На правах рукописи

Волдеаб Мебрахтом Себхату

О свойстве монотонности решений систем дифференциальных уравнений относительно начальных данных и его применении к задачам оптимальной эксплуатации популяций

Специальность
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир — 2024

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его приложений Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Научный руководитель : **Родина Людмила Ивановна**
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты : **Зайцев Василий Александрович**
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», заведующий лабораторией математической теории управления

Кириллов Александр Николаевич
доктор физико-математических наук, доцент,
Институт прикладных математических исследований — обособленное подразделение ФГБУН ФИЦ «Карельский научный центр Российской академии наук», ведущий научный сотрудник лаборатории информационных компьютерных технологий

Ведущая организация : Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»

Защита состоится 22 января 2025 г. в 15 $\underline{00}$ часов на заседании диссертационного совета 24.1.073.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108 Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:
https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_24.1.073.01/.

Автореферат разослан «____» ________________ 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук — Костоусова Елена Кирилловна

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Важными задачами теории динамических систем являются задачи оптимизации функционала качества для управляемых динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями. Данной тематике посвящены работы таких ученых, как Асеев С. М., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Давыдов А. А., Дмитрук А. В., Дубовицкий А. Я., Зеликин М. И., Красовский Н. Н., Кряжимский А. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Милютин А. А., Мищенко Е. Ф., Осмоловский Н. П., Понтрягин Л. С., Субботина Н. Н., Тарасьев А. М., Тихомиров В. М., Тонков Е Л. и многих других.

Во многих публикациях, начиная с прошлого века, исследуются функционалы качества для динамических систем, представляющих собой математические модели популяций (см., например, работы Bainov D. D., Dishliev A. B.[1], Beddington J. R., May R. M.[2], Clark C. W.[3], Conrad J. M.[4], Doubleday W. G.[5]). В настоящее время ведутся активные работы по изучению оптимального промысла и его влияния на характер динамики и состав структурированных популяций (здесь нужно отметить работы коллектива ученых Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН[6,7]. Вопросы периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса, оптимальной эксплуатации популяций с диффузией, максимизации эффективности сбора ресурса рассмотрены в статьях Белякова А. О. и Давыдова А. А.[8,9]; исследования наибольшей средней временной выгоды и

[1]Bainov D. D., Dishliev A. B. Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population // ESAIM: Mathematical Modeling and Numerical Analysis. — 1990. — Vol. 24, no. 6. — P. 681–691.

[2]Beddington J. R., May R. M. Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment // Science. — 1977. — Vol. 197, no. 4302. — P. 463–465.

[3]Clark C. W. Bioeconomic modeling and resource management // Applied Mathematical Ecology. Biomathematics. — 1989. — Vol. 18. — P. 11–57.

[4]Conrad J. M. Bioeconomics and the management of renewable resources //Biomathematics. — 1986. — P. 381–403.

[5]Doubleday W. G. Harvesting in matrix population models // Biometrics. — 1975. — Vol. 31, no. 1. — P. 189–200.

[6]Неверова Г. П., Абакумов А. И., Фрисман Е. Я. Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования // Математическая биология и биоинформатика. — 2016. — Т. 11, № 1. — С. 1–13.

[7]Ревуцкая О. Л., Фрисман Е. Я. Промысловое воздействие на динамику популяции с возрастной и половой структурой: оптимальный равновесный промысел и эффект гидры // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14, № 5. — С. 1107–1130.

[8]Беляков А. О., Давыдов А. А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 38–46.

[9]Давыдов А. А. Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией // Труды МИАН. — 2020. — Т. 310. — С. 135–142.

эффективности от эксплуатации популяций, заданных разностными уравнениями, проводились в работах Егоровой А. В., Родиной Л. И.[10,11]

Наряду с детерминированными динамическими системами объектом интереса ученых являются управляемые динамические системы со случайными параметрами. Так, Reed W. J.[12] рассматривал рыбные популяции, заданные дифференциальными уравнениями со случайными воздействиями; он показал, что такие популяции целесообразно эксплуатировать до достижения определенного уровня (escapement level), не зависящего от текущего количества ресурса. Данная идея обобщается во многих дальнейших публикациях, среди которых статьи Родиной Л. И., Hening A., Nguyen H. N., Ungureanu S. C., Wong T. K. Работы Hansen L. G., Jensen F.[13], Weitzman M. L.[14] посвящены разработке моделей управления рыболовством, включающих экологическую и экономическую неопределенность и задачам ценового регулирования в условиях неопределенности. В статьях Kapaun U., Quaas M. F.[15], Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R.[16] рассматриваются вопросы влияния случайных факторов внешней среды на оптимальное управление добычей рыбных ресурсов и проводится сравнение различных характеристик для вероятностных и детерминированных моделей. Более полный обзор современных исследований по данной тематике приведен в работах Jensen F., Frost H., Abildtrup J.[17] , Liu M.[18]

Начало исследований средней временной выгоды для популяций, заданных дифференциальными уравнениями, зависящими от случайных па-

---

[10] Егорова А. В., Родина Л. И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, № 4. — С. 501–517.

