Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный педагогический университет»

На правах рукописи

Павлова Татьяна Вениаминовна

Полнота и редуцированность для ассоциативных артиновых колец

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Мартынов Леонид Матвеевич

Омск 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Теория абелевых групп дает яркий пример развитой структурной теории. При этом важную роль в ней играют понятия полной (делимой) и редуцированной группы. Напомним, что аддитивная абелева группа G называется *полной*, если для всякого натурального числа n и любого элемента $g \in G$ уравнение $nx = g$ имеет в группе G хотя бы одно решение. Это эквивалентно следующему: для любого простого числа p и любого элемента $g \in G$ уравнение $px = g$ разрешимо в группе G. Группа, не содержащая ненулевых полных подгрупп, называется *редуцированной*.

В работе [100] Л. М. Мартыновым было показано, что к определениям этих понятий возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. А именно, аддитивная абелева группа является полной тогда и только тогда, когда она не имеет гомоморфизмов на ненулевые группы из атомов решетки многообразий абелевых групп, которые исчерпываются сериями многообразий $\mathcal{A}_p = var\{px = 0\}$ абелевых групп периода p по всем простым числам p.

Это дало возможность Л. М. Мартынову определить в [100] аналоги обозначенных понятий для произвольных (универсальных) алгебр. Поскольку решетка $\boldsymbol{L}(\mathcal{V})$ подмногообразий любого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр является атомной, естественно назвать алгебру из $\mathcal{V}$ *(атомно) полной*, если у нее нет гомоморфизмов на нетривиальные алгебры из атомов решетки $\boldsymbol{L}(\mathcal{V})$. Алгебра, не имеющая нетривиальных полных подалгебр, называется *(атомно) редуцированной*.

Кроме понятий полноты и редуцированности, в [100] были определены также естественные аналоги сервантности и слабой сервантности (чистоты) и периодичности (в частности, примарности). Позднее Л. М. Мартыновым в работе [58] была сформулирована обширная программа по их изучению для произвольных алгебр. Исследование перечисленных понятий в последующие годы довольно интенсивно осуществлялось различными авторами как в общей ситуации, так и для классических алгебр: для универсальных алгебр [14–16,29,30,61], для групп [70,72], для полугрупп и моноидов [17–28,31–33,60,63,64,71,72,82–86], для модулей [34–38,57,77,78,106], для колец и алгебр [11,12,39,59,65–67,101,110–

119], для унаров [73,74,81], для решеток [80]. Обзор этих результатов содержится в работе [69]. Там же приведены основные факты о полных и редуцированных алгебрах; проблематика, обозначенная ранее в [58], дополнена новыми проблемами, естественно возникшими в свете новых результатов; указаны возможные направления для дальнейших исследований.

Введенные Л. М. Мартыновым понятия полноты и редуцированности позволяют указать следующий методологический подход к развитию структурной теории алгебр, хорошо зарекомендовавший себя в теории абелевых групп. Отправляясь от атомов решетки подмногообразий данного многообразия $\mathcal{V}$ алгебр, которые зачастую определяются хорошими тождествами и их алгебры устроены довольно просто, с помощью расширений конструируются редуцированные алгебры с «блоками-факторами» из атомов. С другой стороны, полные алгебры — это антиподы редуцированным, их нельзя «собрать» из алгебр атомов, но иногда можно охарактеризовать исчерпывающим образом, как в случае абелевых групп (см., например, [13, с. 88]) или унаров (см. [74]). Поскольку во многих случаях алгебры из $\mathcal{V}$ являются расширениями полных алгебр с помощью редуцированных (см. [62]), изучение произвольных алгебр из $\mathcal{V}$ можно свести к изучению полных и редуцированных алгебр из $\mathcal{V}$ и их расширений.

В обзоре [69] отмечалось, что этот подход, будучи универсальным, не может быть эффективно реализован для произвольных алгебр, и указывалось на его возможную плодотворность, подтвержденную рядом проведенных исследований, для тех видов алгебр, решетка подмногообразий которых имеет «хорошие» атомы. В частности, этим качеством обладает многообразие всех ассоциативных колец $Ass(\mathbb{Z})$, атомы решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ всех подмногообразий которого исчерпываются (см. [105]) многообразиями $\mathcal{Z}_p = var\{px = 0, xy = 0\}$ и $\mathcal{F}_p = var\{px = 0, x^p = x\}$ по всем простым числам p.

Приведем соответствующие определения для ассоциативных колец. Условимся далее под *кольцом* понимать ассоциативное кольцо (не обязательно содержащее единицу), а под *идеалом* кольца — его двусторонний идеал. Кольцо называется *артиновым слева*, если оно удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов. Далее под *артиновым* понимается артиново слева кольцо.

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое подмногообразие многообразия $Ass(\mathbb{Z})$. Кольцо называется $\mathcal{X}$-полным, если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из многообразия $\mathcal{X}$. Кольцо называется *(атомно) полным*, если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из атомов $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$ решетки подмногообразий $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$, по всем простым p. Если кольцо не имеет ненулевых атомно полных подколец, то оно называется *(атомно) редуцированным.* Далее слово «атомно» будем опускать, а понятие «редуцированное кольцо» использовать в обозначенном нами смысле (в отличие от, к примеру, [103, с. 201], где под редуцированным кольцом понимается кольцо без ненулевых нильпотентных элементов). Заметим, что нулевое кольцо является одновременно полным и редуцированным.

В силу основного результата работы [62], в любом кольце R существует наибольшее полное подкольцо $C(R)$, которое является идеалом кольца R, а факторкольцо $R/C(R)$ является редуцированным. Кроме того, согласно утверждениям 1, 2 работы [58], класс $\mathcal{R}$ всех полных колец является замкнутым относительно гомоморфных образов и расширений, а согласно утверждению 5 той же работы, класс $\mathcal{S}$ всех редуцированных колец замкнут относительно взятия подколец, прямых произведений (в частности, прямых сумм) и расширений. При этом идеал $C(R)$ содержит любое полное подкольцо кольца R. Все сказанное означает, что в многообразии $Ass(\mathbb{Z})$ определен строгий радикал (в смысле Куроша и Амицура, [94, с. 22]), где $\mathcal{R}$ — радикальный класс, а $\mathcal{S}$ — полупростой класс. Идеал $C(R)$ кольца R называем далее *полным радикалом* кольца R.

Цели и задачи работы. Основная *цель* диссертации — исследование вопросов полноты и редуцированности для ассоциативных артиновых слева колец. Выбор артиновых колец, как объектов для изучения понятий полноты и редуцированности, обусловлен рядом причин. Прежде всего, программа по изучению обозначенных понятий работы [69] содержит ряд проблем, поставленных для конечных алгебр, а класс артиновых колец включает в себя класс конечных колец. Также, заметную роль при исследовании артиновых колец играет структурная теория, в основе которой лежит радикал Джекобсона. Наконец, важное значение имеет тот факт, что для аддитивной группы артинова кольца известна точная структурная теорема (см., к примеру, подраздел 1.1, теорема 1.10). Это дает возможность в полной мере использовать предложенный Л. М. Мартыновым единый подход к определению понятий полноты и редуцированности, который позволяет выражать свойства артинова кольца через одноименные свойства его аддитивной группы, и наоборот.

Цель диссертационного исследования реализуется в следующих *задачах*:

1. *Описание полных (в частности, минимально полных) ассоциативных артиновых слева колец.* В программе исследования понятий полноты и редуцированности работы [69] эта задача относится к проблемам 3.7 характеризации конечных полных алгебр и 3.10 характеризации минимально полных алгебр для данного многообразия алгебр. Заметим, что в случае групп, проблема 3.7 равносильна описанию конечных групп, совпадающих со своим коммутантом.

Для произвольных алгебр, нетривиальная полная алгебра называется *минимально полной*, если она не имеет собственных нетривиальных подалгебр. Хорошо известно, что любая полная абелева группа является прямой суммой минимально полных абелевых групп, которые с точностью до изоморфизма исчерпываются аддитивной группой поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и квазициклическими группами C_{p^∞} по всем простым p. Кроме того, как и для абелевых групп, в случае произвольных алгебр, понятие полноты оказывается тесно связанным с понятием чистоты. Например, любая полная алгебра всегда является всюду чистой, любая минимально полная алгебра является простой по чистоте алгеброй и т. д. (см. [69]). Все это делает актуальной задачу описания полных и минимально полных ассоциативных колец.

Изучением проблемы 3.7 характеризации полных конечных алгебр занимались многие авторы. Работы [36,82,84] посвящены изучению этой проблемы в случае полугрупп; полные унары характеризуются в работе [74]; полные решетки изучались в работе [80]. Изучение проблемы 3.10 характеризации минимально полных алгебр, для модулей осуществлялось в работе [78]; для минимально полных полугрупп — в работах [26–28, 32, 83]; работа [73] содержит исчерпывающее описание минимально полных унаров.

2. *Описание редуцированных ассоциативных артиновых слева колец.* Эта задача относится к проблеме 3.8 работы [69] характеризации конечных реду-

цированных алгебр для данного многообразия алгебр. Заметим, что в случае групп указанным в проблеме 3.8 свойством обладают только разрешимые (в обычном смысле) конечные группы.

Ясно, что кольцо, принадлежащее любому атому решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ подмногообразий ассоциативных колец, является редуцированным. Заметим, из предложения 4.2.5 работы [69] следует (как упоминалось выше), что редуцированные кольца как бы «собраны» из атомов $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$, так как обладают рядом идеалов (конечным в случае артиновых колец), факторы которого принадлежат атомам решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$. Актуальность изучения редуцированных колец состоит в том, что всякое ассоциативное кольцо, как уже упоминалось, есть расширение полного кольца с помощью редуцированного (см. [62]). Этим, изучение произвольных колец из $Ass(\mathbb{Z})$, можно свести к изучению полных и редуцированных колец из $Ass(\mathbb{Z})$, а также их расширений.

