Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

На правах рукописи

Волдеаб Мебрахтом Себхату

О свойстве монотонности решений систем дифференциальных уравнений относительно начальных данных и его применении к задачам оптимальной эксплуатации популяций

Специальность
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Родина Людмила Ивановна

Владимир — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Важными задачами теории динамических систем являются задачи оптимизации функционала качества для управляемых динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями. Данной тематике посвящены работы таких ученых, как Асеев С. М., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Давыдов А. А., Дмитрук А. В., Дубовицкий А. Я., Зеликин М. И., Красовский Н. Н., Кряжимский А. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Милютин А. А., Мищенко Е. Ф., Осмоловский Н. П., Понтрягин Л. С., Субботина Н. Н., Тарасьев А. М., Тихомиров В. М., Тонков Е Л. и многих других.

Во многих публикациях, начиная с прошлого века, исследуются функционалы качества для динамических систем, представляющих собой математические модели популяций (см., например, Bainov D. D., Dishliev A. B. [28], Beddington J. R., May R. M. [29], Clark C. W. [30], Conrad J. M. [31], Dennis B. [32], Doubleday W. [33], Gordon H. S. [34]). В настоящее время ведутся активные работы по изучению оптимального промысла и его влияния на характер динамики и состав структурированных популяций (здесь нужно отметить работы коллектива ученых Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН [1, 8, 17, 18, 20]). Вопросы периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса, оптимальной эксплуатации популяций с диффузией, максимизации эффективности сбора ресурса рассмотрены в статьях Белякова А. О. и Давыдова А. А. [3, 5]; исследования наибольшей средней временной выгоды и эффективности от эксплуатации популяций, заданных разностными уравнениями, проводились в работах Егоровой А. В. и Родиной Л. И. [6, 7].

Наряду с детерминированными динамическими системами объектом интереса ученых являются управляемые динамические системы со случайными параметрами. Так, Reed W. J. в работах [45, 46] рассматривал рыбные популяции, заданные дифференциальными уравнениями со случайными воздействиями; он показал, что такие популяции целесообразно эксплуатировать до достижения определенного уровня (escapement level), не зависящего от текущего количества ресурса. Данная идея обобщается во многих дальнейших публикациях, среди которых статьи Родиной Л. И. [22, 23], Hening A., Nguyen H. N., Ungureanu S. C., Wong T. K. [36]. Работы Hansen L. G., Jensen F. [35], Liu L., Meng X. [42], Weitzman M. L. [51] посвящены разработке моделей управления рыболовством, включающих экологическую и экономическую неопределенность и задачам ценового регулирования в условиях неопределенности. В статьях Kapaun U., Quaas M. F. [39], Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R. [49], Zhao Y., Yuan S. [52] рассматриваются вопросы влияния случайных факторов внешней среды на оптимальное управление добычей рыбных ресурсов и проводится сравнение различных характеристик для вероятностных и детерминированных моделей. Авторы статьи [37] анализируют проблему оптимального сбора урожая для экосистемы, которая испытывает экологическую стохастичность; обобщение их работы дает возможность не только собирать урожай, но и добавлять особей в экосистему. Более полный обзор современных исследований по данной тематике приведен в работах Jensen F., Frost H., Abildtrup J. [38], Liu M. [43].

Начало исследований средней временной выгоды для популяций, заданных дифференциальными уравнениями, зависящими от случайных параметров, положено в работах Родиной Л. И. [22] – [24], в которых в основном рассматривались однородные популяции, то есть популяции, состоящие из одного вида. В этих исследованиях построены управляющие воздействия для долгосрочного режима сбора ресурса, при которых постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления, и с вероятностью единица существует предел средней временной выгоды.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является изучение свойства монотонности решений систем дифференциальных уравнений относительно начальных условий и исследование задач оптимиации функционала качества для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений, зависящих от случайных параметров.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Отметим, что в статьях Родиной Л. И. и Черниковой А. В. [22] – [25], [48] рассматривался такой же функционал качества — средняя временная выгода от добычи ресурса. Однако в этих работах исследовались задачи максимизации данного функционала для динамических систем, заданных дифференциальными или разностными уравнениями. Динамические системы, изучаемые в данной диссертационной работе, заданы управляемыми системами дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Исследование таких систем потребовало значительно новых подходов, связанных с изучением свойства монотонности решений относительно начальных данных для нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Получены условия, при которых выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных для нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений.

2. Получены оценки критерия качества управления (который будем

называть средней временной выгодой) для управляемых систем, обладающих свойством монотонности решений; рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений и системы дифференциальных уравнений, зависящих от случайных параметров.

3. Получены неравенства для решений систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений, на основании которых оценивается средняя временная выгода для некоторых моделей популяционной динамики.

4. Получены новые оценки критерия качества управления для дифференциальных уравнений со случайными параметрами, выполненные с вероятностью единица.

5. Получены оценки средней временной выгоды для управляемых систем линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами, выполненные с вероятностью единица.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Основные утверждения являются новыми, сформулированы в виде теорем, сопровождаются строгими доказательствами и иллюстрируются примерами. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории дифференциальных уравнений и динамических систем, а также могут найти применение при решении оптимизационных задач, возникающих при моделировании экологических, экономических и технических процессов.

Методология и методы исследования. В работе применяются методы теории дифференциальных уравнений и динамических систем и математической теории управления. В третьей главе дополнительно к указанным используются методы теории вероятностей, а также специальные методы исследования систем дифференциальных уравнений со случайными параметрами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений исследовано свойство монотонности решений относительно начальных данных. Получены оценки критерия качества управления (средней временной выгоды) для систем, обладающих этим свойством.

2. Для управляемых систем дифференциальных уравнений разработан метод построения управляющих воздействий для достижения максимального значения критерия качества управления и получены условия, при которых значения критерия бесконечные. Исследована задача построения управляющих воздействий для достижения фиксированного значения средней временной выгоды.

3. Для дифференциальных уравнений со случайными параметрами получены оценки критерия качества управления, выполненные с вероятностью единица. Показано, что данный критерий является положительным, если существует положительная неподвижная точка вспомогательной динамической системы.

4. Для управляемых систем линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами описаны методы построения управляющих воздействий, при которых наибольшая величина средней временной выгоды достигается с вероятностью единица. Предложены способы построения управлений, при которых можно достичь бесконечного значения данной характеристики.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими выкладками и доказательствами утверждений. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах (см. [58] – [67]):

1. Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», Нижний Новгород, НИУ ВШЭ-Нижний Новгород, 2020 г.;

2. Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова, Минск, Институт математики НАН Беларуси, 2021 г.;

3. Международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике», Рязань, РГУ имени С. А. Есенина, 2021, 2023 гг.;

4. II Всероссийская научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», Рязань, РГУ имени С. А. Есенина, 2022 г.;

5. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященная 100-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко, Москва, МИАН, МЦМУ МИАН, 2022 г.;

6. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем» (MOCS-2022), Суздаль, МИАН, МЦМУ МИАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, ВлГУ им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, НИТУ МИСИС, 2022 г.;

7. Международная (Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2023 г.;

8. VI Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics», посвященная памяти В. З. Гринеса, Нижний Новгород,

НИУ ВШЭ-Нижний Новгород, 2023 г.;

9. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем» (MOCS-2024), Суздаль, МИАН, МЦМУ МИАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, ВлГУ им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, НИТУ МИСИС, 2024 г.;

10. Научный семинар «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры функционального анализа и его приложений ВлГУ им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, 2020-2024 гг.;

11. Научный семинар «Нелинейная динамика и синергетика» математического факультета ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2024 г.;

12. Расширенное заседание семинара отдела динамических систем, Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2024 г.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 научных работах [53] – [67], из которых 5 изданы в научных журналах категории К1 [53] – [57], включенных в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК или приравненных к ним (из них 5 работ опубликованы в научных журналах, индексируемых Scopus и включенных в наукометрическую базу данных zbMATH [53] – [57], 2 работы — в журналах, индексируемых в Web of Science (ESCI) [53, 57], 1 — Web of Science (SCIE) [55], 3 статьи — в наукометрическую базу данных MathSciNet [53, 55, 57], 10 — в сборниках материалов и тезисов докладов международных и всероссийских конференций [58] – [67].

Личный вклад. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, Родиной Л. И. принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю Волдеабу М. С. — точные формулировки, доказательства результатов и исследование примеров.

Благодарность. Автор диссертации выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Родиной Л. И. за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 111 страниц. Список литературы содержит 67 наименования.

Краткое содержание работы. Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, дается общая характеристика рассматриваемых в диссертации вопросов, приведен краткий обзор работ предшественников по данной тематике, определена цель работы и сформулированы основные полученные результаты.

В **первой главе** рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны. Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$.

В первом параграфе получены условия на функцию $f(x)$, при которых решения $\varphi(t, x)$ обладают свойством монотонности относительно начальных данных, то есть следующим свойством.

Свойство 1. *Пусть* $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $y(0) \in \mathbb{R}^n$ *такие, что* $x(0) \leqslant y(0)$. *Тогда* $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ *для любого* $t \geqslant 0$.

Здесь и далее неравенство $x \leqslant y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$,

$y \in \mathbb{R}^n$, означает, что $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.3. (см. [19]). Множество $G \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (1.1), если для любой начальной точки $x(0) \in G$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в множестве G.

Теорема 1.1. (см. [55]). *Пусть множество $G \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы* (1.1) *и каждая из функций f_i является возрастающей на множестве G по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда, если для $x(0) \in G$, $y(0) \in G$ имеет место неравенство $x(0) \leqslant y(0)$, то $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ для всех $t \geqslant 0$.*

В §2 приведены примеры моделей взаимодействия двух видов, обладающих свойством монотонности решений относительно начальных данных. Показано, что данное свойство выполнено для систем, описывающих такие модели, как симбиоз, комменсализм и нейтрализм.

В третьем параграфе рассматривается модель популяции, состоящей из n отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$. При $n = 1$ популяцию называют однородной, при $n \geqslant 2$ — структурированной. При отсутствии промысла динамика популяции задана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}, \tag{3.1}$$

где функции $f_1, \ldots, f_n$ определены и непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$. Предолагаем, что для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$ решение $\varphi(t, x)$ системы (3.1) существует при $t \in [0, d]$, где $d > 0$; кроме того, выполнено *свойство квазиположительности,* которое означает, что решения системы (3.1) неотрицательные при любых неотрицательных начальных условиях (см. [11, с. 34]).

В моменты времени $t = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ из популяции извлекается определенная доля ресурса каждого вида. Пусть $C_i \geqslant 0$ является агрегированной стоимостью i-го вида ресурса, $i = 1, \ldots, n$, извлеченного из популяции. На множестве $\mathbb{R}^n_+$ рассмотрим две функции:

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d, x) - x_i\big), \quad L(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x).$$

Отметим, что значение функции $D(x)$ равно суммарной стоимости прироста ресурса каждого вида за промежуток времени времени $[0, d]$, где $d > 0$.

Лемма 3.1. (см. [53]). *Имеет место неравенство*

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n_+} D(x) \leqslant d \cdot \max_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(x). \tag{3.2}$$

При помощи леммы 3.1 получены оценки функции $D(x)$ для моделей конкуренции и симбиоза двух видов.

Во **второй главе** рассматривается модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений (3.1).

Предполагаем, что в моменты времени $t = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ из популяции извлекаются определенные доли ресурса $u_1(k), \ldots, u_n(k)$ каждого вида. Величины $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$ будем считать управляющими воздействиями, которые можно изменять для достижения определенного результата сбора ресурса. Рассмотрим множество всех управлений на бесконечном промежутке времени —

$$U \doteq \big\{\overline{u} : \overline{u} = (u(1), u(2), \ldots, u(k), \ldots) \in [0, 1]^\infty\big\}.$$

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ является количеством ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$, зависящим от долей ресурса

$$u(1), \ldots, u(k-1),$$

собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i \geqslant 0$ — агрегированная стоимость ресурса i-го вида. Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент kd равна

$$Y(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(k) u_i(k).$$

Определение 4.1. (см. [22]). *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется функция

$$H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,. \tag{4.1}$$

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*\big(\overline{u}, x(0)\big)$ и, если выполнено равенство $H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) = H^*\big(\overline{u}, x(0)\big)$, то определим предел

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,.$$

Рассмотрим задачу построения управлений $\overline{u} \in U$ для достижения фиксированной средней временной выгоды, которая будет ограничена максимальным значением функции $D(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d,x) - x_i\big)$ или может равняться любому положительному числу, если $D(x)$ не ограничена сверху.

Теорема 4.1. (см. [54]). *Предположим, что существует $\widehat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ такое, что $D(\widehat{x}) = h > 0$ и $\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geqslant \widehat{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, функция $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ достигает значения h при следующем режиме эксплуатации:*

$$\begin{aligned} u(1) &= \Big(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, \ldots, 1 - \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d, x(0))}\Big);\\ u(k) &= \Big(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d, \widehat{x})}, \ldots, 1 - \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d, \widehat{x})}\Big), \quad k \geqslant 2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Теорема 4.2. (см. [54]). *Предположим, что существуют точка* $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n_+$ *и непустое подмножество* $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *такие, что:*

(1) $D(\widehat{x}) = h > 0$;

(2) $\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i \in I$;

(3) $\varphi_i(kd, \widehat{x}) = 0$ *для всех* $i \notin I$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, x(0)), \ i = 1, \ldots, n; \quad \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \ i \in I, \tag{4.4}$$

то функция $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает значения* h *при следующем режиме эксплуатации:*

если $i \in I$, *то* $u_i(1) = 1 - \dfrac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}$, $u_i(k) = 1 - \dfrac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, \widehat{x})}$ *при* $k \geqslant 2$;

если $i \notin I$, *то* $u_i(1) = 1$, $u_i(k) = 0$ *при* $k \geqslant 2$.

В пятом параграфе приведены примеры вычисления и оценки средней временной выгоды для моделей взаимодействия двух видов таких, как конкуренция и симбиоз.

В §6 получены условия и построен режим эксплуатации, при котором средняя временная выгода достигает бесконечного значения.

Теорема 6.1. (см. [54]). *Предположим, что существует* $\widehat{x} \in \mathbb{R}_n^+$, *такое, что*

(1) $\varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$;

(2) *последовательности* $\big\{\varphi_i(kd, \widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \ldots, n$ *возрастают;*

(3) $D\big(\varphi(kd, \widehat{x})\big) \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.1}$$

то существует $\overline{u} \in U$, *при котором* $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = +\infty$.

Теорема 6.2. (см. [54]). *Пусть существуют* $\widehat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ *и непустое подмножество* $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *такие, что:*

(1) $\varphi_i(d,\widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i \in I$;

(2) *последовательности* $\big\{\varphi_i(kd,\widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$, $i \in I$ *возрастают;*

(3) $\varphi_i(kd,\widehat{x}) = 0$ *для всех* $i \notin I$, $k = 1,2,\ldots$;

(4) $D\big(\varphi(kd,\widehat{x})\big) = \sum\limits_{i\in I} C_i\big(\varphi_i((k+1)d,\widehat{x}) - \varphi_i(kd,\widehat{x})\big) \to +\infty$ *при* $k \to \infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d,x(0)),\ i = 1,\ldots,n; \quad \varphi_i(d,x(0)) \neq 0,\ i \in I, \tag{6.5}$$

то существует управление $\overline{u} \in U$, *при котором* $H\big(\overline{u},x(0)\big) = +\infty$.

В параграфе 7 рассматривается $X(k) = (X_1(k),\ldots,X_n(k))$ и $x(k) = (x_1(k),\ldots,x_n(k))$ — видовой состав популяции до и после сбора в момент $\tau(k) = kd$ соответственно. Отметим, что

$$X(k+1) = \varphi(d,x(k)), \quad x(k) = (1-u(k))X(k), \quad k = 1,2,\ldots.$$

Если $u_i(k) = u_i$ для всех $k = 1,2,\ldots$, то $X(k)$ удовлетворяет уравнению

$$X(k+1) = \varphi\big(d,(1-u)X(k)\big), \quad k = 1,2,\ldots. \tag{7.1}$$

Обозначим через $S(u) = \big(S_1(u),\ldots,S_n(u)\big)$ неподвижную точку уравнения (7.1) (в предположении, что она существует и единственна). Пусть $s(u) \doteq (1-u)S(u)$; тогда

$$s_i(u) = (1-u_i)S_i(u), \quad \varphi_i(d,s(u)) = S_i(u), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Теорема 7.1. *Пусть* $u_i(k) = u_i$ *для всех* $k = 1,2,\ldots$ *и для системы* (3.1) *выполнено свойство* 1. *Тогда, если* $x(0) \geqslant s(u)$, *то имеет место оценка*

$$H_*\big(\overline{u},x(0)\big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} C_i S_i(u) u_i. \tag{7.2}$$

При помощи неравенства (7.2) получена оценка средней временной выгоды для популяции из двух видов, между которыми наблюдается взаимодействие типа симбиоз.

В **третьей главе** исследуются эксплуатируемые популяции, заданные дифференциальными уравнениями со случайными параметрами; для этих популяций получены оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Показано, что данная характеристика является положительной, если существует положительная неподвижная точка вспомогательного уравнения для количества добываемого ресурса.

Задачи максимизации средней временной выгоды распространяются на системы линейных дифференциальных уравнений, зависящих от случайных параметров; здесь при построении управлений дополнительно требуем, чтобы видовой состав популяции оставался не ниже исходного или периодически восстанавливался. Рассмотрены условия и предложены способы сбора ресурса, при которых можно достичь положительного или бесконечного значения средней временной выгоды. Также исследуется задача оценки данной характеристики для вероятностных моделей динамики популяций, заданных нелинейными системами дифференциальных уравнений, для которых выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных.

В начале главы (§8, §9) рассматривается модель популяции, заданной при отсутствии эксплуатации дифференциальным уравнением $\dot{x} = f(x)$; в каждый из моментов времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, из этой популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in \Omega \subseteq [0,1]$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u \in [0,1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min\{\omega_k, u\}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Таким образом, мы исследуем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \quad t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k) &= (1 - \ell_k) x(\tau_k - 0), \quad k = 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Предполагаем, что решения уравнения непрерывны справа, функция $f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0, +\infty)$. Пусть также имеет место следующее условие.

Условие 8.1. Предположим, что $f(0) \geqslant 0$ и $\varphi(t) \equiv K > 0$ является решением уравнения $\dot{x} = f(x)$.

Обозначим $\overline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots)$, $x_0 \geqslant 0$ — начальный размер популяции, X_k — количество ресурса до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \dots$. Для уравнения со случайными параметрами (8.1) *средняя временная выгода* от извлечения ресурса задается равенством

$$H_*\big(\overline{\ell}, x_0\big) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ell_k \tag{8.2}$$

(см. [22]). Если предел среднего арифметического $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \ell_k$ существует, то среднюю временную выгоду будем обозначать

$$H\big(\overline{\ell}, x_0\big) \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ell_k .$$

Отметим, что значения средней временной выгоды зависят от поведения случайных последовательностей $\sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots)$. Описание соответствующей вероятностной модели $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ приведено в параграфе 8 (см. также [16, 22]).