[11] Егорова А. В. Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу // Вестник российских университетов. Математика. — 2021. — Т. 26, № 133. — С. 15–25.

[12] Reed W. J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of environmetal economic and management. — 1979. — Vol. 6, no. 4.— P. 350–363.

[13] Hansen L. G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty // Resource and Energy Economics. — 2017. — Vol. 50. — P. 164–177.

[14] Weitzman M. L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks // Journal of environmental economics and management. —2002. — Vol. 43, no. 2. — P. 325–338.

[15] Kapaun U., Quaas M. F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // Environmental and Resource Economics. — 2013. — Vol. 54. — P. 293–310.

[16] Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R. Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries // Journal of Environmental Economics and Management. — 2018. — Vol. 92. — P. 659–676.

[17] Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. — 2017. — Vol. 81. — P. 167–178.

[18] Liu M. Optimal harvesting of stochastic population models with periodic coefficients // Journal of Nonlinear Science. — 2022. — Vol. 32, no. 2. — P. 1–14.

раметров, положено в работах Родиной Л. И.[19,20], в которых в основном рассматривались однородные популяции, то есть популяции, состоящие из одного вида. В этих исследованиях построены управляющие воздействия для долгосрочного режима сбора ресурса, при которых постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления, и с вероятностью единица существует предел средней временной выгоды.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является изучение свойства монотонности решений систем дифференциальных уравнений относительно начальных условий и исследование задач оптимизации функционала качества для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений, зависящих от случайных параметров.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Отметим, что в статьях Родиной Л. И. и Черниковой А. В.[19,20,21,22,23] рассматривался такой же функционал качества — средняя временная выгода от добычи ресурса. Однако в этих работах исследовались задачи максимизации данного функционала для динамических систем, заданных дифференциальными или разностными уравнениями. Динамические системы, изучаемые в данной диссертационной работе, заданы управляемыми системами дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Исследование таких систем потребовало значительно новых подходов, связанных с изучением свойства монотонности решений относительно начальных данных для нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Получены условия, при которых выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных для нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений.

2. Получены оценки критерия качества управления (который будем называть средней временной выгодой) для управляемых систем, обладающих

[19] Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, № 1. — С. 48–58.

[20] Родина Л. И. Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, № 2. — С. 213–221.

[21] Родина Л. И., Тютеев И. И. Об оценке средней временной выгоды в вероятностных эколого-экономических моделях // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — Т. 25, № 3. — С. 257–267.

[22] Родина Л. И., Черникова А. В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 1. — С. 167–179.

[23] Rodina L. I., Chernikova A. V. Problems of optimal resourse harvesting for infinite time horizon // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 270, no. 4. — P. 609–623.

свойством монотонности решений; рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений и системы дифференциальных уравнений, зависящих от случайных параметров.

3. Получены неравенства для решений систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений, на основании которых оценивается средняя временная выгода для некоторых моделей популяционной динамики.

4. Получены новые оценки критерия качества управления для дифференциальных уравнений со случайными параметрами, выполненные с вероятностью единица.

5. Получены оценки средней временной выгоды для управляемых систем линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами, выполненные с вероятностью единица.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Основные утверждения являются новыми, сформулированы в виде теорем, сопровождаются строгими доказательствами и иллюстрируются примерами. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории дифференциальных уравнений и динамических систем, а также могут найти применение при решении оптимизационных задач, возникающих при моделировании экологических, экономических и технических процессов.

Методология и методы исследования. В работе применяются методы теории дифференциальных уравнений и динамических систем и математической теории управления. В третьей главе дополнительно к указанным используются методы теории вероятностей, а также специальные методы исследования систем дифференциальных уравнений со случайными параметрами.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений исследовано свойство монотонности решений относительно начальных данных. Получены оценки критерия качества управления (средней временной выгоды) для систем, обладающих этим свойством.

2. Для управляемых систем дифференциальных уравнений разработан метод построения управляющих воздействий для достижения максимального значения критерия качества управления и получены условия, при которых значения критерия бесконечные. Исследована задача построения управлений для достижения фиксированного значения средней временной выгоды.

3. Для дифференциальных уравнений со случайными параметрами получены оценки критерия качества управления, выполненные с вероятностью единица. Показано, что данный критерий является положительным, если существует положительная неподвижная точка вспомогательной динамической системы.

4. Для управляемых систем линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами описаны методы построения управляющих воздействий, при которых наибольшая величина средней временной выгоды достигается с вероятностью единица. Предложены способы построения управлений, при которых можно достичь бесконечного значения данной характеристики.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими выкладками и доказательствами утверждений. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах (см. [6]–[15]):

1. Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», Нижний Новгород, НИУ ВШЭ-Нижний Новгород, 2020 г.;

2. Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова, Минск, Институт математики НАН Беларуси, 2021 г.;

3. Международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике», Рязань, РГУ имени С. А. Есенина, 2021 г.;

4. II Всероссийская научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», Рязань, РГУ имени С. А. Есенина, 2022 г.;

5. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященная 100-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко, Москва, МИАН, МЦМУ МИАН, 2022 г.;

6. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем», Суздаль, МИАН, МЦМУ МИАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, ВлГУ, НИТУ МИСИС, 2022 г.;