Проблема 3.8 характеризации конечных редуцированных алгебр данного многообразия алгебр исследовалась различными авторами: для модулей в работе [77]; в работах [63, 64, 71, 84] для полугрупп; для унаров в работе [81].

3. *Изучение поведения полного радикала относительно некоторых кольцевых конструкций.* Как упоминалось выше, класс всех полных колец замкнут относительно гомоморфных образов, расширений и прямых произведений, а класс всех редуцированных колец замкнут относительно взятия подколец, прямых произведений и расширений. Чтобы строить кольца, не являющиеся полными или редуцированными, важно знать, какие еще кольцевые конструкции не выводят за пределы соответствующих классов полных и редуцированных колец. В решении этой задачи остановимся на следующих подзадачах:

3.1. *Получение условий полноты для полугруппового кольца.* Решением этой задачи в некоторых частных случаях занимались также другие авторы. В работе [110] дается описание полного радикала группового кольца над конечным простым полем и характеризуются редуцированные групповые кольца конечных групп над конечными простыми полями. В работе [39] вычислен полный радикал группового кольца над кольцом целых чисел. В работе [101] изучается задача нахождения полного радикала моноидного кольца.

3.2. *Описание полного радикала кольца всех квадратных матриц над произвольным ассоциативным кольцом*, является естественной задачей изучения поведения полного радикала относительно известнейшей кольцевой конструкции. Дополнительным аргументом здесь служит тот факт, что кольцо всех квадратных матриц над произвольным артиновым кольцом, также артиново (см., напр., теорему 28.3, [96, с. 138]). Аналогичная задача характеризации полного радикала для матричных алгебр Ли над любым кольцом операторов была решена в работе [12]. Также широко известным является (см., например, [89], теорема 1.2.6, с. 22) поведение радикала Джекобсона при его переходе от кольца R к кольцу $M_n(R)$ всех матриц порядка n над R. Соответствующий результат утверждает, что $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$.

3.3. *Описание расщепляемых ассоциативных артиновых слева колец.* Эту задачу можно отнести к проблеме 3.3 работы [69] характеризации нередуцированных (сильно) расщепляемых многообразий алгебр. В соответствии с работой [69], кольцо R называется *расщепляемым*, если полный радикал в нем отделяется прямым слагаемым. Если $R = C(R) \oplus A$, где A — идеал, то $C(R)$ назовем *отщепляемым полным радикалом*, а идеал A *дополняющим идеалом.*

Хорошо известно, что любая абелева группа является прямой суммой своих полной и редуцированной подгрупп. Более того, в случае абелевых групп любая полная подгруппа выделяется прямым слагаемым. Естественность аналогичной задачи для колец объясняется простотой и конструктивностью построения расширений полных колец с помощью редуцированных. Класс расщепляемых колец довольно широк — расщепляемыми являются все полные и все редуцированные кольца, а также кольца с нулевым умножением. Расщепляемыми являются все артиновы полупростые по Джекобсону кольца, так как такие кольца, согласно теореме Веддербёрна-Артина (см., например, [89], теоремы 1.4.4 и 2.1.6) представляют собой конечную прямую сумму простых колец, каждое из которых изоморфно полному матричному кольцу над некоторым телом, а любое простое кольцо является либо полным, либо редуцированным.

В общем случае задача описания расщепляемых алгебр, в том числе ассоциативных колец, является, по-видимому, весьма трудной (впрочем, как и описание ассоциативных колец с отщепляемым радикалом Джекобсона). Ситуация резко меняется, если ограничиться задачей описания многообразий или псевдомногообразий конечных алгебр, все алгебры которых расщепляемы. В работе [85] эта задача решена для псевдомногообразий конечных полугрупп, а в [72] для сильно расщепляемых многообразий групп и полугрупп. Другим ярким примером, подтверждающим сказанное, является известное (см. [107]) описание многообразий ассоциативных колец с отщепляемым радикалом Джекобсона. В диссертации мы не ставим перед собой задачу описания расщепляемых многообразий и псевдомногообразий конечных ассоциативных колец.

Методы исследования. Работа опирается на классические теоретико-кольцевые методы, используемые при исследовании ассоциативных некоммутативных колец и частные приемы, определяемые спецификой артиновых колец.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Основные результаты диссертации являются новыми, носят теоретический характер и могут использоваться в дальнейших исследованиях ассоциативных колец. Полученные результаты решают ряд естественных вопросов, входящих в рамки проблематики работы [69], могут применяться при чтении спецкурсов и написании монографий по теории колец.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования.

1. Характеризация полных ассоциативных артиновых колец, в частности, полных конечных колец [113].

2. Характеризация редуцированных ассоциативных артиновых колец [115], которые оказываются конечными [111].

3. Описание с точностью до изоморфизма всех минимально полных ассоциативных артиновых колец [111, 121].

4. Критерий полноты полугруппового кольца, в частности, артинова группового кольца [110].

5. Описание полного радикала полного матричного кольца над произвольным ассоциативным кольцом, критерий полноты такого кольца над ассоциативным артиновым кольцом [114].

6. Утверждение о расщепляемости ассоциативного коммутативного артинова кольца без квазициклических аддитивных подгрупп и критерий расщепляемости ассоциативного артинова кольца с правой единицей [112].

Кроме того, в работе получены другие результаты, имеющие самостоятельное значение для всего класса артиновых колец. Например, предложение 2.14 дает критерий конечности артинова кольца; предложение 3.8 есть критерий существования правой единицы в артиновом слева кольце, который обобщает известный аналогичный результат для конечных колец.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации представлялись на международной конференции по математике и механике, посвященной 125-летию ТГУ и 55-летию ММФ (Томск, 2003); международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2015), посвященной 75-летию Ю. Л. Ершова; всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2018), посвященной 140-летию ТГУ и 70-летию ММФ; докладывались на заседаниях алгебраического семинара ОмГПУ, Омского алгебраического семинара ОФ ИМ СО РАН, научном семинаре по теории колец АлтГПУ.

Публикации. Результаты диссертации представлены в двенадцати печатных изданиях [110–121], из них восемь статей, три из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК [110–112], три — в тезисах конференций [118–120]. Основной результат диссертации, опубликованный в совместной работе [110], принадлежит автору.

Структура и содержание работы. Диссертация содержит 92 страницы и состоит из трех разделов, разбитых в совокупности на девять подразделов, введения, заключения и списка литературы. Для основных результатов принята сквозная порядковая нумерация. Для остальных утверждений используется двойная нумерация, где первое число — это номер раздела, в котором находится утверждение, второе число — номер утверждения в этом разделе. Выключные формулы и замечания имеют отдельную двойную нумерацию. Библиография работы содержит 121 наименование.

Раздел 1 «Предварительные сведения» содержит все необходимые сведения: перечень используемых обозначений, определения основных понятий и пр.

В подразделе 1.1 «О строении ассоциативных артиновых колец» особое внимание уделено строению артинова кольца и его аддитивной группы, которое оказывает существенное влияние на свойства кольца. Подраздел 1.2 «Краткие сведения из теории радикалов колец» посвящен изложению основ общей теории радикалов колец. В подразделе 1.3 «О полном радикале ассоциативного кольца» определяются классы полных и редуцированных колец как радикальных и полупростых классов соответственно, перечисляются свойства этих классов, дается определение полного радикала кольца и сопутствующих понятий.

Раздел 2 «Полные и редуцированные артиновы кольца» посвящен изучению полных, редуцированных и минимально полных артиновых колец.

Целью подраздела 2.1 «Полные артиновы кольца» является характеризация полных артиновых колец. Его основной результат формулируется так.

Теорема 1. *Артиново кольцо R является полным тогда и только тогда, когда для его идеала R^2 выполняются следующие условия:*
1) R^2 является идемпотентным артиновым кольцом и если $R^2 \neq (0)$, то $R^2/J(R^2) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(K_i)$, где K_i — тело, $M_{n_i}(K_i) \ncong GF(p)$ для всех $i = 1, ..., k$;
2) если $R^2 \neq R$, то $R/R^2 \cong \bigoplus\limits_{j=1}^{n} C^0_{p_j^\infty}$.

Следствие 2.8 из теоремы 1 утверждает, что полнота артинова идемпотентного кольца (кольца, совпадающего со своим квадратом), эквивалентна полноте его факторкольца по радикалу Джекобсона. Из теоремы 1 также следует описание полных конечных колец.

Следствие 2.9. *Конечное ненулевое кольцо R является полным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) кольцо R идемпотентно, т. е. $R^2 = R$;
2) $R/J(R)$ — полное кольцо, изоморфное $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(GF(p_i^{s_i}))$, где $s_i + n_i > 2$ для всех $i = 1, ..., k$.

Следствие 2.9 полностью характеризует ненулевые полные конечные ассоциативные кольца. Тем самым, для ассоциативных колец решается проблема 3.7 [69] описания конечных полных алгебр. Вспомогательные утверждения подраздела в том числе характеризуют полные нильпотентные кольца в общем случае (лемма 2.6) и в случае артинова кольца (лемма 2.7). Лемма 2.7 утверждает, что всякое полное артиново нильпотентное кольцо является кольцом с нулевым умножением и аддитивной группой, изоморфной конечной прямой сумме квазициклических групп.

