянова. В этих работах, во-первых, была построена[38,39,40,41] теория обобщенных (минимаксных и вязкостных) реше-

[31]Лукоянов Н.Ю. Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.

[32]Ким А.В. Ко второму методу Ляпунова для систем с последействием // Дифференц. уравнения, 1985. Т. 21, № 3. С. 385–391.

[33]Kim A.V. Functional differential equations: Application of i-smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999.

[34]Ким А.В., Пименов В.Г. i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

[35]Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР, 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.

[36]Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством // Прикл. математика и механика, 1973. Т. 37, № 1. С. 3–13.

[37]Максимов В.И. Альтернатива в дифференциально-разностной игре сближения–уклонения с функциональной целью // Прикл. математика и механика, 1976. Т. 40, № 6. С. 987–994.

[38]Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Уравнения типа Гамильтона–Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2000. Т. 6, № 1. С. 110–130.

[39]Lukoyanov N.Yu. Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, no. 3. P. 365–397.

[40]Лукоянов Н.Ю. О вязкостном решении функциональных уравнений типа Гамильтона–Якоби для наследственных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2007. Т. 13, № 2. С. 135–144.

[41]Лукоянов, Н.Ю. Минимаксные и вязкостные решения в задачах оптимизации наследственных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 183–194.

ний задач Коши для таких уравнений при краевом условии на правом конце; основное внимание уделено вопросам корректности минимаксных решений, согласованности минимаксных и классических решений, а также нелокальным и инфинитезимальным критериям минимаксных решений. Далее, эти результаты были применены[42,43,44,45] для характеризации функционала цены и построения оптимальных позиционных стратегий в дифференциальных играх для систем с запаздыванием. В настоящее время дальнейшее исследование обобщенных решений таких уравнений Гамильтона–Якоби и близких к ним остается весьма актуальной тематикой.

Отдельную и очень обширную область исследований представляют собой дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка. Рассматриваются также и уравнения Гамильтона–Якоби, в которых обычные частные производные по одной или нескольким переменным заменяются на соответствующие производные дробного порядка, и изучаются их обобщенные решения. В том числе, таким уравнениям ставятся в соответствие[46,47] оптимизационные задачи, которые, однако, не охватывают собой задачи управления системами дробного порядка, исследуемые в диссертации.

Несмотря на то, что многие из представленных в диссертации результатов имеют своим прообразом конструкции, известные в теории управления обыкновенными и функционально-дифференциальными системами, при их адаптации и дальнейшем развитии для систем дробного порядка возникает ряд трудностей, среди которых можно отдельно выделить следующие две группы. К первой группе относятся в определенной степени технические вопросы, связанные со спецификой обработки присутствующего в интегральном уравнении слабо сингулярного ядра и исследованием качественных свойств решений дифференциальных уравнений и включений с дробными производными. Вторую группу составляют уже в большей степени принципиальные сложности, связанные с построением функционалов Ляпунова–Красовского, которые улавливали бы особенности систем дробного порядка и обладали бы необходимыми свойствами. Потребность в таких функционалах возникает как при доказательстве оптимальности конкретных позиционных стратегий управления

[42] Лукоянов Н.Ю. О свойствах функционала цены дифференциальной игры с наследственной информацией // Прикл. математика и механика, 2001. Т. 65, № 3. С. 375–384.

[43] Lukoyanov N.Yu. Functional Hamilton–Jacobi type equations with ci-derivatives in control problems with hereditary information // Nonlinear Funct. Anal. Appl., 2003. Vol. 8, no. 4. P. 535–555.

[44] Лукоянов Н.Ю. Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов // Прикл. математика и механика, 2004. Т. 68, № 4. С. 629–643.

[45] Лукоянов Н.Ю. Дифференциальные неравенства для негладкого функционала цены в задачах управления системами с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2006. Т. 12, № 2. С. 108–118.

[46] Veretennikova M., Kolokoltsov V. The fractional Hamilton–Jacobi–Bellman equation // J. Appl. Nonlinear Dyn., 2017. Vol. 1, no. 1. P. 45–56.

[47] Camilli F., De Maio R., Iacomini E. A Hopf–Lax formula for Hamilton–Jacobi equations with Caputo time-fractional derivative // J. Math. Anal. Appl., 2019. Vol. 477, no. 2.P. 1019–1032.

игроков, так и при обосновании корректности обобщенных решений задач Коши для рассматриваемых в диссертации уравнений Гамильтона–Якоби. Оказывается, что функционалы, предложенные ранее для случаев функционально-дифференциальных систем запаздывающего и нейтрального типов, здесь напрямую неприменимы, и, более того, использование их непосредственных аналогов также не позволяет получить нужный результат.

Цели и задачи. Диссертация направлена на развитие формализма уравнений Гамильтона–Якоби (включая теорию обобщенных решений таких уравнений) и разработку методов построения оптимальных стратегий управления по принципу обратной связи с памятью истории движения в дифференциальных играх и задачах оптимального управления для динамических систем, движение которых описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории позиционных дифференциальных игр для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего и нейтрального типов, а также конструкции теории обобщенных (минимаксных, вязкостных) решений соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби с частными производными и с коинвариантными производными. Используются методы и результаты теории дифференциальных уравнений и включений с дробными производными и конструкции негладкого анализа.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

(i) Для динамической системы, движение которой описывается (нелинейным) дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$, рассмотрена дифференциальная игра на минимакс–максимин заданного показателя качества. Введено понятие позиции системы как пары, состоящей из текущего момента времени и сложившейся к этому моменту истории движения. При достаточно общих предположениях для каждой позиции доказано существование цены игры, то есть совпадение нижней и верхней цен, определяемых в классах квазистратегий игроков. Разработан ряд методов для построения оптимальных позиционных стратегий управления игроков, включая метод экстремального сдвига на сопутствующую точку; метод, использующий схемы аппроксимации дифференциальными играми для систем с запаздыванием; метод, основанный на сведении в линейном случае к вспомогательной дифференциальной игре для обыкновенной дифференциальной системы.

(ii) Для функционалов, определенных на пространстве позиций системы дробного порядка, введено понятие коинвариантной (ci-) дифференцируемости порядка α и ci-гладкости порядка α. Рассмотренной дифференциальной игре поставлено в соответствие уравнение Гамильтона–Якоби с ci-производными порядка α. Доказано, что если задача Коши для данного уравнения при естественном краевом условии на правом конце имеет ci-гладкое порядка α решение, то функционал цены игры совпадает с этим решением, а оптимальные позиционные стратегии управления игроков могут быть построены экстремальным прицеливанием в направлении ci-градиента порядка α этого решения. В качестве иллюстрации проведено исследование линейно-квадратичных дифференциальных игр для систем дробного порядка.

(iii) Построена теория обобщенных в минимаксном смысле решений задачи Коши для (абстрактного) уравнения Гамильтона–Якоби с ci-производными порядка α и краевого условия, заданного на правом конце: дано определение минимаксного решения в терминах условий стабильности относительно характеристических дифференциальных включений с дробными производными Капуто порядка α; при достаточно общих предположениях доказано, что минимаксное решение существует, единственно и непрерывно меняется с изменением гамильтониана и краевого функционала; получены нелокальные критерии минимаксного решения, использующие понятие характеристических комплексов, и инфинитезимальные критерии в виде дифференциальных неравенств для подходящим образом введенных производных порядка α по многозначным направлениям; установлена согласованность минимаксного решения с понятием решения в классическом смысле. Ключевую роль в доказательствах сыграло построение оригинального функционала Ляпунова–Красовского.

(iv) Доказано, что функционал цены рассмотренной дифференциальной игры совпадает с минимаксным решением соответствующей задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с ci-производными порядка α и естественного краевого условия на правом конце, при этом предложен метод построения по минимаксному решению оптимальных позиционных стратегий управления игроков. Как следствие, получены дифференциальные неравенства, характеризующие функционал цены в терминах производных порядка α по многозначным направлениям, и, более того, показано, что при некотором дополнительном условии липшицевости показателя качества в этих неравенствах от производных порядка α по многозначным направлениям можно перейти к более простым для вычисления производным порядка α по однозначным направлениям.

(v) Развиты элементы вязкостного подхода к понятию обобщенного решения отвечающей рассмотренной дифференциальной иге задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с ci-производными порядка α при естественном краевом условии на правом конце: дано определение вязкостного решения в терминах ci-гладких порядка α тестовых функционалов и специальной последовательности компактных подмножеств пространства позиций системы дробного порядка; при дополнительном условии липшицевости показателя качества доказано, что функционал цены игры совпадает с единственным вязкостным решением этой задачи Коши. Основу доказательства теоремы о единственности вязкостных решений вновь составило использование оригинального функционала Ляпунова–Красовского.

(vi) В случае задачи оптимального управления системой дробного порядка (дифференциальной игры с фиктивным вторым игроком) доказано, что при некоторых достаточно общих предположениях функционал оптимального результата (аналог функционала цены) дифференцируем порядка α по направлениям. На этой основе дана инфинитезимальная характеризация функционала оптимального результата в виде равенства для производных порядка α по направлениям; предложен соответствующий метод построения оптимальной позиционной стратегии управления; доказана теорема о связи между отвечающими задаче уравнением Гамильтона–Якоби и принципом максимума Понтрягина.

Научная новизна. Все полученные в работе результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании задач управления системами дробного порядка, а также при разработке численных методов их решения.

Степень достоверности и апробация результатов. Степень достоверности результатов проведенных исследований подтверждается строгостью математических доказательств. Результаты диссертации обсуждались на семинарах отдела динамических систем ИММ УрО РАН, семинаре «Оптимальное управление и динамические системы» отдела дифференциальных уравнений МИАН, и представлялись в докладах на следующих научных конференциях: 18-th International Symposium on Dynamic Games and Applications (2018, Франция, Гренобль), IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики» (2018, Нальчик), «День математика и механика. VIII Интернет-видеоконференция — Слово молодым» (2018, Екатеринбург–Новосибирск–С. Петербург–Москва), Международная конференция «Колмогоровские чтения — VIII. Общие проблемы управления и их приложения» (2018, Тамбов), Международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (2019, Екатеринбург), III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби» (2020, Екатеринбург), The 20-th Polish Control Conference (2020, Польша, Лодзь), 51-я, 53-я и 54-я Всероссийские молодежные школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (2020, 2022 и 2023, Екатеринбург), VI Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (2021, Нальчик), Международная научная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» (2021, Минск, Беларусь), Международная конференция «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление» (2022, Москва), Международная конференция «Теория оптимального управления и приложения» (2022, Екатеринбург), 22-я Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций» (2023, Екатеринбург), Всероссийская конференция «Dynamics in Siberia» (Новосибирск, 2023).