Напомним, что через $\varphi(t,x)$ мы обозначаем решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Обозначим через x_k количество ресурса после сбора в момент τ_k, тогда $X_1 = \varphi(d, x_0)$ и $X_{k+1} = \varphi(d, x_k)$, $x_k = (1-\ell_k)X_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Если $\ell_k = u$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ (такое возможно при $\omega_1 \geqslant u, \omega_2 \geqslant u, \ldots$), то X_k удовлетворяет уравнению

$$X_{k+1} = \varphi\big(d, (1-u)X_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8.3}$$

У т в е р ж д е н и е 8.1. (см. [56]). *Если выполнено условие* 8.1, *то уравнение* (8.3) *имеет неподвижную точку* $X(u)$ *такую, что* $X(u) \leqslant K$.

У т в е р ж д е н и е 8.2. (см. [56]). *Пусть* $\varphi(t) \equiv K > 0$ *является решением уравнения* $\dot{x} = f(x)$. *Если, кроме того, выполнено одно из условий:*

1) $\varphi(d, 0) > 0$;

2) $\varphi(d, 0) = 0$ *и* $(1-u)\varphi'_x(d, 0) > 1$,

то уравнение (8.3) *имеет неподвижную точку* $X(u)$ *и* $0 < X(u) \leqslant K$.

Для любого $u \in [0,1]$ введем в рассмотрение случайную величину $\ell(\omega, u) \doteq \min\{\omega, u\}$ и обозначим через $M\ell(u)$ ее математическое ожидание. Пусть $x(u) \doteq (1-u)X(u)$, тогда $X(u) = \varphi(d, x(u))$.

Теорема 8.1. (см. [56]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любого* $x_0 \in [x(u), K]$ *и для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедливы неравенства*

$$X(u)M\ell(u) \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant KM\ell(u). \tag{8.6}$$

Определим $\sigma_k \doteq (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \Omega^k$, $k = 1, 2, \ldots$. В §9 исследуем случайные величины $A_k = A_k(\sigma_{k-1}, x)$ и $B_k = B_k(\sigma_{k-1}, x)$, заданные рекуррентным образом:

$$A_1 = X(u), \;\; A_{k+1} = \varphi\bigl(d, (1-\ell_k)A_k\bigr);$$
$$B_1 = K, \;\; B_{k+1} = \varphi\bigl(d, (1-\ell_k)B_k\bigr), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Обозначим через MA_k и MB_k математические ожидания случайных величин A_k и B_k соответственно.

Теорема 9.1. (см. [56]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любого* $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ *и для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства*

$$\frac{M\ell(u)}{m} \sum_{k=1}^{m} MA_k \leqslant H_*\bigl(\bar{\ell}, x_0\bigr) \leqslant \frac{M\ell(u)}{m} \sum_{k=1}^{m} MB_k. \tag{9.1}$$

Лемма 9.1. (см. [56]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда последовательность* $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ *является неубывающей, а* $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— невозрастающей, существуют конечные пределы данных последовательностей и*

$$\lim_{k\to\infty} MA_k \leqslant \lim_{k\to\infty} MB_k \leqslant K. \tag{9.2}$$

Теорема 9.2. (см. [56]). *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *интервал* $(x(u), K)$ *содержится в области притяжения решения* $\varphi(t) \equiv K > 0$ *дифференциального уравнения* $\dot{x} = f(x)$;

(2) $f'(x) < 0$ *для всех* $x \in (x(u), K)$.

Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ *существует предел*

$$H\bigl(\bar{\ell}, x_0\bigr) = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MB_k, \tag{9.5}$$

не зависящий от начального значения $x_0 \in [x(u), K]$.

Следствие 9.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.2, $X(u) > 0$ *и* $M\ell(u) > 0$. *Тогда* $H\bigl(\bar{\ell}, x_0\bigr) > 0$.

Теорема 9.3. (см. [56]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любых* $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ *и для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедливы неравенства*

$$M\ell(u)MA_m \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant M\ell(u)MB_m. \tag{9.10}$$

В §10 получены оценки средней временной выгоды для структурированной популяции, динамика которой при отсутствии эксплуатации задана системой линейных дифференциальных уравнений. Описан способ добычи ресурса, при котором с вероятностью единица достигается наибольшее значение средней временной выгоды, а начальный состав популяции постоянно поддерживается на исходном уровне или периодически сохраняется; здесь также построен режим добычи, доставляющий при определенных условиях бесконечное значение средней временной выгоде.

Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

$A = \{a_{ij}\}$ — квадратная $n \times n$ матрица. Пусть в моменты времени kd, где $d > 0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = \big(\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)\big) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. Отметим, что в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент kd.

Пусть имеется возможность контролировать процесс сбора так, чтобы остановить заготовку в момент kd, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся больше, чем значения

$$\big(u_1(k), \dots, u_n(k)\big) = u(k) \in [0,1)^n.$$

В этом случае определенная часть популяции сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора и доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k) = \big(\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)\big) \in [0,1]^n$, где

$$\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = 1, \dots, n, \ \ k = 0, 1, 2, \dots.$$

Предположим, что начальное количество ресурса i-го вида равно $X_i(0)$, количество ресурса этого вида до сбора в момент kd составляет

$$X_i(k) = x_i(kd - 0), \quad k = 1, 2, \dots,$$

после сбора данное количество равно $x_i(kd)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax, \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) = \big(1 - \ell_i(k)\big) \cdot x_i(kd - 0), \quad i = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{10.1}$$

Полагаем, что решения системы (10.1) непрерывны справа.

Пусть $\overline{\ell} \doteq \big(\ell(1), \dots, \ell(k), \dots\big)$, $C_i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида, $i = 1, \dots, n$. Тогда средняя временная выгода от добычи ресурса задается равенством

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \doteq \varliminf_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) \ell_i(j). \tag{10.2}$$

Рассмотрим $L(k) = \operatorname{diag}\big(\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)\big)$ — диагональную $n \times n$ матрицу с элементами $\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)$ на главной диагонали, пусть E — единичная матрица n-го порядка, $X(0) \in \mathbb{R}^n_+$. Развитие популяции (10.1) можно задать динамической системой, зависящей от случайных параметров:

$$X(k+1) = e^{Ad}\big(E - L(k)\big)X(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.7}$$

где $X(k) = \big(X_1(k), \ldots, X_n(k)\big)$ — видовой состав популяции до сбора ресурса в момент времени kd.

Вместе с системой со случайными параметрами (10.7) будем исследовать соответствующую ей детерминированную систему

$$\widetilde{X}(k+1) = e^{Ad}\big(E - U(k)\big)\widetilde{X}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.8}$$

где $U(k) = \operatorname{diag}\big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big)$, $\widetilde{X}(0) = X(0)$.

Определение 10.1. (см. [57]). Вектор Y называется $\big(e^{Ad}, \widetilde{X}(0)\big)$ *достижимым за m шагов*, если существует конечная последовательность векторов $\{u(0), \ldots, u(m-1)\}$, таких, что

$$\widetilde{X}(j+1) = e^{Ad}\big(E - U(j)\big)\widetilde{X}(j), \ j = 0, 1, \ldots, m-1 \quad \text{и} \quad \widetilde{X}(m) = Y.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{U} \doteq \{\overline{u} : \overline{u} = (u(1), \ldots, u(k), \ldots)\}$, где $u(k) \in [0,1]^n$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайных величин, $P(k) \doteq e^{Ad}\big(E - L(k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

В следующей теореме получена оценка снизу для средней временной выгоды при условии, что начальный состав популяции $X(0)$ постоянно сохраняется или периодически восстанавливается, то есть $X(km) \geqslant X(0)$ для некоторого $m \geqslant 1$ и всех $k = 1, 2, \ldots$. Если $X(0) > 0$, то условие $X(km) \geqslant X(0)$ обеспечивает сохранность всех видов или возрастных классов, составляющих данную популяцию.

Теорема 10.2. (см. [57]). *Пусть $X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за m шагов. Тогда существует $\overline{u} \in \mathcal{U}$ такое, что*

$$X(km) \geqslant X(0), \quad k = 1, 2, \ldots$$

и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено неравенство

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n} C_i M X_i(j) M\ell_i(j), \qquad (10.9)$$

где $X(j) = P(j-1)\dots P(1)P(0)X(0)$, $j = 1,\dots,m-1$.

Теорема 10.3. (см. [57]). *Пусть $\lambda X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за m шагов при некотором $\lambda > 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(0) M\ell_i(0) > 0$. Тогда существует $\overline{u} \in \mathcal{U}$ такое, что $X(km) \geqslant \lambda^k X(0)$, $k = 1, 2, \dots$ и $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) = +\infty$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$.*

Параграф 11 посвящен примерам оценки средней временной выгоды с использованием результатов, полученных в предыдущих разделах. Здесь также показано, что утверждения параграфа 10 можно применить для дискретных моделей популяций, при отсутствии эксплуатации заданных матрицей Лесли.

В последнем параграфе главы рассматриается задача оценки средней временной выгоды для вероятностных моделей динамики популяций, заданных нелинейными системами дифференциальных уравнений, для которых выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных.

Рассмотрим модели динамики структурированной популяции, заданные системой уравнений, зависящей от случайных параметров (размерность системы $n > 1$). Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой (1.1), а в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0,1]^n, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Пусть имеется возможность остановить процесс сбора, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k) = (\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)) \in [0,1]^n$, где $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой со случайными параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) = \bigl(1 - \ell_i(k)\bigr) \cdot x_i(kd-0), \end{aligned} \tag{12.1}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ – количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что для системы $\dot{x} = f(x)$ выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных и решения системы (12.1) непрерывны справа. Вероятностная модель $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ приведена в §8. Исследуем среднюю временную выгоду от извлечения ресурса, заданную равенством (10.2).

Как и раньше, обозначаем через $X(k)$ видовой состав популяции до сбора в момент τ_k, $\varphi(t,x)$ — решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Если $\ell_i(k) = u_i$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то $X(k)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$X(k+1) = \varphi\bigl(d, (1-u)X(k)\bigr), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12.2}$$

Пусть $S(u) = \bigl(S_1(u), \ldots, S_n(u)\bigr)$ является неподвижной точкой уравнения (12.2), тогда $S(u) = \varphi(d, (1-u)S(u))$. Обозначим $s(u) \doteq (1-u)S(u)$, $M\ell_i = M\ell_i(k)$ — математическое ожидание случайных величин $\ell_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 12.1.(см. [55]). *Пусть выполнено свойство* 1. *Тогда, если*

$x(0) \geqslant s(u)$, *то для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедлива оценка*

$$H_*\big(\bar{\ell}, x(0)\big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} C_i S_i(u) M\ell_i. \tag{12.3}$$

Результаты главы иллюстрируются примерами вычисления и оценок средней временной выгоды для эксплуатируемых однородных и структурированных популяций.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации и направления исследований, по которым планируется продолжить работу. Одним из таких направлений будет развитие метода положительно инвариантных множеств для оценки характеристик сбора ресурса, рассматриваемых для детерминированных систем дифференциальных уравнений, систем со случайными параметрами или гибридных динамических систем.

Глава 1

Свойство монотонности решений относительно начальных данных для нелинейных систем дифференциальных уравнений

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ $(i, j = 1, \dots, n)$ непрерывны. Пусть $\varphi(t, x)$ является решением данной системы, удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, x) = x$.

В первом параграфе получены условия на функцию $f(x)$, при которых решения $\varphi(t, x)$ обладают свойством монотонности относительно начальных данных, то есть следующим свойством.

Свойство 1. *Пусть* $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $y(0) \in \mathbb{R}^n$ *такие, что* $x(0) \leqslant y(0)$. *Тогда* $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ *для любого* $t \geqslant 0$.

Здесь и далее неравенство $x \leqslant y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, означает, что $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \dots, n$.

В §2 приведены примеры моделей взаимодействия двух видов, обладающих свойством монотонности решений.

В третьем параграфе рассматривается модель структурированной популяции, подверженной промыслу. При отсутствии промысла динамика популяции задана системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, а в моменты времени $t = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \dots$ из популяции извлекается определенная доля ресурса каждого вида. Пусть $C_i \geqslant 0$ является стоимостью i-го вида извлеченного ресурса, $i = 1, \ldots, n$. Получены оценки функции

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\bigl(\varphi_i(d, x) - x_i\bigr),$$

которая равна общей стоимости прироста ресурса каждого вида за промежуток времени времени $[0, d]$, где $d > 0$.

§ 1. Формулировка и доказательство свойства монотонности решений относительно начальных данных

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны. Обозначим через

$$\varphi(t, x) = \bigl(\varphi_1(t, x), \ldots, \varphi_n(t, x)\bigr)$$

решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Для решения многих прикладных задач желательно, чтобы решения системы (1.1) обладали свойством монотонности относительно начальных данных (то есть свойством 1).

Сначала приведем известный результат для линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax,$$

где A — постоянная матрица размеров $n \times n$. Известно, что решение данной системы можно записать в виде $\varphi(t, x) = e^{At}x$, где e^{At} — матричная экспонента.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [44]). Матрица A называется *экспоненциально неотрицательной*, если $e^{At} \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 1.2. (см. [44]). Матрица A называется *матрицей Метцлера*, если ее элементы удовлетворяют неравенствам $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, $i = 1, \ldots, n$.

Лемма 1.1. (см. [2, с. 208] [44]). *Матрица A является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.*

Первоначально данное утверждение, по-видимому, было доказано в работе Т. Важевского [50] в 1950 году. Из леммы 1.1 очевидно следует, что если A — матрица Метцлера и $x \leqslant y$, то

$$\varphi(t, x) = e^{At}x \leqslant e^{At}y = \varphi(t, y)$$

для любого $t \geqslant 0$. Также отсюда следует, что решение $\varphi(t, x) = e^{At}x$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях, то есть обладает свойством *квазиположительности* (см. [11, с. 34]).

Лемма 1.2. (см. [55]). *Свойство* 1 *выполнено для любой автономной системы вида* (1.1) *размерности один* (*то есть при* $n = 1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при любом фиксированном $t > 0$ функция $x \mapsto \varphi(t, x)$ возрастает. Действительно, если это не так, то существуют такие $x_1 < x_2$, что $\varphi(t, x_1) \geqslant \varphi(t, x_2)$. Тогда найдется точка $t_* \in (0, t]$, в которой $\varphi(t_*, x_1) = \varphi(t_*, x_2)$; получили противоречие с условием единственности решений дифференциального уравнения. $\square$

О п р е д е л е н и е 1.3. (см. [19]). Множество $G \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (1.1), если для любой начальной точки $x(0) \in G$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в множестве G.

Теорема 1.1. (см. [55]). *Пусть множество $G \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы* (1.1) *и каждая из функций f_i является возрастающей на множестве G по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда, если для $x(0) \in G$, $y(0) \in G$ имеет место неравенство $x(0) \leqslant y(0)$, то $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ для всех $t \geqslant 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы разделим на две части.

1. Рассмотрим случай, когда $x(0) < y(0)$. Предположим, что утверждение теоремы не верно, тогда существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $t_i^* > 0$ такие, что $\varphi_i(t_i^*, x(0)) > \varphi_i(t_i^*, y(0))$. Пусть $I \neq \varnothing$ – множество всех i, для которых выполнено последнее неравенство. Введем в рассмотрение функции

$$R_i(t, x, y) \doteq \varphi_i(t, x) - \varphi_i(t, y), \quad i = 1, \ldots, n,$$

которые непрерывны по t как разность непрерывных функций. Пусть $i \in I$, тогда

$$R_i(0, x(0), y(0)) < 0, \quad R_i(t_i^*, x(0), y(0)) > 0,$$

поэтому для каждого $i \in I$ найдется $t_i \in (0, t_i^*)$ такое, что

$$R_i(t_i, x(0), y(0)) = 0.$$

Обозначим

$$\tau_i = \inf\big\{t \in (0, t_i^*) : R_i(t, x(0), y(0)) = 0\big\}, \quad \tau = \min_{i \in I}\{\tau_i\}.$$

Из выбора точки τ следует, что $\varphi_i(\tau, x(0)) \leqslant \varphi_i(\tau, y(0))$, причем существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$, при которых выполнено строгое неравенство, так как все траектории не могут прийти в одну точку за конечное время. Определим $I(\tau) \neq \varnothing$ как множество всех i, при которых $\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0))$ и $J(\tau) \doteq \{1, \ldots, n\} \setminus I(\tau)$ — множество всех i, при которых $\varphi_i(\tau, x(0)) < \varphi_i(\tau, y(0))$, $J(\tau) \neq \varnothing$. Поскольку $\tau_i > 0$, то $\tau > 0$.

Перейдем от системы дифференциальных уравнений (1.1) к системе интегральных уравнений

$$\varphi_i(t, x(0)) = x_i(0) + \int_0^t f_i\big(\varphi(s, x(0))\big) ds, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Если $i \in I(\tau)$, то $\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0))$, $x_i(0) < y_i(0)$ и из (1.2) получаем

$$\int_0^\tau \Big(f_i\big(\varphi(s, x(0))\big) ds - f_i\big(\varphi(s, y(0))\big) \Big) ds = y_i(0) - x_i(0) > 0. \tag{1.3}$$

Далее, $\varphi_i(\tau - \delta, x(0)) < \varphi_i(\tau - \delta, y(0))$ для любого $\delta \in (0, \tau)$, поэтому в силу (1.2) выполнено неравенство

$$\int_0^{\tau - \delta} \Big(f_i\big(\varphi(s, x(0))\big) ds - f_i\big(\varphi(s, y(0))\big) \Big) ds < y_i(0) - x_i(0). \tag{1.4}$$

Из (1.3), (1.4) следует, что для любого $\delta \in (0, \tau)$ имеет место

$$\int_{\tau - \delta}^{\tau} \Big(f_i\big(\varphi(s, x(0))\big) ds - f_i\big(\varphi(s, y(0))\big) \Big) ds > 0. \tag{1.5}$$

Отметим, что из непрерывности подинтегральной функции следует неравенство

$$f_i\big(\varphi(\tau, x(0))\big) \geqslant f_i\big(\varphi(\tau, y(0))\big), \quad i \in I(\tau). \tag{1.6}$$

Теперь возможны следующие два случая, в первом из которых хотя бы одна из функций f_i, $i \in I(\tau)$ зависит от некоторой переменной x_j, $j \notin I(\tau)$. Пусть это будет функция f_k, $k \in I(\tau)$, тогда $\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0))$

для всех $i \in I(\tau)$, $\varphi_i(\tau, x(0)) < \varphi_i(\tau, y(0))$ при $i \in J(\tau)$ и из условия теоремы следует, что

$$f_k\big(\varphi(\tau, x(0))\big) < f_k\big(\varphi(\tau, y(0))\big).$$

Получили противоречие с (1.6).

Во втором случае все функции f_i, $i \in I(\tau)$ не зависят от переменных x_i, $i \in J(\tau)$. Тогда

$$\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0)) \quad \text{для всех} \quad i \in I(\tau), \tag{1.7}$$

и можем выделить из исходной системы (1.1) отдельную подсистему, в которую входят только уравнения с x_i, $i \in I(\tau)$. Поэтому из (1.7) следует равенство

$$\varphi_i(t, x(0)) = \varphi_i(t, y(0)) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}, \;\; i \in I(\tau), \tag{1.8}$$

из которого получаем $f_i\big(\varphi(s, x(0))\big) - f_i\big(\varphi(s, y(0)) \equiv 0$, $i \in I(\tau)$, что противоречит (1.5).