Основной результат подраздела 2.2 «Редуцированные артиновы кольца» характеризует все редуцированные артиновы кольца. Прежде чем привести формулировку основного результата, заметим (как будет показано далее), что наибольшее полное по всем многообразиям $\mathcal{F}_p$ подкольцо $C_{\mathcal{F}}(R)$ произвольного кольца R также является идеалом и радикалом, который называется *$\mathcal{F}$-полным радикалом* кольца R. Аналогично можно определить *$\mathcal{Z}$-полный радикал* $C_{\mathcal{Z}}(R)$ как наибольшее полное по всем многообразиям $\mathcal{Z}_p$ подкольцо кольца R.

Теорема 2. *Артиново кольцо R является редуцированным тогда и только тогда, когда R — конечное кольцо с $\mathcal{F}$-полным радикалом $C_{\mathcal{F}}(R) = J(R)$ и либо $R = J(R)$, либо $R/J(R) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} GF\,(p_i)$.*

Из теоремы 2 следует, что любое артиново редуцированное кольцо R является конечным кольцом, которое либо нильпотентно, либо его факторкольцо $R/J(R)$ изоморфно конечной прямой сумме простых конечных полей. Теорема 2 решает проблему 3.8 [69] описания конечных редуцированных алгебр в случае ассоциативных колец. Вспомогательным утверждением, имеющим важное значение для доказательства основного результата и для последующих подразделов, а также представляющее самостоятельный интерес для теории артиновых колец, является следующий критерий конечности артинова кольца.

Предложение 2.14. *Артиново кольцо R является конечным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) *$mR = (0)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$;*
2) *факторкольцо по радикалу Джекобсона $R/J(R)$ конечное.*

Целью подраздела 2.3 «Минимально полные артиновы кольца» является описание всех минимально полных ассоциативных артиновых слева колец. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Артиново кольцо является минимально полным тогда и только тогда, когда изоморфно одному из следующих колец:*
1) *кольцу с нулевым умножением $C^0_{p^\infty}$ для некоторого простого числа p;*
2) *полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$;*
3) *кольцу Галуа $GR(p^{nq}, p^n)$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и простых чисел p и q.*

Теорема 3 дает исчерпывающее описание всех минимально полных артиновых колец. Из нее следует, что минимально полные кольца тесно связаны с классом колец Галуа. Напомним, *кольцом Галуа* порядка p^{nk} и характеристики p^n называется факторкольцо $Z_{p^n}[x]/(f(x))$, где $f(x)$ — унитарный многочлен степени k, образ которого при естественном гомоморфизме $Z_{p^n}[x] \to Z_p[x]$ является неприводимым над Z_p многочленом. Кольцо Галуа с точностью до изоморфизма определяется числами p, n и k и обозначается $GR(p^{nk}, p^n)$. Так как $GR(p^n, p^n) \cong Z_{p^n}$ и $GR(p^k, p) \cong F_{p^k}$, то класс колец Галуа включает в себя как класс всех конечных полей, так и класс колец классов вычетов по модулю p^n. Кольца Галуа впервые рассматривал В. Крулль (W. Krull, 1924). Хотя изложение полученных им результатов содержится в его книге (1935), они были забыты и вновь получены в работах Г. Дж. Януша (G. J. Janusz, 1966) и Р. Рагавендрана (R. Raghavendran, 1969). В настоящее время кольца Галуа играют важную роль в структурной теории конечных ассоциативных колец и в приложениях.

Заметим также, что, к сожалению, основной результат подраздела в опубликованном в статье [111] варианте содержит неточность. Кольца пункта 3) теоремы 5 [111], изоморфные $M_2(Z_{p^n})$ по всем простым числам p и натуральным числам n, не являются минимально полными, так как:

1) кольцо всех матриц $M_2(GF(p))$ второго порядка над простым конечным полем $GF(p)$ не является минимально полным — согласно представлению полей матрицами (см., например, [51, с. 90]), для любого простого числа p, кольцо $M_2(GF(p))$ содержит подкольцо, изоморфное полному полю $GF(p^2)$.

2) конечное идемпотентное кольцо R, где $p^k R = (0)$ для некоторого простого числа p и натурального числа k, согласно лемме 2.34, является минимально полным тогда и только тогда, когда факторкольцо R/pR минимально полное.

Исправление формулировки теоремы 5 работы [111] опубликовано в [121].

Подраздел 2.3 содержит большое число вспомогательных утверждений, часть из которых имеет и самостоятельное значение. Лемма 2.17 утверждает (за некоторыми ограничениями) свойство полного радикала, аналогичное свойству радикала Джекобсона (см., например, теорему 1.3.3 [89, с. 28]).

Лемма 2.17. *Для главного идемпотента e ненильпотентного артинова кольца R выполняется равенство $C(eRe) = eC(R)e$.*

Идемпотент e кольца R называется *главным*, если $\varphi(e)$ — единица кольца $R/J(R)$ при естественном гомоморфизме $\varphi : R \to R/J(R)$. Известно, что всякое ненильпотентное артиново кольцо содержит ненулевой главный идемпотент (см., к примеру, предложение 4.1, [95]). Из леммы 2.17 следует, что полнота (редуцированность) артинова кольца тесно связана с полнотой (редуцированностью) некоторого артинова кольца с единицей (следствие 2.18), а ненильпотентное минимально полное артиново кольцо R содержит единицу (следствие 2.19).

Лемма 2.20. *Если любая убывающая цепочка идеалов кольца R, содержащихся в его идеале I, стабилизируется на некотором конечном шаге, то из редуцированности кольца R следует редуцированность кольца R/I.*

Лемма 2.20 имеет два важных следствия. Следствие 2.21 утверждает, что гомоморфный образ артинова редуцированного кольца также является редуцированным кольцом, что не выполняется в общем случае — к примеру, для кольца многочленов $F_p[x]$ над простым конечным полем это не так (см. замечание 2.2). Следствие 2.22 утверждает, что гомоморфный образ минимально полного конечного кольца является минимально полным кольцом.

В разделе 3 «Полный радикал артиновых колец» изучаются вопросы полноты для полугрупповых и матричных колец, исследуются условия расщепляемости для артиновых колец. В подразделе 3.1 «Полнота полугрупповых колец» приводится критерий полноты полугруппового кольца. Напомним, *полугрупповым кольцом* полугруппы S над кольцом R с единицей называется кольцо RS, элементами которого являются формальные суммы вида $\sum\limits_{s \in S} r_s s$, где $r_s \in R$ и почти все r_s равны нулю, а сложение и умножение определяются равенствами

$$\sum_{s\in S} x_s s + \sum_{s\in S} y_s s = \sum_{s\in S}(x_s+y_s)s, \left(\sum_{s\in S} x_s s\right)\left(\sum_{t\in S} y_t t\right) = \sum_{w\in S}\left(\sum_{\substack{u,v\in S\\ uv=w}} x_u y_v\right)w. \quad (1)$$

Основным результатом подраздела 3.1 является следующая теорема.

Теорема 4. *Для кольца R с единицей и полугруппы S выполняется:*
1) *если аддитивная группа R^+ кольца R полная, то полугрупповое кольцо RS является полным кольцом;*
2) *если R^+ не является полной группой, то полугрупповое кольцо RS будет полным тогда и только тогда, когда будет полным кольцо R и $S^2 = S$.*

Известно (см., например, [50], с. 244, предложение 6), что групповое кольцо RG будет артиновым тогда и только тогда, когда кольцо R артиново, а группа G конечная. Поэтому следующее следствие из теоремы 4 характеризует все полные артиновы групповые кольца.

Следствие 3.2. *Для артинова кольца R с единицей и конечной группы G, групповое кольцо RG будет полным тогда и только тогда, когда кольцо R является полным.*

В подразделе 3.2 «Полный радикал кольца всех квадратных матриц над произвольным ассоциативным кольцом» дан критерий полноты кольца матриц $M_n(R)$ над любым кольцом R. Он позволяет охарактеризовать полный радикал в таких кольцах, что составляет основной результат подраздела:

Теорема 5. *Полный радикал кольца $M_n(R)$ всех матриц порядка $n > 1$ над кольцом R равен $M_n(C_{\mathcal{Z}}(R))$, где $C_{\mathcal{Z}}(R)$ есть $\mathcal{Z}$-полный радикал кольца R.*

Хорошо известно, что кольцо всех матриц $M_n(R)$ над кольцом R артиново в точности тогда, когда кольцо R артиново (см., напр., теорему 28.3, [96, с. 138]). Поэтому следствие ниже из теоремы 5 является критерием полноты для артинова кольца, изоморфного кольцу всех матриц некоторого порядка.

Следствие 3.4. *Кольцо $M_n(R)$ всех матриц порядка $n > 1$ над артиновым кольцом R есть полное кольцо тогда и только тогда, когда кольцо $M_n(R/R^2)$ полное.*

Следствие 3.6 из теоремы 5 утверждает, что любое конечное кольцо вложимо в полное конечное кольцо. В случае ассоциативных колец это решает проблему 3.9 [69] характеризации многообразий алгебр, в которых любая конечная алгебра вложима в полную конечную алгебру.

Целью подраздела 3.3 «Об артиновых кольцах с отщепляемым полным радикалом» является получение критерия расщепляемости для артиновых колец с односторонней единицей, а также изучение вопроса расщепляемости коммутативного артинова кольца. В коммутативном случае справедлива теорема 6.

Теорема 6. *Коммутативное артиново кольцо R, аддитивная группа которого не содержит квазициклических подгрупп, является расщепляемым.*

Следствие 3.14 является критерием расщепляемости кольца с единицей.