Публикации. Материал диссертации опубликован в 24 научных работах [1–24]. Из них 22 работы [1–13, 15–20, 22–24] изданы в научных журналах категории К1, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК или приравненных к ним. Работы [14, 21] изданы в сборниках трудов международных научных конференций и проиндексированы в международной реферативной базе данных Scopus.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместных работах [6–9] научному консультанту Н.Ю. Лукоянову принадлежат постановки задач и общая схема их исследования, формулировки и доказательства результатов принадлежат автору диссертации; в обзорной статье [10] автором диссертации написан раздел, посвященный системам дробного порядка.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, объединяющих двадцать разделов, заключения и списка литературы. Нумерация разделов сквозная. Нумерация теорем (лемм, утверждений, следствий, предположений, замечаний, примеров, рисунков) двойная: в первой позиции указывается номер раздела, в котором приведена теорема, во второй — порядковый номер теоремы в этом разделе. Объем диссертации составляет 185 страниц, библиография включает 354 наименования, иллюстративный материал насчитывает 4 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Первая глава состоит из **разделов 1–3** и носит вспомогательный характер. В ней приводятся необходимые сведения из теории дробного интегро-дифференциального исчисления, теории дифференциальных уравнений и включений с производными дробного порядка.

В **разделе 4 второй главы** рассматривается конфликтно-управляемая динамическая система, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$({}^{C}D^{\alpha}x)(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)). \tag{1}$$

Здесь $\tau \in [0, T]$ — время, $T > 0$ — фиксированный терминальный момент времени, $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ — текущее состояние системы, $u(\tau) \in P$ и $v(\tau) \in Q$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно, $P \subset \mathbb{R}^{n_u}$ и $Q \subset \mathbb{R}^{n_v}$ — компактные множества, через $({}^C D^\alpha x)(\tau)$ обозначена дробная производная Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ функции $x(\cdot)$ в точке τ:

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \int_0^\tau \frac{x(\xi) - x(0)}{(\tau - \xi)^\alpha} \, \mathrm{d}\xi, \tag{2}$$

где Γ — гамма-функция.

Предположение 4.1. Функция $f\colon [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям: (i) функция f непрерывна; (ii) для любого $R > 0$ существует $\lambda_f > 0$ такое, что для всех $\tau \in [0, T]$, x, $x' \in B(R)$, $u \in P$, $v \in Q$

$$\|f(\tau, x, u, v) - f(\tau, x', u, v)\| \leqslant \lambda_f \|x - x'\|;$$

(iii) существует $c_f > 0$ такое, что для всех $\tau \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, $v \in Q$

$$\|f(\tau, x, u, v)\| \leqslant c_f (1 + \|x\|).$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant R\}$.

Пусть $AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n)$ — множество функций $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$, каждая из которых для некоторой своей измеримой (по Лебегу) и существенно ограниченной функции $\ell\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(\tau) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau \frac{\ell(\xi)}{(\tau - \xi)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [0, T].$$

Здесь второе слагаемое является дробным интегралом Римана–Лиувилля порядка α от функции $\ell(\cdot)$. Заметим, что $AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n) \subset C([0, T], \mathbb{R}^n)$, где $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ со стандартной (равномерной) нормой. Рассмотрим множество G_n пар $(t, w(\cdot))$ таких, что $t \in [0, T]$ и $w(\cdot) \in C([0, t], \mathbb{R}^n)$. Множество G_n оснастим метрикой

$$\begin{aligned} &\operatorname{dist}\big((t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot))\big) \\ &\quad = \max\Big\{\operatorname{dist}^*\big((t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot))\big), \operatorname{dist}^*\big((t', w'(\cdot)), (t, w(\cdot))\big)\Big\}, \end{aligned}$$

где $(t, w(\cdot))$, $(t', w'(\cdot)) \in G_n$ и

$$\operatorname{dist}^*\big((t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot))\big) = \max_{\tau \in [0,t]} \min_{\tau' \in [0,t']} \sqrt{|\tau - \tau'|^2 + \|w(\tau) - w'(\tau')\|^2}.$$

Положим

$$G_n^\alpha = \big\{(t, w(\cdot)) \in G_n \colon w(\cdot) \in AC^\alpha([0, t], \mathbb{R}^n)\big\}, \quad G_n^{\alpha\circ} = \big\{(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha \colon t < T\big\}.$$

Возможной позицией системы (1) называется всякая пара $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$, в которой $t \in [0, T]$ играет роль времени, а функция $w\colon [0, t] \to \mathbb{R}^n$ трактуется как история движения этой системы на промежутке $[0,t]$. Зафиксируем позицию $(t,w(\cdot))\in G_n^\alpha$. Обозначим

$$X(t,w(\cdot))=\big\{x(\cdot)\in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)\colon x_t(\cdot)=w(\cdot)\big\},$$

где $x_t(\cdot)$ — сужение функции $x(\cdot)$ на промежуток $[0,t]$: $x_t(\tau)=x(\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Допустимыми управлениями первого и второго игроков на промежутке $[t,T]$ называются произвольные измеримые функции $u\colon[t,T]\to P$ и $v\colon[t,T]\to Q$ соответственно. Через $\mathcal{U}[t,T]$ и $\mathcal{V}[t,T]$ обозначим множества всех таких управлений. Движением системы (1), порожденным из позиции $(t,w(\cdot))$ управлениями $u(\cdot)\in\mathcal{U}[t,T]$ и $v(\cdot)\in\mathcal{V}[t,T]$, называется функция $x(\cdot)\in X(t,w(\cdot))$, которая вместе с $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ удовлетворяет (1) при почти всех (п.в.) $\tau\in[t,T]$. В силу предположения 4.1 такое движение $x(\cdot)=x(\cdot;t,w(\cdot),u(\cdot),v(\cdot))$ существует и единственно. Отметим, что это движение является единственной функцией $x(\cdot)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет условию $x_t(\cdot)=w(\cdot)$ и слабо сингулярному интегральному уравнению Вольтерра

$$x(\tau)=a(\tau;t,w(\cdot))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\tau\frac{f(\xi,x(\xi),u(\xi),v(\xi))}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}\xi,\quad \tau\in[t,T].$$

Здесь функция $a(\cdot;t,w(\cdot))$ определяется равенством

$$a(\tau;t,w(\cdot))=\begin{cases}w(\tau), & \text{если } \tau\in[0,t],\\ w(0)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{({}^CD^\alpha w)(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}\xi, & \text{если } \tau\in(t,T].\end{cases}\tag{3}$$

Для системы (1) изучается дифференциальная игра, в которой первый игрок стремится минимизировать, а второй — максимизировать значение показателя качества

$$J(t,w(\cdot),u(\cdot),v(\cdot))=\sigma(x(\cdot))+\int_t^T\chi(\tau,x(\tau),u(\tau),v(\tau))\,\mathrm{d}\tau,\tag{4}$$

где $(t,w(\cdot))\in G_n^\alpha$, $u(\cdot)\in\mathcal{U}[t,T]$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}[t,T]$ и $x(\cdot)=x(\cdot;t,w(\cdot),u(\cdot),v(\cdot))$.

Предположение 4.2. Выполнены следующие условия: (i) функционал $\sigma\colon AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ непрерывен; (ii) функция $\chi\colon[0,T]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\to\mathbb{R}$ непрерывна; (iii) для любого $R>0$ существует $\lambda_\chi>0$ такое, что

$$|\chi(\tau,x,u,v)-\chi(\tau,x',u,v)|\leqslant\lambda_\chi\|x-x'\|$$

для всех $\tau\in[0,T]$, x, $x'\in B(R)$, $u\in P$, $v\in Q$.

Также предполагается выполненным следующее условие, называемое условием Айзекса или условием седловой точки для маленькой игры.

Предположение 4.3. Для всех $\tau\in[0,T]$ и x, $s\in\mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\big(\langle s,f(\tau,x,u,v)\rangle+\chi(\tau,x,u,v)\big)\\&\qquad=\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\big(\langle s,f(\tau,x,u,v)\rangle+\chi(\tau,x,u,v)\big).\end{aligned}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что дифференциальная игра (1), (4) имеет цену, если для всякой начальной позиции $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$ нижняя

$$\rho_-(t, w(\cdot)) = \inf_{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}[t,T]} \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}[t,T]} J\big(t, w(\cdot), \boldsymbol{a}[v(\cdot)](\cdot), v(\cdot)\big)$$

и верхняя

$$\rho_+(t, w(\cdot)) = \sup_{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}[t,T]} \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[t,T]} J\big(t, w(\cdot), u(\cdot), \boldsymbol{b}[u(\cdot)](\cdot)\big)$$

цены совпадают, при этом величину $\rho(t, w(\cdot)) = \rho_-(t, w(\cdot)) = \rho_+(t, w(\cdot))$ будем называть ценой игры. Здесь через $\boldsymbol{\mathcal{A}}[t, T]$ обозначено множество квазистратегий первого игрока — отображений $\boldsymbol{a}\colon \mathcal{V}[t, T] \to \mathcal{U}[t, T]$, обладающих следующим свойством неупреждаемости: каковы бы ни были $v(\cdot)$, $v'(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$ и $t' \in [t, T]$, если $v(\tau) = v'(\tau)$ при п.в. $\tau \in [t, t']$, то для $u(\cdot) = \boldsymbol{a}[v(\cdot)](\cdot)$ и $u'(\cdot) = \boldsymbol{a}[v'(\cdot)](\cdot)$ при п.в. $\tau \in [t, t']$ выполняется равенство $u(\tau) = u'(\tau)$. Множество $\boldsymbol{\mathcal{B}}[t, T]$ определяется симметричным образом. Заметим, что величина цены игры представляет собой функционал $\rho\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$, который будем называть функционалом цены.

Квазистратегии игроков, будучи удобным инструментом при проведении теоретических рассуждений, довольно сложны в реализации. В этой связи в диссертации разрабатываются методы построения оптимальных позиционных стратегий, более приемлемых с практической точки зрения.

Позиционной стратегией управления первого игрока в дифференциальной игре (1), (4) называется всякое отображение

$$G_n^{\alpha\circ} \times (0, +\infty) \ni ((t, w(\cdot)), \varepsilon) \mapsto U(t, w(\cdot), \varepsilon) \in P,$$

где число ε имеет смысл параметра точности. Пусть зафиксированы начальная позиция $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$, число $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta = \{\tau_j\}_{j=1}^{k+1}$ промежутка $[t, T]$, то есть $\tau_1 = t$, $\tau_j < \tau_{j+1}$ для всех $j \in \overline{1, k}$ и $\tau_{k+1} = T$. Тройка (U, ε, Δ) называется законом управления первого игрока. Этот закон последовательно по шагам разбиения Δ формирует кусочно-постоянное управление первого игрока $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$ по правилу

$$u(\tau) = U(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \ j \in \overline{1, k},$$

и, формально, $u(T) = \bar{u}$ для некоторого фиксированного $\bar{u} \in P$. В паре с управлением второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$ закон (U, ε, Δ) однозначно определяет управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$, движение $x(\cdot) = x(\cdot; t, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ системы (1), и значение $J(t, w(\cdot), (U, \varepsilon, \Delta), v(\cdot))$ показателя качества (4).