7. Международная (Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Екатеринбург, ИММ им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 2023 г.;

8. Международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике», Рязань, РГУ имени С. А. Есенина, 2023 г.;

9. VI Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics», посвященная памяти В. З. Гринеса, Нижний Новгород, НИУ ВШЭ-Нижний Новгород, 2023 г.;

10. Научный семинар «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры функционального анализа и его приложений ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, 2020-2024 гг.;

11. Научный семинар «Нелинейная динамика и синергетика» математического факультета ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2024 г.;

12. Расширенное заседание семинара отдела динамических систем, Екатеринбург, ИММ им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 2024 г.;

13. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем», Суздаль, МИАН, МЦМУ МИАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, ВлГУ, НИТУ МИСИС, 2024 г.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 научных работах [1] – [15], из которых 5 изданы в научных журналах категории К1 [1] – [5], включенных в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК или приравненных к ним (из них 5 работ опубликованы в научных журналах, индексируемых Scopus и включенных в наукометрическую базу данных zbMATH [1] – [5], 2 работы — в журналах, индексируемых в Web of Science (ESCI) [1, 5], 1 — Web of Science (SCIE) [3], 3 статьи— в наукометрическую базу данных MathSciNet [1, 3, 5], 10 — в сборниках материалов и тезисов докладов международных и всероссийских конференций [6] – [15].

Личный вклад. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, Родиной Л. И. принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю Волдеабу М. С. точные формулировки, доказательства результатов и исследование примеров.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 111 страниц. Список литературы содержит 67 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, приведена общая характеристика рассматриваемых в диссертации вопросов, дается краткий обзор работ предшественников по данной тематике, определена цель работы и сформулированы основные результаты.

В **первой главе** рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны.

Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. В первом параграфе получены условия на функцию $f(x)$, при которых решения $\varphi(t, x)$ обладают свойством монотонности относительно начальных данных, то есть следующим свойством.

Свойство 1. *Пусть* $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $y(0) \in \mathbb{R}^n$ *такие, что* $x(0) \leqslant y(0)$. *Тогда* $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ *для любого* $t \geqslant 0$.

Здесь и далее неравенство $x \leqslant y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, означает, что $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.3. (см.[24]). множество $G \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (1.1), если для любой начальной точки $x(0) \in G$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в множестве G.

Теорема 1.1. (см. [3]). *Пусть множество $G \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы* (1.1) *и каждая из функций f_i является возрастающей на множестве G по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда, если для $x(0) \in G$, $y(0) \in G$ имеет место неравенство $x(0) \leqslant y(0)$, то $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ для всех $t \geqslant 0$.*

В §2 приведены примеры моделей взаимодействия двух видов, обладающих свойством монотонности решений относительно начальных данных. Показано, что данное свойство выполнено для систем, описывающих такие модели, как симбиоз, комменсализм и нейтрализм.

В третьем параграфе рассматривается модель популяции, состоящей из n отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$. При $n = 1$ популяцию называют однородной, при $n \geqslant 2$ — структурированной. При отсутствии промысла динамика популяции задана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}, \tag{3.1}$$

где функции $f_1, \ldots, f_n$ определены и непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$. Предполагаем, что для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$ решение $\varphi(t, x)$ системы (3.1) существуют при $t \in [0, d]$, где $d > 0$; кроме того, выполнено *свойство квазиположительности,* которое означает, что решения системы (3.1) неотрицательные при любых неотрицательных начальных условиях (см.[25]).

Пусть в моменты времени $t = kd$, $k = 1, 2, \ldots$ из популяции извлекаются определенные доли ресурса каждого вида $u_1(k), \ldots, u_n(k)$; обозначим через $C_i \geqslant 0$ агрегированную стоимость i-го вида ресурса, $i = 1, \ldots, n$. На множестве $\mathbb{R}^n_+$ рассмотрим две функции:

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d, x) - x_i\big), \quad L(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x).$$

Отметим, что значение функции $D(x)$ равно суммарной стоимости прироста ресурса каждого вида за промежуток времени времени $[0, d]$, где $d > 0$.

---

[24]Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы //Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 185–201.

[25]Кузенков О. А., Рябова Е. А. Математическое моделирование процессов отбора. — Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского ун-та, 2007. — 324 с.

Лемма 3.1. (см. [1]). *Имеет место неравенство*

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n_+} D(x) \leqslant d\cdot \max_{x\in\mathbb{R}^n_+} L(x).$$

При помощи леммы 3.1 получены оценки функции $D(x)$ для моделей конкуренции и симбиоза двух видов.

Во **второй главе** рассматривается модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений (3.1). В моменты времени $t = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ из популяции извлекаются определенные доли ресурса $u_1(k), \ldots, u_n(k)$ каждого вида.