Следствие 3.14. *Кольцо R с единицей является расщепляемым тогда и только тогда, когда полный радикал $C(R)$ также есть кольцо с единицей.*

Основной результат подраздела формулируется следующим образом.

Теорема 7. *Для артинова слева кольца R с правой единицей e следующие условия эквивалентны:*

1) *кольцо R расщепляемо;*

2) *кольцо eR расщепляемо;*

3) *полный радикал кольца eR является кольцом с единицей.*

В заключении приведен перечень основных результатов диссертации, отмечена плодотворность предложенной в работах [69, 100] проблематики для ассоциативных колец, указаны возможные пути дальнейших исследований.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю, профессору Леониду Матвеевичу Мартынову за интересные постановки задач, терпеливое и внимательное отношение к работе, постоянную помощь и всестороннюю поддержку.

1 Предварительные сведения

Все необходимые сведения теории ассоциативных колец, теории групп и модулей можно найти, к примеру, в справочнике [76]. Определения основных понятий, структурные теоремы и отдельные важные вопросы теории ассоциативных некоммутативных колец можно найти в работах [3, 4, 55, 89]. Основы теории групп подробно изложены в [13, 48].

Под кольцом всегда подразумеваем ассоциативное кольцо (существование единицы не включается в определение кольца), под его идеалом — двусторонний идеал. Под n, m, k, если не оговорено противное, понимаются натуральные числа, под p, q — простые числа, под μ, η — произвольные кардинальные числа. Под *характеристикой* кольца R будем понимать наименьшее натуральное число n такое, что $nR = (0)$, если оно существует. Если $nr \neq 0$ для всякого ненулевого элемента $r \in R$ и натурального числа n, то будем называть R кольцом *нулевой характеристики*. Кольцо R, совпадающее со своим квадратом $R^2 = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \,\middle|\, x_i, y_i \in R\right\}$, называется *идемпотентным*. Аддитивная группа кольца R обозначается R^+. Кольцо, полученное из аддитивной абелевой группы A введением на нем нулевого умножения или заменой умножения в кольце A на нулевое умножение, обозначается A^0. Прямая сумма колец (групп) обозначается знаком $\oplus$. Кольцо всех матриц n-го порядка над кольцом R обозначается $M_n(R)$. Нулевая матрица обозначается O, обозначение (a_{ij}) используется для краткой записи матрицы. Конечное поле из p^n элементов обозначается как F_{p^n} или $GF(p^n)$, поле рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$. Кольцо классов вычетов целых чисел по модулю n обозначается через Z_n. Через C_{p^∞} для любого простого числа p обозначается аддитивная квазициклическая группа типа p^∞, через C_n — циклическая группа порядка n.

Аддитивная абелева группа G называется *полной*, если для всякого натурального числа n и любого элемента $g \in G$ уравнение $nx = g$ имеет в группе G хотя бы одно решение. Следующие известные факты о полных группах используем в основном без ссылок на них.

Лемма 1.1 (Лемма 117.1, следствие А [88, с. 326]). *Максимальная полная подгруппа аддитивной группы кольца является идеалом кольца.*

Предложение 1.2 (Упражнение 9.1.2 [13, с. 87]). *Гомоморфный образ полной группы — полная группа.*

Теорема 1.3 (Теорема 9.1.4 [13, с. 87]). *Полная подгруппа A абелевой группы G выделяется в G прямым слагаемым.*

Предложение 1.4 (Упражнение 9.1.5 [13, с. 88]). *Сумма любого множества полных подгрупп абелевой группы является полной подгруппой.*

Из теоремы 1.3 и предложения 1.4 немедленно следует предложение 1.5.

Предложение 1.5 (Утверждение 2 [58]). *Расширение полной абелевой группы с помощью полной есть полная группа.*

Теорема 1.6 (Теорема 9.1.6 [13, с. 88]). *Ненулевая полная абелева группа G разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или квазициклическим группам C_{p^∞}, быть может, по различным простым числам p.*

1.1 О строении ассоциативных артиновых колец

Кольцо, удовлетворяющее условию минимальности для левых идеалов, называется *артиновым (слева)*. Это эквивалентно условию обрыва убывающих цепей его левых идеалов: любая убывающая цепь левых идеалов $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ кольца стабилизируется на конечном шаге, т. е., начиная с некоторого номера $n \in \mathbb{N}$, все идеалы I_k $(k \geq n)$ равны.

Исследования артиновых колец составляют ядро современной (не обязательно коммутативной) теории колец. Это связано, прежде всего, с тем, что теория колец возникла, в частности, в результате исследования конечномерных алгебр. Поэтому вполне естественно, что артиновы кольца, находящиеся не слишком далеко от конечномерных алгебр, были широко изучены. В 1944 году Э. Артин (E. Artin), С. Дж. Несбитт (C. J. Nesbitt) и Р. М. Тралл (R. M. Thrall) в своей работе [92] дали первый обзор исследований артиновых колец, проделанных до этого времени. После выхода этой книги в исследовании артиновых (в особенности, конечных) колец было получено множество новых результатов (см., например, [98, 102, 108, 109] и др.). Основные утверждения теории артиновых колец изложены в [96]. Основы теории конечных ассоциативных колец, в том числе структурные теоремы для основных классов конечных колец, можно найти в [5].

Примерами артиновых колец являются конечные кольца и все тела. Артиновыми являются конечные прямые суммы артиновых колец (см., напр., предложение 28.1, [96, с. 137]), гомоморфные образы артиновых колец и расширения артиновых колец с помощью артиновых (см., напр., предложение 28.2, [96, с. 137]). Артиновым является любое кольцо всех квадратных матриц над артиновым кольцом (см., напр., теорему 28.3, [96, с. 138]). В частности, кольцо всех квадратных матриц над произвольным телом артиново.

В исследовании вопросов полноты и редуцированности для артиновых колец большое значение имеет структурная теория, в основе которой лежит радикал Джекобсона. Под *радикалом Джекобсона* $J(R)$ ассоциативного кольца R понимается совокупность элементов из R, аннулирующих все неприводимые R-модули, или само кольцо R, если неприводимых R-модулей не существует. В артиновом кольце R радикал $J(R)$ нильпотентен (см., например, теорему 1.3.1 [89, с. 25]), а структура артиновых полупростых по Джекобсону колец (которые далее называем *полупростыми*) описывается следующей широко известной теоремой Веддербёрна-Артина.

Теорема 1.7 (Теоремы 1.4.4, 2.1.6. [89])**.** *Всякое полупростое артиново кольцо R есть прямая сумма конечного числа простых артиновых колец, каждое из которых изоморфно кольцу $M_{n_i}(K_i)$ всех матриц порядка n_i над некоторым телом K_i.*

Далее эти факты будем использовать без ссылок на них. Также будет применяться следующий широко известный результат теории конечномерных ассоциативных алгебр, который утверждает, что конечномерная алгебра над полем (при определенных ограничениях) разлагается в прямую сумму радикала и некоторой полупростой подалгебры.

Теорема 1.8 (Теорема Веддербёрна-Мальцева, теорема 72.19 [49, с. 450])**.** *Пусть A — конечномерная алгебра над полем F с радикалом $J(A)$, а фактор-алгебра $A/J(A)$ сепарабельна. Тогда аддитивная группа алгебры A разлагается в прямую сумму $A = S \oplus J(A)$, где S — однозначно определенная подалгебра алгебры A, изоморфная $A/J(A)$.*

Замечание 1.1. Конечномерная полупростая F-алгебра $A/J(A)$ будет сепарабельной в случае, когда F — совершенное поле (см., к примеру, следствие b, [79, с. 240]). К числу совершенных полей относятся все конечные поля и поля нулевой характеристики (см., например, [51, с. 99]).

Р. Уилсон в работах [108, 109] доказал следующую теорему, в случае конечных колец усиливающую теорему Веддербёрна.

Теорема 1.9 (Предложение 6 [109])**.** *Пусть R — конечное кольцо с единицей характеристики p^k. Тогда R содержит подкольцо Q, изоморфное прямой сумме матричных колец над кольцами Галуа, такое, что $Q/pQ \cong R/J(R)$, а также (Q, Q)-бимодуль $N \subseteq J(R)$ такой, что аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму $R = Q \oplus N$.*

Строение артинова кольца во многом определяется строением его аддитивной группы. Точную структурную теорему для аддитивных групп артиновых колец дает следующее утверждение работы [88] (Л. Фукс).

Теорема 1.10 (Теорема 122.4 [88, с. 349])**.** *Группа A является аддитивной группой некоторого артинова кольца тогда и только тогда, когда имеет вид:*

$$A = \left(\oplus_\mu \mathbb{Q}^+\right) \oplus \left(\oplus_{i=1}^n C_{p_i^\infty}\right) \oplus \left(\oplus_\eta C_{p_j^{k_j}}\right) \tag{1.1}$$

причем $p_j^{k_j}$ делит m, где m — фиксированное целое число, μ, η — произвольные кардинальные числа.

Следующая теорема утверждает, что всякое артиново кольцо R есть прямая сумма артинова кольца без кручения и артинова кольца с периодической аддитивной группой (которое, в свою очередь, распадается в прямую сумму примарных компонент — идеалов кольца R). Под *p-кольцом* понимается кольцо, аддитивная группа которого является p-группой, т. е. кольцо R, в котором порядок каждого элемента группы R^+ является степенью простого числа p.