Позиционная стратегия управления первого игрока U° называется оптимальной для начальной позиции $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{\Delta \in \Pi_\delta[t,T]} \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}[t,T]} J\big(t, w(\cdot), (U^\circ, \varepsilon, \Delta), v(\cdot)\big) = \rho_-(t, w(\cdot)),$$

где $\Pi_\delta[t,T]$ — множество разбиений $\Delta = \{\tau_j\}_{j=1}^{k+1}$ промежутка $[t,T]$, удовлетворяющих условию $\max\{\tau_{j+1} - \tau_j \colon j \in \overline{1,k}\} \leqslant \delta$.

Понятие оптимальной позиционной стратегии управления второго игрока V° вводится симметричным образом.

Заметим, что в литературе, как правило, в качестве начального рассматривается момент времени $t = 0$, совпадающий с нижним пределом интегрирования в определении дробной производной (2). Соответствующее начальное условие для системы (1) тогда имеет более простой и естественный вид: $x(0) = w_*$, где вектор $w_* \in \mathbb{R}^n$ играет роль начального состояния системы. Данной ситуации отвечает начальная позиция $(0, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$, где функция $w\colon [0,0] \to \mathbb{R}^n$ определяется равенством $w(0) = w_*$. Договоримся в этом случае начальной позицией считать саму пару $(0, w_*)$. Подчеркнем, однако, что при формализации конструкций динамического программирования в дифференциальной игре (1), (4) возникает необходимость в качестве начального рассматривать произвольный промежуточный момент времени $t \in (0,T]$. С учетом этого обстоятельства постановка игры в диссертации сразу же приводится для произвольной позиции $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$, а не только для частного случая позиций вида $(0, w_*)$, где $w_* \in \mathbb{R}^n$.

В теории позиционных дифференциальных игр основу построения оптимальных стратегий управления игроков составляет правило экстремального прицеливания. В **разделе 5** устанавливается, что для системы (1) это правило имеет такой же вид, как и в классическом случае систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако доказательство того факта, что это правило позволяет гарантировать определенные свойства близости двух движений системы (1) при использовании соответствующей процедуры взаимного прицеливания, имеет свою специфику.

В частности, важную роль в этом доказательстве играет следующая оценка сверху дробной производной композиции выпуклой (более точно, квадратичной) функции Ляпунова $W\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и функции $x(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Теорема 5.2. *Пусть функция $W\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:* (i) *функция W выпукла и $W(0) = 0$;* (ii) *функция W дифференцируема;* (iii) *для любого $R > 0$ существует $\lambda_W > 0$ такое, что для всех x, $x' \in B(R)$*

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial x}(x) - \frac{\partial W}{\partial x}(x') \right\| \leqslant \lambda_W \|x - x'\|.$$

Тогда, какова бы ни была функция $x(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, $x(0) = 0$, для соответствующей композиции $\mu(\tau) = W(x(\tau))$, $\tau \in [0,T]$, выполнено включение $\mu(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R})$ и при п.в. $\tau \in [0,T]$ имеет место оценка

$$({}^C D^\alpha \mu)(\tau) \leqslant \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}(x(\tau)), ({}^C D^\alpha x)(\tau) \right\rangle.$$

В том числе, для функции $W(x) = \|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, получаем

Следствие 5.1. *Пусть* $x(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, $x(0) = 0$ *и* $\mu(\tau) = \|x(\tau)\|^2$, $\tau \in [0,T]$. *Тогда* $\mu(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R})$ *и*

$$({}^C D^\alpha \mu)(\tau) \leqslant 2\langle x(\tau), ({}^C D^\alpha x)(\tau)\rangle \quad \text{при п.в. } \tau \in [0,T].$$

Отметим, что теорема 5.2 и следствие 5.1 уточняют результаты[48,49,50] на случай функций $x(\cdot)$ из $AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, которые могут не иметь производной первого порядка $\dot{x}(\tau) = \mathrm{d}x(\tau)/\mathrm{d}\tau$ ни в одной точке $\tau \in [0,T]$.

Пусть $R > 0$ и w_*, $\widetilde{w}_* \in B(R)$. Рассмотрим два движения системы (1): движение $x(\cdot) = x(\cdot; 0, w_*, u(\cdot), v(\cdot))$ отвечает начальной позиции $(0, w_*)$ и порождается управлениями игроков $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$; движение $\widetilde{x}(\cdot) = x(\cdot; 0, \widetilde{w}_*, \widetilde{u}(\cdot), \widetilde{v}(\cdot))$ отвечает начальной позиции $(0, \widetilde{w}_*)$ и порождается управлениями игроков $\widetilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ и $\widetilde{v}(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$. Предположим, что $u(\cdot)$ и $\widetilde{v}(\cdot)$ формируются согласно следующей процедуре взаимного прицеливания на базе некоторого разбиения $\Delta = \{\tau_j\}_{j=1}^{k+1}$ промежутка $[0,T]$:

$$\begin{aligned} u(\tau) = u_j &\in \arg\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle x(\tau_j) - \widetilde{x}(\tau_j), f(\tau_j, x(\tau_j), u, v)\rangle, \\ \widetilde{v}(\tau) = \widetilde{v}_j &\in \arg\max_{\widetilde{v} \in Q} \min_{\widetilde{u} \in P} \langle x(\tau_j) - \widetilde{x}(\tau_j), f(\tau_j, x(\tau_j), \widetilde{u}, \widetilde{v})\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

для всех $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, $j \in \overline{1,k}$.

Сформулируем отдельно предположение 4.3 при $\chi \equiv 0$.

Предположение 5.1. Справедливо равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(\tau, x, u, v)\rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(\tau, x, u, v)\rangle, \quad \tau \in [0,T], \ x, s \in \mathbb{R}^n.$$

Имеет место

Теорема 5.3. *Пусть выполнены предположения* 4.1 *и* 5.1. *Тогда для любых* $R > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют* $M > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что, каковы бы ни были* w_*, $\widetilde{w}_* \in B(R)$, $\Delta \in \Pi_\delta[0,T]$ *и* $v(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$, $\widetilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$, *если* $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$, $\widetilde{v}(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ *формируются согласно процедуре* (5), *то для соответствующих движений* $x(\cdot) = x(\cdot; 0, w_*, u(\cdot), v(\cdot))$ *и* $\widetilde{x}(\cdot) = x(\cdot; 0, \widetilde{w}_*, \widetilde{u}(\cdot), \widetilde{v}(\cdot))$ *системы* (1) *будет выполнено неравенство*

$$\|x(\tau) - \widetilde{x}(\tau)\| \leqslant \varepsilon + M\|w_* - \widetilde{w}_*\|, \quad \tau \in [0,T].$$

Отметим, что если в теореме 5.3 взять $w_* = \widetilde{w}_*$, то движения $x(\cdot)$ и $\widetilde{x}(\cdot)$ будут близки в том смысле, что $\|x(\tau) - \widetilde{x}(\tau)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $\tau \in [0,T]$.

---

[48] Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения, 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664.

[49] Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Lyapunov functions for fractional order systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19, no. 9. P. 2951–2957.

[50] Chen W., Dai H., Song Y., Zhang Z. Convex Lyapunov functions for stability analysis of fractional order systems // IET Control Theory Appl., 2017. Vol. 11, no. 7. P. 1070–1074.

Основной подход, развиваемый в диссертации для исследования дифференциальной игры (1), (4), состоит в изучении отвечающего этой игре уравнения, которое играет роль, аналогичную роли уравнений Гамильтона–Якоби в дифференциальных играх для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Чтобы выписать данное уравнение, в **разделе 6** для функционалов, определенных на G_n^α, вводятся понятия ci-дифференцируемости порядка α и ci-гладкости порядка α.

Функционал $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ называется коинвариантно (ci-) дифференцируемым порядка α в точке $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$, если существуют $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любой функции $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ при всех $\tau \in (t, T)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} &\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) \\ &\quad = \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))(\tau - t) + \left\langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), \int_t^\tau ({}^C D^\alpha x)(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right\rangle + o(\tau - t), \end{aligned}$$

где $x_\tau(\cdot)$ — сужение $x(\cdot)$ на $[0, \tau]$, функция $o(\delta) \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, может зависеть от $x(\cdot)$ и $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to 0^+$. Величины $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ и $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ называются ci-производной по t порядка α и ci-градиентом порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$.

Функционал $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ называется ci-гладким порядка α, если он непрерывен, ci-дифференцируем порядка α во всех точках $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$, и отображения $\partial_t^\alpha \varphi\colon G_n^{\alpha\circ} \to \mathbb{R}$, $\nabla^\alpha \varphi\colon G_n^{\alpha\circ} \to \mathbb{R}^n$ непрерывны.

Следующая лемма позволяет вычислять полную производную ci-гладкого порядка α функционала вдоль движений системы (1).

Лемма 6.1. *Пусть функционал $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ является ci-гладким порядка α. Тогда, каковы бы ни были $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$, $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ и $\theta \in [t, T)$, функция $\omega(\tau) = \varphi(\tau, x_\tau(\cdot))$, $\tau \in [t, T]$, непрерывна на $[t, T]$ и удовлетворяет условию Липшица на $[t, \theta]$. Более того, справедливо равенство*

$$\dot{\omega}(\tau) = \partial_t^\alpha \varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) + \langle \nabla^\alpha \varphi(\tau, x_\tau(\cdot)), ({}^C D^\alpha x)(\tau) \rangle \quad \text{при п.в. } \tau \in [t, \theta].$$

В **разделе 7** дифференциальной игре (1), (4) ставится в соответствие уравнение Гамильтона–Якоби

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H_*\big(t, w(t), \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))\big) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}, \tag{6}$$

и рассматривается задача Коши для этого уравнения при краевом условии

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n). \tag{7}$$

Неизвестным в этой задаче является функционал $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$, функция H_*, называемая гамильтонианом, определяется равенствами

$$\begin{aligned} H_*(t, x, s) &= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \big(\langle s, f(t, x, u, v)\rangle + \chi(t, x, u, v)\big) \\ &= \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \big(\langle s, f(t, x, u, v)\rangle + \chi(t, x, u, v)\big), \quad t \in [0, T], \ x, s \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

а краевой функционал σ взят из показателя качества (4).