2. Пусть $x_i(0) = y_i(0)$ при $i \in I(0)$ и $x_i(0) < y_i(0)$ при $i \in J(0) \doteq \{1, \ldots, n\} \setminus I(0)$; здесь $I(0)$ – любое непустое подмножество $\{1, \ldots, n\}$, множество $J(0)$ может быть пустым. Определим последовательность точек $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства $\mathbb{R}^n$ таким образом, что

$$y_i^{k+1} > y_i^k > y_i(0) = x_i(0), \;\; \lim_{k \to \infty} y_i^k = y_i(0) \quad \text{при} \quad i \in I(0)$$

и $y_i^k = y_i(0)$ при $i \in J(0)$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} y^k = y(0)$ и $x(0) < y^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Из первой части доказательства следует, что

$$\varphi(t, x(0)) < \varphi(t, y^k)$$

для всех $t \in [0, d]$, $k = 1, 2, \ldots$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве и используя свойство непрерывности функции $\varphi(t, x)$ по совокупности переменных, получаем, что

$$\varphi(t, x(0)) \leqslant \lim_{k\to\infty} \varphi(t, y^k) = \varphi(t, y(0)) \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 1.1. Если система дифференциальных уравнений (1.1) линейная (то есть имеет вид $\dot{x} = Ax$) и выполнены условия теоремы 1.1, то матрица A данной системы является матрицей Метцлера.

§ 2. Примеры нелинейных систем, обладающих свойством монотонности решений

В природе существует огромное количество видов, которые, взаимодействуя между собой, создают сложные экосистемы. Для лучшего понимания этих взаимодействий разработаны различные классификации. Одной из самых известных является классификация взаимодействия двух видов, введенная американским экологом Ю. Одумом в 1986 г., который предложил оценивать взаимоотношения видов как положительные, отрицательные или нейтральные в зависимости от того, возрастает, убывает или остается неизменной численность одного вида в присутствии другого вида. Модели популяций, соответствующие этой классификации, подробно описаны в [21, с. 182]. Пусть численности двух видов равны x_1 и x_2. Тогда, согласно гипотезе Вольтерра о том, что скорость процесса отмирания каждого вида пропорциональная численности вида, данные модели могут быть описаны системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 + b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 - c_2x_2^2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь параметры $a_i > 0$ — постоянные собственной скорости роста видов, $c_i > 0$ — постоянные самоограничения численности (внутривидовой конкуренции), b_{ij} — постоянные взаимодействия видов, $i, j = 1, 2$. Знаки коэффициентов b_{ij} определяют тип взаимодействия.

Приведем типы взаимодействий популяций двух видов по Ю. Одуму:

1) *нейтрализм*: $b_{12} = 0$, $b_{21} = 0$ — ни одна из популяций не влияет на другую;

2) *конкуренция*: $b_{12} < 0$, $b_{21} < 0$ — взаимоотношения, связанные с борьбой между видами, нуждающимися в одних и тех же ресурсах.

3) *аменсализм*: $b_{12} < 0$, $b_{21} = 0$ — вторая популяция подавляет первую, но сама не испытывает отрицательного воздействия;

4) *хищник-жертва*: $b_{12} > 0$, $b_{21} < 0$ — взаимоотношения, выгодные для одного вида и угнетающие второй.

5) *комменсализм*: $b_{12} > 0, b_{21} = 0$ — способ совместного сосуществования двух видов, выгодный для одного из видов и не приносящий ни вреда, ни пользы другому;

6) *симбиоз*: $b_{12} > 0$, $b_{21} > 0$ — взаимополезное сосуществование разных видов.

Заметим, что численности каждого из видов неотрицательные, поэтому систему (2.1) рассматривают на множестве

$$G = \mathbb{R}_+^2 \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}.$$

Покажем, что решения данной системы обладают *свойством квазиполо-*

жительности, то есть эти решения являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях.

Теорема 2.1. (см. [11, с. 34]). *Для того, чтобы решения* $\varphi(t, x(0))$ *системы* (1.1) *при любых неотрицательных начальных условиях* $x(0)$ *были неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось свойство квазиположительности:*

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

для любых неотрицательных переменных x_j, $j \neq i$.

Для системы (2.1) выпишем функции

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= a_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2, \\ f_2(x_1, x_2) &= a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2, \end{aligned}$$

тогда $f_1(0, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, 0) = 0$. Следовательно, условие (2.2) выполнено и множество $G = \mathbb{R}_+^2$ является положительно инвариантным относительно данной системы.

Далее, найдем частные производные функций f_1 и f_2 для $x \in G$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = b_{12} x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = b_{21} x_2. \tag{2.3}$$

Из равенств (2.3) следует, что для моделей взаимодействия двух видов свойство монотонности решений относительно начальных условий выполнено при $b_{12} \geqslant 0$, $b_{21} \geqslant 0$, то есть оно выполнено для систем, описывающих модели симбиоза, комменсализма и нейтрализма. Если хотя бы один из коэффициентов b_{ij} отрицательный, то свойство монотонности будет выполнено не для всех решений системы (2.1); это относится к таким моделям, как хищник-жертва, конкуренция и аменсализм.

З а м е ч а н и е 2.1. Если для линейной системы $\dot{x} = Ax$ выполнено условие квазиположительности, то матрица A системы является матрицей Метцлера; следовательно, для данной системы имеет место свойство монотонности решений относительно начальных данных. Для нелинейной системы (1.1) из условия квазиположительности не следует свойство монотонности. Например, условие квазиположительности имеет место для всех моделей взаимодействия двух видов, но свойство монотонности не выполнено для моделей «хищник-жертва», конкуренция и аменсализм.

Примеры систем, у которых выполнено свойство монотонности решений по части начальных данных

Предположим, что в системе (1.1) найдется подсистема из m уравнений, которая зависит только от переменных

$$\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \text{ где } 1 \leqslant m \leqslant n-1.$$

Пусть данная подсистема имеет вид

$$\dot{\widetilde{x}} = g(\widetilde{x}), \quad \widetilde{x} \in \mathbb{R}^m. \tag{2.4}$$

Если для системы (2.4) выполнены условия теоремы 1.1, то решение $\widetilde{\varphi}(t, x)$ этой системы монотонно по начальным данным $\widetilde{x}(0) \in \mathbb{R}^m$; следовательно, решение $\varphi(t, x)$ системы (1.1) монотонно по части начальных данных.

Примером системы, обладающей свойством монотонности по части начальных данных для моделей взаимодействия двух видов является система, описывающая модель аменсализма. Напомним, что при взаимодействии типа аменсализм в системе (2.1) выполнены условия $b_{12} = 0$, $b_{21} < 0$. Тогда первое уравнение этой системы имеет вид

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 - c_1 x_1^2$$

(не зависит от переменной x_2) и система (2.1) обладает свойством монотонности по начальным данным $x_1(0)$.

§ 3. Свойства функции $D(x)$ — общей стоимости прироста возобновляемого ресурса

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}, \tag{3.1}$$

функции $f_1, \ldots, f_n$ определены и непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$. Предолагаем, что решения данной системы обладают *свойством квазиположительности* (см. теорему 2.1).

Будем считать, что система (3.1) определяет динамику некоторой популяции, состоящей из n отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$. При $n = 1$ популяцию называют однородной, при $n \geqslant 2$ — структурированной. Пусть $C_i \geqslant 0$ является агрегированной стоимостью i-го вида ресурса, $i = 1, \ldots, n$, извлеченного из популяции, заданной системой (3.1).

Полагаем, что для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$ решение $\varphi(t, x)$ системы (3.1) существует при $t \in [0, d]$, где $d > 0$. На множестве $\mathbb{R}^n_+$ рассмотрим две функции:

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d, x) - x_i\big), \quad L(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x).$$

Отметим, что значение функции $D(x)$ равно общей стоимости прироста ресурса каждого вида за промежуток времени времени $[0, d]$, где $d > 0$.

Лемма 3.1. (см. [53]). *Имеет место неравенство*

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n_+} D(x) \leqslant d \cdot \max_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(x). \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перейдем от системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ к системе интегральных уравнений

$$\varphi_i(t,x) = x_i + \int_0^t f_i\big(\varphi(s,x)\big)ds, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3.3}$$

Из (3.3) получаем равенство для функции $D(x)$:

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d,x) - x_i\big) = \sum_{i=1}^{n} C_i \int_0^d f_i\big(\varphi(s,x)\big)ds =$$
$$= \int_0^d \sum_{i=1}^{n} C_i f_i\big(\varphi(s,x)\big)ds.$$

В силу условия квазиположительности, если $x \in \mathbb{R}^n_+$, то $\varphi(s,x) \in \mathbb{R}^n_+$, поэтому для любых $x \in \mathbb{R}^n_+$, $s \in [0,d]$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} C_i f_i\big(\varphi(s,x)\big) \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n_+} \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x) = \max_{x\in\mathbb{R}^n_+} L(x).$$

Следовательно,

$$D(x) \leqslant \int_0^d \max_{x\in\mathbb{R}^n_+} L(x)\, ds = d \cdot \max_{x\in\mathbb{R}^n_+} L(x). \tag{3.4}$$

Отметим, что неравенство (3.4) верно для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$, поэтому из него следует (3.2). □

В этом параграфе при помощи леммы 3.1 получены оценки функции $D(x)$ для моделей конкуренции и симбиоза двух видов. В дальнейшем данные результаты будут использованы для оценки средней временной выгоды от добычи возобновляемого ресурса для популяций с соответствующим типом взаимодействия видов.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим модель конкуренции двух видов x_1 и x_2. Предполагаем, что собственные скорости роста каждого из видов одинаковые $c_1 = c_2 = c > 0$, также одинаковые константы взаимодействия видов и самоограничения численности (то есть $a_{12} = a_{21} = a > 0$, $b_{12} = b_{21} = b > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases} \tag{3.5}$$

Пусть также выполнено неравенство $a > b$. Отметим, что в этом случае имеет место условие сосуществования двух видов и одна из особых точек системы (3.5) является устойчивым узлом [21, с. 147].

Для данной системы аналитически можно найти только решения с определенными начальными условиями. Так, если начальный размер первой популяции $x_1 = 0$, то первое уравнение системы (3.5) имеет решение $\varphi_1\big(t, (0, x_2)\big) \equiv 0$, второе является логистическим: $\dot{x}_2 = (c - ax_2)x_2$ и имеет решение

$$\varphi_2\big(d, (0, x_2)\big) = \frac{ce^{cd}x_2}{c + ax_2(e^{cd} - 1)}.$$

В данном случае функция

$$D(0, x_2) = C_2\Big(\frac{ce^{cd}x_2}{c + ax_2(e^{cd} - 1)} - x_2\Big)$$

достигает наибольшего значения

$$D(0, x_2^*) = \frac{c\,C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)} \tag{3.6}$$

при $x_2^* = \dfrac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$. Аналогично, если $x_2 = 0$, то наибольшее значение функции $D(x_1, 0)$ равно $\dfrac{c\,C_1(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$ и достигается при $x_1^* = \dfrac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$. Далее, если начальные размеры двух популяций совпадают: $x_1 = x_2$, то

$$\varphi_i\big(d, (x_1, x_1)\big) = \frac{c\,e^{cd}x_1}{c + (a + b)x_1(e^{cd} - 1)}, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае наибольшее значение функции $D(x) = D(x_1, x_1)$ равно

$$\frac{c\,(C_1 + C_2)(e^{cd/2} - 1)}{(a + b)(e^{cd/2} + 1)}. \tag{3.7}$$

Следовательно,

$$\max_{x\in\mathbb{R}_2^+} D(x) \geqslant \max\Big\{\frac{C_1}{a}, \frac{C_2}{a}, \frac{C_1+C_2}{a+b}\Big\}\frac{c\,(e^{cd/2}-1)}{e^{cd/2}+1}.$$

Для оценки $D(x)$ сверху применим лемму 3.1, в силу которой нужно найти максимум функции

$$L(x) = \sum_{i=1}^{2} C_i f_i(x) = C_1(c-ax_1-bx_2)x_1 + C_2(c-ax_2-bx_1)x_2.$$

Найдем стационарную точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ функции $L(x)$:

$$x_1^* = \frac{c\,C_2\big(2aC_1 - b(C_1+C_2)\big)}{4a^2C_1C_2 - b^2(C_1+C_2)^2}, \quad x_2^* = \frac{c\,C_1\big(2aC_2 - b(C_1+C_2)\big)}{4a^2C_1C_2 - b^2(C_1+C_2)^2}.$$

Возможны следующие случаи:

1. $x_1^* > 0, x_2^* > 0$ и x^* является точкой максимума. Применяя критерий Сильвестра, получаем, что данные условия выполнены, если

$$4a^2C_1C_2 - b^2(C_1+C_2)^2 > 0 \quad \text{и} \quad b(C_1+C_2) < 2a\min(C_1,C_2). \tag{3.8}$$

Здесь наибольшее значение $L(x)$ равно

$$L(x^*) = \frac{c^2C_1C_2(C_1+C_2)(a-b)}{4a^2C_1C_2 - b^2(C_1+C_2)^2}.$$

2. Если не выполнено хотя бы одно из неравенств (3.8), то наибольшее значение $L(x)$ на множестве $\mathbb{R}_+^2$ достигается в одной из точек $\Big(0, \dfrac{c}{2a}\Big)$ или $\Big(\dfrac{c}{2a}, 0\Big)$ и равно $\max(C_1,C_2)\,\dfrac{c^2}{4a}$.

Таким образом, для системы (3.5) при условии $a > b$ имеем следующие оценки:

$$\max\Big\{\frac{C_1}{a}, \frac{C_2}{a}, \frac{C_1+C_2}{a+b}\Big\}\frac{c\,(e^{cd/2}-1)}{e^{cd/2}+1} \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}_2^+} D(x) \leqslant$$
$$\leqslant c^2 d\cdot\max\Big\{\frac{C_1C_2(C_1+C_2)(a-b)}{4a^2C_1C_2 - b^2(C_1+C_2)^2}, \frac{C_1}{4a}, \frac{C_2}{4a}\Big\}. \tag{3.9}$$

Наибольшее значение функции $D(x_1, x_2)$ можно найти численными методами. Так, при $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$, $C_1 = 10$, $C_2 = 20$ наибольшее значение $D(x_1, x_2)$ достигается в точке $(x_1^*, x_2^*) \approx (0,095; 0,16)$ и приближенно равно $7,039$ (значения получены при программировании на языке Python). Для сравнения отметим, что при данных значениях параметров из (3.9) получается приближенное неравенство

$$6,931 \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}_2^+} D(x) \leqslant 7,619.$$

П р и м е р 3.2. Найдем оценки функции $D(x)$ для модели симбиоза двух близких видов x_1 и x_2 с одинаковыми постоянными собственной скорости роста каждого из видов $c_1 = c_2 = c$, одинаковыми константами взаимодействия видов и самоограничения численности (то есть $a_{12} = a_{21} = a$, $b_{12} = b_{21} = b$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 + bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 + bx_1)x_2. \end{cases} \tag{3.10}$$

Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и $a > b$. В результате стандартных вычислений получаем, что если

$$4a^2C_1C_2 - b^2(C_1 + C_2)^2 > 0,$$

то максимум функции

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x) = C_1(c - ax_1 + bx_2)x_1 + C_2(c - ax_2 + bx_1)x_2$$

достигается в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, где

$$x_1^* = \frac{c\,C_2\big(2aC_1 + b(C_1 + C_2)\big)}{4a^2C_1C_2 - b^2(C_1 + C_2)^2}, \quad x_2^* = \frac{c\,C_1\big(2aC_2 + b(C_1 + C_2)\big)}{4a^2C_1C_2 - b^2(C_1 + C_2)^2}.$$

В данном случае

$$L(x^*) = \frac{c^2C_1C_2(C_1 + C_2)(a + b)}{4a^2C_1C_2 - b^2(C_1 + C_2)^2}.$$

Если $4a^2C_1C_2 - b^2(C_1 + C_2)^2 \leqslant 0$, то наибольшее значение $L(x)$ на множестве $\mathbb{R}^2_+$ достигается в одной из точек $\left(0, \dfrac{c}{2a}\right)$ или $\left(\dfrac{c}{2a}, 0\right)$ и равно $\max(C_1, C_2)\,\dfrac{c^2}{4a}$.

Так же, как в примере 3.1, получаем, что при $a > b$ для системы (3.10) справедливы следующие оценки:

$$\frac{\max(C_1,\, C_2)c(e^{cd/2} - 1)}{(a - b)(e^{cd/2} + 1)} \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}^2_+} D(x) \leqslant \max\Big\{dL(x^*), \frac{C_1c^2d}{4a}, \frac{C_2c^2d}{4a}\Big\}.$$

Глава 2

Задачи оптимальной добычи ресурса для управляемых систем дифференциальных уравнений

Рассматривается задача оптимальной добычи ресурса из структурированной популяции, состоящей из отдельных видов, либо разделенной на возрастные классы. Динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений и в определенные моменты времени из популяции извлекается часть ресурса. В частности, можно предполагать, что производится добыча различных видов рыбы, каждый из которых имеет определенную стоимость; кроме того, между этими видами могут существовать взимодействия различного типа («хищник-жертва», конкуренция, симбиоз и другие).

Исследуются свойства средней временной выгоды, которая равна пределу от среднего арифметического стоимости ресурса при неограниченном увеличении количества моментов изъятия. Построены управляющие воздействия, при которых средняя временная выгода достигает фиксированного значения. Исследованы условия, при которых данная характеристика равна бесконечности и указан способ построения управления для достижения этого значения.

Полученные результаты проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов популяции и могут быть применены к другим всевозможным экологическим и экономическим моделям.

§ 4. Определение средней временной выгоды и построение управлений для достижения фиксированного значения данной характеристики

Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений (3.1).

Предполагаем, что в моменты времени $t = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ из популяции извлекаются определенные доли ресурса $u_1(k), \ldots, u_n(k)$ каждого вида. Величины $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k)) \in [0,1]^n$ будем считать управляющими воздействиями, которые можно изменять для достижения определенного результата сбора ресурса. Рассмотрим множество всех управлений на бесконечном промежутке времени —

$$U \doteq \big\{\overline{u} : \overline{u} = (u(1), u(2), \ldots, u(k), \ldots) \in [0,1]^\infty\big\}.$$

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$, зависящее от долей ресурса $u(1), \ldots, u(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i \geqslant 0$ — агрегированная стоимость ресурса i-го вида. Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент kd равна

$$Y(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(k) u_i(k).$$

О п р е д е л е н и е 4.1. (см. [22]). *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется функция

$$H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,. \qquad (4.1)$$

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*\big(\overline{u}, x(0)\big)$ и, если выполнено равенство $H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) = H^*\big(\overline{u}, x(0)\big)$, то определим предел

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,.$$

Рассмотрим задачу построения управлений $\overline{u} \in U$ для достижения фиксированной средней временной выгоды, которая будет ограничена максимальным значением функции

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d,x) - x_i\big)$$

или может равняться любому положительному числу, если $D(x)$ не ограничена сверху.