Теорема 1.11 (Теорема 122.7 [88, с. 350])**.** *Всякое артиново кольцо R является прямой суммой идеалов — некоторого артинова кольца без кручения S и конечного числа артиновых p_i-колец T_{p_i}, соответствующих различным простым числам p_i:*

$$R = S \oplus T_{p_1} \oplus ... \oplus T_{p_k} \tag{1.2}$$

Замечание 1.2. Из теоремы 1.11 следует, что произвольное артиново кольцо R есть прямая сумма идеалов S и T, где S — кольцо без кручения, T — периодическая часть кольца R. Аддитивная группа кольца S по теореме 1.10 представляет собой прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе поля рациональных чисел, то есть является полной группой. Поэтому кольцо S также полное. Это означает, что в изучении вопросов полноты и редуцированности для артиновых колец зачастую достаточно рассмотреть случай артинова кольца, аддитивная группа которого является периодической.

Прежде чем перейти к артиновым кольцам с периодической аддитивной группой, отметим, что для артиновых колец без кручения справедлива теорема.

Теорема 1.12 (Теорема 1.4.3 [89, с. 35])**.** *Артиново слева кольцо без кручения обладает левой единицей.*

Попутно отметим известный факт о том, что всякое ненильпотентное артиново кольцо содержит ненулевой главный идемпотент (см. предложение 4.1 [95]).

Остановимся подробнее на строении артиновых колец с периодической аддитивной группой (по теореме 1.10, изоморфной прямой сумме конечных циклических групп и квазициклических групп).

Замечание 1.3. Отметим, что на квазициклической группе можно задать только нулевое умножение. Действительно, если $A = \bigoplus_{i=1}^{n} C_{p_i^\infty} \subseteq R^+$, то для любого $x \in A$ найдется натуральное m такое, что $mx = 0$. С другой стороны, так как A полная группа, то для всякого $y \in A$ найдется элемент $y_1 \in A$ такой, что $y = my_1$. Тогда $xy = x(my_1) = (mx)y_1 = 0$.

Более того, как утверждает следующая лемма, если кольцо R артиново, то элементы его квазициклических подгрупп аннулируют все кольцо.

Лемма 1.13 (Лемма 122.5 [88, с. 349]). *Квазициклические подгруппы артинова кольца лежат в двустороннем аннуляторе кольца.*

Кольцо называется *нетеровым слева*, если оно удовлетворяет условию максимальности для своих левых идеалов. Это эквивалентно тому, что любая возрастающая цепь его левых идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ стабилизируется на некотором конечном шаге. Кольцо нетерово слева тогда и только тогда, когда любой его левый идеал конечно порожден. Хорошо известно (см., напр., предложение 2.6 [98]), что любое идемпотентное (в частности, содержащее единицу) артиново слева кольцо является нетеровым слева. Критерием того, что артиново слева кольцо будет также нетеровым слева, является следующая теорема.

Теорема 1.14 (Теорема 123.3 [88, с. 353]). *Левые идеалы артинова слева кольца удовлетворяют условию максимальности в том и только том случае, когда это кольцо не содержит квазициклических подгрупп.*

1.2 Краткие сведения из теории радикалов колец

Основной целью изучения алгебраических систем является построение их структурной теории, которая состоит в описании некоторых общих объектов через более простые — более конкретные или легче поддающиеся изучению. Одной из конструкций, позволяющей осуществлять такое сведение, является радикал. С помощью этого понятия из класса всех рассматриваемых алгебраических систем выделяются системы двух противоположных видов — полупростые и радикальные, каждый из которых описывается более или менее удовлетворительно. Более того, используя теорию расширений, с помощью полупростых и радикальных систем можно построить любую систему.

Впервые понятие радикала появляется в частном случае у Г. Шефферса (G. Scheffers, 1891) и более ясно у Ф. Э. Молина (1893) и Э. Ж. Картана (E. J. Cartan, 1953–1955), которые исследовали общий случай. Под радикалом первоначально понимался наибольший нильпотентный идеал конечномерной ассоциативной алгебры. Алгебры с нулевым радикалом, называемые полупростыми, получили в классической теории достаточно полное описание. В то же время оказалось, что радикал, как наибольший нильпотентный либо разрешимый идеал, может быть определен и во многих классах конечномерных неассоциативных алгебр (альтернативных, йордановых, лиевых и др.). При этом, как и в ассоциативном случае, полупростые алгебры оказываются прямыми суммами простых алгебр некоторого специального вида.

В связи с тем, что в бесконечномерном случае наибольшего нильпотентного идеала может и не существовать, появилось много различных обобщений классического радикала: радикал Бэра $\mathscr{B}$, радикал Джекобсона $\mathscr{J}$, радикал Левицкого $\mathscr{L}$, радикал Кёте $\mathscr{K}$ и др. Наиболее часто используемый из них — радикал Джекобсона (заметим, в классе ассоциативных артиновых колец все перечисленные радикалы совпадают). Были введены также радикалы, в некотором смысле противоположные классическому. Так, например, все классически полупростые кольца радикальны в смысле регулярного радикала Неймана и наследственно идемпотентного радикала Блэра.

Начало общей теории радикалов колец и алгебр было положено в 1953 году А. Г. Курошем [47]. Одновременно, аналогичные идеи были развиты в работах С. А. Амицура (S. A. Amitsur, [91] и др.). Именно С. А. Амицур и А. Г. Курош первыми независимо обнаружили, что у всех классических радикалов есть определенные общие свойства, и они использовали эти алгебраические свойства для аксиоматического определения абстрактных классов радикалов. С тех пор общая структурная теория колец стала постоянным методом в теории колец и часто применяется в ее самых различных вопросах. Развивается общая теория радикалов, при этом классические радикалы по-прежнему сохраняют свое значение и играют важнейшую роль в структурной теории колец.

Приведем необходимые определения и утверждения общей теории радикалов. Определения ее основных понятий можно найти в [75, 76]. Работы [94] и [1] содержат детальное изложение теории. Далее в подразделе будем говорить о кольцах, при этом сказанное будет справедливо для произвольных алгебр над некоторым фиксированным ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей.

Под абстрактным *классом* колец понимается множество колец, вместе с каждым кольцом содержащее также все кольца, ему изоморфные. Класс называется *регулярным*, если любой ненулевой идеал кольца из класса имеет ненулевой гомоморфный образ, принадлежащий этому классу. Класс называется *наследственным*, если все идеалы колец этого класса также принадлежат этому классу. Любой наследственный класс является регулярным. Класс колец называется *строго наследственным*, если вместе с любым кольцом он содержит также все его подкольца. Класс колец называется *гомоморфно замкнутым*, если вместе с любым кольцом он содержит все его гомоморфные образы.

Пусть $\mathcal{A}$ — наследственный гомоморфно замкнутый класс колец (не обязательно ассоциативных) и $\mathfrak{r}$ — некоторое абстрактное свойство, которым может обладать или не обладать кольцо из $\mathcal{A}$. Кольцо, обладающее свойством $\mathfrak{r}$, называется $\mathfrak{r}$-*кольцом*. Идеал I кольца называется его $\mathfrak{r}$-*идеалом*, если I является $\mathfrak{r}$-кольцом.

Определение 1.15. *Говорят, что $\mathfrak{r}$ есть радикальное свойство в классе $\mathcal{A}$, или что в $\mathcal{A}$ задан радикал (в смысле Куроша и Амицура), если выполняются следующие условия:*
1) *гомоморфный образ $\mathfrak{r}$-кольца есть $\mathfrak{r}$-кольцо;*
2) *каждое кольцо R класса обладает наибольшим $\mathfrak{r}$-идеалом $\mathfrak{r}(R)$, содержащим любой $\mathfrak{r}$-идеал этого кольца;*
3) $\mathfrak{r}\big(R/\mathfrak{r}(R)\big) = (0)$ *для любого кольца R из класса.*

Максимальный $\mathfrak{r}$-идеал $\mathfrak{r}(R)$ кольца R называется $\mathfrak{r}$-*радикалом* кольца. Кольцо, совпадающее со своим $\mathfrak{r}$-радикалом, называют $\mathfrak{r}$-*радикальным*. Кольцо, не имеющее ненулевых $\mathfrak{r}$-идеалов, называется $\mathfrak{r}$-*полупростым.* В любом классе колец и для любого радикала нулевое кольцо является единственным одновременно радикальным и полупростым кольцом. Кольцо является $\mathfrak{r}$-радикальным тогда и только тогда, когда не может быть отображено гомоморфно ни на одно ненулевое $\mathfrak{r}$-полупростое кольцо.

С аксиоматической точки зрения радикал $\mathfrak{r}$ может быть определен как отображение класса всех колец в себя, сопоставляющее каждому кольцу R его идеал $\mathfrak{r}(R)$. Отображение $\mathfrak{r}$ является радикалом, если класс $\mathfrak{r}$-радикальных колец замкнут относительно гомоморфных образов; для любого кольца R кольцо $R/\mathfrak{r}(R)$ является $\mathfrak{r}$-полупростым и $\mathfrak{r}(R)$ — наибольший $\mathfrak{r}$-радикальный идеал R.

Таким образом, с каждым радикалом $\mathfrak{r}$ связаны два подкласса колец в $\mathcal{A}$: класс $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ всех $\mathfrak{r}$-радикальных колец и класс $\mathcal{S}(\mathfrak{r})$ всех $\mathfrak{r}$-полупростых колец. По любому из этих классов однозначно находится радикал $\mathfrak{r}(R)$ для каждого кольца R из $\mathcal{A}$, а именно:

$$\mathfrak{r}(R) = \sum \{\, I \text{ — идеал в } R \mid I \in \mathcal{R}(\mathfrak{r}) \,\} \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{r}(R) = \bigcap \{\, I \text{ — идеал в } R \mid R/I \in \mathcal{S}(\mathfrak{r}) \,\} \tag{1.4}$$

Это позволяет сформулировать определение радикала как радикального класса (см., к примеру, определение 2.1.1 [94, с. 22]). Известны условия на подклассы колец, необходимые и достаточные для того, чтобы эти подклассы служили классами всех радикальных или классами всех полупростых колец для каких-либо радикалов. Такие классы называются соответственно *радикальными* и *полупростыми* классами. Любой радикальный класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно гомоморфных образов и расширений: для любого идеала I кольца R, из $I \in \mathcal{R}$ и $R/I \in \mathcal{R}$ следует $R \in \mathcal{R}$. В ассоциативном случае верна следующая теорема.