Предположим, что существует функционал $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$, который является ci-гладким порядка α и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (6) и краевому условию (7). Определим позиционные стратегии управления игроков в дифференциальной игре (1), (4) экстремальным прицеливанием в направлении ci-градиента порядка α этого решения φ:

$$\begin{aligned} U^\circ(t, w(\cdot)) &\in \arg\min_{u\in P} \max_{v\in Q} \big(\langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), f(t, w(t), u, v)\rangle + \chi(t, w(t), u, v)\big), \\ V^\circ(t, w(\cdot)) &\in \arg\max_{v\in Q} \min_{u\in P} \big(\langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), f(t, w(t), u, v)\rangle + \chi(t, w(t), u, v)\big) \end{aligned} \tag{8}$$

для всех $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$. В отличие от общего случая стратегии U° и V° не зависят от параметра точности ε.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены предположения* 4.1–4.3 *и пусть существует ci-гладкое порядка α решение $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ задачи Коши* (6), (7). *Тогда дифференциальная игра* (1), (4) *имеет цену, функционал цены ρ этой игры совпадает с функционалом φ, а позиционные стратегии управления игроков U° и V°, определенные по функционалу φ согласно* (8), *являются оптимальными для любой начальной позиции $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_n^\alpha$.*

Следует отметить, что предположение о существовании ci-гладкого порядка α решения задачи Коши (6), (7) является ограничительным. Тем не менее, на основе разработанной техники удается провести исследование и получить явные формулы для функционала цены и оптимальных позиционных стратегий управления игроков, например, в линейно-квадратичных дифференциальных играх для систем дробного порядка. В **разделе 8** для простоты изложения соответствующие результаты приводятся в частном случае линейно-квадратичной задачи оптимального управления.

Третья глава посвящена развитию минимаксного подхода к понятию обобщенного решения задачи Коши для (абстрактного) уравнения Гамильтона–Якоби с ci-производными порядка α

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H\big(t, w(t), \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))\big) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}, \tag{9}$$

при краевом условии

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n). \tag{10}$$

Предположение 9.1. Гамильтониан $H\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и краевой функционал $\sigma\colon AC^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям: (i) функция H непрерывна; (ii) существует $c_H > 0$ такое, что

$$|H(t,x,s) - H(t,x,s')| \leqslant c_H(1 + \|x\|)\|s - s'\|, \quad t \in [0,T], \; x, s, s' \in \mathbb{R}^n;$$

(iii) для любого $R > 0$ существует $\lambda_H > 0$ такое, что

$$|H(t,x,s) - H(t,x',s)| \leqslant \lambda_H(1 + \|s\|)\|x - x'\|$$

для всех $t \in [0,T]$, x, $x' \in B(R)$, $s \in \mathbb{R}^n$; (iv) функционал σ непрерывен.

В **разделе 9** вводятся понятия верхнего, нижнего и минимаксного решений задачи Коши (9), (10).

Для $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$ и $s \in \mathbb{R}^n$ через $\mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E_{c_H}, s)$ обозначим множество решений $(x(\cdot), z(\cdot))$ дифференциального включения

$$\big(({}^C D^\alpha x)(\tau), \dot{z}(\tau)\big) \in E_{c_H}(\tau, x(\tau), s), \quad \tau \in [t,T], \ (x(\tau), z(\tau)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (11)$$

при начальном условии $x_t(\cdot) = w(\cdot)$ и $z(\tau) = 0$, $\tau \in [0,t]$. Здесь

$$E_{c_H}(t,x,s) = \big\{(f,g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon \|f\| \leqslant c_H(1 + \|x\|),\ g = \langle s, f\rangle - H(t,x,s)\big\}$$

для всех $t \in [0,T]$ и x, $s \in \mathbb{R}^n$, c_H — число из предположения 9.1, (ii). Каждая пара $(x(\cdot), z(\cdot))$ называется (обобщенной) характеристикой уравнения (9).

Функционал $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ называется верхним минимаксным решением задачи Коши (9), (10), если он полунепрерывен снизу, удовлетворяет краевому условию $\varphi(T, w(\cdot)) \geqslant \sigma(w(\cdot))$, $w(\cdot) \in AC^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$, и обладает следующим свойством: для любых $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$, $\theta \in (t,T]$, $s \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует характеристика $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E_{c_H}, s)$ такая, что

$$\varphi(\theta, x_\theta(\cdot)) - z(\theta) \leqslant \varphi(t, w(\cdot)) + \varepsilon.$$

Функционал φ называется нижним минимаксным решением этой задачи, если он полунепрерывен сверху, удовлетворяет условию $\varphi(T, w(\cdot)) \leqslant \sigma(w(\cdot))$, $w(\cdot) \in AC^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$, и для любых $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$, $\theta \in (t,T]$, $s \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует характеристика $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}(t, w(\cdot), E_{c_H}, s)$ такая, что

$$\varphi(\theta, x_\theta(\cdot)) - z(\theta) \geqslant \varphi(t, w(\cdot)) - \varepsilon.$$

Функционал φ называется минимаксным решением задачи Коши (9), (10), если он одновременно является верхним и нижним минимаксным решением этой задачи.

Раздел 10 посвящен доказательству следующей теоремы, иногда называемой в теории уравнений Гамильтона–Якоби принципом сравнения.

Теорема 10.1. *Пусть выполнено предположение* 9.1. *Тогда для любых верхнего φ_+ и нижнего φ_- минимаксных решений задачи Коши* (9), (10) *справедливо неравенство $\varphi_-(t, w(\cdot)) \leqslant \varphi_+(t, w(\cdot))$ для всех $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$.*

Ключевым элементом доказательства является построение подходящего функционала Ляпунова–Красовского. Подчеркнем, что функционалы, предложенные ранее для уравнений Гамильтона–Якоби с *ci*-производными первого порядка, оказываются напрямую неприменимыми. Более того, использование непосредственных аналогов этих функционалов для рассматриваемого случая ci-производных порядка α также не позволяет получить желаемый результат.

Опишем предложенное построение. Пусть $R > 0$. Выберем λ_H согласно предположению 9.1, (iii). Для $\beta \in [0, 1-\alpha)$, $\mu > 0$ и $(t, w(\cdot)) \in G_n$ обозначим

$$\mathbf{V}^*_{\beta,\mu}(t, w(\cdot)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{e^{-\mu(t-\tau)^{\alpha+\beta}}}{(t-\tau)^{\alpha+\beta}} \int_0^\tau \frac{\|w(\xi) - w(0)\|^2}{(\tau-\xi)^{1-\beta}} \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\tau,$$

если $\beta > 0$, и, если $\beta = 0$,

$$\mathbf{V}^*_{0,\mu}(t, w(\cdot)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{e^{-\mu(t-\tau)^{\alpha}} \|w(\tau) - w(0)\|^2}{(t-\tau)^{\alpha}} \,\mathrm{d}\tau.$$

Возьмем $m \in \mathbb{N}$, для которого $\alpha \in [2^{-m}, 2^{-(m-1)})$, положим $\beta_i = (2^{i-1}-1)\alpha$ для всех $i \in \overline{1,m}$ и определим числа $\mu_i > 0$, $i \in \overline{1,m}$:

$$\mu_1 = 4m\Gamma(1-\alpha)\lambda_H, \quad \mu_{i+1} = \frac{\mu_i^2 \Gamma(\alpha+\beta_i+1)\Gamma(1-\alpha-\beta_{i+1})}{2\Gamma(1-\alpha-\beta_i)}, \quad i \in \overline{1, m-1}.$$

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$\mathbf{V}_*(t, w(\cdot)) = \frac{e^{-\lambda_* t}}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{V}^*_{\beta_i,\mu_i}(t, w(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G_n,$$

где

$$\lambda_* = \frac{\mu_m^2 \Gamma(\alpha+\beta_m+1)\Gamma(1-\alpha) T^{2\alpha+2\beta_m-1}}{2\Gamma(1-\alpha-\beta_m)\Gamma(\alpha+2\beta_m)} e^{\mu_1 T^\alpha}.$$

Зададимся числом $\varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющим условию $\varepsilon_0 \leqslant 2e^{-(\lambda_H + \lambda_*/2)T}$. Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ определим функционал Ляпунова–Красовского

$$\nu_\varepsilon(t, w(\cdot)) = \frac{e^{-\lambda_H t}}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + \mathbf{V}_*(t, w(\cdot))}, \quad (t, w(\cdot)) \in G_n, \tag{12}$$

а также вспомогательные отображения

$$p_\varepsilon(t, w(\cdot)) = -\frac{\lambda_H e^{-\lambda_H t}}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + \mathbf{V}_*(t, w(\cdot))} - \frac{2\lambda_H e^{-(\lambda_H+\lambda_*)t}}{\varepsilon} \frac{\|w(t) - w(0)\|^2}{\sqrt{\varepsilon^4 + \mathbf{V}_*(t, w(\cdot))}},$$

$$s_\varepsilon(t, w(\cdot)) = \frac{e^{-(\lambda_H+\lambda_*)t}}{\varepsilon} \frac{w(t) - w(0)}{\sqrt{\varepsilon^4 + \mathbf{V}_*(t, w(\cdot))}}, \quad (t, w(\cdot)) \in G_n. \tag{13}$$

Установлены свойства отображений ν_ε, p_ε и s_ε, позволяющие использовать их для доказательства теоремы 10.1.

В **разделе 11** с опорой на теорему 10.1 доказывается

Теорема 11.1. *Пусть выполнено предположение* 9.1. *Тогда минимаксное решение задачи Коши* (9), (10) *существует и единственно.*

Кроме того, проверяется, что минимаксное решение φ непрерывно зависит от изменений гамильтониана H и краевого функционала σ.

В **разделе 12** приводится ряд критериев для верхних, нижних и минимаксных решений задачи Коши (9), (10) при предположении 9.1. Во-первых, доказывается, что в определениях верхних и нижних решений вместо дифференциального включения (11) можно использовать произвольные дифференциальные включения, правая часть которых задается при помощи так называемых характеристических комплексов, связанных с гамильтонианом H. Во-вторых, получаемые таким образом нелокальные условия выражаются в более удобной для проверки инфинитезимальной форме. С этой целью для функционала $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$, точки $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$ и непустого выпуклого компакта $F \subset \mathbb{R}^n$ определяются величины

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_-^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)); F\} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{x(\cdot) \in \Omega} \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\delta}, \\ \mathrm{d}_+^\alpha\{\varphi(t, w(\cdot)); F\} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x(\cdot) \in \Omega} \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\delta}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\Omega = \Omega(t, w(\cdot), F, \varepsilon)$ — множество функций $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ таких, что $({}^C D^\alpha x)(\tau) \in [F]^\varepsilon$ при п.в. $\tau \in [t, T]$, где $[F]^\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность F в $\mathbb{R}^n$. Величины (14) называются нижней и верхней производными порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$ по многозначному направлению F.