Теорема 4.1. (см. [54]). *Предположим, что существует* $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n_+$ *такое, что* $D(\widehat{x}) = h > 0$ *и* $\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d,\widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i = 1,\ldots,n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *такого, что* $\varphi_i(d,x(0)) \geqslant \widehat{x}_i$, $i = 1,\ldots,n$, *функция* $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает значения* h *при следующем режиме эксплуатации:*

$$\begin{aligned} u(1) &= \left(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d,x(0))},\ldots,1 - \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d,x(0))}\right);\\ u(k) &= \left(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d,\widehat{x})},\ldots,1 - \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d,\widehat{x})}\right),\ \ k \geqslant 2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$X_i(1) = \varphi_i(d,x(0)) \geqslant \widehat{x}_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ldots,n,$$

то $u(1) \in [0,1]^n$. Из условия $\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d,\widehat{x}) \neq 0$, $i = 1,\ldots,n$ следует, что $u(k) \in [0,1]^n$, $k \geqslant 2$.

При управлениях $\overline{u} = \big(u(1), \ldots, u(k), \ldots\big)$, указанных в (4.2), найдем

$$x(d) = \Big((1-u_1(1))X_1(1), \ldots, (1-u_n(1))X_n(1)\Big) =$$
$$= \Big(\frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d,\widehat{x}(0))}X_1(1), \ldots, \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d,\widehat{x}(0))}X_n(1)\Big) =$$
$$= \frac{\widehat{x}}{\varphi(d,x(0))}X(1) = \frac{\widehat{x}}{X(1)}X(1) = \widehat{x}.$$

Далее записываем в сокращенном виде:

$$X(2) = \varphi(d, x(1)) = \varphi(d,\widehat{x}),$$
$$x(2d) = (1-u(2))X(2) = \frac{\widehat{x}}{\varphi(d,\widehat{x})}\,\varphi(d,\widehat{x}) = \widehat{x}.$$

Аналогично,

$$x(kd) = \widehat{x}, \quad X(k) = \varphi(d,\widehat{x}) \ \text{ для всех } \ k \geqslant 2. \tag{4.3}$$

Из определения средней временной выгоды и (4.3) следует, что

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(1) u_i(1) + \sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(d,\widehat{x})\Big(1 - \frac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d,\widehat{x})}\Big)\right) =$$
$$= 0 + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d,\widehat{x}) - \widehat{x}_i\big) = \lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{k}\cdot D(\widehat{x}) = D(\widehat{x}) = h.$$

Таким образом, при режиме эксплуатации, заданном (4.2), выполнено равенство $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = h$. $\square$

З а м е ч а н и е 4.1. В статье [48] предложено другое доказательство теоремы 4.1 с использованием стационарных управлений. В отличие от [48], здесь в явном виде указаны значения $x(0)$, при которых справедливо утверждение теоремы.

Отметим, что при некоторых значениях h точку $\widehat{x}$ можно выбрать только так, что у нее будет равна нулю одна из координат. Управления, при которых $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ достигает данного значения h, приведены в следующем утверждении, которое доказывается аналогично теореме 4.1.

Теорема 4.2. (см. [54]). *Предположим, что существуют точка* $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n_+$ *и непустое подмножество* $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ *такие, что:*

(1) $D(\widehat{x}) = h > 0$;

(2) $\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i \in I$;

(3) $\varphi_i(kd, \widehat{x}) = 0$ *для всех* $i \notin I$, $k = 1, 2, \dots$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, x(0)),\ i = 1, \dots, n; \quad \varphi_i(d, x(0)) \neq 0,\ i \in I, \tag{4.4}$$

то функция $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает значения* h *при следующем режиме эксплуатации:*

если $i \in I$, *то* $u_i(1) = 1 - \dfrac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}$, $u_i(k) = 1 - \dfrac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, \widehat{x})}$ *при* $k \geqslant 2$;
если $i \notin I$, *то* $u_i(1) = 1$, $u_i(k) = 0$ *при* $k \geqslant 2$.

З а м е ч а н и е 4.2. Для любых $\overline{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ выполнено неравенство

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}^n_+} D(x). \tag{4.5}$$

При $n = 1$ это доказано в статье [53] и в общем случае в [48].

§ 5. Вычисление и оценка средней временной выгоды для некоторых моделей взаимодействия двух видов

П р и м е р 5.1. Найдем оценки средней временной выгоды для *модели конкуренции* двух видов x_1 и x_2, рассмотренной в примере 3.1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases}$$

Здесь $a > b > 0$, $c > 0$.

Обозначим через $U_* \subset U$ множество таких управлений $\overline{u}_*$, при которых происходит извлечение только одного вида ресурса (все время только первого вида либо только второго вида). Также рассматриваем множество U^*, состоящее из управлений $\overline{u}^* \subset U$, при которых извлекаются определенные доли ресурса каждого из двух видов. Пусть

$$\mathbb{R}^2_0 \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 0\big\}.$$

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если для системы* (3.5) *выполнено*

$$a\min(C_1, C_2) \geqslant b\max(C_1, C_2), \tag{5.1}$$

то существуют $\overline{u}^* \in U^*$ *и* $x^*(0) \in \mathbb{R}^2_+$ *такие, что*

$$H\big(\overline{u}^*, x^*(0)\big) \geqslant H\big(\overline{u}_*, x_*(0)\big)$$

для любых $\overline{u}_* \in U_*$, $x_*(0) \in \mathbb{R}^2_0$.

Значения $\overline{u}^*$ *и* $x^*(0)$ *можно определить следующим образом:*

$$\begin{gathered} u_i^*(1) = 1 - \frac{c + (a+b)(e^{cd} - 1)x(0)}{(a+b)e^{cd}(e^{cd/2} + 1)x(0)}, \\ u_i^*(k) = 1 - e^{-cd/2}, \quad k \geqslant 2; \\ x_i^*(0) \geqslant \frac{c}{(a+b)(e^{3cd/2} - 1)}, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В примере 3.1 показано, что если начальный размер первой популяции $x_1 = 0$, то фукция $D(x)$ достигает наибольшего значения

$$D(0, x_2^*) = \frac{c\, C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$$

при $x_2^* = \dfrac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$. Если $x_2 = 0$, то наибольшее значение функции $D(x)$ равно $\dfrac{c\, C_1(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$. Из (4.5) следует, что для любых $\overline{u}_* \in U_*$, $x_*(0) \in \mathbb{R}_0^2$

$$H\big(\overline{u}_*, x_*(0)\big) \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}_0^2} D(x) = \max(C_1, C_2) \frac{c(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}. \tag{5.3}$$

В примере 3.1 также показано, что если начальные размеры двух популяций совпадают (то есть $x_1 = x_2$), то наибольшее значение функции $D(x) = D(x_1, x_1)$ равно $\dfrac{c\,(C_1 + C_2)(e^{cd/2} - 1)}{(a + b)(e^{cd/2} + 1)}$. В силу теоремы 4.1

$$H\big(\overline{u}^*, x^*(0)\big) = \frac{c\,(C_1 + C_2)(e^{cd/2} - 1)}{(a + b)(e^{cd/2} + 1)} \tag{5.4}$$

при $\overline{u}^*$ и $x^*(0)$, заданных равенством (5.2) (это можно проверить при помощи несложных вычислений).

Пусть $C_1 \leqslant C_2$. Тогда неравенство (5.1) имеет вид $aC_1 \geqslant bC_2$. Отсюда получаем $a(C_1 + C_2) \geqslant (a + b)C_2$. Теперь из (5.3) и (5.4) следует, что при указанных значениях $\overline{u}_*, x_*(0)$ и $\overline{u}^*, x^*(0)$ выполнено

$$H\big(\overline{u}_*, x_*(0)\big) \leqslant C_2 \frac{c(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)} \leqslant \frac{c\,(C_1 + C_2)(e^{cd/2} - 1)}{(a + b)(e^{cd/2} + 1)} = H\big(\overline{u}^*, x^*(0)\big).$$

Таким образом, утверждение предложения верно. □

П р и м е р 5.2. Рассмотрим модель конкуренции двух видов (3.5) при условии $a \leqslant b$.

Следующее утверждение сформулируем при $C_1 \leqslant C_2$, случай $C_1 > C_2$ рассматривается аналогично.

П р е д л о ж е н и е 5.2. (см. [53]). *Пусть в системе* (5.1) $a \leqslant b$ *и* $C_1 \leqslant C_2$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^2_+$ *такого, что*

$$\varphi_2(d, x(0)) \geqslant x_2^* = \frac{c}{a(e^{cd/2}+1)},$$

функция $H_*\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = D(0, x_2^*) = \frac{c\,C_2(e^{cd/2}-1)}{a(e^{cd/2}+1)}$$

на множестве U *при следующем режиме эксплуатации:*

$$u^*(1) = \left(1, 1 - \frac{x_2^*}{\varphi_2(d, x(0))}\right); \; u^*(k) = \big(0, 1 - e^{-cd/2}\big), \;\; k \geqslant 2. \tag{5.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что для системы (5.1) при условиях $a \leqslant b$, $C_1 \leqslant C_2$ выполнено равенство

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2_+} D(x) = \frac{c\,C_2(e^{cd/2}-1)}{a(e^{cd/2}+1)}. \tag{5.6}$$

Обозначим через $z(t, z(0))$ скалярное произведение векторов (C_1, C_2) и $\varphi(t,x) = (\varphi_1, \varphi_2) = \big(\varphi_1(t, x_1, x_2), \varphi_2(t, x_1, x_2)\big)$, тогда

$$z(t, z(0)) \doteq C_1\varphi_1(t, x_1, x_2) + C_2\varphi_2(t, x_1, x_2),$$

где $z(0) = C_1x_1 + C_2x_2$. Найдем

$$\begin{aligned}\dot z = C_1(c - a\varphi_1 - b\varphi_2)\varphi_1 + C_2(c - a\varphi_2 - b\varphi_1)\varphi_2 = \\ = c(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) - a(C_1\varphi_1^2 + C_2\varphi_2^2) - b(C_1+C_2)\varphi_1\varphi_2 = \\ = cz - \frac{a}{C_2}(C_1C_2\varphi_1^2 + C_2^2\varphi_2^2) - b(C_1+C_2)\varphi_1\varphi_2.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая $C_1 \leqslant C_2$, получаем

$$\begin{aligned}\dot z \leqslant cz - \frac{a}{C_2}(C_1^2\varphi_1^2 + 2C_1C_2\varphi_1\varphi_2 + C_2^2\varphi_2^2) + 2aC_1\varphi_1\varphi_2 - b(C_1+C_2)\varphi_1\varphi_2 \leqslant \\ \leqslant cz - \frac{a}{C_2}z^2 + \big(2aC_1 - b(C_1+C_2)\big)\varphi_1\varphi_2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Далее, поскольку $a \leqslant b$, $C_1 \leqslant C_2$, то $2aC_1 - b(C_1+C_2) \leqslant 0$, поэтому из (5.7) следует неравенство

$$\dot{z} \leqslant cz - \frac{a}{C_2} z^2.$$

В силу теоремы Чаплыгина [26, с. 13] о дифференциальном неравенстве функция $z(t, z(0))$ не превосходит решения дифференциального уравнения

$$\dot{z} = cz - \frac{a}{C_2} z^2,$$

удовлетворяющего начальному условию $z(0)$, поэтому при $t = d$ справедливо

$$z(d, z(0)) \leqslant \frac{ce^{cd} z(0)}{c + \frac{a}{C_2} z(0)(e^{cd} - 1)}. \tag{5.8}$$

Отметим, что функция $z \mapsto \dfrac{ce^{cd} z}{c + \frac{a}{C_2} z(e^{cd} - 1)} - z$ достигает наибольшего значения, равного $\dfrac{c\,C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$, в точке $z^* = \dfrac{c\,C_2}{a(e^{cd/2} + 1)}$. Поэтому из (5.8) следует

$$z(d, z(0)) - z(0) \leqslant \frac{ce^{cd} z(0)}{c + \frac{a}{C_2} z(0)(e^{cd} - 1)} - z(0) \leqslant \frac{c\,C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}.$$

Из определения функций $D(x)$, $z(t, z(0))$ и предыдущего неравенства получаем

$$D(x) = z(d, z(0)) - z(0) \leqslant \frac{c\,C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}. \tag{5.9}$$

Так как $C_1 \leqslant C_2$, то наибольшее значение $D(x)$ достигается в точке $(0, x_2^*)$, где $x_2^* = \dfrac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$ и равно $D(x^*) = \dfrac{c\,C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$. Равенство (5.6) теперь следует из (5.9).

В силу теоремы 4.1 и неравенства (4.5), если $\varphi_2(d, x(0)) \geqslant x_2^*$, то функция $H_*\big(\overline{u}, x(0)\big)$ достигает наибольшего значения

$$\frac{c\,C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$$

на множестве U при режиме эксплуатации (5.5), указанном в условии предложения. $\square$

П р и м е р 5.3. Приведем оценку средней временной выгоды для модели симбиоза двух близких видов x_1 и x_2, заданной системой (3.10).

Из результатов, полученных в примере примере 3.2 и теоремы 4.1 следует, что при $a > b$ для любого $\overline{u} \in U$ справедливо неравенство

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant \max\left\{\frac{dc^2 C_1 C_2 d(C_1 + C_2)(a+b)}{4a^2 C_1 C_2 - b^2(C_1 + C_2)^2}, \frac{C_1 c^2 d}{4a}, \frac{C_2 c^2 d}{4a}\right\}.$$

За счет выбора управлений $\overline{u} \in U$ можно добиться того, что для определенных значений $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ будет выполнено

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \geqslant \frac{\max(C_1,\, C_2)c(e^{cd/2} - 1)}{(a-b)(e^{cd/2} + 1)}.$$

§ 6 . Построение управлений, при которых средняя временная выгода достигает бесконечного значения

Рассмотрим популяцию, динамика которой задана системой (3.1) и функцию

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d, x) - x_i\big),$$

введенную в третьем параграфе.

Теорема 6.1. (см. [54]). *Предположим, что существует $\widehat{x} \in \mathbb{R}_n^+$, такое, что*

(1) $\varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$;

(2) *последовательности* $\big\{\varphi_i(kd, \widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \ldots, n$ *возрастают;*

(3) $D\big(\varphi(kd,\widehat{x})\big) \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.1}$$

то существует режим эксплуатации $\overline{u} \in U$, *при котором*

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим одно из управляющих воздействий $\overline{u} \in U$, при котором можно достичь бесконечной средней временной выгоды. При $k = 1$ выберем управление

$$u(1) = \big(u_1(1), \ldots, u_n(1)\big) = \left(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, \ldots, 1 - \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d, x(0))}\right).$$

Из условия квазиположительности и (6.1) следует, что $u(1) \in [0,1]^n$. Найдем количество собранного ресурса каждого вида в момент времени $t = d$:

$$X_i(1)u_i(1) = \varphi_i(d, x(0))\left(1 - \frac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}\right) = \varphi_i(d, x(0)) - \widehat{x}_i, \tag{6.2}$$

а также количество оставшегося ресурса:

$$x_i(d) = (1 - u_i(1))\varphi_i(d, x(0)) = \widehat{x}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, $x(d) = \widehat{x}$. Получаем $X(2) = \varphi(d, x(d)) = \varphi(d, \widehat{x})$.

Дальнейшие управления полагаем равными

$$u(2k) = (0, \ldots, 0),$$
$$u(2k+1) = \left(1 - \frac{\varphi_1(kd, \widehat{x})}{\varphi_1((k+1)d, \widehat{x})}, \ldots, 1 - \frac{\varphi_n(kd, \widehat{x})}{\varphi_n((k+1)d, \widehat{x})}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Из условия квазиположительности и условия (2) теоремы следует, что $u(2k+1) \in [0,1]^n$. Найдем

$$x(2d) = X(2) = \varphi(d, \widehat{x}),$$

$$X(3) = \varphi(d, x(2d)) = \varphi(2d, \widehat{x}),$$
$$x(3d) = (1 - u(3))X(3) = \frac{\varphi(d, \widehat{x})}{\varphi(2d, \widehat{x})} X(3) = \varphi(d, \widehat{x}).$$

Аналогично находим, что

$$x(2kd) = x((2k+1)d) = \varphi(kd, \widehat{x}),$$
$$X(2k) = \varphi(kd, \widehat{x}),\ X(2k+1) = \varphi((k+1)d, \widehat{x}),\ k = 1, 2, \dots.$$

Отметим, что при данном способе эксплуатации в моменты времени $t = 2kd$, $k = 1, 2, \dots$ ресурс не извлекался; количество ресурса, извлеченного в момент $t = d$, определено в (6.2); а количество ресурса, добытого в момент $t = (2k+1)d$, $k = 1, 2, \dots$, составляет

$$X(2k+1)u(2k+1) =$$
$$= \big(\varphi_1((k+1)d, \widehat{x}) - \varphi_1(kd, \widehat{x}), \dots, \varphi_n((k+1)d, \widehat{x}) - \varphi_n(kd, \widehat{x})\big).$$

Стоимость ресурса, собранного в момент $t = d$, равна $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(X_i(1) - \widehat{x}_i\big)$, и для $t = (2k+1)d$, $k = 1, 2, \dots$, данная стоимость равна

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i((k+1)d, \widehat{x}) - \varphi_i(kd, \widehat{x})\big) = D(\varphi(kd, \widehat{x})). \tag{6.3}$$

Поэтому общая стоимость ресурса, извлеченного в моменты времени $t = d, 3d, \dots, (2k-1)d$, равна

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(2j-1) u_i(2j-1) = \sum_{i=1}^{n} C_i\big(X_i(1) - \widehat{x}_i\big) + \sum_{j=2}^{k} D(\varphi(jd, \widehat{x})).$$

Найдем среднюю временную выгоду

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{2k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j) =$$
$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{\ell=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(2\ell-1) u_i(2\ell-1) =$$
$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n} C_i\big(X_i(1)-\widehat{x}_i\big) + \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{\ell=2}^{k} D(\varphi(\ell d, \widehat{x})) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{\ell=2}^{k} D(\varphi(\ell d, \widehat{x}))\,. \quad (6.4)$$

По свойству предела от среднего арифметического, из условия (3) теоремы следует, что $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = +\infty$. □

Следствие 6.1. (см. [54]). *Пусть для некоторого* $\widehat{x} \in \mathbb{R}^{+}_{n}$ *выполнены условия:*

(1) $\varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$;

(2) *последовательности* $\big\{\varphi_i(kd, \widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \ldots, n$ *возрастают;*

(3) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(kd, \widehat{x}) = +\infty$.

Тогда, если $x(0) \in \mathbb{R}^{+}_{n}$ *удовлетворяет* (6.1), *то существует режим эксплуатации* $\overline{u} \in U$, *при котором* $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = +\infty$.

Доказательство. Режим эксплуатации $\overline{u} \in U$ выберем так же, как при доказательстве теоремы 6.1. Тогда из (6.3) следует, что суммарная стоимость ресурса, извлеченного в моменты $t = 3d, \ldots, (2k-1)d$, равна

$$\sum_{\ell=2}^{k} D(\varphi(\ell d, \widehat{x})) = \sum_{\ell=2}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i((\ell+1)d, \widehat{x}) - \varphi_i(\ell d, \widehat{x})\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i((k+1)d, \widehat{x}) - \varphi_i(2d, \widehat{x})\big).$$

Таким образом, если выполнено условие (3) следствия, то

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{\ell=2}^{k} D(\varphi(\ell d, \widehat{x})) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i((k+1)d, \widehat{x}) = +\infty.$$

$\square$

Теорема 6.2. (см. [54]). *Пусть существуют $\widehat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ и непустое подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ такие, что:*

(1) $\varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i \in I$;

(2) *последовательности* $\big\{\varphi_i(kd, \widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$, $i \in I$ *возрастают;*

(3) $\varphi_i(kd, \widehat{x}) = 0$ *для всех* $i \notin I$, $k = 1, 2, \dots$;

(4) $D\big(\varphi(kd, \widehat{x})\big) = \sum\limits_{i\in I} C_i\big(\varphi_i((k+1)d, \widehat{x}) - \varphi_i(kd, \widehat{x})\big) \to +\infty$ *при* $k \to \infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, x(0)),\ \ i = 1, \dots, n; \quad \varphi_i(d, x(0)) \neq 0,\ \ i \in I, \tag{6.5}$$

то существует управление $\overline{u} \in U$, *при котором* $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сначала, что если множество $J \doteq \{1, \dots, n\} \setminus I$ пустое, то утверждение теоремы совпадает с утверждением теоремы 6.1.