Теорема 1.16 (ADS-теорема, теорема 3.1.2 [94, с. 40])**.** *Для любого радикала* $\mathfrak{r}$*, если* I *— идеал в кольце* R*, то* $\mathfrak{r}(I)$ *— также идеал в* R*.*

Любой полупростой класс замкнут относительно подпрямых сумм и расширений (предложения 2.3.4 и 2.3.6 [94, с. 32–33]). В ассоциативном случае полупростые классы является наследственными (следствие 3.1.4 [94, с. 40]).

Для произвольного подкласса $\mathcal{M}$ класса $\mathcal{A}$ всегда существует наименьший радикальный класс, содержащий $\mathcal{M}$. Таким радикальным классом является пересечение $l(\mathcal{M})$ всех радикальных подклассов класса $\mathcal{A}$, содержащих $\mathcal{M}$. $l(\mathcal{M})$ называется *нижним радикальным классом*, порожденным классом $\mathcal{M}$, а соответствующий ему радикал называют *нижним радикалом*, определяемым классом $\mathcal{M}$. Нижний радикальный класс существует для любого класса $\mathcal{M}$.

Верхним радикальным классом $l(\mathcal{M})$, определенным классом $\mathcal{M}$, называется наибольший радикальный класс, относительно радикала которого все кольца из $\mathcal{M}$ являются полупростыми. Этот радикал называют *верхним радикалом*, определяемым классом $\mathcal{M}$. В неассоциативном случае верхний радикал может не существовать. Но верхний радикал всегда существует для любого регулярного класса, в частности, для класса ассоциативных колец.

Теорема 1.17 (Теорема 2.2.3 [94, с. 30])**.** *Если $\mathcal{M}$ — регулярный класс колец, то класс $l(\mathcal{M})$ всех колец, не имеющих ненулевых гомоморфных образов из класса $\mathcal{M}$, является радикальным классом. При этом $l(\mathcal{M})$ является наибольшим радикальным классом, имеющим нулевое пересечение с $\mathcal{M}$.*

Для любого регулярного класса $\mathcal{M}$ можно определить класс $\overline{\mathcal{M}}$ колец, каждый ненулевой идеал которого имеет ненулевой гомоморфный образ, лежащий в $\mathcal{M}$. Класс $\overline{\mathcal{M}}$ является наименьшим полупростым классом, содержащим класс $\mathcal{M}$, причем верхние радикальные классы, определяемые классами $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$, совпадают. Класс $\overline{\mathcal{M}}$ называется *полупростым замыканием* класса $\mathcal{M}$.

Радикал $\mathfrak{r}$ называется *строгим*, если всякое $\mathfrak{r}$-подкольцо произвольного кольца R содержится в $\mathfrak{r}(R)$. Радикал $\mathfrak{r}$ является строгим тогда и только тогда, когда является верхним радикалом для строго наследственного класса (теорема 3.17.11 [94, с. 148]). Часто радикальные классы также являются наследственными. Радикальный класс $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ является наследственным тогда и только тогда, когда для любого идеала I произвольного кольца R, $I \cap \mathfrak{r}(R) \subseteq \mathfrak{r}(I)$ (предложение 3.2.3 [94, с. 46]). Если $I \cap \mathfrak{r}(R) = \mathfrak{r}(I)$, радикал $\mathfrak{r}$ называется *идеально наследственным.* В ассоциативном случае понятия наследственного и идеально наследственного радикала совпадают. Также справедливо предложение ниже.

Предложение 1.18 (Предложение 3.2.14 [94, с. 50]). *Пусть M — регулярный подкласс класса ассоциативных колец. Верхний радикал $l(\mathcal{M})$, определяемый этим классом, является наследственным тогда и только тогда, когда класс M удовлетворяет условию: если некоторый ненулевой идеал кольца R имеет ненулевой гомоморфный образ, принадлежащий M, то само кольцо R также имеет ненулевой гомоморфный образ, принадлежащий этому классу.*

1.3 О полном радикале ассоциативного кольца

Совокупность всех алгебр, удовлетворяющих данной системе тождеств, называется *многообразием*. Согласно известной теореме Г. Биркгофа (см., напр., [53], с. 337, теорема 1 или, в случае ассоциативных колец, [55], с. 304, теорема 4.14), многообразие может быть определено также как класс алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Подмногообразия любого многообразия алгебр $\mathcal{V}$ составляют по включению полную решетку $\boldsymbol{L}(\mathcal{V})$, которая называется решеткой подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$.

Атомы решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ подмногообразий многообразия ассоциативных колец $Ass(\mathbb{Z})$ исчерпываются многообразиями $\mathcal{Z}_p = var\{px = 0, xy = 0\}$ и $\mathcal{F}_p = var\{px = 0, x^p = x\}$ по всем простым числам p. Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое подмногообразие многообразия $Ass(\mathbb{Z})$. Согласно [58], кольцо называется *$\mathcal{X}$-полным*, если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из многообразия $\mathcal{X}$. Кольцо называется *(атомно) полным*, если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из атомов решетки $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$ многообразия $Ass(\mathbb{Z})$, по всем простым p. Кольцо, не имеющее ненулевых атомно полных подколец, называется *(атомно) редуцированным*. Кольцо, принадлежащее какому-либо атому $\mathcal{Z}_p$ или $\mathcal{F}_p$, очевидно, будет редуцированным. Нулевое кольцо является одновременно полным и редуцированным. Ненулевое полное кольцо называется *минимально полным*, если любое его собственное ненулевое подкольцо не является полным (равносильно, является редуцированным). Ясно, что кольцо будет полным тогда и только тогда, когда оно является $\mathcal{Z}_p$-полным и $\mathcal{F}_p$-полным по всем простым числам p.

Условимся для многообразия $\mathcal{V}$ колец через $\mathcal{V}(R)$ обозначать $\mathcal{V}$-вербал кольца R, т. е. наименьший идеал во множестве всех идеалов из R, факторкольца по которым принадлежат $\mathcal{V}$. Для многообразий $\mathcal{Z}_p$, $\mathcal{F}_p$ и произвольного кольца R можно указать явные формулы для вычисления соответствующих вербалов: $\mathcal{Z}_p(R) = pR + R^2$, $\mathcal{F}_p(R) = pR + R_p$, где R_p — идеал, порожденный элементами вида $x^p - x$ для всех x из R. Несложно понять, что кольцо R будет полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{Z}_p(R) = R$ и $\mathcal{F}_p(R) = R$ для всех простых чисел p. Из формул нахождения $\mathcal{F}_p$- и $\mathcal{Z}_p$-вербалов немедленно следует, что если аддитивная группа R^+ кольца R является полной, т. е. $pR = R$ для всех простых p, то кольцо R будет полным. Заметим также, что кольцо, совпадающее со своим квадратом, будет $\mathcal{Z}_p$-полным по всем простым p.

Из определения полноты и редуцированности для колец следует справедливость следующих естественных утверждений статьи [58]. Для удобства чтения ввиду малодоступности работы [58], приведем их с доказательством для ассоциативных колец. В следующих разделах предложения 1.19–1.22 будем использовать без ссылок на них.

Предложение 1.19 (Утверждение 1, [58]). *Гомоморфный образ $\mathcal{X}$-полного кольца является $\mathcal{X}$-полным кольцом.*

Доказательство. Пусть R есть $\mathcal{X}$-полное кольцо. Если бы для некоторого его гомоморфного образа $\varphi(R)$ существовал ненулевой гомоморфизм ψ на кольцо из многообразия $\mathcal{X}$, то само кольцо R имело бы ненулевой гомоморфный образ $\psi(\varphi(R))$, принадлежащий $\mathcal{X}$, т. е. не являлось бы $\mathcal{X}$-полным кольцом. □

Из предложения 1.19 следует, что гомоморфный образ полного кольца также является полным кольцом.

Предложение 1.20 (Утверждение 2, [58]). *Класс $\mathcal{R}$ всех полных колец замкнут относительно расширений.*

Доказательство. Пусть для кольца R его идеал I и факторкольцо R/I являются полными кольцами, и пусть φ — гомоморфизм R на кольцо A из атома решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ подмногообразий ассоциативных колец. Кольцо I полное, поэтому $I \subseteq \ker\varphi$. При этом $A \cong R/\ker\varphi \cong (R/I)/(\ker\varphi/I) = (0)$, так как кольцо R/I полное. Следовательно, кольцо R полное. $\square$

Предложение 1.21. *Прямая сумма любого числа $\mathcal{X}$-полных колец также является $\mathcal{X}$-полным кольцом.*

Доказательство. Пусть $R = \bigoplus\limits_{\tau\in I} R_\tau$ — прямая сумма $\mathcal{X}$-полных колец R_τ, $\tau \in I$. Согласно замечанию 5 работы [58], наибольшее $\mathcal{X}$-полное подкольцо кольца R порождается всеми его $\mathcal{X}$-полными подкольцами, поэтому совпадает с кольцом R. $\square$

Предложение 1.22 (Утверждение 5, [58]). *Класс всех редуцированных колец замкнут относительно взятия подколец, прямых произведений (в частности, прямых сумм) и расширений.*

Доказательство. Любое подкольцо редуцированного кольца является редуцированным в силу определения редуцированного кольца и того, что подкольцо всякого подкольца — также подкольцо в кольце.