В частности, доказывается следующий критерий.

Теорема 12.3. *При предположении* 9.1 *функционал* $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ *будет минимаксным решением задачи Коши* (9), (10) *в том и только том случае, когда* φ *непрерывен, удовлетворяет краевому условию* (10), *и для любых* $s \in \mathbb{R}^n$ *и* $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$ *выполнена пара дифференциальных неравенств*

$$\mathrm{d}_-^\alpha\Big\{\varphi(t, w(\cdot)) - \int_0^t \langle s, ({}^C D^\alpha w)(\tau)\rangle\, \mathrm{d}\tau; B\big(c_H(1 + \|w(t)\|)\big)\Big\} + H(t, w(t), s) \leqslant 0,$$
$$\mathrm{d}_+^\alpha\Big\{\varphi(t, w(\cdot)) - \int_0^t \langle s, ({}^C D^\alpha w)(\tau)\rangle\, \mathrm{d}\tau; B\big(c_H(1 + \|w(t)\|)\big)\Big\} + H(t, w(t), s) \geqslant 0,$$

где c_H *— число из предположения* 9.1, (ii).

В **разделе 13** с учетом связи между производными порядка α по многозначным направлениям и ci-производными порядка α устанавливается согласованность минимаксного решения задачи Коши (9), (10) с понятием решения этой задачи в классическом смысле.

Теорема 13.1. *Пусть выполнено предположение* 9.1. *Тогда:*

(i) *Если непрерывный функционал* $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ ci*-дифференцируем порядка* α *в каждой точке* $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$, *удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби* (9) *и краевому условию* (10), *то он является минимаксным решением задачи Коши* (9), (10).

(ii) *Если минимаксное решение задачи Коши* (9), (10) *ci-дифференцируемо порядка* α *в некоторой точке* $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$, *то оно в этой точке удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби* (9).

Раздел 14 четвертой главы посвящен доказательству существования цены дифференциальной игры (1), (4) и оптимальных позиционных стратегий управления игроков при предположениях 4.1–4.3.

Зафиксируем начальную позицию $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_n^\alpha$. Обозначим

$$X_*(t_*, w_*(\cdot)) = \big\{x(\cdot) \in X(t_*, w_*(\cdot))\colon \\ \|({}^C D^\alpha x)(\tau)\| \leqslant c_f(1 + \|x(\tau)\|) \text{ при п.в. } \tau \in [t_*, T]\big\},$$

где c_f — число из условия (iii) предположения 4.1. Возьмем $R > 0$, для которого $\|x(\tau)\| \leqslant R$, $\tau \in [0, T]$, $x(\cdot) \in X_*(t_*, w_*(\cdot))$, и определим соответствующие число $\varepsilon_0 > 0$ и отображения ν_ε, p_ε, s_ε для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ согласно (12), (13).

Рассмотрим отвечающую дифференциальной игре (1), (4) задачу Коши (6), (7). По теореме 11.1 у этой задачи существует единственное минимаксное решение $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$. Для $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выберем

$$y^-(\cdot; t, w(\cdot), \varepsilon) \in \mathop{\arg\min}_{y(\cdot) \in Y_*(t)} \big(\varphi(t, y(\cdot)) + \nu_\varepsilon(t, w(\cdot) - y(\cdot))\big),$$

где $Y_*(t) = \{y(\cdot) \in AC^\alpha([0, t], \mathbb{R}^n)\colon y(\cdot) = x_t(\cdot),\ x(\cdot) \in X_*(t_*, w_*(\cdot))\}$, после чего положим $s^-(t, w(\cdot), \varepsilon) = s_\varepsilon(t, w(\cdot) - y^-(\cdot; t, w(\cdot), \varepsilon))$. Вектор $s^-(t, w(\cdot), \varepsilon)$ выступает в качестве экстремального направления, используемого вместо вектора $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ при построении позиционной стратегии управления первого игрока согласно правилу экстремального прицеливания (8). Симметричным образом с точки зрения второго игрока определим экстремальное направление $s^+(t, w(\cdot), \varepsilon) = s_\varepsilon(t, y^+(\cdot; t, w(\cdot), \varepsilon) - w(\cdot))$, где

$$y^+(\cdot; t, w(\cdot), \varepsilon) \in \mathop{\arg\max}_{y(\cdot) \in Y_*(t)} \big(\varphi(t, y(\cdot)) - \nu_\varepsilon(t, y(\cdot) - w(\cdot))\big).$$

Итак, рассмотрим следующие стратегии управления игроков:

$$\begin{aligned} U^\circ(t, w(\cdot), \varepsilon) &\in \mathop{\arg\min}_{u \in P} \max_{v \in Q} \big(\langle s^-(t, w(\cdot), \varepsilon), f(t, w(t), u, v)\rangle + \chi(t, w(t), u, v)\big), \\ V^\circ(t, w(\cdot), \varepsilon) &\in \mathop{\arg\max}_{v \in Q} \min_{u \in P} \big(\langle s^+(t, w(\cdot), \varepsilon), f(t, w(t), u, v)\rangle + \chi(t, w(t), u, v)\big) \end{aligned} \tag{15}$$

для всех $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Справедлива

Теорема 14.1. *Пусть выполнены предположения* 4.1–4.3. *Тогда дифференциальная игра* (1), (4) *имеет цену, функционал цены* ρ *этой игры совпадает с минимаксным решением* φ *соответствующей задачи Коши* (6), (7), *и для любой начальной позиции* $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_n^\alpha$ *позиционные стратегии управления игроков* U° *и* V°, *определяемые согласно* (15), *являются оптимальными.*

Раздел 15 посвящен выводу инфинитезимальных характеризаций функционала цены ρ дифференциальной игры (1), (4), при этом основное внимание уделяется случаю, когда интегральное слагаемое в показателе качества (4) отсутствует, то есть рассматривается дифференциальная игра для динамической системы (1) и показателя качества

$$J(t, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), \tag{16}$$

где $(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$ и $x(\cdot) = x(\cdot; t, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$.

Для $\tau \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, $v \in Q$ обозначим

$$F^+(\tau, x, v) = \mathrm{co}\big\{f(\tau, x, u', v) \colon u' \in P\big\},$$
$$F^-(\tau, x, u) = \mathrm{co}\big\{f(\tau, x, u, v') \colon v' \in Q\big\},$$

где $\mathrm{co}\, A$ — выпуклая оболочка множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Имеет место

Теорема 15.2. *Если выполнены предположения* 4.1, 5.1 *и условие* (i) *предположения* 4.2, *то функционал* $\varphi \colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ *будет функционалом цены дифференциальной игры* (1), (16) *в том и только том случае, когда* φ *непрерывен, удовлетворяет краевому условию* (7), *и в каждой точке* $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$ *выполнена пара дифференциальных неравенств*

$$\begin{aligned} &\sup_{v \in Q} \mathrm{d}_-^\alpha \big\{\varphi(t, w(\cdot)); F^+(t, w(t), v)\big\} \leqslant 0, \\ &\inf_{u \in P} \mathrm{d}_+^\alpha \big\{\varphi(t, w(\cdot)); F^-(t, w(t), u)\big\} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Дальнейшая часть раздела посвящена тому, чтобы в неравенствах (17) перейти от производных порядка α по многозначным направлениям к более простым для вычисления производным порядка α по (однозначным) направлениям. Возможность такого перехода обосновывается при дополнительном предположении о том, что функционал σ из показателя качества (16) удовлетворяет следующему локальному условию Липшица.

Предположение 15.1. Для любого компакта $X \subset AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n)$ найдется $\lambda_\sigma > 0$ такое, что для всех $x(\cdot)$, $x'(\cdot) \in X$

$$|\sigma(x(\cdot)) - \sigma(x'(\cdot))| \leqslant \lambda_\sigma \bigg(\|x(T) - x'(T)\| + \int_0^T \|x(\tau) - x'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \bigg).$$

Нижней и верхней производными порядка α функционала $\varphi \colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ в точке $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$ по (однозначному) направлению $f \in \mathbb{R}^n$ называются соответственно следующие величины:

$$\begin{aligned} \partial_-^\alpha \{\varphi(t, w(\cdot)); f\} &= \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{\varphi(t + \delta, x_{t+\delta}^{(f)}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\delta}, \\ \partial_+^\alpha \{\varphi(t, w(\cdot)); f\} &= \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\varphi(t + \delta, x_{t+\delta}^{(f)}(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\delta}. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь

$$x^{(f)}(\tau) = x^{(f)}(\tau; t, w(\cdot)) = \begin{cases} w(\tau), & \text{если } \tau \in [0, t], \\ a(\tau; t, w(\cdot)) + \dfrac{(\tau - t)^\alpha f}{\Gamma(\alpha + 1)}, & \text{если } \tau \in (t, T], \end{cases}$$

где функция $a(\cdot; t, w(\cdot))$ определяется согласно (3).

Для функционала $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ рассмотрим следующее условие Липшица по функциональной переменной $w(\cdot)$: для любого компакта $K \subset G_n^\alpha$ найдется $\lambda_\varphi > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} &|\varphi(t, w(\cdot)) - \varphi(t, w'(\cdot))| \\ &\leqslant \lambda_\varphi \biggl(\|a(T) - a'(T)\| + \int_0^t \|w(\tau) - w'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau + \int_t^T \frac{\|a(\tau) - a'(\tau)\|}{(T - \tau)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\tau \biggr) \end{aligned} \tag{19}$$

для всех $(t, w(\cdot))$, $(t, w'(\cdot)) \in K$, где $a(\cdot) = a(\cdot; t, w(\cdot))$ и $a'(\cdot) = a(\cdot; t, w'(\cdot))$.

Справедлива

Теорема 15.3. *При предположениях* 4.1, 5.1 *и* 15.1 *функционал* $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ *будет функционалом цены дифференциальной игры* (1), (16) *в том и только том случае, когда* φ *непрерывен, удовлетворяет условию Липшица* (19) *и краевому условию* (7), *и в каждой точке* $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$ *выполнена пара дифференциальных неравенств*

$$\begin{aligned} \sup_{v \in Q} \inf_{f \in F^+(t, w(t), v)} \partial_-^\alpha \{\varphi(t, w(\cdot)); f\} \leqslant 0, \\ \inf_{u \in P} \sup_{f \in F^-(t, w(t), u)} \partial_+^\alpha \{\varphi(t, w(\cdot)); f\} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Согласно своему определению (18) производные $\partial_\mp^\alpha \{\varphi(t, w(\cdot)); f\}$ могут принимать несобственные значения. Тем не менее, проверяется, что в условиях теоремы 15.3 данные производные с необходимостью принимают только конечные значения, причем в неравенствах (20) инфимумы и супремумы можно заменить на минимумы и максимумы соответственно.