Далее будем предполагать, что множество J непусто. Для всех $i \in J$ положим $u_i(k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Для $i \in I$ определим управления $u_i(k)$, как в теореме 6.1, то есть

$$u_i(1) = 1 - \frac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))};$$

$$u_i(2k) = 0, \quad u_i(2k+1) = 1 - \frac{\varphi_i(kd, \widehat{x})}{\varphi_i((k+1)d, \widehat{x})}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Аналогично (6.4) получаем, что

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{j=2}^{k} D(\varphi(jd,\widehat{x})) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{j=2}^{k}\sum_{i\in I} C_i\big(\varphi_i((j+1)d,\widehat{x}) - \varphi_i(jd,\widehat{x})\big).$$

Таким образом, если $D\big(\varphi(kd,\widehat{x})\big) \to +\infty$ при $k\to\infty$, то средняя временная выгода бесконечная. □

З а м е ч а н и е 6.1. Утверждение теоремы 6.2 останется верным, если условие (4) заменить следующим условием:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i\in I} C_i\varphi_i(kd,\widehat{x}) = +\infty.$$

Это доказывается так же, как в следствии 6.1.

П р и м е р 6.1. Покажем, что для модели «хищник-жертва» средняя временная выгода может быть бесконечной и найдем управления, при которых она достигается. Рассмотрим модель, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha - \beta x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (-\gamma + \delta x_1)x_2. \end{cases} \tag{6.6}$$

Здесь x_1 и x_2 — размеры популяций жертв и хищников соответственно, все коэффициенты системы положительные (свойства решений системы описаны в [21]).

Пусть $\widehat{x}_1$ — произвольное положительное число, $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, 0)$, $I = \{1\}$. Найдем $\varphi_1(kd,\widehat{x}) = \widehat{x}_1 e^{\alpha kd}$, $\varphi_2(kd,\widehat{x}) = 0$, где $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что последовательность $\big\{\varphi_1(kd,\widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$ возрастает и

$$D\big(\varphi(kd,\widehat{x})\big) = C_1\big(\varphi_1\big((k+1)d,\widehat{x}\big) - \varphi_1(kd,\widehat{x})\big) = C_1\widehat{x}_1(e^{\alpha d}-1)e^{\alpha kd} \to +\infty$$

при $k \to \infty$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 6.2, поэтому $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = +\infty$.

Укажем один из способов управления, при котором $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = +\infty$. Из доказательства теоремы 6.2 следует, что для начальной точки $x(0)$, такой, что $\varphi_i(d, x(0)) \geqslant \widehat{x}_i$, $i = 1, 2$, можно выбрать следующие управления:

$$u(1) = \Big(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, 1\Big),$$

$$u(2k) = (0, 0), \quad u(2k+1) = \big(1 - e^{-\alpha d}, 0\big), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Здесь в момент $t = d$ производится отлов части «жертв» и всех «хищников», что создает благоприятные условия для «жертв». Бесконечное значение $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ достигается только за счет популяции «жертв».

§ 7. Оценки средней временной выгоды для систем дифференциальных уравнений, обладающих свойством монотонности решений

Рассмотрим эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой (3.1).

Пусть $X(k) = (X_1(k), \ldots, X_n(k))$ и $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))$ — видовой состав популяции до и после сбора в момент $\tau(k) = kd$ соответственно, тогда

$$X(k+1) = \varphi(d, x(k)), \quad x(k) = (1 - u(k))X(k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Если $u_i(k) = u_i$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то $X(k)$ удовлетворяет уравнению

$$X(k+1) = \varphi\big(d, (1-u)X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{7.1}$$

Обозначим через $S(u) = \big(S_1(u), \ldots, S_n(u)\big)$ неподвижную точку уравнения (7.1) (в предположении, что она существует и единственна), тогда $S(u) = \varphi(d, (1-u)S(u))$. Пусть $s(u) \doteq (1-u)S(u)$; отметим, что

$$s_i(u) = (1-u_i)S_i(u), \quad \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 7.1. *Пусть $u_i(k) = u_i$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и для системы* (3.1) *выполнено свойство* 1. *Тогда, если $x(0) \geqslant s(u)$, то имеет место оценка*

$$H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} C_i S_i(u) u_i. \tag{7.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству 1, если $x_i(0) \geqslant s_i(u)$, то

$$X_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \geqslant \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u),$$
$$x_i(1) = (1-u_i)X_i(1) \geqslant (1-u_i)S_i(u) = s_i(u), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$X_i(2) = \varphi_i(d, x(1)) \geqslant \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Аналогично получаем, что $X_i(k) \geqslant S_i(u)$ для всех $k = 1, 2, \ldots,$ $i = 1, \ldots, n$. Дальнейшее доказательство следует из определения средней временной выгоды (4.1):

$$H_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j) \geqslant$$
$$\geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i S_i(u) u_i = \sum_{i=1}^{n} C_i S_i(u) u_i.$$

□

П р и м е р 7.1. Найдем оценку средней временной выгоды для популяции из двух видов x_1 и x_2, между которыми наблюдается взаимодействие типа симбиоз:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_1x_2 - cx_1^2, \\ \dot{x}_2 = ax_2 + bx_1x_2 - cx_2^2. \end{cases} \tag{7.3}$$

Здесь $a > 0$, $c > b > 0$. Во втором параграфе показано, что для системы (7.3) выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных.

Решением данной системы, удовлетворяющим начальному условию $x_1(0) = x_2(0)$, является функция $\varphi(t, x(0)) = \big(\varphi_1(t, x(0)), \varphi_2(t, x(0))\big)$, где

$$\varphi_1(t, x(0)) = \varphi_2(t, x(0)) = \frac{ax_1(0)e^{at}}{a + (c-b)x_1(0)(e^{at} - 1)}, \quad t \geqslant 0. \tag{7.4}$$

Пусть $u_1 = u_2 = u < 1 - e^{-ad}$, тогда уравнение (7.1) имеет неподвижную точку $S(u)$ с координатами

$$S_1(u) = S_2(u) = \frac{a\big(e^{ad}(1-u) - 1\big)}{(c-b)(1-u)(e^{ad} - 1)} > 0. \tag{7.5}$$

Найдем

$$s_1(u) = s_2(u) = \frac{a\big(e^{ad}(1-u) - 1\big)}{(c-b)(e^{ad} - 1)}.$$

При $x(0) \geqslant s(u)$ в силу теоремы 7.1 имеем

$$H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) \geqslant \frac{a(C_1 + C_2)u\big(e^{ad}(1-u) - 1\big)}{(c-b)(1-u)(e^{ad} - 1)}.$$

Глава 3

Задачи оптимальной добычи ресурса для управляемых систем дифференциальных уравнений со случайными параметрами

В двух первых параграфах главы рассматривается модель однородной популяции, заданная при отсутствии эксплуатации дифференциальным уравнением $\dot{x} = f(x)$. В каждый момент времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, из этой популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega_k \in [0, 1], \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Предполагаем, что можно остановить заготовку в случае, если ее доля окажется больше некоторого значения $u \in [0, 1)$; то есть можно выбрать управление $u \in [0, 1)$ таким образом, чтобы доля добываемого ресурса равнялась

$$\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min(\omega_k, u), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Показано, что свойства средней временной выгоды связаны с наличием положительной неподвижной точки уравнения

$$X_{k+1} = \varphi\big(d, (1-u)X_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

где X_k — количество ресурса до сбора в момент kd, $\varphi(t, x)$ — решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Получены условия существования предела и оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Данные результаты проиллюстрированы на примерах однородных популяций, заданных линейным и логистическим дифференциальными уравнениями.

В §10 получены оценки средней временной выгоды для структурированной популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой линейных дифференциальных уравнений, зависящей от случайных параметров. Описан способ добычи ресурса, при котором с вероятностью единица достигается наибольшее значение средней временной выгоды при условии, что начальное количество популяции постоянно поддерживается на исходном уровне или периодически сохраняется; также построен режим добычи, при котором средняя временная выгода бесконечная. Параграф 11 посвящен примерам оценки средней временной выгоды с использованием результатов, полученных в предыдущих разделах. Здесь также показано, что утверждения параграфа 10 можно применить для дискретных моделей популяций, при отсутствии эксплуатации заданных матрицей Лесли.

В последнем параграфе главы рассматривается задача оценки средней временной выгоды для вероятностных моделей динамики популяций, заданных нелинейными системами дифференциальных уравнений, для которых выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных.

§ 8. Утверждения о существовании положительной неподвижной точки и средней временной выгоды

Рассмотрим модель популяции, которая при отсутствии эксплуатации задана дифференциальным уравнением $\dot{x} = f(x)$, а в каждый из моментов времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, из этой популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in \Omega \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u \in [0,1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min\{\omega_k, u\}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \quad t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k) &= (1 - \ell_k)x(\tau_k - 0), \quad k = 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Предполагаем, что решения уравнения непрерывны справа, функция $f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0, +\infty)$.

Пусть также имеет место следующее условие.

У с л о в и е 8.1. Предположим, что $f(0) \geqslant 0$ и $\varphi(t) \equiv K > 0$ является решением уравнения $\dot{x} = f(x)$.

З а м е ч а н и е 8.1. Отметим, что условие 8.1 выполнено для следующих уравнений:

1. Линейное уравнение $\dot{x} = a(K - x)$, где $a > 0$, $K > 0$.

2. Логистическое уравнение $\dot{x} = ax\Big(1 - \dfrac{x}{K}\Big)$, где коэффициент $a > 0$ является показателем роста популяции, $K > 0$ — емкость экологической ниши популяции.

3. Уравнение $\dot{x} = ax(x - L)(K - x)$, где $a > 0$, $K > L > 0$, L — нижняя критическая плотность популяции, K — стационарная плотность.

4. Уравнение Гомпертца $\dot{x} = -\dfrac{\varepsilon x}{\ln K} \ln \dfrac{x}{K}$, где $\varepsilon > 0$, $K > 1$.

Пусть $\overline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots)$, $x_0 \geqslant 0$ — начальный размер популяции, X_k — количество ресурса до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \dots$. Для уравнения со случайными параметрами (8.1) *средняя временная выгода* от извлечения ресурса задается равенством

$$H_*\big(\overline{\ell}, x_0\big) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ell_k \tag{8.2}$$

(см. [22]). Если предел в правой части (8.2) существует, то среднюю временную выгоду будем обозначать

$$H\big(\overline{\ell}, x_0\big) \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ell_k.$$

Приведем описание вероятностной модели $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, определяющей поведение случайных последовательностей $\sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots)$ (см. [16, 22]). Предполагаем, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\Omega \subseteq [0, 1]$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω; $\widetilde{\mu}$ — вероятностная мера, определенная с помощью некоторой функции распределения G. Определим

$$\Sigma \doteq \big\{\sigma : \sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots)\big\}, \quad \text{где} \quad \omega_k \in \Omega.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_k \in A_k\}, \quad \text{где} \quad A_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ i = 1, 2, \dots, k$$

и зададим меру $\widetilde{\mu}(D_k) = \widetilde{\mu}(A_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(A_k)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [27, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Напомним, что через $\varphi(t, x)$ мы обозначаем решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$.

Обозначим через x_k количество ресурса после сбора в момент τ_k, тогда $X_1 = \varphi(d, x_0)$ и

$$X_{k+1} = \varphi(d, x_k), \;\; x_k = (1-\ell_k)X_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Если $\ell_k = u$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ (такое возможно при $\omega_1 \geqslant u, \omega_2 \geqslant u, \ldots$), то X_k удовлетворяет уравнению

$$X_{k+1} = \varphi\big(d, (1-u)X_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{8.3}$$

Пусть $X(u)$ — неподвижная точка уравнения (8.3), тогда

$$X(u) = \varphi(d, (1-u)X(u)). \tag{8.4}$$

У т в е р ж д е н и е 8.1. (см. [56]). *Если выполнено условие* 8.1, *то уравнение* (8.3) *имеет неподвижную точку* $X(u)$ *такую, что* $X(u) \leqslant K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d > 0$ фиксировано. Покажем, что функция $\varphi(d, x)$ возрастающая. Действительно, если существуют такие $x_1 < x_2$, что $\varphi(d, x_1) \geqslant \varphi(d, x_2)$, то найдется точка $t_* \in (0, d]$ такая, что $\varphi(t_*, x_1) = \varphi(t_*, x_2)$; получили противоречие с условием единственности решений дифференциального уравнения.

Отметим, что условие $f(0) \geqslant 0$ является *условием квазиположительности* для дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$. Данное условие означает, что решения уравнения $\dot{x} = f(x)$ являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях (см. [11, с. 34]). Таким образом, из $f(0) \geqslant 0$ следует, что $\varphi(d, x) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$; в частности, $\varphi(d, 0) \geqslant 0$.

Если $\varphi(d, 0) = 0$, то уравнение (8.3) имеет неподвижную точку $X(u) = 0$. Предположим, что $\varphi(d, 0) > 0$. Рассмотрим функцию

$$h(x) \doteq \varphi(d, (1-u)x),$$

которая также является возрастающей. Тогда $h(0) = \varphi(d, 0) > 0$ и

$$h(K) = \varphi(d, (1-u)K) \leqslant \varphi(d, K) = K; \tag{8.5}$$

поэтому существует точка пересечения графиков функций $y = h(x)$ и $y = x$, то есть неподвижная точка $X(u)$ уравнения (8.3), такая, что $0 < X(u) \leqslant K$. □

В следующем утверждении приведены условия существования положительной неподвижной точки уравнения (8.3).

У т в е р ж д е н и е 8.2. (см. [56]). *Пусть* $\varphi(t) \equiv K > 0$ *является решением уравнения* $\dot{x} = f(x)$. *Если, кроме того, выполнено одно из условий:*

1) $\varphi(d, 0) > 0$;

2) $\varphi(d, 0) = 0$ *и* $(1-u)\varphi'_x(d, 0) > 1$,

то уравнение (8.3) *имеет неподвижную точку* $X(u)$ *и* $0 < X(u) \leqslant K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\varphi(d, 0) > 0$ доказательство существования положительной неподвижной точки приведено в утверждении 8.1.

Пусть выполнено второе условие утверждения. Отметим, что при $u = 1$ неравенство $(1-u)\varphi'_x(d, 0) > 1$ не верно; поэтому дальше рассматриваем $u \in [0, 1)$. Для функции $h(x) = \varphi(d, (1-u)x)$ найдем

$$h(0) = \varphi(d, 0) = 0, \quad h'(0) = (1-u)\varphi'_x(d, 0) > 1,$$

тогда касательная к графику функции $y = h(x)$ в точке $x = 0$ находится выше биссектрисы первого координатного угла, следовательно, найдется $x_* > 0$ такое, что $h(x_*) > x_*$. Поэтому, учитывая (8.5), из непрерывности функции $h(x)$ получаем, что существует $X(u)$ — точка пересечения биссектрисы с графиком $y = h(x)$, причем $0 < X(u) \leqslant K$. □

У т в е р ж д е н и е 8.3. (см. [56]). *Предположим, что* $\varphi(d,0)=0$ *и выполнено одно из условий:*

1) $(1-u)\varphi'_x(d,0)\leqslant 1$ *и функция* $\varphi(d,x)$ *строго выпукла вверх;*

2) $(1-u)\varphi'_x(d,0)\geqslant 1$ *и функция* $\varphi(d,x)$ *строго выпукла вниз.*

Тогда уравнение (8.3) *имеет единственную неподвижную точку* $X(u)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u=1$, то из условия $\varphi(d,0)=0$ следует, что уравнение (8.3) имеет вид $X_{k+1}=0$, $k=0,1,2,\dots$, поэтому утверждение верно.

Далее считаем, что $u\in[0,1)$ и исследуем функцию

$$h(x)=\varphi(d,(1-u)x).$$

Пусть выполнено первое условие утверждения. Заметим, что $h(0)=0$, $h'(0)\leqslant 1$. Кроме того, функция $h(x)$, как и $\varphi(d,x)$, строго выпукла вверх. Поэтому график $h(x)$ лежит ниже любой касательной к данной функции, в том числе, касательной $y=h'(0)x$, которая, в свою очередь, расположена не выше биссектрисы $y=x$; следовательно, $h(0)=0$ и $h(x)<x$ при $x>0$. Таким образом, единственной неподвижной точкой уравнение (8.3) является тривиальная точка $X(u)=0$. При выполнении второго условия утверждения доказательство аналогично. $\square$

З а м е ч а н и е 8.2. Если $\varphi(d,0)=0$ и выполнено

$$(1-u)\varphi'_x(d,0)<1,$$

то в утверждении 8.3 условие строгой выпуклости вверх функции $\varphi(d,x)$ можно заменить на условие выпуклости вверх. Утверждение также верно, если $(1-u)\varphi'_x(d,0)>1$ и функция $\varphi(d,x)$ выпукла вниз. Отметим, что при выполнении первого условия утверждения неподвижная точка $X(u)=0$ является устойчивой, при выполнении второго условия она неустойчивая.

Для любого $u \in [0,1]$ введем в рассмотрение случайную величину $\ell(\omega,u) \doteq \min\{\omega,u\}$ и обозначим через $M\ell(u)$ ее математическое ожидание. Пусть $x(u) \doteq (1-u)X(u)$, тогда $X(u) = \varphi(d, x(u))$.

Теорема 8.1. (см. [56]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любого $x_0 \in [x(u), K]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливы неравенства*

$$X(u)M\ell(u) \leqslant H_*\bigl(\bar{\ell}, x_0\bigr) \leqslant KM\ell(u). \tag{8.6}$$

Доказательство. Если выполнено условие 8.1, то уравнение (8.3) имеет неподвижную точку $X(u)$ и

$$x(u) \leqslant X(u) \leqslant K.$$

Рассмотрим $x_0 \in [x(u), K]$. Как доказано в утверждении 8.1, функция $\varphi(d,x)$ возрастающая, тогда

$$X_1 = \varphi(d, x_0) \geqslant \varphi(d, x(u)) = X(u).$$

Поэтому, так как $\ell(\omega_1, u) \leqslant u$, то

$$x_1 = (1 - \ell(\omega_1,u))X_1 \geqslant (1-\ell(\omega_1,u))X(u) \geqslant (1-u)X(u) = x(u).$$

Далее, $X_2 = \varphi(d,x_1) \geqslant \varphi(d,x(u)) = X(u)$. Аналогично получаем, что $X_k \geqslant X(u)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, если $x_0 \leqslant K$, то $X_k \leqslant K$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$X(u)\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega_k,u) \leqslant H_*\bigl(\bar{\ell},x_0\bigr) \leqslant K\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega_k,u). \tag{8.7}$$

Отметим, что случайные величины $\ell(\omega_k,u)$ независимы, одинаково распределены и, так как $0 \leqslant \ell(\omega_k,u) \leqslant u$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$M|\ell(\omega_k,u)| = M\ell(u) \leqslant u < \infty.$$

Тогда из усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell(\omega_k, u) = M\ell(u),$$

поэтому из (8.7) следует неравенство (8.6). $\square$

Утверждение теоремы 8.1 в частном случае (для логистического уравнения) получено в работе [22].