Если C — ненулевое полное подкольцо кольца $R = \prod\limits_{i\in I} R_i$, где все кольца R_i редуцированы, то для некоторой естественной проекции $\varphi : R \to R_i$ гомоморфный образ $\varphi(C)$ является ненулевым полным кольцом. Это противоречит тому, что кольцо R_i является редуцированным.

Пусть для кольца R его идеал I и факторкольцо R/I являются редуцированными кольцами и C — полное подкольцо в R. Для естественного гомоморфизма φ кольца R на его факторкольцо R/I, кольцо $\varphi(C)$ является полным, будучи гомоморфным образом полного кольца. Но кольцо R/I редуцировано, поэтому $\varphi(C) = (\bar{0})$. Это означает, что $C \subseteq I$, поэтому $C = (0)$, так как I не содержит полных подколец. $\square$

Как было показано Л. М. Мартыновым в работе [59], многообразие $Ass(\mathbb{Z})$ является *трансвербальным* по атомам решетки $\boldsymbol{L}\big(Ass(\mathbb{Z})\big)$, т.е. для любого кольца R, его идеала I и атома $\mathcal{X}$ решетки $\boldsymbol{L}\big(Ass(\mathbb{Z})\big)$, $\mathcal{X}$-вербал $\mathcal{X}(I)$ идеала I является идеалом в кольце R.

Предложение 1.23 (Трансвербальность идеалов кольца по минимальным многообразиям, замечание 4 [59])**.** *Если I — идеал кольца R, $\mathcal{X}$ — минимальное многообразие ассоциативных колец, то $\mathcal{X}(I)$ — идеал в кольце R.*

Доказательство. Для минимальных многообразий ассоциативных колец $\mathcal{Z}_p$ очевидно, $\mathcal{Z}_p(I) = pI + I^2$ — снова идеал в кольце R. Для минимальных многообразий $\mathcal{F}_p$ обозначим $\mathcal{F}_p(I) = C$, тогда $C_R/C \subseteq I/C \in \mathcal{F}_p$, то есть в C_R/C нет нильпотентных элементов. С другой стороны, из леммы Андрунакиевича (см., напр., лемму 5 [1, с. 33]) следует, что $C_R^3 \subseteq C$, откуда $(C_R/C)^3 = (0)$, поэтому $C_R/C = (0)$, или $C_R = C$, то есть $\mathcal{F}_p(I)$ — снова идеал кольца R. $\square$

Таким образом, класс $\mathcal{R}$ всех полных колец является замкнутым относительно гомоморфных образов и расширений, а класс $\mathcal{S}$ всех редуцированных колец замкнут относительно взятия подколец, прямых произведений (в частности, прямых сумм) и расширений. При этом, в силу основного результата работы [62] Л. М. Мартынова, в любом кольце R существует наибольшее полное подкольцо $C(R)$, которое является идеалом в R, факторкольцо $R/C(R)$ по которому является редуцированным. Кроме того, идеал $C(R)$ содержит любое полное подкольцо кольца R. Все сказанное означает, что в многообразии $Ass(\mathbb{Z})$ определен строгий радикал (в смысле Куроша и Амицура), где $\mathcal{R}$ — радикальный класс, а $\mathcal{S}$ — полупростой класс. Приведем основной результат работы [62] в формулировке и с доказательством для случая ассоциативных колец.

Теорема 1.24 (Теорема, [62])**.** *В любом ассоциативном кольце R существует наибольшее полное подкольцо $C(R)$, которое является идеалом и радикалом (в смысле Куроша и Амицура).*

Доказательство. Пусть $\{C_i\}$ — множество всех полных подколец кольца R, $i \in I$. Обозначим через $C(R) = \langle \bigcup\limits_{i \in I} C_i \rangle$ подкольцо, порожденное всеми C_i.

Покажем, что $C(R)$ — полное подкольцо. Для любого минимального многообразия $\mathcal{X}$ очевидно, $\mathcal{X}(C_i) \subseteq \mathcal{X}(C(R))$, следовательно, $C_i = \mathcal{X}(C_i) \subseteq \mathcal{X}(C(R))$, поэтому $C(R) \subseteq \mathcal{X}(C(R))$, откуда $C(R) = \mathcal{X}(C(R))$, то есть $C(R)$ — полное подкольцо, ясно, что наибольшее полное.

Покажем, что $C(R)$ — идеал в кольце R. Пусть C — наименьший идеал в кольце R, содержащий подкольцо $C(R)$. Так как $C(R) \subseteq C$, то для любого минимального многообразия $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}(C(R)) \subseteq \mathcal{X}(C)$, откуда $C(R) \subseteq \mathcal{X}(C)$. Так как C — идеал в кольце R, то по свойству трансвербальности $\mathcal{X}(C)$ — также идеал в кольце R, следовательно, $C \subseteq \mathcal{X}(C)$ в силу выбора C. А так как $\mathcal{X}$ — произвольное минимальное многообразие, то C — полное подкольцо. Поэтому $C \subseteq C(R)$ и значит, $C = C(R)$, то есть $C(R)$ — идеал в кольце R.

Покажем, что $C(R)$ — радикал. Ясно, что $C(R)$ — наибольший полный идеал в кольце R, содержащий все его полные идеалы. Гомоморфный образ полного кольца — полное кольцо согласно предложению 1.19. Покажем, что $C(R/C(R)) = (0)$. Пусть $\varphi : R \to R/C(R)$ есть естественный гомоморфизм. Если A — полное подкольцо в кольце $R/C(R)$, то $\varphi^{-1}(A)$, где $\varphi^{-1}(A) \subseteq R$, является полным как расширение полного кольца с помощью полного по предложению 1.20. Следовательно, $\varphi^{-1}(A) \subseteq C(R)$, то есть $A = (0)$.

Таким образом, $C(R)$ — радикал в кольце R согласно определению 1.15, притом строгий радикал, так как содержит все полные подкольца кольца R. $\square$

Следствие 1.25. *Идеал кольца, порожденный его полным подкольцом, также является полным кольцом.*

Идеал $C(R)$ кольца R называется *полным радикалом* кольца R. Из теорем 1.17 и 1.24 следует, что класс $\mathcal{R}$ всех полных колец является верхним радикальным классом, определенным классом $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{p}(\mathcal{F}_p \cup \mathcal{Z}_p)$ по всем простым p. Класс $\mathcal{M}$ является строго наследственным, так как $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{Z}_p$ есть многообразия. При этом полупростое замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ класса $\mathcal{M}$ совпадает с классом $\mathcal{S}$ всех редуцированных колец.

Определим понятие *$\mathcal{Z}$-полного* (*$\mathcal{F}$-полного*) кольца, как кольца, не имеющего гомоморфизмов на ненулевые кольца из многообразий $\mathcal{Z}_p$ (соответственно $\mathcal{F}_p$) по всем простым числам p. Кольцо, не имеющее ненулевых $\mathcal{Z}$-полных ($\mathcal{F}$-полных) подколец, будем называть *$\mathcal{Z}$-редуцированным* и *$\mathcal{F}$-редуцированным* кольцом соответственно. Ясно, что R есть полное кольцо тогда и только тогда, когда R является $\mathcal{Z}$-полным и $\mathcal{F}$-полным кольцом. Причем $C_{\mathcal{Z}}(R)$, как наибольшее полное по всем многообразиям $\mathcal{Z}_p$ подкольцо кольца R и $C_{\mathcal{F}}(R)$, как наибольшее полное по всем многообразиям $\mathcal{F}_p$ подкольцо кольца R, также являются радикалами в любом кольце R. Будем называть их соответственно *$\mathcal{Z}$-полным* и *$\mathcal{F}$-полным радикалами* кольца. Радикалы $C_{\mathcal{Z}}$ и $C_{\mathcal{F}}$ играют важную роль при изучении полных и редуцированных ассоциативных колец. Заметим, $C_{\mathcal{Z}}$ и $C_{\mathcal{F}}$ являются верхними радикалами, определяемыми классами $\bigcup\limits_p \mathcal{Z}_p$ и $\bigcup\limits_p \mathcal{F}_p$ соответственно. Причем из следующего предложения, доказанного А. И. Корневым в работе [39]:

Предложение 1.26 (Предложение 1, [39]). *Для произвольного кольца R:*
1) *Если I есть идеал кольца R и $I \subset \mathcal{F}_p(R)$, то I есть $\mathcal{F}_p$-полное кольцо;*
2) *$\mathcal{F}_p(R)$ является $\mathcal{F}_p$-полным кольцом.*

либо из предложения 1.18 и следующей леммы той же работы

Лемма 1.27 (Лемма 3, [39]). *Пусть I есть идеал кольца R и K — поле. Любой гомоморфизм $\varphi : I \to K$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\varphi} : R \to K$.*

следует, что радикал $C_{\mathcal{F}}$ является наследственным радикалом. Это означает, что все идеалы I произвольного кольца R, содержащиеся в $C_{\mathcal{F}}(R)$, являются $\mathcal{F}$-полными кольцами и $C_{\mathcal{F}}(I) = I \cap C_{\mathcal{F}}(R)$ для любого идеала I кольца R.