В **разделе 16** для задачи оптимального управления системой дробного порядка (которая может быть формально включена в соответствующую дифференциальную игру вида (1), (16) с фиктивным вторым игроком) и при некоторых дополнительных предположениях проводится дальнейший анализ инфинитезимальных свойств функционала оптимального результата (аналога функционала цены). Даются приложения полученных результатов для построения оптимальной позиционной стратегии управления и для установления связи между изучаемыми уравнениями Гамильтона–Якоби и соответствующим принципом максимума Понтрягина.

В **разделе 17** затронут вопрос о развитии вязкостного подхода к понятию обобщенного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби (9) и краевого условия (10) при предположениях 9.1 и 15.1.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим компактное в G_n^α множество

$$G^{[k]} = \big\{(t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha\colon \\ \|w(0)\| \leqslant k,\ \|({}^C D^\alpha w)(\tau)\| \leqslant k c_H (1 + \|w(\tau)\|) \text{ при п.в. } \tau \in [0, t]\big\},$$

где c_H — число из предположения 9.1, (ii). Отметим, что объединение множеств $G^{[k]}$ по всем $k \in \mathbb{N}$ совпадает с G_n^α.

Функционал $\varphi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$ называется вязкостным решением задачи Коши (9), (10), если он непрерывен, удовлетворяет условию Липшица (19), краевому условию (10) и обладает следующими двумя свойствами:

(i) Каковы бы ни были число $k \in \mathbb{N}$ и ci-гладкий порядка α тестовый функционал $\psi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$, если разница $\varphi - \psi$ достигает минимума на $G^{[k]}$ в некоторой точке $(t, w(\cdot)) \in G^{[k]} \cap G_n^{\alpha\circ}$, то в этой точке выполнено неравенство

$$\partial_t^\alpha \psi(t, w(\cdot)) + H\big(t, w(t), \nabla^\alpha \psi(t, w(\cdot))\big) \leqslant 0.$$

(ii) Каковы бы ни были число $k \in \mathbb{N}$ и ci-гладкий порядка α тестовый функционал $\psi\colon G_n^\alpha \to \mathbb{R}$, если разница $\varphi - \psi$ достигает максимума на $G^{[k]}$ в некоторой точке $(t, w(\cdot)) \in G^{[k]} \cap G_n^{\alpha\circ}$, то в этой точке выполнено неравенство

$$\partial_t^\alpha \psi(t, w(\cdot)) + H\big(t, w(t), \nabla^\alpha \psi(t, w(\cdot))\big) \geqslant 0.$$

В рамках раздела центральным является следующий результат о характеризации функционала цены дифференциальной игры (1), (4).

Следствие 17.1. *Пусть в дифференциальной игре* (1), (4) *выполнены предположение* 4.1, *условия* (ii) *и* (iii) *предположения* 4.2, *а также предположения* 4.3 *и* 15.1. *Тогда функционал цены ρ этой игры совпадает с единственным вязкостным решением φ задачи Коши* (6), (7).

Наиболее трудоемкая часть обоснования данного результата состоит в доказательстве единственности вязкостного решения, которое потребовало отыскания функционала Ляпунова–Красовского, позволяющего учесть особенности работы с уравнениями Гамильтона–Якоби с ci-производными порядка α. Подходящим оказался функционал

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_\varepsilon\big((t, w(\cdot)), (\tau, r(\cdot))\big) &= \big(\varepsilon^{\frac{2}{q-1}} + \|a(T; t, w(\cdot)) - a(T; \tau, r(\cdot))\|^2\big)^{\frac{q}{2}} \\ &\quad + \int_0^T \frac{\big(\varepsilon^{\frac{2}{q-1}} + \|a(\xi; t, w(\cdot)) - a(\xi; \tau, r(\cdot))\|^2\big)^{\frac{q}{2}}}{(T - \xi)^{(1-\alpha-\beta)q}} \, \mathrm{d}\xi \\ &\quad - \left(1 + \frac{T^{1-(1-\alpha-\beta)q}}{1 - (1 - \alpha - \beta)q}\right) \varepsilon^{\frac{q}{q-1}},\end{aligned}$$

где $(t, w(\cdot))$, $(\tau, r(\cdot)) \in G_n^\alpha$, $\varepsilon > 0$, $q = 2/(2 - \alpha) \in (1, 2)$, число $\beta > 0$ удовлетворяет условиям $\beta < 1 - \alpha$ и $\beta < \alpha/2$, функции $a(\cdot; t, w(\cdot))$ и $a(\cdot; \tau, r(\cdot))$ определяются согласно (3).

Хотя оптимальные позиционные стратегии управления игроков в дифференциальной игре (1), (4) могут быть найдены по формулам (15), важным представляется вопрос о разработке других методов построения оптимальных стратегий, которые в зависимости от конкретной рассматриваемой задачи могут оказаться эффективнее. В **пятой главе** представлены три таких конструкции. Всюду в главе в качестве начальных позиций системы (1) рассматриваются пары вида $(0, w_*)$ при $w_* \in B(R)$, где $R > 0$ зафиксировано.

В **разделе 18** дается модификация метода экстремального сдвига на сопутствующие точки при предположениях 4.1, 4.2, а также следующем предположении, более сильном по сравнению с предположением 4.3.

Предположение 18.1. Имеет место равенство

$$\begin{aligned}&\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\big(\langle s, f(\tau,x,u,v)\rangle + h\chi(\tau,x,u,v)\big)\\ &\quad=\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\big(\langle s, f(\tau,x,u,v)\rangle + h\chi(\tau,x,u,v)\big),\quad \tau\in[0,T],\ x,s\in\mathbb{R}^n,\ h\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Рассмотрим компактное в пространстве $AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ множество

$$\begin{aligned}X_* = \big\{&x(\cdot)\in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)\colon\\ &\|x(0)\|\leqslant R,\ \|({}^C D^\alpha x)(\tau)\|\leqslant c_f(1+\|x(\tau)\|)\ \text{при п.в.}\ \tau\in[0,T]\big\},\end{aligned}$$

где c_f — число из предположения 4.1, (iii). Определим $R_* > 0$ из условия $\|x(\tau)\|\leqslant R_*$, $\tau\in[0,T]$, $x(\cdot)\in X_*$, и по этому числу R_* выберем λ_f и λ_χ в соответствии предположением 4.1, (ii), и предположением 4.2, (iii). Учитывая предположение 4.2, (ii), возьмем $R^* > 0$, для которого

$$2|\chi(\tau,x,u,v)|\leqslant R^*,\quad \tau\in[0,T],\ x\in B(R_*),\ u\in P,\ v\in Q.$$

Положим

$$\begin{aligned}G_* &= \big\{(\tau, x_\tau(\cdot))\in G_n^\alpha\colon \tau\in[0,T],\ x(\cdot)\in X_*\big\},\\ G_*(t) &= \big\{w(\cdot)\in AC^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)\colon (t,w(\cdot))\in G_*\big\},\quad t\in[0,T].\end{aligned}$$

Для $(t, w(\cdot))\in G_*$ и $\varepsilon > 0$ через $\Omega(t,w(\cdot),\varepsilon)$ обозначим множество пар $(r(\cdot),h(\cdot))$ таких, что $r(\cdot)\in G_*(t)$, $r(0)=w(0)$, функция $h\colon[0,t]\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой R^*, $h(0)=0$ и выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\max_{\tau\in[0,t]}\bigg(&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\tau\frac{\|w(\xi)-r(\xi)\|^2}{(\tau-\xi)^\alpha}\,\mathrm{d}\xi + (h(\tau))^2\\ &-(2\lambda_f+\lambda_\chi)\int_0^\tau\|w(\xi)-r(\xi)\|^2\,\mathrm{d}\xi - \lambda_\chi\int_0^\tau (h(\xi))^2\,\mathrm{d}\xi\bigg)\leqslant t\varepsilon.\end{aligned}$$

По функционалу цены ρ дифференциальной игры (1), (4) определим позиционные стратегии управления U° первого и V° второго игроков следующим образом: для позиции $(t,w(\cdot))\in G_*\cap G_n^{\alpha\circ}$ и числа $\varepsilon > 0$ выберем сопутствующие точки

$$(r_\varepsilon^u(\cdot), h_\varepsilon^u(\cdot)) \in \mathop{\arg\min}_{(r(\cdot),h(\cdot))\in\Omega(t,w(\cdot),\varepsilon)} \big(\rho(t, r(\cdot)) - h(t)\big),$$
$$(r_\varepsilon^v(\cdot), h_\varepsilon^v(\cdot)) \in \mathop{\arg\max}_{(r(\cdot),h(\cdot))\in\Omega(t,w(\cdot),\varepsilon)} \big(\rho(t, r(\cdot)) + h(t)\big),$$

обозначим $s_\varepsilon^u(t) = w(t) - r_\varepsilon^u(t)$, $s_\varepsilon^v(t) = r_\varepsilon^v(t) - w(t)$ и положим

$$\begin{aligned} U^\circ(t, w(\cdot), \varepsilon) &\in \mathop{\arg\min}_{u\in P} \max_{v\in Q} \big(\langle s_\varepsilon^u(t), f(t, w(t), u, v)\rangle + h_\varepsilon^u(t)\chi(t, w(t), u, v)\big), \\ V^\circ(t, w(\cdot), \varepsilon) &\in \mathop{\arg\max}_{v\in Q} \min_{u\in P} \big(\langle s_\varepsilon^v(t), f(t, w(t), u, v)\rangle + h_\varepsilon^v(t)\chi(t, w(t), u, v)\big). \end{aligned} \tag{21}$$

Теорема 18.1. *Пусть в дифференциальной игре* (1), (4) *выполнены предположения* 4.1, 4.2 *и* 18.1 *и пусть зафиксировано* $R > 0$. *Тогда позиционные стратегии управления игроков* U° *и* V°, *определяемые согласно* (21), *оптимальны для любой начальной позиции* $(0, w_*)$ *при* $w_* \in B(R)$.

В **разделе 19** для дифференциальной игры (1), (16) при предположении 4.1, условии (i) предположения 4.2 и предположении 5.1 предлагается схема аппроксимации дифференциальными играми для динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа. Основу аппроксимации составляет понятие разности дробного порядка, участвующее в определении производных дробного порядка в смысле Грюнвальда–Летникова.