Величины $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$ будем считать управляющими воздействиями, которые можно изменять для достижения определенного результата сбора ресурса. Рассмотрим множество всех управлений на бесконечном промежутке времени —

$$U \doteq \bigl\{\overline{u} : \overline{u} = (u(1), u(2), \ldots, u(k), \ldots) \in [0, 1]^\infty\bigr\}.$$

Пусть $X_i(k)$ является количеством ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$, зависящим от долей ресурса $u(1), \ldots, u(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$. Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент kd равна

$$Y(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(k) u_i(k).$$

Определение 4.1. (см. [19]). *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется функция

$$H_*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,.$$

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$ и, если выполнено равенство $H_*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) = H^*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$, то определим предел

$$H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,.$$

Рассмотрим задачу построения управлений $\overline{u} \in U$ для достижения фиксированной средней временной выгоды, которая будет ограничена максимальным значением функции $D(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\bigl(\varphi_i(d, x) - x_i\bigr)$ или может равняться любому положительному числу, если $D(x)$ не ограничена сверху.

Теорема 4.1. (см. [2]). *Предположим, что существует* $\widehat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *такое, что* $D(\widehat{x}) = h > 0$ *и* $\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ *такого, что* $\varphi_i(d, x(0)) \geqslant \widehat{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, *функция* $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает значения* h *при следующем режиме эксплуатации:*

$$u(1) = \Big(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, \ldots, 1 - \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d, x(0))}\Big);$$

$$u(k) = \Big(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d, \widehat{x})}, \ldots, 1 - \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d, \widehat{x})}\Big), \ \ k \geqslant 2.$$

Теорема 4.2. (см. [2]). *Предположим, что существуют точка* $\widehat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *и непустое подмножество* $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *такие, что:*

(1) $D(\widehat{x}) = h > 0$;

(2) $\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i \in I$;

(3) $\varphi_i(kd, \widehat{x}) = 0$ *для всех* $i \notin I$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, x(0)), \ i = 1, \ldots, n; \quad \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \ i \in I,$$

то функция $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает значения* h *при следующем режиме эксплуатации:*

если $i \in I$, *то* $u_i(1) = 1 - \dfrac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}$; $u_i(k) = 1 - \dfrac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, \widehat{x})}$ *при* $k \geqslant 2$;

если $i \notin I$, *то* $u_i(1) = 1$; $u_i(k) = 0$ *при* $k \geqslant 2$.

В пятом параграфе приведены примеры вычисления и оценки средней временной выгоды для моделей взаимодействия двух видов таких, как конкуренция и симбиоз.

В §6 получены условия и построен режим эксплуатации, при котором средняя временная выгода достигает бесконечного значения.

Теорема 6.1. (см. [2]). *Предположим, что существует* $\widehat{x} \in \mathbb{R}_n^+$, *такое, что:*

(1) $\varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$;

(2) *последовательности* $\big\{\varphi_i(kd, \widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \ldots, n$ *возрастают;*

(3) $D\big(\varphi(kd, \widehat{x})\big) \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то существует $\overline{u} \in U$, *при котором* $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = +\infty$.

Теорема 6.2. (см. [2]). *Пусть существуют* $\widehat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ *и непустое подмножество* $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *такие, что:*

(1) $\varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i \in I$;

(2) *последовательности* $\big\{\varphi_i(kd, \widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$, $i \in I$ *возрастают;*

(3) $\varphi_i(kd,\widehat{x})=0$ *для всех* $i\notin I$, $k=1,2,\ldots$;

(4) $D\bigl(\varphi(kd,\widehat{x})\bigr)=\sum\limits_{i\in I}C_i\bigl(\varphi_i((k+1)d,\widehat{x})-\varphi_i(kd,\widehat{x})\bigr)\to+\infty$ *при* $k\to\infty$.

Тогда, если для $x(0)\in\mathbb{R}_n^+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i\leqslant\varphi_i(d,x(0)),\ i=1,\ldots,n;\quad \varphi_i(d,x(0))\neq 0,\ i\in I,$$

то существует управление $\overline{u}\in U$, *при котором* $H\bigl(\overline{u},x(0)\bigr)=+\infty$.

В параграфе 7 рассматривается $X(k)=(X_1(k),\ldots,X_n(k))$ и $x(k)=(x_1(k),\ldots,x_n(k))$ — видовой состав популяции до и после сбора в момент $\tau(k)=kd$ соответственно. Отметим, что

$$X(k+1)=\varphi(d,x(k)),\quad x(k)=(1-u(k))X(k),\quad k=1,2,\ldots.$$

Если $u_i(k)=u_i$ для всех $k=1,2,\ldots$, то $X(k)$ удовлетворяет системе уравнений

$$X(k+1)=\varphi\bigl(d,(1-u)X(k)\bigr),\quad k=1,2,\ldots. \tag{7.1}$$

Обозначим через $S(u)=\bigl(S_1(u),\ldots,S_n(u)\bigr)\neq 0$ неподвижную точку системы (7.1) (в предположении, что она существует и единственна). Пусть $s(u)\doteq(1-u)S(u)$.

Теорема 7.1. *Пусть* $u_i(k)=u_i$ *для всех* $k=1,2,\ldots$ *и для системы* (3.1) *выполнено свойство* 1. *Тогда, если* $x(0)\geqslant s(u)$, *то имеет место неравенство*

$$H_*\bigl(\overline{u},x(0)\bigr)\geqslant\sum_{i=1}^{n}C_iS_i(u)u_i.$$

При помощи теоремы 7.1 получена оценка средней временной выгоды для популяции из двух видов, между которыми наблюдается взаимодействие типа симбиоз.