§ 9. Существование предела и оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим $\sigma_k \doteq (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \Omega^k$ и зададим рекуррентным образом случайные величины $A_k = A_k(\sigma_{k-1}, x)$, $B_k = B_k(\sigma_{k-1}, x)$:

$$A_1 = X(u),\ \ A_{k+1} = \varphi\big(d, (1-\ell_k)A_k\big);$$
$$B_1 = K,\ \ B_{k+1} = \varphi\big(d, (1-\ell_k)B_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Далее через MA_k и MB_k обозначены математические ожидания случайных величин A_k и B_k соответственно.

Теорема 9.1. (см. [56]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любого* $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ *и для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства*

$$\frac{M\ell(u)}{m}\sum_{k=1}^{m} MA_k \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant \frac{M\ell(u)}{m}\sum_{k=1}^{m} MB_k. \tag{9.1}$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1 работы [23].

Лемма 9.1. (см. [56]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда последовательность* $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ *является неубывающей, а* $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— невозрастающей, существуют конечные пределы данных последовательностей и*

$$\lim_{k\to\infty} MA_k \leqslant \lim_{k\to\infty} MB_k \leqslant K. \tag{9.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что

$$A_1 = X(u) \leqslant A_2(\omega, u) = \varphi\big(d, (1-\ell_1)X(u)\big) \quad \text{для любого} \quad \omega \in \Omega. \tag{9.3}$$

Поскольку $\ell_k = \min(\omega_k, u) \leqslant u$, $X(u) > 0$, то

$$(1-u)X(u) \leqslant (1-\ell_k)X(u)$$

и, так как функция $x \mapsto \varphi(d, x)$ возрастающая, то

$$X(u) = \varphi\big(d, (1-u)X(u)\big) \leqslant \varphi\big(d, (1-\ell_1)X(u)\big) = A_2(\omega_1, u).$$

Последнее неравенство выполнено для любого $\omega_1 \in \Omega$, поэтому $MA_1 \leqslant MA_2$.

Далее, из определений A_2 и A_3 следует

$$MA_2 = \int\limits_{\Omega} \varphi\big(d, (1-\ell_1)X(u)\big)d\omega_1 = \int\limits_{\Omega} \varphi\big(d, (1-\ell_2)X(u)\big)d\omega_2 =$$

$$= \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi\big(d, (1-\ell_2)X(u)\big)d\omega_1 d\omega_2,$$

$$MA_3 = \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi\big(d, (1-\ell_2)\varphi(d, (1-\ell_1)X(u))\big)d\omega_1 d\omega_2.$$

Из последних равенств и (9.3) получаем $MA_2 \leqslant MA_3$. Аналогично, $MA_k \leqslant MA_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким же образом доказывается, что последовательность $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая.

Отметим, что $0 < A_1 = X(u) \leqslant K = B_1$, поэтому

$$A_2 = \varphi\big(d, (1-\ell_1)X(u)\big) \leqslant \varphi\big(d, (1-\ell_1)K\big) = B_2$$

и аналогично,

$$A_k \leqslant B_k \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \dots . \tag{9.4}$$

Таким образом,

$$0 < X(u) \leqslant MA_k \leqslant MB_k \leqslant MB_1 = K.$$

Отсюда следует существование конечных пределов последовательностей $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ и неравенство (9.2). □

Теорема 9.2. (см. [56]). *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *интервал* $(x(u), K)$ *содержится в области притяжения решения* $\varphi(t) \equiv K > 0$ *дифференциального уравнения* $\dot{x} = f(x)$;

(2) $f'(x) < 0$ *для всех* $x \in (x(u), K)$.

Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ *существует предел*

$$H\big(\overline{\ell}, x_0\big) = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MB_k, \tag{9.5}$$

не зависящий от начального значения $x_0 \in [x(u), K]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что функция $\varphi'_x(t, x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{y} = f'_x\big(\varphi(t, x)\big)y$$

и $\varphi'_x(0, x) = 1$. Далее, если $x \in (x(u), K)$, то $\varphi(t, x) \in (x(u), K)$, поскольку $(x(u), K)$ входит в область притяжения решения $\varphi(t) \equiv K$. Следовательно, $f'_x\big(\varphi(t, x)\big) < 0$ для всех $t \geqslant 0$, $x \in (x(u), K)$, поэтому существует $q < 1$ такое, что для фиксированного $d > 0$ выполнено

$$\varphi'_x(d, x) = \exp \int_0^d f'_x\big(\varphi(s, x)\big)ds \leqslant q < 1. \tag{9.6}$$

Пусть $x_1 \in [x(u), K]$, $x_2 \in [x(u), K]$ и $x_1 < x_2$. В силу теоремы Лагранжа найдется $\widehat{x} \in (x_1, x_2) \subseteq (x(u), K)$, такое, что

$$\varphi(d, x_2) - \varphi(d, x_1) = \varphi'_x(d, \widehat{x})(x_2 - x_1),$$

тогда из (9.6) следует

$$\varphi(d, x_2) - \varphi(d, x_1) \leqslant q(x_2 - x_1). \tag{9.7}$$

Покажем, что $(1 - \ell_k)A_k \in [x(u), K]$ и $(1 - \ell_k)B_k \in [x(u), K]$, $k = 1, 2, \ldots$. Из определений $A_1 \doteq X(u)$, $B_1 \doteq K$, $\ell_k \doteq \min\{\omega_k, u\}$ следует

$$x(u) \doteq (1 - u)X(u) \leqslant (1 - \ell_1)X(u) = (1 - \ell_1)A_1 \leqslant (1 - \ell_1)B_1 \leqslant B_1 = K.$$

Далее учитываем (8.4), (9.4) и условие возрастания функции $\varphi(d, x)$:

$$\begin{aligned} X(u) = \varphi(d, (1 - u)X(u)) \leqslant \varphi(d, (1 - \ell_1)A_1) = A_2 \leqslant B_2 = \\ = \varphi(d, (1 - \ell_1)B_1) \leqslant \varphi(d, K) = K, \end{aligned}$$

$$x(u) = (1 - u)X(u) \leqslant (1 - \ell_2)X(u) \leqslant (1 - \ell_2)A_2 \leqslant (1 - \ell_2)B_2 \leqslant K.$$

Продолжая таким же образом, получаем, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ верно

$$x(u) \leqslant (1 - \ell_k)A_k \leqslant (1 - \ell_k)B_k \leqslant K.$$

Теперь из неравенства (9.7) имеем

$$B_2 - A_2 = \varphi\big(d, (1 - \ell_1)B_1\big) - \varphi\big(d, (1 - \ell_1)A_1\big) \leqslant q(1 - \ell_1)(B_1 - A_1).$$

Аналогично, неравенство $B_{k+1} - A_{k+1} \leqslant q(1 - \ell_k)(B_k - A_k)$ выполнено для всех $k = 1, 2, \ldots$, следовательно

$$0 \leqslant B_{k+1} - A_{k+1} \leqslant q^k(1 - \ell_1) \ldots (1 - \ell_k)(B_1 - A_1).$$

Далее, так как $q^k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty}(B_k - A_k) = 0$. Кроме того, пределы последовательностей $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ существуют в силу леммы 9.1, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} MA_k = \lim_{k\to\infty} MB_k. \tag{9.8}$$

Теперь, переходя к пределу при $m \to \infty$ в (9.1), получаем

$$M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MB_k, \tag{9.9}$$

откуда, с учетом (9.8), следует существование предела функции $H\big(\bar{\ell}, x_0\big)$ и равенство (9.5). $\square$

З а м е ч а н и е 9.1. Доказательство теоремы 9.2 использует идею доказательства теоремы 2 работы [23], но оно более простое, поэтому мы его приводим полностью.

Следствие 9.1. (см. [56]). *Пусть выполнены условия теоремы* 9.2, $X(u) > 0$ *и* $M\ell(u) > 0$. *Тогда* $H\big(\bar{\ell}, x_0\big) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что последовательность $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ неубывающая, $MA_1 = X(u) > 0$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k > 0$. Далее, в силу теоремы 9.2 для почти всех $\sigma \in \Sigma$ существует предел

$$H\big(\bar{\ell}, x_0\big) = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k$$

и этот предел положительный. $\square$

Теорема 9.3. (см. [56]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любых* $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ *и для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедливы неравенства*

$$M\ell(u)MA_m \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant M\ell(u)MB_m. \tag{9.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказанного выше следует, что последовательность $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ неубывающая и имеет конечный предел, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k \geqslant MA_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Из (9.9) получаем

$$M\ell(u)MA_m \leqslant M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big).$$

Поскольку последовательность $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая, то аналогично получаем неравенство в правой части (9.10). □

П р и м е р 9.1. Исследуем популяцию, динамика которой задана линейным уравнением

$$\dot{x} = a(K - x), \quad x \geqslant 0. \tag{9.11}$$

Предполагаем, что $a > 0$, $K > 0$, начальный размер популяции $x_0 \geqslant 0$, случайные величины $\omega_1, \omega_2, \ldots$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим задачу — найти управление $u \in [0, 1]$, при котором с вероятностью единица достигается наибольшее значение средней временной выгоды.

По определению случайных величин A_k имеем

$$A_{k+1} = \varphi\big(d, (1 - \ell_k)A_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots;$$

следовательно,

$$MA_{k+1} = M\varphi\big(d, (1 - \ell_k)A_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Решением уравнения (9.11), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, x) = x$, является функция $\varphi(t, x) = K + (x - K)e^{-at}$, поэтому

$$MA_{k+1} = M\big(K + ((1 - \ell_k)A_k - K)e^{-ad}\big) = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}M((1 - \ell_k)A_k).$$

Случайные величины ℓ_k и A_k независимы, тогда

$$M\big((1 - \ell_k)A_k\big) = (1 - M\ell_k)MA_k = (1 - M\ell(u))MA_k$$

и следовательно,

$$MA_{k+1} = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}(1 - M\ell(u))MA_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{9.12}$$

В силу леммы 9.1, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k$, поэтому можно перейти к пределу в (9.12). Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k = A(u)$, тогда

$$A(u) = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}(1 - M\ell(u))A(u).$$

Отсюда находим, что

$$A(u) = \frac{K(1 - e^{-ad})}{1 - e^{-ad}(1 - M\ell(u))}.$$

В силу теоремы 9.2,

$$H\big(\overline{\ell}, x_0\big) = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k = M\ell(u)A(u).$$

Рассмотрим функцию

$$H(u) \doteq M\ell(u)A(u) = \frac{K(1 - e^{-ad})M\ell(u)}{1 - e^{-ad}(1 - M\ell(u))}.$$

Несложно найти, что $H(u)$ достигает наибольшего значения, если $M\ell(u)$ максимальное.

В работе [22] показано, что, если функция распределения G случайной величины ω абсолютно непрерывна, то математическое ожидание случайной величины $\ell(\omega, u)$ равно

$$M\ell(u) = \int\limits_0^u tg(t)dt + u\big(1 - G(u)\big), \tag{9.13}$$

где через g обозначена плотность данного распределения. В этом примере распределение G равномерное на отрезке $[0, 1]$, поэтому $g(t) = 1$ при $t \in [0, u]$ и $G(u) = u$. Следовательно, из (9.13) получаем, что

$$M\ell(u) = u - \frac{u^2}{2}.$$

Функция $M\ell(u)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[0,1]$ при $u = 1$, найдем

$$M\ell(1)=\frac{1}{2},\quad H(1)=\frac{K(1-e^{-ad})}{2-e^{-ad}}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что для достижения наибольшей средней временной выгоды для популяции (9.12) долю добываемого ресурса ограничивать не нужно. Отметим, что если популяция задана уравнениями $2-4$, приведенными в замечании 8.1, то этот вывод является неверным, так как все данные уравнения имеют решения $\varphi(t,0)\equiv 0$.

П р и м е р 9.2. Рассмотрим популяцию, заданную логистическим уравнением

$$\dot{x}=(a-bx)x, \tag{9.14}$$

где $a>0$, $b>0$; считаем, что начальный размер популяции $x_0\geqslant 0$. Предполагаем, что случайные величины $\omega_1,\omega_2,\ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найдем оценки средней временной выгоды для уравнения (9.14), выполненные с вероятностью единица.

Решением уравнения (9.14), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0,x)=x$, является функция

$$\varphi(t,x)=\frac{axe^{at}}{a+bx(e^{at}-1)}, \tag{9.15}$$

поэтому уравнение (8.3) при любом $u\in[0,1]$ имеет нулевую неподвижную точку. Отметим, что $\varphi(d,0)=0$ и $\varphi'_x(d,0)=e^{ad}$. В силу утверждения 8.2, при $u\in[0,1-e^{-ad})$ уравнение (8.3) имеет неподвижную точку $X(u)$, такую, что $0<X(u)\leqslant K=\dfrac{a}{b}$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$X(u)=\frac{ae^{ad}(1-u)-a}{b(e^{ad}-1)(1-u)}.$$

При $u \in [1 - e^{-ad}, 1]$ уравнение (8.3) имеет только нулевую неподвижную точку.

Таким образом, при $u < 1 - e^{-ad}$ неравенства (8.6) имеют вид

$$M\ell(u)\frac{ae^{ad}(1-u)-a}{b(e^{ad}-1)(1-u)} \leqslant H_*\big(\overline{\ell}, x_0\big) \leqslant \frac{a}{b}M\ell(u). \tag{9.16}$$

При $u \in [1 - e^{-ad}, 1]$ в левой части (9.16) стоит ноль. В силу теоремы 8.1, неравенства (9.16) выполнены для любого $x_0 \in \Big[\dfrac{ae^{ad}(1-u)-a}{b(e^{ad}-1)}, \dfrac{a}{b}\Big]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Учитывая (9.15), аналогично примеру 9.1 найдем

$$MA_{k+1} = M\Big(\frac{ae^{ad}(1-\ell_k)A_k}{a+b(e^{ad}-1)(1-\ell_k)A_k}\Big), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку функция $\varphi(d, x)$ выпукла вниз, то в силу неравенства Иенсена (см. [27, с. 207]) и с учетом независимости случайных величин ℓ_k и A_k получаем

$$MA_{k+1} \leqslant \frac{ae^{ad}(1-M\ell(u))MA_k}{a+b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))MA_k}. \tag{9.17}$$

Переходя к пределу в (9.17) (как и в предыдущем примере, считаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k = A(u)$) и затем решая полученное неравенство, имеем

$$A(u) \leqslant \frac{a(1-M\ell(u))e^{ad}-a}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}.$$

Отсюда в силу теоремы 9.2 получаем оценку сверху для средней временной выгоды, выполненную с вероятностью единица:

$$H\big(\overline{\ell}, x_0\big) = M\ell(u)A(u) \leqslant M\ell(u)\frac{a(1-M\ell(u))e^{ad}-a}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}.$$

Объединяя последнее неравенство с (9.16), окончательно получаем, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ при $u < 1 - e^{-ad}$ справедливы оценки

$$\frac{aM\ell(u)\big(e^{ad}(1-u)-1\big)}{b(e^{ad}-1)(1-u)} \leqslant H\big(\overline{\ell}, x_0\big) \leqslant aM\ell(u)\frac{e^{ad}(1-M\ell(u))-1}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}. \tag{9.18}$$

З а м е ч а н и е 9.2. Неравенство (9.18) можно записать в сокращенном виде следующим образом:

$$M\ell(u)X(u) \leqslant H\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant M\ell(u)X(M\ell(u)), \tag{9.19}$$

где $X(u)$ — неподвижная точка уравнения (8.3). Отметим, что (9.19) верно не только для логистического уравнения (9.14), но и для любого дифференциального уравнения, у которого решение $\varphi(d, x)$ обладает свойством выпуклости вниз.

§ 10. Об оптимальной добыче ресурса для популяций, заданных системой линейных дифференциальных уравнений

Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

$A = \{a_{ij}\}$ — квадратная $n \times n$ матрица. Пусть в моменты времени kd, где $d > 0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = \big(\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)\big) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. Напомним, что в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент kd.

Пусть имеется возможность контролировать процесс сбора так, чтобы остановить заготовку в момент kd, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся больше, чем значения

$$\big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) = u(k) \in [0,1)^n.$$

В этом случае определенная часть популяции сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора и доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k) = \big(\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)\big) \in [0,1]^n$, где

$$\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = 1, \ldots, n, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Предположим, что начальное количество ресурса i-го вида равно $X_i(0)$, количество ресурса этого вида до сбора в момент kd составляет

$$X_i(k) = x_i(kd - 0), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

после сбора данное количество равно $x_i(kd)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= \big(1 - \ell_i(k)\big) \cdot x_i(kd - 0), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Полагаем, что решения системы (10.1) непрерывны справа.

Пусть $C_i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида, $i = 1, \ldots, n$, тогда общая стоимость собранного ресурса в момент времени kd равна

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(k) \ell_i(k).$$

Пусть $\overline{\ell} \doteq \big(\ell(1), \ldots, \ell(k), \ldots\big)$, тогда средняя временная выгода от добычи ресурса задается равенством

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \doteq \varliminf_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) \ell_i(j). \tag{10.2}$$

Сначала приведем определения и известные результаты о матрицах Метцлера и экспоненциально неотрицательных матрицах.

Пусть A и B — вещественные прямоугольные матрицы одинаковых размеров $n \times m$. Будем писать $A \leqslant B$ или $B \geqslant A$ в том и только в том случае, когда

$$a_{ij} \leqslant b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m.$$

Если во всех последних неравенствах можно отбросить знак равенства, то будем писать $A < B$ или $B > A$. В частности, для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ неравенство $x \leqslant y$ означает, что $x_i \leqslant y_i$ для любых $i = 1, \ldots, n$. Матрица A называется *неотрицательной* (обозначение $A \geqslant 0$) или *положительной* (обозначение $A > 0$), если все элементы матрицы A неотрицательные (соответственно положительные), см. [4, с. 352-355].

Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение линейной системы $\dot{x} = Ax$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n_+$. Известно, что данное решение можно записать в виде $\varphi(t, x) = e^{At}x$, где e^{At} — матричная экспонента. Матрица A называется *экспоненциально неотрицательной*, если $e^{At} \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$, см. [44].

Всюду в данном параграфе будем предполагать, что $n \times n$ матрица A является *матрицей Метцлера.* Это означает, что элементы матрицы A удовлетворяют неравенствам

$$a_{ij} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \ i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 10.1. (см. [44]). *Матрица A является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.*

Отметим, что первоначально данное утверждение, по-видимому, было доказано Т. Важевским в работе [50] 1950 года. Из леммы 10.1 очевидно, следует, что если A — матрица Метцлера и $x \leqslant y$, то

$$\varphi(t,x) = e^{At}x \leqslant e^{At}y = \varphi(t,y)$$

для любого $t \geqslant 0$. Также отсюда следует, что решение $\varphi(t,x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях, то есть обладает свойством *квазиположительности* (см. [11, с. 34]).