Зафиксируем $w_* \in B(R)$ и $h > 0$. Определим функцию

$$f_{w_*,h}(\tau, r(\cdot), p, q) = f\left(\tau, w_* + \frac{(\Delta_h^{1-\alpha} r)(\tau)}{h^{1-\alpha}}, p, q\right), \quad (\tau, r(\cdot)) \in G_n,\ p \in P,\ q \in Q.$$

Здесь $(\Delta_h^{1-\alpha} r)(\tau)$ — дробная разность порядка $1 - \alpha$ с шагом $h > 0$:

$$(\Delta_h^{1-\alpha} r)(\tau) = \sum_{i=0}^{[\tau/h]} (-1)^i \binom{1-\alpha}{i} r(\tau - ih),$$

где $[\tau/h]$ — целая часть числа τ/h, $\binom{1-\alpha}{i}$ — биномиальный коэффициент.

Рассмотрим аппроксимирующую динамическую систему, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered} \dot y(\tau) = f_{w_*,h}(\tau, y_\tau(\cdot), p(\tau), q(\tau)), \\ \tau \in [0, T],\ y(\tau) \in \mathbb{R}^n,\ p(\tau) \in P,\ q(\tau) \in Q, \end{gathered} \tag{22}$$

при начальном условии

$$y(0) = 0. \tag{23}$$

Здесь $y(\tau)$ — состояние системы в момент времени τ, $y_\tau(\cdot)$ — история движения системы на промежутке $[0, \tau]$, $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно.

Допустимыми управлениями первого и второго игроков на промежутке $[0,T]$ считаем произвольные функции $p(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ и $q(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$. Порожденное такими управлениями $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ движение аппроксимирующей системы (22) при начальном условии (23) определяем как липшицеву функцию $y\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, для которой выполнено равенство (23) и которая вместе с $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (22) при п.в. $\tau \in [0,T]$. В силу предположения 4.1 такое движение $y(\cdot) = y_{w_*,h}(\cdot; p(\cdot), q(\cdot))$ существует и единственно.

Рассмотрим процедуру взаимного прицеливания между системами (1) и (22), позволяющую обеспечить подходящие свойства близости их движений. Зафиксируем разбиение $\Delta = \{\tau_j\}_{j=1}^{k+1}$ промежутка $[0,T]$. Предположим, что управление первого игрока $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ в исходной системе (1) и управление второго игрока $q(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ в аппроксимирующей системе (22) формируются по шагам разбиения Δ согласно правилу

$$\begin{aligned} u(\tau) = u_j &\in \arg\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left\langle x(\tau_j) - w_* - \frac{(\Delta_h^{1-\alpha} y)(\tau_j)}{h^{1-\alpha}}, f(\tau_j, x(\tau_j), u, v) \right\rangle, \\ q(\tau) = q_j &\in \arg\max_{q \in Q} \min_{p \in P} \left\langle x(\tau_j) - w_* - \frac{(\Delta_h^{1-\alpha} y)(\tau_j)}{h^{1-\alpha}}, f_{w_*,h}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot), p, q) \right\rangle \end{aligned} \tag{24}$$

для всех $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1})$ и $j \in \overline{1,k}$.

Лемма 19.2. *Для любого $\kappa > 0$ существуют $h^{(u)} > 0$ и $\delta^{(u)} > 0$ такие, что, каковы бы ни были $w_* \in B(R)$, $h \in (0, h^{(u)}]$, $\Delta \in \Pi_{\delta^{(u)}}[0,T]$ и управления $v(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$, $p(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$, если управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$, $q(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ формируются согласно процедуре взаимного прицеливания (24), то для движений $x(\cdot) = x(\cdot; 0, w_*, u(\cdot), v(\cdot))$ исходной (1) и $y(\cdot) = y_{w_*,h}(\cdot; p(\cdot), q(\cdot))$ аппроксимирующей (22), (23) систем будет выполнено неравенство*

$$\left\| x(\tau) - w_* - \frac{(\Delta_h^{1-\alpha} y)(\tau)}{h^{1-\alpha}} \right\| \leqslant \kappa, \quad \tau \in [0,T].$$

Для аппроксимирующей системы (22), (23) рассмотрим дифференциальную игру на минимакс–максимин показателя качества

$$J_{w_*,h}(p(\cdot), q(\cdot)) = \sigma\left(w_* + \frac{(\Delta_h^{1-\alpha} y_{w_*,h})(\cdot)}{h^{1-\alpha}} \right), \tag{25}$$

где $p(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$, $q(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ и $y_{w_*,h}(\cdot) = y_{w_*,h}(\cdot; p(\cdot), q(\cdot))$. При сделанных предположениях в этой игре существуют цена $\rho_{w_*,h}$ и оптимальные позиционные стратегии управления игроков

$$\begin{aligned} G_n \times (0, +\infty) \ni ((t, r(\cdot)), \varepsilon) &\mapsto \mathbf{P}^\circ_{w_*,h}(t, r(\cdot), \varepsilon) \in P, \\ G_n \times (0, +\infty) \ni ((t, r(\cdot)), \varepsilon) &\mapsto \mathbf{Q}^\circ_{w_*,h}(t, r(\cdot), \varepsilon) \in Q. \end{aligned}$$

Определим процедуру управления первого игрока в исходной дифференциальной игре (1), (16), использующую оптимально управляемую аппроксимирующую систему (22), (23) в качестве поводыря. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta = \{\tau_j\}_{j=1}^{k+1}$ промежутка $[0,T]$. По шагам разбиения Δ первый игрок формирует управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ в исходной системе, а также управления $p(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$, $q(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ в аппроксимирующей системе следующим образом: $u(\cdot)$ и $q(\cdot)$ формируются согласно процедуре взаимного прицеливания (24), в то время как $p(\cdot)$ формируется законом управления $(\mathbf{P}^{\circ}_{w_*,h}, \varepsilon, \Delta)$ на базе оптимальной стратегии $\mathbf{P}^{\circ}_{w_*,h}$ по правилу

$$p(\tau) = \mathbf{P}^{\circ}_{w_*,h}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \ j \in \overline{1,k}.$$

Данную процедуру управления обозначим через $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(w_*, h, \varepsilon, \Delta)$. Процедура $\mathfrak{U}$ в паре с управлением второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ однозначно определяет соответствующее значение $J(0, w_*, \mathfrak{U}, v(\cdot))$ показателя качества (16). Симметричным образом определяется процедура управления второго игрока с поводырем $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(w_*, h, \varepsilon, \Delta)$ и вводится обозначение $J(0, w_*, u(\cdot), \mathfrak{V})$.

Теорема 19.1. *Пусть выполнены предположение* 4.1, *условие* (i) *предположения* 4.2 *и предположение* 5.1 *и пусть зафиксировано* $R > 0$. *Тогда:*

(i) *Для любого* $w_* \in B(R)$ *существует предел цен аппроксимирующих дифференциальных игр* (22), (23), (25)*:* $\lim_{h\to 0^+} \rho_{w_*,h} = \hat{\rho}_{w_*}$, *причем величина цены* $\rho(0, w_*)$ *исходной дифференциальной игры* (1), (16) *совпадает с предельным значением* $\hat{\rho}_{w_*}$.

(ii) *Для любого* $\zeta > 0$ *существуют число* $h_* > 0$ *и функции* $\varepsilon_*(h) > 0$, $h \in (0, h_*]$, *и* $\delta_*(\varepsilon, h) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(h)]$, $h \in (0, h_*]$, *такие, что справедливо следующее утверждение: каковы бы ни были* $w_* \in B(R)$, $h \in (0, h_*]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(h)]$ *и* $\Delta \in \Pi_{\delta_*(\varepsilon,h)}[0,T]$, *процедура управления с поводырем первого игрока* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(w_*, h, \varepsilon, \Delta)$ *при любом управлении второго игрока* $v(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ *гарантирует выполнение неравенства*

$$J(0, w_*, \mathfrak{U}, v(\cdot)) \leqslant \rho(0, w_*) + \zeta,$$

а процедура управления с поводырем второго игрока $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(w_*, h, \varepsilon, \Delta)$ *при любом управлении первого игрока* $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ *гарантирует выполнение неравенства*

$$J(0, w_*, u(\cdot), \mathfrak{V}) \geqslant \rho(0, w_*(\cdot)) - \zeta.$$

В **разделе 20** рассматривается дифференциальная игра вида (1), (4), в которой движение динамической системы описывается линейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто

$$\begin{gathered}({}^C D^{\alpha} x)(\tau) = A(\tau) x(\tau) + f(\tau, u(\tau), v(\tau)), \\ \tau \in [0,T], \ x(\tau) \in \mathbb{R}^n, \ u(\tau) \in P, \ v(\tau) \in Q,\end{gathered} \tag{26}$$

при начальном условии

$$x(0) = w_*, \quad w_* \in B(R), \tag{27}$$

а показатель качества имеет вид

$$J(0, w_*, u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma(x(T)) + \int_0^T \chi(\tau, u(\tau), v(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \tag{28}$$

где $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ и $x(\cdot) = x(\cdot; 0, w_*, u(\cdot), v(\cdot))$ — соответствующее движение системы (26), (27).

Предположение 20.1. Функции $A\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f\colon [0,T] \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$, $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\chi\colon [0,T] \times P \times Q \to \mathbb{R}$ непрерывны, и для любых $\tau \in [0,T]$, $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u\in P} \max_{v\in Q} \big(\langle s, f(\tau,u,v)\rangle + \chi(\tau,u,v)\big) = \max_{v\in Q} \min_{u\in P} \big(\langle s, f(\tau,u,v)\rangle + \chi(\tau,u,v)\big).$$

Здесь $\mathbb{R}^{n\times n}$ — пространство матриц размера $n \times n$ с подчиненной (операторной) нормой.