В **третьей главе** исследуются эксплуатируемые популяции, заданные дифференциальными уравнениями со случайными параметрами; для этих популяций получены оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Показано, что данная характеристика является положительной, если существует положительная неподвижная точка вспомогательного уравнения для количества добываемого ресурса.

Задачи максимизации средней временной выгоды распространяются на системы линейных дифференциальных уравнений, зависящих от случайных параметров. Также исследуется задача оценки данной характеристики для нелинейных систем дифференциальных уравнений, для которых выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных.

В начале главы (§8, §9) рассматривается модель популяции, заданной при отсутствии эксплуатации дифференциальным уравнением $\dot{x}=f(x)$; в каждый из моментов времени $\tau_k=kd$, где $d>0$, из этой популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k\in\Omega\subseteq[0,1]$, $k=1,2,\ldots$.

Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u \in [0,1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min\{\omega_k, u\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, мы исследуем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \quad t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k) &= (1-\ell_k)x(\tau_k - 0), \quad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Предполагаем, что решения уравнения непрерывны справа, функция $f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0, +\infty)$. Пусть также имеет место следующее условие.

Условие 8.1. Предположим, что $f(0) \geqslant 0$ и $\varphi(t) \equiv K > 0$ является решением уравнения $\dot{x} = f(x)$.

Обозначим $\overline{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)$, $x_0 \geqslant 0$ — начальный размер популяции, X_k — количество ресурса до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$. Для уравнения со случайными параметрами (8.1) *средняя временная выгода* от извлечения ресурса задается равенством

$$H_*\big(\overline{\ell}, x_0\big) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ell_k.$$

Если предел среднего арифметического $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \ell_k$ существует, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H\big(\overline{\ell}, x_0\big) \doteq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \ell_k$. Отметим, что значения средней временной выгоды зависят от поведения случайных последовательностей $\sigma = (\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)$. Описание соответствующей вероятностной модели $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ приведено в параграфе 8 (см. также [19,26]).

Напомним, что через $\varphi(t, x)$ мы обозначаем решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Обозначим через x_k количество ресурса после сбора в момент τ_k, тогда $X_1 = \varphi(d, x_0)$ и $X_{k+1} = \varphi(d, x_k)$, $x_k = (1-\ell_k)X_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Если $\ell_k = u$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то X_k удовлетворяет уравнению

$$X_{k+1} = \varphi\big(d, (1-u)X_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{8.3}$$

[26] Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2020. — Т. 56. — С. 41–49.

Утверждение 8.1. (см. [4]). *Если выполнено условие* 8.1, *то уравнение* (8.3) *имеет неподвижную точку* $X(u)$ *такую, что* $X(u) \leqslant K$.

Утверждение 8.2. (см. [4]). *Пусть* $\varphi(t) \equiv K > 0$ *является решением уравнения* $\dot{x} = f(x)$. *Если, кроме того, выполнено одно из условий:*

1) $\varphi(d, 0) > 0$;

2) $\varphi(d, 0) = 0$ *и* $(1-u)\varphi'_x(d, 0) > 1$.

То уравнение (8.3) *имеет неподвижную точку* $X(u)$ *и* $0 < X(u) \leqslant K$.

Для любого $u \in [0, 1]$ введем в рассмотрение случайную величину $\ell(\omega, u) \doteq \min\{\omega, u\}$ и обозначим через $M\ell(u)$ ее математическое ожидание. Пусть $x(u) \doteq (1-u)X(u)$, тогда $X(u) = \varphi(d, x(u))$.

Теорема 8.1. (см. [4]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любого* $x_0 \in [x(u), K]$ *и для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедливы неравенства*

$$X(u)M\ell(u) \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant KM\ell(u).$$

Определим $\sigma_k \doteq (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \Omega^k$, $k = 1, 2, \ldots$. В §9 исследуем случайные величины $A_k = A_k(\sigma_{k-1}, x)$ и $B_k = B_k(\sigma_{k-1}, x)$, заданные рекуррентным образом:

$$A_1 = X(u), \;\; A_{k+1} = \varphi\big(d, (1-\ell_k)A_k\big);$$
$$B_1 = K, \;\; B_{k+1} = \varphi\big(d, (1-\ell_k)B_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Обозначим через MA_k и MB_k математические ожидания случайных величин A_k и B_k соответственно.

Теорема 9.1. (см. [4]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любого* $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ *и для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедливы неравенства*

$$\frac{M\ell(u)}{m} \sum_{k=1}^{m} MA_k \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant \frac{M\ell(u)}{m} \sum_{k=1}^{m} MB_k.$$

Теорема 9.2. (см. [4]). *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *интервал* $(x(u), K)$ *содержится в области притяжения решения* $\varphi(t) \equiv K > 0$ *дифференциального уравнения* $\dot{x} = f(x)$;

(2) $f'(x) < 0$ *для всех* $x \in (x(u), K)$.

Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ *существует предел*

$$H\big(\bar{\ell}, x_0\big) = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MB_k,$$

не зависящий от начального значения $x_0 \in [x(u), K]$.

Теорема 9.3. (см. [4]). *Пусть выполнено условие* 8.1. *Тогда для любых* $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ *и для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедливы неравенства*

$$M\ell(u)MA_m \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant M\ell(u)MB_m.$$

В §10 получены оценки средней временной выгоды для структурированной популяции, динамика которой при отсутствии эксплуатации задана системой линейных дифференциальных уравнений. Описан способ добычи ресурса, при котором с вероятностью единица достигается наибольшее значение средней временной выгоды, а начальный состав популяции постоянно поддерживается на исходном уровне или периодически сохраняется; здесь также построен режим добычи, доставляющий при определенных условиях бесконечное значение средней временной выгоде.

Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$A = \{a_{ij}\}$ — квадратная $n \times n$ матрица. Пусть в моменты времени kd, где $d > 0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = \big(\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)\big) \in \Omega \subseteq [0,1]^n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}_+^n$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. Отметим, что в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент kd.

Пусть имеется возможность контролировать процесс сбора так, чтобы остановить заготовку в момент kd, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся больше, чем значения

$$\big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) = u(k) \in [0,1)^n.$$

В этом случае определенная часть популяции сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора и доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k) = \big(\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)\big) \in [0,1]^n$, где

$$\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = 1, \ldots, n, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Предположим, что начальное количество ресурса i-го вида равно $X_i(0)$, количество ресурса этого вида до сбора в момент kd составляет

$$X_i(k) = x_i(kd - 0), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

после сбора данное количество равно $x_i(kd)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax, \quad t \neq kd, \\ &x_i(kd) = \big(1 - \ell_i(k)\big) \cdot x_i(kd - 0), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Полагаем, что решения системы (10.1) непрерывны справа.

Пусть $\overline{\ell} \doteq \big(\ell(1),\dots,\ell(k),\dots\big)$, $C_i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида, $i=1,\dots,n$. Тогда средняя временная выгода от добычи ресурса задается равенством

$$H_*\big(\overline{\ell},X(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}C_iX_i(j)\ell_i(j). \tag{10.2}$$

Рассмотрим $L(k)=\operatorname{diag}\big(\ell_1(k),\dots,\ell_n(k)\big)$ — диагональную $n\times n$ матрицу с элементами $\ell_1(k),\dots,\ell_n(k)$ на главной диагонали, пусть E — единичная матрица n-го порядка, $X(0)\in\mathbb{R}^n_+$. Развитие популяции (10.1) можно задать динамической системой, зависящей от случайных параметров:

$$X(k+1)=e^{Ad}\big(E-L(k)\big)X(k),\quad k=0,1,2,\dots, \tag{10.7}$$

где $X(k)=\big(X_1(k),\dots,X_n(k)\big)$ — видовой состав популяции до сбора ресурса в момент времени kd.

Вместе с системой со случайными параметрами (10.7) будем исследовать соответствующую ей детерминированную систему

$$\widetilde{X}(k+1)=e^{Ad}\big(E-U(k)\big)\widetilde{X}(k),\quad k=0,1,2,\dots,$$

где $U(k)=\operatorname{diag}\big(u_1(k),\dots,u_n(k)\big)$, $\widetilde{X}(0)=X(0)$.

Определение 10.1. (см. [5]). Вектор Y называется $\big(e^{Ad},\widetilde{X}(0)\big)$ *достижимым за m шагов*, если существует конечная последовательность векторов $\{u(0),\dots,u(m-1)\}$, таких, что

$$\widetilde{X}(j+1)=e^{Ad}\big(E-U(j)\big)\widetilde{X}(j),\ j=0,1,\dots,m-1 \quad \text{и} \quad \widetilde{X}(m)=Y.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{U}\doteq\{\overline{u}:\overline{u}=(u(1),\dots,u(k),\dots)\}$, где $u(k)\in[0,1]^n$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайных величин, $P(k)\doteq e^{Ad}\big(E-L(k)\big)$, $k=0,1,2,\dots$.

В следующей теореме получена оценка снизу для средней временной выгоды при условии, что начальный состав популяции $X(0)$ постоянно сохраняется или периодически восстанавливается, то есть $X(km)\geqslant X(0)$ для некоторого $m\geqslant 1$ и всех $k=1,2,\dots$. Если $X(0)>0$, то условие $X(km)\geqslant X(0)$ обеспечивает сохранность всех видов или возрастных классов, составляющих данную популяцию.

Теорема 10.2. (см. [5]). *Пусть $X(0)$ является $\big(e^{Ad},X(0)\big)$ достижимым за m шагов. Тогда существует $\overline{u}\in\mathcal{U}$ такое, что $X(km)\geqslant X(0)$, $k=1,2,\dots$ и для почти всех $\sigma\in\Sigma$ выполнено неравенство*

$$H_*\big(\overline{\ell},X(0)\big)\geqslant\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}C_iMX_i(j)M\ell_i(j),$$

где $X(j) = P(j-1)\dots P(1)P(0)X(0)$, $j = 1,\dots,m-1$.