Управляемая система (10.1) зависит от случайных величин $\omega(k) \in \Omega$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Описание соответствующей *вероятностной модели* приведено в параграфе 8.

Докажем утверждение, необходимое для оценки средней временной выгоды, выполненной с вероятностью единица. Следующая теорема является следствием усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова [27, с. 418] и может применяться во многих других задачах; поэтому в данном разделе мы сохраняем обозначения и пределы суммирования, которые обычно применяются для формулировки закона больших чисел.

Теорема 10.1. (см. [57]). *Предположим, что* $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,*

$$M\xi_1 > 0, \quad 0 \leqslant \xi_k \leqslant a$$

для некоторого $a > 0$ *и всех* $k = 1, 2, \ldots$. *Пусть также задана числовая последовательность* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что* $b_k \to +\infty$ *при* $k \to \infty$. *Тогда для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнено равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} b_j \xi_j = +\infty. \tag{10.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сначала, что последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел А. Н. Колмогорова, в силу которого для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \xi_j = M\xi_1 > 0. \tag{10.4}$$

Так как $b_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то для любого $b > 0$ найдется номер k_0 такой, что $b_k \geqslant b$ для всех $k \geqslant k_0$. Поэтому при $k \geqslant k_0$ выполнено

$$\sum_{j=k_0}^{k} b_j\xi_j \geqslant b\sum_{j=k_0}^{k} \xi_j.$$

Из последнего неравенства и (10.4) получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} b_j\xi_j = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=k_0}^{k} b_j\xi_j \geqslant b\cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=k_0}^{k} \xi_j = b\cdot M\xi_1 \tag{10.5}$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Таким образом, поскольку b — любое положительное число и $M\xi_1 > 0$, то из (10.5) следует (10.3). □

В диссертации будет применяться следствие из теоремы 10.1:

Следствие 10.1. (см. [57]). *Пусть* $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких, что* $M\xi_1 > 0$, $0 \leqslant \xi_k \leqslant a$ *для некоторого* $a > 0$ *и всех* $k = 1, 2, \ldots$. *Если* $\lambda > 1$, *то для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнено равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda^j\xi_j = +\infty.$$

Доказательство следует из того, что $\lambda^k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то есть числовая последовательность $\{\lambda^k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 10.1.

Напомним, что мы рассматриваем случайные величины

$$\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = 1, \ldots, n,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.6}$$

определяющие долю ресурса i-го вида, добываемого из популяции в моменты времени kd, где $d > 0$. Пусть $L(k) = \operatorname{diag}\big(\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)\big)$ — диагональная $n \times n$ матрица с элементами $\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)$ на главной диагонали, E — единичная матрица n-го порядка, $X(0) \in \mathbb{R}^n_+$. Тогда развитие популяции (10.1) можно задать динамической системой, зависящей от случайных параметров:

$$X(k+1) = e^{Ad}\big(E - L(k)\big)X(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{10.7}$$

где $X(k) = \big(X_1(k), \dots, X_n(k)\big)$ — видовой состав популяции до сбора ресурса в момент времени kd.

Вместе с системой со случайными параметрами (10.7) будем исследовать соответствующую ей детерминированную систему

$$\widetilde{X}(k+1) = e^{Ad}\big(E - U(k)\big)\widetilde{X}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{10.8}$$

где $U(k) = \operatorname{diag}\big(u_1(k), \dots, u_n(k)\big)$, $\widetilde{X}(0) = X(0)$.

О п р е д е л е н и е 10.1. (см. [57]). Вектор Y называется $\big(e^{Ad}, \widetilde{X}(0)\big)$ *достижимым за m шагов*, если существует конечная последовательность векторов $\{u(0), \dots, u(m-1)\}$, таких, что

$$\widetilde{X}(j+1) = e^{Ad}\big(E - U(j)\big)\widetilde{X}(j), \; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{и} \quad \widetilde{X}(m) = Y.$$

Отметим, что подобное определение приведено в работе [33] для систем разностных уравнений, заданных матрицей Лесли.

Рассмотрим множество $\mathcal{U} \doteq \{\overline{u} : \overline{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}$, где $u(k) \in [0, 1]^n$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайных величин, $P(k) \doteq e^{Ad}\big(E - L(k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

В следующей теореме получена оценка снизу для средней временной выгоды при условии, что начальный состав популяции $X(0)$ постоянно сохраняется или периодически восстанавливается, то есть $X(km) \geqslant X(0)$ для некоторого $m \geqslant 1$ и всех $k = 1, 2, \ldots$. Если $X(0) > 0$, то условие $X(km) \geqslant X(0)$ обеспечивает сохранность всех видов или возрастных классов, составляющих данную популяцию.

Теорема 10.2. (см. [57]). *Пусть $X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за m шагов. Тогда существует $\overline{u} \in \mathcal{U}$ такое, что*

$$X(km) \geqslant X(0), \quad k = 1, 2, \ldots$$

и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено неравенство

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n} C_i M X_i(j) M \ell_i(j), \tag{10.9}$$

где $X(j) = P(j-1) \ldots P(1) P(0) X(0)$, $j = 1, \ldots, m-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как вектор $X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за m шагов, то существует конечная последовательность векторов $\{u^*(0), \ldots, u^*(m-1)\}$, таких, что

$$\widetilde{X}(j+1) = e^{Ad}\big(E - U^*(j)\big)\widetilde{X}(j), \quad \widetilde{X}(m) = X(0),$$

где $U(j) = \operatorname{diag}\big(u_1^*(j), \ldots, u_n^*(j)\big)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

Далее, $\ell_i(j) \doteq \min\{\omega_i(j), u_i(j)\} \leqslant u_i(j)$ для всех $i = 1, \ldots, n$, поэтому $L(j) \leqslant U(j)$ и

$$P(j) \doteq e^{Ad}\big(E - L(j)\big) \geqslant e^{Ad}\big(E - U(j)\big), \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10.10}$$

Из (10.7) найдем $X(m) = P(m-1) \ldots P(1) P(0) X(0)$, тогда

$$X(m) \geqslant e^{Ad}\big(E - U^*(m-1)\big) \ldots e^{Ad}\big(E - U^*(0)\big) X(0) = X(0). \tag{10.11}$$

Выберем управление $\overline{u} \in \mathcal{U}$ стационарным, если $m = 1$ или периодическим с периодом m, если $m \geqslant 2$, полагая

$$u(km + j) = u^*(j), \quad j = 0, \dots, m-1, \;\; k = 1, 2, \dots .$$

Последние равенства равносильны

$$U(km + j) = U^*(j), \quad j = 0, \dots, m-1, \;\; k = 1, 2, \dots . \tag{10.12}$$

Из (10.10) и (10.12) следует

$$\begin{aligned} X(2m) = P(2m-1) \dots P(m+1) P(m) X(m) \geqslant \\ \geqslant e^{Ad}(E - U(2m-1)) \dots e^{Ad}(E - U(m)) X(0) = \\ = e^{Ad}(E - U^*(m-1)) \dots e^{Ad}(E - U^*(0)) X(0) = X(0). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$X(km) \geqslant X(0) \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \dots . \tag{10.13}$$

Теперь из (10.13) имеем

$$\begin{aligned} X(km+1) = P(km) X(km) \geqslant P(km) X(0), \\ X(km+2) = P(km+1) P(km) X(km) \geqslant P(km+1) P(km) X(0), \dots, \\ X(km+m-1) = P(km+m-2) \dots P(km) X(km) \geqslant \\ \geqslant P(km+m-2) \dots P(km) X(0). \end{aligned} \tag{10.14}$$

Обозначим скалярное произведение векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ через $\langle x, y \rangle$, тогда $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Пусть $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Учитывая (10.13) и (10.14), получаем следующую оценку средней временной выгоды:

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(j), \ell(j)\big\rangle = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{km}\sum_{j=0}^{km-1}\big\langle CX(j), \ell(j)\big\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{km}\Big(\big\langle CX(0), \ell(0)\big\rangle + \big\langle CP(0)X(0), \ell(1)\big\rangle + \ldots +$$

$$+ \big\langle CP(m-2)\ldots P(1)P(0)X(0), \ell(m-1)\big\rangle +$$

$$+ \big\langle CX(0), \ell(m)\big\rangle + \big\langle CP(m)X(0), \ell(m+1)\big\rangle + \ldots +$$

$$+ \big\langle CP(km-2)\ldots P((k-1)m)X(0), \ell(km-1)\big\rangle\Big). \quad (10.15)$$

Поскольку $u(km) = u^*(0)$, то случайные величины

$$\ell_i(km) = \min\{\omega_i(km), u_i(km)\} = \min\{\omega_i(km), u_i^*(0)\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

независимы и одинаково распределены (для каждого $i = 1, \ldots, n$). Скалярные произведения $\big\langle CX(0), \ell(km)\big\rangle$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ также являются независимыми случайными величинами, имеют одинаковое распределение и, так как

$$0 \leqslant \big\langle CX(0), \ell(km)\big\rangle \leqslant \|CX(0)\|,$$

то имеет место

$$M\big|\big\langle CX(0), \ell(km)\big\rangle\big| \leqslant \|CX(0)\| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поэтому из усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(0), \ell(jm)\big\rangle = \big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle.$$

Случайные величины

$$\big\langle CX(km+1), \ell(km+1)\big\rangle = \big\langle CP(km)X(0), \ell(km+1)\big\rangle, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

также удовлетворяют усиленному закону больших чисел, поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\bigl\langle CP(jm)X(0),\ell(jm+1)\bigr\rangle=\bigl\langle CMP(0)X(0),M\ell(1)\bigr\rangle.$$

Аналогично, из (10.15) получаем, что

$$H_*\bigl(\overline{\ell},x(0)\bigr)\geqslant\frac{1}{m}\Bigl(\bigl\langle CX(0),M\ell(0)\bigr\rangle+\ldots+ \\ +\bigl\langle CMP(m-2)\ldots P(1)P(0)X(0),\ell(m-1)\bigr\rangle\Bigr),$$

то есть выполнено неравенство (10.9). □

З а м е ч а н и е 10.1. Случайные величины $\ell_i(0),\ldots,\ell_i(m-2)$ независимы, поэтому независимыми являются случайные матрицы

$$P(0),\ldots,P(m-2).$$

Следовательно,

$$MX(j)=MP(j-1)\ldots MP(1)MP(0)X(0),\quad j=1,\ldots,m-1,$$

где $MP(s)=e^{Ad}\bigl(E-ML(s)\bigr)$, $ML(s)=\operatorname{diag}\bigl(M\ell_1(s),\ldots,M\ell_n(s)\bigr)$, $s=0,1,\ldots,j-1$.

Теорема 10.3. (см. [57]). *Пусть $\lambda X(0)$ является $\bigl(e^{Ad},X(0)\bigr)$ достижимым за m шагов при некотором $\lambda>1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}C_iX_i(0)M\ell_i(0)>0$. Тогда существует $\overline{u}\in\mathcal{U}$ такое, что $X(km)\geqslant\lambda^kX(0)$, $k=1,2,\ldots$ и $H_*\bigl(\overline{\ell},X(0)\bigr)=+\infty$ для почти всех $\sigma\in\Sigma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как вектор $\lambda X(0)$ является $\bigl(e^{Ad},X(0)\bigr)$ достижимым за m шагов, то существует конечная последовательность векторов $\{u^*(0),\ldots,u^*(m-1)\}$, таких, что

$$\widetilde{X}(j+1)=e^{Ad}\bigl(E-U^*(j)\bigr)\widetilde{X}(j),\quad \widetilde{X}(m)=\lambda X(0),$$

где $U(j) = \operatorname{diag}\big(u_1^*(j), \dots, u_n^*(j)\big)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Также, как при выводе (10.11), получаем неравенство

$$X(m) \geqslant e^{Ad}\big(E - U^*(m-1)\big) \dots e^{Ad}\big(E - U^*(0)\big)X(0) = \lambda X(0). \qquad (10.16)$$

Выберем стационарное (при $m = 1$) или периодическое ($m \geqslant 2$) управление $\overline{u} \in \mathcal{U}$ следующим образом:

$$u(sm + j) = u^*(j), \quad j = 0, \dots, m-1, \;\; s = 1, 2, \dots .$$

Тогда из (10.16) получаем

$$X(2m) \geqslant e^{Ad}\big(E - U^*(m-1)\big) \dots e^{Ad}\big(E - U^*(0)\big)X(m) \geqslant \lambda^2 X(0).$$

Аналогично, $X(km) \geqslant \lambda^k X(0)$ для любых $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, справедлива оценка средней временной выгоды

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(j), \ell(j)\big\rangle \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{km} \sum_{j=0}^{k-1}\big\langle CX(jm), \ell(jm)\big\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{km} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j \big\langle CX(0), \ell(jm)\big\rangle. \qquad (10.17)$$

Случайные величины

$$\ell(km) = \min\{\omega(km), u(km)\} = \min\{\omega(km), u^*(0)\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

независимы и одинаково распределены, такими же свойствами обладают случайные величины $\xi(k) \doteq \big\langle CX(0), \ell(km)\big\rangle$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того, $\xi(k)$ имеют положительное математическое ожидание $\big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle$ и $0 \leqslant \xi(k) \leqslant \|CX(0)\|$. Поэтому, в силу следствия 10.1 для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j \xi(j) = +\infty. \qquad (10.18)$$

Теперь из (10.17) и (10.18) следует, что $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) = +\infty$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$. $\square$

§ 11. Примеры оценивания средней временной выгоды

П р и м е р 11.1. Найдем оценку средней временной выгоды для структурированной популяции, начальный состав которой $X(0) = (20, 10)$, а ее развитие при отсутствии эксплуатации задано системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $C = (2, 3)$ и случайные величины $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Рассмотрим матрицу $V = e^{Ad}(E - U)$:

$$V = \begin{pmatrix} e^{-d} & 2(e^{2d} - e^{-d}) \\ 0 & e^{2d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - u_1 & 0 \\ 0 & 1 - u_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1 - u_1)e^{-d} & 2(1 - u_2)(e^{2d} - e^{-d}) \\ 0 & (1 - u_2)e^{2d} \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

Вектор $X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за 1 шаг, если $VX(0) = X(0)$, откуда получаем, что $u_1(0) = u_2(0) = 1 - e^{-2d}$.

Случайные величины $\omega_i(k)$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, поэтому их плотность $g(t) = 1$ при $t \in [0, 1]$ и функция распределения $G(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Таким образом, из (9.13) получаем, что

$$M\ell_i(0) = u_i(0) - \frac{u_i^2(0)}{2} = \frac{1 - e^{-4d}}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (11.2)$$

Теперь из (10.9) при $m = 1$ следует неравенство

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant \big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle = 35\big(1 - e^{-4d}\big),$$

выполненное для почти всех $\sigma \in \Sigma$. При $m = 1$, $d = \ln 2$ получаем приближенное неравенство $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant 32,81$.

При $m = 2$, $d = \ln 2$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$ получаем приближенно $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant 77,19$ (здесь очень громоздкие вычисления, поэтому мы их не приводим).

Найдем управления, при которых средняя временная выгода достигает бесконечного значения. Обозначим через $\lambda_{max}(V)$ наибольшее вещественное собственное значение матрицы V, тогда

$$\lambda_{max}(V) = \max\big\{(1 - u_1)e^{-d}, (1 - u_2)e^{2d}\big\}.$$

Очевидно, что $\lambda = \lambda_{max}(V) > 1$ при $u_2^*(0) < 1 - e^{-2d}$. Из (11.1) получаем, что $\lambda X(0) = \lambda_{max}(V)X(0)$ является $\big(e^{Ad}, X(0)\big)$ достижимым за 1 шаг при $u_1^*(0) = 1 - \lambda e^{-2d}$, где $\lambda \in (1, e^{2d}]$. Если, кроме того, выполнено хотя бы одно из неравенств $u_1^*(0) > 0$ или $u_2^*(0) > 0$, то $\big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle > 0$. Таким образом, в силу теоремы 10.3 равенство $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) = +\infty$ справедливо для почти всех $\sigma \in \Sigma$ при любом стационарном управлении $u(k) = u^*(0) = \big(u_1^*(0), u_2^*(0)\big)$, где $u_2^*(0) < 1 - e^{-2d}$ и $u_1^*(0)$, $u_2^*(0)$ одновременно не равны нулю.

Рассмотрим модель популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано **матрицей Лесли**. Предположим, что все особи данной популяции разделены на n возрастных групп и вектор-столбец $X(k) = \big(X_1(k), \ldots, X_n(k)\big)$ характеризует возрастную структуру популяции в моменты времени $k = 0, 1, 2, \ldots$, то есть $X_i(k)$ определяет количество особей возраста $i = 1, 2, \ldots, n$ в момент времени k. Возрастная структура популяции в следующий момент $k+1$ задается уравнением

$$X(k+1) = RX(k), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Здесь R — матрица Лесли, имеющая следующую структуру:

$$R = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где b_i — коэффициент рождаемости i-ой возрастной группы, $b_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, s_i — коэффициент выживаемости i-ой возрастной группы, $s_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Предполагается, что за единичный промежуток времени особи i-ой группы переходят в группу $i+1$, от некоторых групп появляются потомки и часть особей каждой группы погибает.

Для определения модели эксплуатируемой популяции рассмотрим случайные величины $\ell_i(k)$, заданные (10.6), равные долям ресурса i-го вида, добываемого в моменты времени kd, диагональную $n \times n$ матрицу $L(k) = \operatorname{diag}(\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k))$ и возрастной состав популяции $X(0) \in \mathbb{R}^n_+$ в начальный момент времени. Тогда развитие популяции с учетом эксплуатации можно определить динамической системой, зависящей от случайных параметров:

$$X(k+1) = R\big(E - L(k)\big)X(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11.3}$$

Рассмотрим матрицы

$$P(k) \doteq R\big(E - L(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку матрица R неотрицательная, то для популяции (11.3) справедливы теоремы 10.2 и 10.3, доказанные в предыдущем параграфе.

П р и м е р 11.2. Предположим, что динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана матрицей Лесли $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а ее начальный состав $X(0) = (20, 10)$. Пусть $C = (2, 3)$ и случайные величины $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдем оценку средней временной выгоды (10.9) при стационарном управлении (то есть при $m = 1$) и при периодическом управлении с периодами $m = 2$ и $m = 3$.