Чтобы вычислить величину цены и построить оптимальные позиционные стратегии управления игроков в игре (26)–(28), предлагается подход, основанный на ее сведении к вспомогательной дифференциальной игре для динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{z}(\tau) = f_*(\tau, p(\tau), q(\tau)), \quad \tau \in [0, T-\varepsilon], \ z(\tau) \in \mathbb{R}^n, \ p(\tau) \in P, \ q(\tau) \in Q, \tag{29}$$

при начальном условии

$$z(0) = z_*, \quad z_* \in \mathbb{R}^n, \tag{30}$$

и показателя качества

$$J_\varepsilon(z_*, p(\cdot), q(\cdot)) = \sigma(z(T-\varepsilon)) + \int_0^{T-\varepsilon} \chi(\tau, p(\tau), q(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \\ z_* \in \mathbb{R}^n, \ p(\cdot) \in \mathcal{U}[0, T-\varepsilon], \ q(\cdot) \in \mathcal{V}[0, T-\varepsilon]. \tag{31}$$

Здесь $\varepsilon \in (0,T)$ — параметр, $z(\tau)$ — текущее состояние системы, z_* — начальное состояние, $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно. Функция f_* определяется равенством

$$f_*(\tau, u, v) = \frac{\Phi(T,\tau) f(\tau,u,v)}{(T-\tau)^{1-\alpha}}, \quad \tau \in [0,T), \ u \in P, \ v \in Q.$$

Через $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$, где $\Omega = \{(\tau,\xi) \in [0,T] \times [0,T]\colon \tau \geqslant \xi\}$, обозначена фундаментальная матрица решений однородной системы, соответствующей (26), — непрерывная функция, которая при каждом $\tau \in [0,T]$ удовлетворяет линейному слабо сингулярному интегральному уравнению Вольтерра

$$\Phi(\tau,\xi) = \frac{\mathrm{Id}_n}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_\xi^\tau \frac{\Phi(\tau,\eta) A(\eta)}{(\tau-\eta)^{1-\alpha} (\eta-\xi)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}\eta, \quad \xi \in [0,\tau].$$

Здесь $\mathrm{Id}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная матрица. Движение вспомогательной системы (29) при начальном условии (30), порожденное управлениями $p(\cdot) \in \mathcal{U}[0, T-\varepsilon]$ и $q(\cdot) \in \mathcal{V}[0, T-\varepsilon]$, определяется как липшицева функция $z\colon [0, T-\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$, для которой выполнено равенство $z(0) = z_*$ и которая вместе с $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (29) при п.в. $\tau \in [0, T-\varepsilon]$. Такое движение $z(\cdot)$ существует и единственно.

При предположении 20.1 в дифференциальной игре (29)–(31) существуют цена $\rho_\varepsilon(z_*)$ и оптимальные позиционные стратегии управления игроков

$$[0, T-\varepsilon] \times \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \ni (t, z, \varkappa) \mapsto \mathbf{P}^\circ_\varepsilon(t, z, \varkappa) \in P,$$
$$[0, T-\varepsilon] \times \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \ni (t, z, \varkappa) \mapsto \mathbf{Q}^\circ_\varepsilon(t, z, \varkappa) \in Q.$$

Связь между исходной (26)–(28) и вспомогательной (29)–(31) играми устанавливается посредством следующего отображения:

$$\mathcal{I}(t, w(\cdot)) = y(T; t, w(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G_n^\alpha,$$

где $y(\cdot) = y(\cdot; t, w(\cdot))$ — решение линейного однородного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто

$$({}^C D^\alpha y)(\tau) = A(\tau) y(\tau), \quad \tau \in [t, T], \; y(\tau) \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющее начальному условию $y_t(\cdot) = w(\cdot)$. Вектор $\mathcal{I}(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ называется информационным образом позиции $(t, w(\cdot))$.

Первый из приведенных ниже результатов касается связи между ценами $\rho(0, w_*)$ и $\rho_\varepsilon(z_*)$ исходной и вспомогательной игр.

Теорема 20.1. *Пусть выполнено предположение* 20.1 *и пусть* $R > 0$. *Тогда для любого* $\eta > 0$ *существует* $\varepsilon^* \in (0, T)$ *такое, что, каковы бы ни были* $w_* \in B(R)$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, *справедливо неравенство*

$$|\rho(0, w_*) - \rho_\varepsilon(\mathcal{I}(0, w_*))| \leqslant \eta,$$

где $\mathcal{I}(0, w_*)$ *— информационный образ позиции* $(0, w_*)$.

Далее, рассмотрим следующие позиционные стратегии управления U° первого и V° второго игроков. Для каждого $\varepsilon \in (0, T)$, выбирая подходящим образом число $\varkappa^\circ > 0$, определяем

$$U^\circ(t, w(\cdot), \varepsilon) = \mathbf{P}^\circ_\varepsilon\big(t, \mathcal{I}(t, w(\cdot)), \varkappa^\circ\big), \quad V^\circ(t, w(\cdot), \varepsilon) = \mathbf{Q}^\circ_\varepsilon\big(t, \mathcal{I}(t, w(\cdot)), \varkappa^\circ\big) \quad (32)$$

для всех позиций $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$ при $t < T - \varepsilon$. Для всех $(t, w(\cdot)) \in G_n^{\alpha\circ}$ при $t \in [T-\varepsilon, T)$ формально доопределяем $U^\circ(t, w(\cdot), \varepsilon) = \bar{u}$ и $V^\circ(t, w(\cdot), \varepsilon) = \bar{v}$ для некоторых фиксированных $\bar{u} \in P$ и $\bar{v} \in Q$.

Теорема 20.2. *Пусть в дифференциальной игре* (26)–(28) *выполнено предположение* 20.1 *и пусть* $R > 0$. *Тогда позиционные стратегии управления игроков* U° *и* V°, *определяемые согласно* (32), *являются оптимальными для любой начальной позиции* $(0, w_*)$ *при* $w_* \in B(R)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации проведено исследование дифференциальных игр и задач оптимального управления для динамических систем, движение которых описывается при помощи дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$. Основное внимание уделено развитию теории отвечающих таким задачам уравнений Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными порядка α, включая конструкции обобщенных (минимаксных, вязкостных) решений данных уравнений, и разработке методов построения оптимальных позиционных стратегий управления.

Полученные в диссертации результаты имеют перспективы дальнейшей разработки. В частности, представляет интерес их развитие для более широкого класса динамических систем, движение которых описывается слабо сингулярными интегральными уравнениями Вольтерра общего вида.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, а также при финансовой поддержке Российского научного фонда (проекты 19-11-00105, 19-71-00073, 21-71-10070).

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Гомоюнов М.И. Экстремальный сдвиг на сопутствующие точки в позиционной дифференциальной игре для системы дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2019. Т. 25, № 1. С. 11–34. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-11-34.

[2] Гомоюнов М.И. К теории дифференциальных включений с дробными производными Капуто // Дифференц. уравнения, 2020. Т. 56, № 11. С. 1419–1432. DOI: 10.1134/S0374064120110011.

[3] Гомоюнов М.И. Минимаксные решения однородных уравнений Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2020. Т. 26, № 4. С. 106–125. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-106-125.

[4] Гомоюнов М.И. О критериях минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2021. Т. 27, № 3. С. 25–42. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-25-4.

[5] Гомоюнов М.И. О связи принципа максимума Понтрягина и уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана в задачах оптимального управления системами дробного порядка // Дифференц. уравнения, 2023. Т. 59, № 11. С. 1515–1521. DOI: 10.21857/S0374064123110067.

[6] Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. Построение решений задач управления линейными системами дробного порядка на основе аппроксимационных моделей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2020. Т. 26, № 1. С. 39–50. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-39-50.

[7] Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. Дифференциальные игры в системах дробного порядка: неравенства для производных функционала цены по направлениям // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова, 2021. Т. 315. С. 74–94. DOI: 10.4213/tm4227.

[8] Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. О линейно-квадратичных дифференциальных играх для систем дробного порядка // Матем. теория игр и ее приложения, 2023. Т. 15, № 2. С. 18–32. http://mi.mathnet.ru/mgta321.

[9] Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. Об оптимальной обратной связи в линейно-квадратичной задаче оптимального управления системой дробного порядка // Дифференц. уравнения, 2023. Т. 59, № 8. С. 1110–1122. DOI: 10.11857/S0374064123080101.

[10] Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. Минимаксные решения уравнений Гамильтона–Якоби в задачах динамической оптимизации наследственных систем // Успехи матем. наук, 2024. Т. 79, № 2. С. 43–144. DOI: 10.4213/rm10166.

[11] Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Fract. Calc. Appl. Anal., 2018. Vol. 21, no. 5. P. 1238–1261. DOI: 10.1515/fca-2018-0066.

[12] Gomoyunov M.I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems // Progr. Fract. Differ. Appl., 2019. Vol. 5, no. 2. P. 143–155. DOI: 10.18576/pfda/050205.

[13] Gomoyunov M.I. Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim., 2020. Vol. 58, no. 6. P. 3185–3211. DOI: 10.1137/19M127936.

[14] Gomoyunov M.I. On a solution of an optimal control problem for a linear fractional-order system // Advanced, Contemporary Control. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 1196. Springer, Cham, 2020. P. 837–846. DOI: 10.1007/978-3-030-50936-1_70.

[15] Gomoyunov M.I. On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives // Fract. Calc. Appl. Anal., 2020. Vol. 23, no. 4. P. 1141–1160. DOI: 10.1515/fca-2020-0058.

[16] Gomoyunov M.I. Optimal control problems with a fixed terminal time in linear fractional-order systems // Arch. Control Sci., 2020. Vol. 30, no. 4. P. 721–744. DOI: 10.14425/acs.2020.135849.

[17] Gomoyunov M.I. Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dyn. Games Appl., 2020. Vol. 10, no. 2. P. 417–443. DOI: 10.1007/s13235-019-00320-4.

[18] Gomoyunov M.I. Differential games for fractional-order systems: Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation and optimal feedback strategies // Mathematics, 2021. Vol. 9, no. 14, art. 1667. 16 p. DOI: 10.1390/math9141667.

[19] Gomoyunov M.I. Minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations with fractional coinvariant derivatives // ESAIM: Control Optim. Calc. Var., 2022. Vol. 28, art. 23. 36 p. DOI: 10.1051/cocv/2022017.

[20] Gomoyunov M.I. On differentiability of solutions of fractional differential equations with respect to initial data // Fract. Calc. Appl. Anal., 2022. Vol. 25, no. 4. P. 1484–1506. DOI: 10.1007/s13540-022-00072-w.

[21] Gomoyunov M.I. On optimal positional strategies in fractional optimal control problems // Lect. Notes Comput. Sci., vol. 13930. Springer, Cham, 2023. P. 255–265. DOI: 10.1007/978-3-031-35305-5_17.

[22] Gomoyunov M.I. Sensitivity analysis of value functional of fractional optimal control problem with application to feedback construction of near optimal controls // Appl. Math. Optim., 2023. Vol. 88, no. 2, art. 41. 49 p. DOI: 10.1007/s00245-023-10022-4.

[23] Gomoyunov M.I. On viscosity solutions of path-dependent Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations for fractional-order systems // J. Differ. Equ., 2024. Vol. 399. P. 335–362. DOI: 10.1016/j.jde.2024.04.001.

[24] Gomoyunov M.I. Value functional and optimal feedback control in linear-quadratic optimal control problem for fractional-order system // Math. Control Relat. Fields, 2024. Vol. 14, no. 1. P. 215–254. DOI: 10.1934/mcrf.2023002.