Теорема 10.3. (см. [5]). *Пусть* $\lambda X(0)$ *является* $\bigl(e^{Ad}, X(0)\bigr)$ *достижимым за* m *шагов при некотором* $\lambda > 1$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(0) M\ell_i(0) > 0$. *Тогда существует* $\overline{u} \in \mathcal{U}$ *такое, что* $X(km) \geqslant \lambda^k X(0)$, $k = 1,2,\dots$ *и* $H_*\bigl(\overline{\ell}, X(0)\bigr) = +\infty$ *для почти всех* $\sigma \in \Sigma$.

Параграф 11 посвящен примерам оценки средней временной выгоды с использованием результатов, полученных в предыдущих разделах. Здесь также показано, что утверждения параграфа 10 можно применить для дискретных моделей популяций, при отсутствии эксплуатации заданных матрицей Лесли.

В последнем параграфе главы рассматривается задача оценки средней временной выгоды для вероятностных моделей динамики популяций, заданных нелинейными системами дифференциальных уравнений, для которых выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных.

Рассмотрим модели динамики структурированной популяции, заданные системой уравнений, зависящей от случайных параметров (размерность системы $n > 1$). Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой (1.1), а в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k) \in \Omega \subseteq [0,1]^n$, $k = 1,2,\dots$. Пусть имеется возможность остановить процесс сбора, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k) = (\ell_1(k),\dots,\ell_n(k)) \in [0,1]^n$, где $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\}$, $i = 1,\dots,n$. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой со случайными параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= \bigl(1-\ell_i(k)\bigr)\cdot x_i(kd-0), \end{aligned} \tag{12.1}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ – количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1,\dots,n$, $k = 1,2,\dots$. Предполагаем, что для системы $\dot{x} = f(x)$ выполнено свойство монотонности решений относительно начальных данных и решения системы (12.1) непрерывны справа. Вероятностная модель $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ приведена в §8. Исследуем среднюю временную выгоду от извлечения ресурса, заданную равенством (10.2).

Как и раньше, обозначаем через $X(k)$ видовой состав популяции до сбора в момент τ_k, $\varphi(t,x)$ — решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Если $\ell_i(k) = u_i$ для всех $k = 1,2,\dots$, то $X(k)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$X(k+1) = \varphi\bigl(d, (1-u)X(k)\bigr), \quad k = 1,2,\dots. \tag{12.2}$$

Пусть $S(u) = \big(S_1(u), \ldots, S_n(u)\big)$ является неподвижной точкой системы (12.2). Обозначим через $s(u) \doteq (1-u)S(u)$, $M\ell_i = M\ell_i(k)$ математическое ожидание случайных величин $\ell_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 12.1. (см. [3]). *Пусть выполнено свойство* 1. *Тогда, если* $x(0) \geqslant s(u)$, *то для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедлива оценка*

$$H_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} C_i S_i(u) M\ell_i.$$

Результаты главы иллюстрируются примерами вычисления и оценок средней временной выгоды для эксплуатируемых однородных и структурированных популяций.

Заключение. В работе исследуется свойство монотонности решений систем дифференциальных уравнений относительно начальных условий и рассмотрены задачи оптимальной добычи ресурса из популяций, заданных системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений, зависящих от случайных параметров. Получены следующие основные результаты:

1. Для систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений исследовано свойство монотонности решений относительно начальных условий. Данное свойство применяется для оценки средней временной выгоды для детерминированных систем и систем, зависящих от случайных параметров.

2. Получены оценки средней временной выгоды для однородных и структурированных популяций, динамика которых задана дифференциальными уравнениями или их системами. Описан способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления и достигается максимальная средняя временная выгода.

3. Получены условия, при которых средняя временная выгода равна бесконечности и указан способ построения управления для достижения этого значения. Показано, что для некоторых моделей взаимодействия двух видов такой способ добычи ресурса может привести к полному уничтожению одного из видов и неограниченному росту второго; поэтому в работе изучена задача построения управления для достижения фиксированного конечного значения средней временной выгоды. Результаты исследования проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов, таких как «хищник-жертва», конкуренция и симбиоз и могут быть применены к другим различным моделям динамики популяций.

4. Для популяций, заданных дифференциальными уравнениями со случайными параметрами, получены оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Показано, что данная характеристика является положительной, если существует положительная неподвижная точка вспомогательного уравнения для количества добываемого ресурса.

5. Для популяций, заданных системами линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами, описаны методы добычи ресурса, при которых наибольшая величина средней временной выгоды достигается с вероятностью единица; при этом видовой состав популяции остается не ниже исходного или периодически восстанавливается. Также рассматриваются режимы эксплуатации, при которых средняя временная выгода достигает бесконечного значения. Получены результаты об оптимальной добыче ресурса для дискретных динамических систем, частным случаем которых являются модели динамики популяций Лесли и Лефковича.

В дальнейшем планируется продолжить работу по следующим направлениям исследований:

1. Получить оценки средней временной выгоды при помощи метода положительно инвариантных множеств, в которых находятся траектории детерминированной системы дифференциальных уравнений или системы со случайными параметрами. Для построения положительно инвариантных множеств планируется использовать понятие функции Ляпунова относительно множества, введенное Тонковым Е. Л.