Пусть $m = 1$. Найдем матрицу

$$V(0) = R(E - U(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - u_1(0) & 0 \\ 0 & 1 - u_2(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2(1 - u_2(0)) \\ 1 - u_1(0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $X(0)$ является $(R, X(0))$ достижимым за один шаг, если $VX(0) = X(0)$, а это возможно только при $u_1(0) = 1/2$, $u_2(0) = 0$. Тогда из (11.2) следует

$$M\ell_1(0) = u_1(0) - \frac{u_1^2(0)}{2} = \frac{3}{8}, \quad M\ell_2(0) = u_2(0) - \frac{u_2^2(0)}{2} = 0$$

и из (10.9) получаем неравенство, выполненное для почти всех $\sigma \in \Sigma$:

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant \big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle = 15.$$

Рассмотрим случай $m = 2$. Здесь $X(0)$ является $(R, X(0))$ достижимым за два шага, если $V(1)V(0)X(0) = X(0)$, откуда получаем

$$\big(1 - u_2(1)\big)\big(1 - u_1(0)\big) = 1/2, \quad \big(1 - u_1(1)\big)\big(1 - u_2(0)\big) = 1/2. \tag{11.4}$$

Из (10.9) найдем оценку средней временной выгоды, выполненную для почти всех $\sigma \in \Sigma$:

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant \frac{1}{2}\Big(\big\langle CX(0), M\ell(0)\big\rangle + \big\langle CMX(1), M\ell(1)\big\rangle\Big) =$$
$$= 20M\ell_1(0)+15M\ell_2(0)+20M\ell_1(1)\big(1-M\ell_2(0)\big)+30M\ell_2(1)\big(1-M\ell_1(0)\big), \tag{11.5}$$

где $M\ell_i(j) = u_i(j) - u_i^2(j)/2,\ i = 1, 2,\ j = 0, 1$. Пропуская промежуточные вычисления, отметим, что выражение в правой части (11.5) достигает наибольшего значения (при условии, что выполнено (11.4)), если

$$u_1(0) = 1 - \sqrt[4]{\frac{3}{4}},\ \ u_2(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}},\ \ u_1(1) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}},\ \ u_2(1) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

При данных управлениях для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливо неравенство

$$H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant \frac{215}{8} - \frac{5}{2}\big(\sqrt{3}+\sqrt{2}\big) \approx 19,009.$$

В случае $m = 3$ имеем приближенное неравенсто $H_*\big(\overline{\ell}, X(0)\big) \geqslant 19,042$, выполненное для почти всех $\sigma \in \Sigma$ (вычисления не приводим, поскольку они очень громоздкие). Таким образом, при периодическом управлении с периодами два и три оценки снизу для средней временной выгоды получились больше, чем при стационарном управлении. Можно показать, что такое же свойство будет наблюдаться при периодическом управлении с любыми периодами.

Отметим, что результаты главы также применимы для моделей популяций, заданных любыми неотрицательными матрицами, в частности, матрицами Лефковича (см. [12, 13, 14]). В дальнейшем планируется исследовать не только системы с постоянными матрицами, но и системы с периодическими матрицами, которые могут возникать в задачах демографии растений и животных.

§ 12. Оценка средней временной выгоды для систем дифференциальных уравнений, для которых выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных

Рассмотрим модели динамики структурированной популяции, заданные системой уравнений, зависящей от случайных параметров (размерность системы $n > 1$). Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой (1.1), а в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0,1]^n, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть имеется возможность остановить процесс сбора, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k) = (\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)) \in [0,1]^n$, где

$$\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой со случайными параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= \bigl(1 - \ell_i(k)\bigr) \cdot x_i(kd - 0), \end{aligned} \tag{12.1}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ – количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что решения системы (12.1) непрерывны справа. Описание *вероятностной модели* $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ приведено в §8. Исследуем среднюю временную выгоду от извлечения ресурса, заданную равенством (10.2).

В следующей теореме получены оценки функции (10.2), выполненные с вероятностью единица, для структурированной популяции, заданной управляемой системой (12.1), для которой выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных. Напомним, что данное свойство исследовано в первой главе, где оно называется свойством 1:

Свойство 1. *Пусть* $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $y(0) \in \mathbb{R}^n$ *такие, что* $x(0) \leqslant y(0)$. *Тогда* $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ *для любого* $t \geqslant 0$.

Как и раньше, обозначаем через $X(k)$ видовой состав популяции до сбора в момент τ_k, $\varphi(t,x)$ — решение системы 1.1, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Если $\ell_i(k) = u_i$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то $X(k)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$X(k+1) = \varphi\big(d, (1-u)X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12.2}$$

Пусть $S(u) = \big(S_1(u), \ldots, S_n(u)\big)$ является неподвижной точкой уравнения (12.2), тогда $S(u) = \varphi(d, (1-u)S(u))$. Обозначим $s(u) \doteq (1-u)S(u)$, $M\ell_i = M\ell_i(k)$ — математическое ожидание случайных величин $\ell_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 12.1. (см. [55]). *Пусть выполнено свойство* 1. *Тогда, если* $x(0) \geqslant s(u)$, *то для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедлива оценка*

$$H_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} C_i S_i(u) M\ell_i. \tag{12.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству 1, если $x_i(0) \geqslant s_i(u)$, то

$$X_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \geqslant \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u), \ i = 1, \ldots, n.$$

Из неравенств $\ell_i(k) \leqslant u_i$ получаем

$$x_i(1) = (1-\ell_i(1))X_i(1) \geqslant (1-u_i)X_i(1) \geqslant (1-u_i)S_i(u) = s_i(u), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Далее, из свойства 1 следует

$$X_i(2) = \varphi_i(d, x(1)) \geqslant \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Аналогично получаем, что $X_i(k) \geqslant S_i(u)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots, n$. Дальнейшее доказательство следует из усиленного закона больших чисел Колмогорова и определения средней временной выгоды. □

П р и м е р 12.1. Рассмотрим модель взаимодействия двух видов типа симбиоз:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_1x_2 - cx_1^2, \\ \dot{x}_2 = ax_2 + bx_1x_2 - cx_2^2, \end{cases} \tag{12.4}$$

где $a > 0$, $c > b > 0$. Найдем оценку средней временной выгоды в предположении, что случайные величины $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Из (9.13) следует, что

$$M\ell_i(k) = u_i - \frac{u_i^2}{2}, \quad i = 1, 2, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{12.5}$$

Решением системы (12.4), удовлетворяющим начальному условию $x_1(0) = x_2(0)$, является функция $\varphi(t, x(0))$, заданная равенством (7.4). Пусть $u_1 = u_2 = u < 1 - e^{-ad}$, тогда уравнение (12.2) имеет неподвижную положительную точку с координатами

$$S_1(u) = S_2(u) = \frac{a\big(e^{ad}(1-u) - 1\big)}{(c-b)(1-u)(e^{ad} - 1)}$$

(см. (7.5)). В силу теоремы 12.1 и равенства (12.5) получаем, что при

$$x_i(0) \geqslant s_i(u) = (1-u)S_i(u), \ \ i = 1, 2$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка

$$H_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \geqslant \frac{a(C_1 + C_2)\big(e^{ad}(1-u) - 1\big)}{(c-b)(1-u)(e^{ad} - 1)}\Big(u - \frac{u^2}{2}\Big), \quad \text{где} \quad u < 1 - e^{-ad}.$$

В заключении отметим, что свойство монотонности решений систем относительно начальных условий можно применить для оценки других характеристик сбора ресурса, одной из которых является суммарный доход от эксплуатации популяции с учетом дисконтирования ([47]).

Заключение

В работе исследуется свойство монотонности решений систем дифференциальных уравнений относительно начальных условий и рассмотрены задачи оптимальной добычи ресурса из популяций, заданных системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений, зависящих от случайных параметров.

Получены следующие основные результаты:

1. Для систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений исследовано свойство монотонности решений относительно начальных условий. Данное свойство применяется для оценки средней временной выгоды для детерминированных систем и систем, зависящих от случайных параметров.

2. Получены оценки средней временной выгоды для однородных и структурированных популяций, динамика которых задана дифференциальными уравнениями или их системами. Описан способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления и достигается максимальная средняя временная выгода.

3. Получены условия, при которых средняя временная выгода равна бесконечности и указан способ построения управления для достижения этого значения. Показано, что для некоторых моделей взаимодействия двух видов такой способ добычи ресурса может привести к полному уничтожению одного из видов и неограниченному росту второго. Поэтому в работе изучена задача построения управления для достижения фиксированного конечного значения средней временной выгоды. Результаты исследования проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов, таких как «хищник-жертва», конкуренция и симбиоз и могут быть примене-

ны к другим различным моделям динамики популяций.

4. Для популяций, заданных дифференциальными уравнениями со случайными параметрами, получены оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Показано, что данная характеристика является положительной, если существует положительная неподвижная точка вспомогательного уравнения для количества добываемого ресурса.

5. Для популяций, заданных системами линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами, описаны методы добычи ресурса, при которых наибольшая величина средней временной выгоды достигается с вероятностью единица; при этом видовой состав популяции остается не ниже исходного или периодически восстанавливается. Также рассматриваются режимы эксплуатации, при которых средняя временная выгода достигает бесконечного значения. Получены результаты об оптимальной добыче ресурса для дискретных динамических систем, частным случаем которых являются модели динамики популяций Лесли и Лефковича.

В дальнейшем планируется продолжить работу по следующим направлениям исследований.

1. Получить оценки средней временной выгоды при помощи метода положительно инвариантных множеств, в которых находятся траектории детерминированной системы дифференциальных уравнений или системы со случайными параметрами. Для построения положительно инвариантных множеств планируется использовать понятие функции Ляпунова относительно множества, введенное Е. Л. Тонковым [19].

2. Исследовать свойства средней временной выгоды для моделей динамики популяций, заданных в виде гибридных динамических систем, состоящих из двух двумерных систем, переключающихся между собой (с об-

зором литературы по исследованию гибридных систем можно познакомиться в [9, 10]).

3. Рассмотреть содержательные примеры вычисления или оценки характеристик сбора ресурса для моделей систем, возникающих в экономике, биологии, медицине, популяционной динамике; в частности, исследовать обобщенные модели взаимодействия биологических видов А. Н. Колмогорова и А. Д. Базыкина.

Список литературы

1. Абакумов А. И., Израильский Ю. Г. Эффекты промыслового воздействия на рыбную популяцию // Математическое Моделирование. — 2016. — Т. 11, Вып. 2. — С. 191–204.

2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — Москва : Мир, 1972. — 368 с.

3. Беляков А. О., Давыдов А. А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 38–46.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — Москва : Наука, 1966. — 576 с.

5. Давыдов А. А. Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией // Труды МИАН. — 2020. — Т. 310. — С. 135–142.

6. Егорова А. В., Родина Л. И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, № 4. — С. 501–517.

7. Егорова А. В. Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу // Вестник российских университетов. Математика. — 2021. — Т. 26, № 133. — С. 15–25.

8. Жданова О. Л., Фрисман Е. Я. Влияние оптимального промысла на характер динамики численности и генетического состава двухвозрастной популяции // Известия РАН. Серия биологическая. — 2013. — № 6. — С. 738–749.

9. Кириллов А. Н., Данилова И. В. Динамика оптимального поведения двухвидового сообщества с учетом внутривидовой конкуренции и миграции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, № 4. — С. 518–531.

10. Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Гибридная модель динамики популяций с режимом убежища: регуляризация и самоорганизация // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2023. — Т. 33, № 3. — С. 467–482.

11. Кузенков О. А., Рябова Е. А. Математическое моделирование процессов отбора. — Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского ун-та, 2007. — 324 с.

12. Логофет Д. О., Белова И. Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикладная математика. — 2007. — Т. 13, № 4.— С. 145–164.

13. Логофет Д. О. Еще раз о проекционных матрицах: индикатор потенциального роста и польза индикации // Фундаментальная и прикладная математика. — 2012. — Т. 17, № 6. — С. 41–63.

14. Логофет Д. О., Уланова Н. Г. От мониторинга популяции к математической модели: новая парадигма популяционного исследования // Журнал общей биологии. — 2021. — Т. 82, № 4. — С. 243–269.

15. Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю. Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 8. — С. 1392–1407.

16. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2020. — Т. 56. — С. 41–49.

17. Неверова Г. П., Абакумов А. И., Фрисман Е. Я. Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования // Математическая биология и биоинформатика. — 2016. — Т. 11, № 1. — С. 1–13.

18. Неверова Г. П., Абакумов А. И., Фрисман Е. Я. Режимы динамики лимитированной структурированной популяции при избирательном промысле // Математическая биология и биоинформатика. — 2017. — Т. 12, № 2. — С. 327–342.

19. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы //Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 185–201.

20. Ревуцкая О. П., Фрисман Е. Я. Промысловое воздействие на динамику популяции с возрастной и половой структурой: оптимальный равновесный промысел и эффект гидры // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14, № 5. — С. 1107–1130.

21. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 232 с.

22. Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского. университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, Вып. 1. — С. 48–58.

23. Родина Л. И. Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, Вып. 2. — С. 213–221.

24. Родина Л. И., Тютеев И. И. Об оценке средней временной выгоды в вероятностных эколого-экономических моделях // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — Т. 25, № 3. — С. 257–267.

25. Родина Л. И., Черникова А. В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 1. — С. 167–179.

26. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 256 с.

27. Ширяев А. Н. Вероятность. — Москва : Наука, 1989. — 640 с.

28. Bainov D. D., Dishliev A. B. Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population // ESAIM: Mathematical Modeling and Numerical Analysis. — 1990. — Vol. 24, no. 6. — P. 681–691.

29. Beddington J. R., May R. M. Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment // Science. — 1977. — Vol. 197, no. 4302. — P. 463–465.

30. Clark C. W. Bioeconomic Modeling and Resource Management // Applied Mathematical Ecology. Biomathematics. — 1989. — Vol. 18. — P. 11–57.

31. Conrad J. M. Bioeconomics and the Management of Renewable Resources // Biomathematics. — 1986. — P. 381–403.

32. Dennis B. Allee effects: population growth, critical density, and the chance of extinction // Natural Resource Modeling. — 1989. — Vol. 3, no. 4. — P. 481–538.

33. Doubleday W. G. Harvesting in matrix population models // Biometrics. — 1975. — Vol. 31, no. 1. — P. 189–200.

34. Gordon H. S. The economic theory of a common-property resource: the fishery // Journal of political economy. — 1954. — Vol. 62, no. 2. — P. 124–142.

35. Hansen L. G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty // Resource and Energy Economics. — 2017. — Vol. 50. — P. 164–177.

36. Hening A., Nguyen H. N., Ungureanu S. C., Wong T. K. Asymptotic harvesting of populations in random environments // Journal of mathematical biology. — 2019. — Vol. 78. — P. 293–329.

37. Hening A., Tran K. Q., Phan T. T., Yin G. Harvesting of interacting stochastic populations // Journal of mathematical biology. — 2019. — Vol. 79. — P. 533–570.

38. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. — 2017. — Vol. 81. — P. 167–178.

39. Kapaun U., Quaas M. F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // Environmental and Resource Economics. — 2013. — Vol. 54. — P. 293–310.

40. Lefkovitch L. P. The study of population growth in organisms grouped by stages // Biometrics. — 1965. — Vol. 21, no. 1. — P. 1–18.

41. Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrika. — 1945. — Vol. 33, no. 3. — P. 183–212.

42. Liu L., Meng X. Optimal harvesting control and dynamics of two-species stochastic model with delays // Advances in Difference Equations. — 2017. — Vol. 2017, no. 1. — P. 1–17.

43. Liu M. Optimal harvesting of stochastic population models with periodic coefficients // Journal of Nonlinear Science. — 2022. — Vol. 32, no. 2. — P. 1–14.

44. Noutsos D., Tsatsomeros M. J. Reachability and holdability of nonnegative states // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 30, no. 2. — P. 700–712.

45. Reed W.J. A stochastic model for the economic management of a renewable resource // Mathematical Biosciences. — 1974. — Vol. 22.— P. 313–337.

46. Reed W. J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of environmetal economic and management. — 1979. — Vol. 6, no. 4.— P. 350–363.

47. Rodina L. I., Hammadi A. H. Optimization problems for models of harvesting a renewable resource // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 25, no. 1. — P. 113–122.

48. Rodina L. I., Chernikova A. V. Problems of optimal resourse harvesting for infinite time horizon // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 270, no. 4. — P. 609–623.

49. Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R. Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries // Journal of Environmental Economics and Management. — 2018. — Vol. 92. — P. 659–676.

50. Wazewski T. Systemes des equations et des inegalites differentieles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Annales de la Societe Polonaise de Mathematique. — 1950. — Vol. 23. — P. 112–166.

51. Weitzman M. L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks // Journal of environmental economics and management. —2002. — Vol. 43, no. 2. — P. 325–338.

52. Zhao Y., Yuan S. Optimal harvesting policy of a stochastic two-species competitive model with Levy noise in a polluted environment // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2017. — Vol. 477. — P. 20–33.

Публикации автора по теме диссертации

53. Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду //

Известия высших учебных заведений. Математика. — 2022. — № 1. — С. 12–24.

Переводная версия:

Woldeab M. S., Rodina L. I. About the methods of biological resourse extraction, that provide the maximum averadge time benefit // Russian Mathematics. — 2022. — Vol. 66, № 1. — P. 8–18.

54. Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник российских университетов. Математика. — 2022. — Т. 27, № 137. — С. 16–26.

55. Родина Л. И., Волдеаб М. С. О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1022–1028.

Переводная версия:

Rodina L. I., Woldeab M. S. On the monotonicity of solutions of nonlinear systems with respect to the initial condition // Differential equations. — 2023. — Vol. 59, № 8. — P. 1025–1031.

56. Волдеаб М. С. Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций // Вестник российских университетов. Математика. — 2023. — Т. 28, № 141. — С. 26–38.

57. Волдеаб М. С., Родина Л. И. Об эксплуатации популяции, заданной системой линейных уравнений со случайными параметрами // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2023. — Т. 61. — С. 27–41.

58. Волдеаб М. С. Задачи оптимальной добычи ресурса для вероятностных моделей популяции // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 4. — Рязань : Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, 2022. — С. 37–39.

59. Базулкина А. А., Волдеаб М. С., Родина Л. И. Положительно инвариантные множества и характеристики сбора ресурса для стохастических популяций // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 5 — Рязань : Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, 2024. — С. 20-25.

60. Rodina L. I., Woldeab M. S. Estimation of discounted profit for exploited population // Book of Abstracts III International conference «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», Nizhny Novgorod, 12-13 December, 2020. — Nizhny Novgorod : NRU HSE, 2020. — P. 62–63.

61. Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи ресурса из структурированной популяции // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова: материалы Международной научной конференции, Минск, 1-4 июня 2021. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2021. — С. 132.

62. Волдеаб М. С. Оптимизация средней временной выгоды для моделей взаимодействия двух видов // Геометрические методы в теории управ-

ления и математической физике : тезисы докладов III Международной научной конференции, посвященной памяти профессора М. Т. Терёхина, Рязань, 26-30 апреля 2021. — Рязань: Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, 2021. — С. 58.

63. Волдеаб М. С. Об оценке средней временной выгоды для модели конкуренции двух видов // Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем» (MOCS-2022): Аннотации лекций и докладов, Суздаль, 30 июня – 5 июля 2022. — Владимир: «Аркаим», 2022. — С. 23–24.

64. Волдеаб М. С., Родина Л. И. Об оптимальном сборе ресурса из структурированной популяции // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Москва, 7-9 июня 2022 г. — Москва : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2022. — С. 137–139.

65. Волдеаб М. С. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций // Современные проблемы математики и ее приложений (СоПроМат-2023) : тезисы докладов Международной (54-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 6-10 и 17 февраля 2023. — Екатеринбург : ИММ УрО РАН, УрФУ, 2023. — С. 78–79.

66. Rodina L. I., Woldeab M. S. On the property of monotonicity of solutions of systems with respect to initial conditions // Book of abstracts VI International Conference «Topological Methods in Dynamics and Related

Topics», dedicated to the memory of V. Z. Grines. — Nighny Novgorod, 13–15 December, 2023. — Nighny Novgorod : NRU HSE, 2023. — P. 73–74.

67. Woldeab M. S. Estimation of the average time benefit from resource extraction // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем»: сборник тезисов докладов международной конференции и международной школы молодых ученых, Суздаль, 28 июня – 3 июля 2024. — Владимир: Издательство ВлГУ, 2024. — С. 78–79.