2. Исследовать свойства средней временной выгоды для моделей динамики популяций, заданных в виде гибридных динамических систем, состоящих из двух двумерных систем, переключающихся между собой.

3. Рассмотреть содержательные примеры вычисления или оценки характеристик сбора ресурса для моделей систем, возникающих в экономике, биологии, медицине, популяционной динамике; в частности, исследовать обобщенные модели взаимодействия биологических видов Колмогорова А. Н. и Базыкина А. Д.

Благодарность. Автор диссертации выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Родиной Л. И. за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

А) Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2022. — № 1. — С. 12–24. —- DOI: 10.26907/0021-3446-2022-1-12-24.

   Переводная версия:

   Woldeab M. S., Rodina L. I. About the methods of extracting a biological resource that provide the maximum averadge time benefit // Russian Mathematics. Mathematics. — 2022. — Vol. 66, № 1. — P. 8–18. —- DOI: 10.3103/S1066369X22010078.

2. Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник российских университетов. Математика. — 2022. — Т. 27, № 137. — С. 16–26. —- DOI: 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26.

3. Родина Л. И., Волдеаб М. С. О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1022–1028. —- DOI: 10.31857/S0374064123080022.

   Переводная версия:

   Rodina L. I., Woldeab M. S. On the monotonicity of solutions of nonlinear systems with respect to the initial condition // Differential equations. — 2023. — Vol. 59, № 8. — P. 1025–1031. —- DOI: 10.1134/S0012266123080025.

4. Волдеаб М. С. Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций // Вестник российских университетов. Математика. — 2023. — Т. 28, № 141. — С. 26–38. —- DOI: 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38.

5. Волдеаб М. С., Родина Л. И. Об эксплуатации популяции, заданной системой линейных уравнений со случайными параметрами // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2023. — Т. 61. — С. 27–41. —- DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-02.

Б) В сборниках материалов конференций

6. Волдеаб М. С. Задачи оптимальной добычи ресурса для вероятностных моделей популяции // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 4. / Отв. редактор С. С. Мамонов. — Рязань : Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, 2022. — С. 37–39. —- URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49296305&pff=1.

7. Rodina L. I., Woldeab M. S. Estimation of discounted profit for exploited population // Book of Abstracts III International conference «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», Nizhny Novgorod, 12-13 December, 2020. — Nizhny Novgorod : NRU HSE, 2020. — P. 62–63. —- URL: https://nnov.hse.ru/mirror/pubs/share/424699101.pdf.

8. Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи ресурса из структурированной популяции // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференци-

альным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова: материалы Международной научной конференции, Минск, 1-4 июня 2021. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2021. — С. 132.

9. Волдеаб М. С. Оптимизация средней временной выгоды для моделей взаимодействия двух видов // Геометрические методы в теории управления и математической физике : тезисы докладов III Международной научной конференции, посвященной памяти профессора М. Т. Терёхина, Рязань, 26-30 апреля 2021. — Рязань: Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, 2021. — С. 58. —- URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=46287948&pff=1.

10. Волдеаб М. С. Об оценке средней временной выгоды для модели конкуренции двух видов // Международная школ молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем» (MOCS-2022): Аннотации лекций и докладов, Суздаль, 30 июня – 5 июля 2022. — Владимир: «Аркаим», 2022. — С. 23–24. —- URL: https://cloud.mail.ru/public/mRPX/wnFh1iLN8.

11. Волдеаб М. С., Родина Л. И. Об оптимальном сборе ресурса из структурированной популяции // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Москва, 7-9 июня 2022 г. — Москва : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2022. — С. 139–141. —- URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_49551340_36486337.pdf.

12. Волдеаб М. С. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций // Современные проблемы математики и ее приложений (СоПроМат-2023) : тезисы докладов Международной (54-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 6-10 и 17 февраля 2023. — Екатеринбург : ИММ УрО РАН, УрФУ, 2023. — С. 78–79. —- URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=56344893&pff=1.

13. Rodina L. I., Woldeab M. S. On the property of monotonicity of solutions of systems with respect to initial conditions // Book of abstracts VI International Conference «Topological Methods in Dynamics and Related Topics», dedicated to the memory of V. Z. Grines. — Nighny Novgorod, 13–15 December, 2023. — Nighny Novgorod : NRU HSE, 2023. — P. 73–74. —- URL: https://publications.hse.ru/pubs/share/direct/880966753.pdf?ysclid=m31ri1ob9c339643273.

14. Базулкина А. А., Волдеаб М. С., Родина Л. И. Положительно инвариантные множества и характеристики сбора ресурса для стохастических популяций // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 5 — Рязань : Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, 2024. — С. 20-25. —- URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=65661671.

15. Woldeab M. S. Estimation of the average time benefit from resource extraction // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем»: сборник тезисов докладов международной конференции и международной школы молодых ученых, Суздаль, 28 июня – 3 июля 2024. — Владимир: Издательство ВлГУ, 2024. — С. 78–79. —- URL: https://cloud.mail.ru/public/nFPh/JcFHJquZ7.