Радикал $C_{\mathcal{Z}}$ наследственным не является. Контрпримером является любое не полупростое по Джекобсону конечное кольцо R с единицей — такое кольцо является $\mathcal{Z}$-полным, так как содержит единицу, но его радикал Джекобсона $J(R)$ в силу его нильпотентности и ограниченности его аддитивной группы есть $\mathcal{Z}$-редуцированное кольцо.

Наследственность радикала $C_{\mathcal{F}}$ позволяет доказать следующее утверждение, принадлежащее автору и отражающее взаимосвязь радикалов $C(R)$, $C_{\mathcal{Z}}(R)$ и $C_{\mathcal{F}}(R)$ в произвольном кольце R.

Предложение 1.28. *Для произвольного ассоциативного кольца R полный радикал $C(R) = C_{\mathcal{Z}}(C_{\mathcal{F}}(R))$.*

Доказательство. Кольцо $C_{\mathcal{Z}}(C_{\mathcal{F}}(R))$ является по определению наибольшим $\mathcal{Z}$-полным кольцом кольца $C_{\mathcal{F}}(R)$. С другой стороны, как следует из предложения 1.23 и теоремы 1.24, кольцо $C_{\mathcal{Z}}(C_{\mathcal{F}}(R))$ является идеалом в R, поэтому $\mathcal{F}$-полным кольцом по предложению 1.26 как идеал кольца R, содержащийся в $C_{\mathcal{F}}(R)$. Таким образом, как полное кольцо, $C_{\mathcal{Z}}(C_{\mathcal{F}}(R)) \subseteq C(R)$.

Обратно, $\mathcal{F}$-полный радикал $C_{\mathcal{F}}(R)$ содержит в себе все $\mathcal{F}$-полные кольца, в том числе и полный радикал $C(R)$, т. е. $C(R) \subseteq C_{\mathcal{F}}(R)$. А так как $\mathcal{Z}$-полный радикал $C_{\mathcal{Z}}(R)$ является строгим, то наибольшее $\mathcal{Z}$-полное подкольцо кольца $C(R)$ содержится в наибольшем $\mathcal{Z}$-полном подкольце кольца $C_{\mathcal{F}}(R)$, то есть $C_{\mathcal{Z}}(C(R)) \subseteq C_{\mathcal{Z}}(C_{\mathcal{F}}(R))$, откуда $C(R) \subseteq C_{\mathcal{Z}}(C_{\mathcal{F}}(R))$. □

Заметим, формулу предложения 1.28 нельзя обратить, $C_{\mathcal{F}}(C_{\mathcal{Z}}(R)) \neq C(R)$ в общем случае. В качестве примера можно привести кольцо R верхнетреугольных матриц над полем $GF(p)$. По теореме 2, R редуцировано, его $\mathcal{F}$-полный радикал $C_{\mathcal{F}}(R) = J(R)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & GF(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и принадлежит многообразию $\mathcal{Z}_p$, поэтому $C(R) = C_{\mathcal{Z}}(C_{\mathcal{F}}(R)) = C_{\mathcal{Z}}(J(R)) = (0)$. С другой стороны, кольцо R является $\mathcal{Z}$-полным, так как содержит единицу, т. е. $C_{\mathcal{Z}}(R) = R$. Тогда $C_{\mathcal{F}}(C_{\mathcal{Z}}(R)) = C_{\mathcal{F}}(R) = J(R) \neq (0)$.

В заключение добавим, что полный радикал кольца в некотором смысле является антиподом радикалу Джекобсона. Очевидно, что кольцо с полной аддитивной группой всегда является полным кольцом, независимо от того, совпадает оно с радикалом Джекобсона или является полупростым. Если же аддитивная группа кольца R редуцированная, то кольцо R, радикальное в смысле Джекобсона, является редуцированным кольцом (т. е. полупростым в смысле полного радикала). При этом $R = C_{\mathcal{F}}(R)$, так как $J(R)$ всегда содержится в $C_{\mathcal{F}}(R)$ (это следует из леммы 2.4), а $C_{\mathcal{Z}}(R) = (0)$. Если R — полупростое по Джекобсону артиново кольцо, разложение которого в сумму простых колец не содержит слагаемых, изоморфных простым конечным полям, то R является полным кольцом (т. е. радикальным в смысле полного радикала). Ясно, что в этом случае $R = C_{\mathcal{F}}(R) = C_{\mathcal{Z}}(R)$.

2 Полные и редуцированные артиновы кольца

Данный раздел посвящен изучению полных, редуцированных и минимально полных артиновых колец. Проблематика по изучению этих понятий для произвольных алгебр была определена Л. М. Мартыновым в работе [58] и обновлена в [69]. Подраздел 2.1 посвящен характеризации полных артиновых колец (теорема 1), в частности, описанию конечных полных колец, что относится к проблеме 7 работы [58] (проблеме 3.7, [69]) описания конечных полных алгебр. Доказано, что полное артиново кольцо есть расширение полного артинова идемпотентного кольца с помощью полного артинова кольца с нулевым умножением.

В подразделе 2.2 охарактеризованы редуцированные артиновы кольца (теорема 2). Доказано, что любое артиново редуцированное кольцо является конечным кольцом, что в случае ассоциативных колец автоматически решает проблему 8 работы [58] (проблему 3.8, [69]) описания конечных редуцированных алгебр данного многообразия алгебр. В подразделе 2.3 описываются с точностью до изоморфизма все минимально полные артиновы кольца (теорема 3).

2.1 Полные артиновы кольца

Цель подраздела — характеризация полных артиновых колец. Основной результат подраздела формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Артиново кольцо R является полным тогда и только тогда, когда для его идеала R^2 выполняются следующие условия:*
1) *R^2 является идемпотентным артиновым кольцом и если $R^2 \neq (0)$, то $R^2/J(R^2) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(K_i)$, где K_i — тело, $M_{n_i}(K_i) \ncong GF(p)$ для всех $i = 1, ..., k$;*
2) *если $R^2 \neq R$, то $R/R^2 \cong \bigoplus\limits_{j=1}^{n} C^0_{p_j^\infty}$.*

Его доказательству предпошлем несколько вспомогательных утверждений, некоторые из них представляют интерес не только для артиновых колец.

Лемма 2.1. *Если R — полное кольцо, то R^2 — полное кольцо.*

Доказательство. Кольцо R является $\mathcal{Z}$-полным, поэтому для любого простого p, $R = R^2 + pR$. Тогда $R^2 = \left(R^2 + pR\right)\left(R^2 + pR\right) = R^4 + pR^3 + p^2R^2 = R^4 + pR\left(R^2 + pR\right) = R^4 + pR^2$, т. е. кольцо R^2 также $\mathcal{Z}$-полное.

Так как R есть $\mathcal{Z}_p$-полное кольцо для любого простого p, то для каждого x из R найдутся элементы r, a_i, b_i $(i = 1, ..., n)$ из R такие, что $x = pr + \sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$. Тогда $x^p - x = \left(pr + \sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^p - \left(pr + \sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\right) = pz + \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^p - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\right)\right]$ для некоторого $z \in R$. Следовательно, $R_p \subseteq pR + \left(R^2\right)_p$, откуда

$$(R_p)^2 \subseteq \left(pR + \left(R^2\right)_p\right)\left(pR + \left(R^2\right)_p\right) \subseteq pR^2 + \left(R^2\right)_p \tag{2.1}$$

С учетом (2.1) и того, что кольцо R является $\mathcal{F}_p$-полным кольцом, получаем, что $R^2 = (pR + R_p)(pR + R_p) \subseteq pR^2 + (R_p)^2 \subseteq pR^2 + \left(R^2\right)_p = \mathcal{F}_p\left(R^2\right)$, то есть R^2 также будет $\mathcal{F}_p$-полным кольцом по всем простым p. □

Следствие 2.2. *Минимально полное кольцо R с ненулевым умножением совпадает со своим квадратом.*

Лемма 2.3. *Простое кольцо является либо полным, либо редуцированным, при этом изоморфным простому конечному полю $GF(p)$ для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Очевидно, что если простое кольцо R не принадлежит ни одному из атомов $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$ по всем простым p, то у него нет гомоморфизмов на ненулевые кольца из этих атомов, так как любой ненулевой гомоморфизм простого кольца инъективен. Пусть теперь простое кольцо R принадлежит одному из атомов решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ подмногообразий ассоциативных колец. Как кольцо с ненулевым умножением, R принадлежит атому $\mathcal{F}_p$ для некоторого простого числа p. Как отмечено в [66, с. 784], в силу известных результатов (см. теорема 2, [4, с. 32] и [104]), кольца многообразий $\mathcal{F}_p$ при любом p являются подпрямыми произведениями изоморфных копий колец $GF(p)$ (схематичное доказательства этого факта можно найти также в упр. 5.13 [55, с. 404]). Ввиду подпрямой неразложимости кольца R, оно изоморфно одному из простых конечных полей $GF(p)$ для некоторого простого p. □

Лемма 2.4. *Любое нильколько R является $\mathcal{F}$-полным кольцом.*

Доказательство. Для всякого элемента r из R найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $r^m = 0$. Пусть f — гомоморфизм кольца R на кольцо из многообразия $\mathcal{F}_p$, тогда $f(r) = [f(r)]^p$, поэтому $f(r) = [f(r)]^p = [[f(r)]^p]^p = [f(r)]^{p^2} = ... = [f(r)]^{p^n}$ для некоторого n, такого, что $p^n \geq m$. Получаем, $f(r) = f(r^{p^n}) = f(r^m \cdot r^{p^n - m}) = f(r^m) \cdot f(r^{p^n-m}) = 0 \cdot f(r^{p^n-m}) = 0$, т. е. f — нулевой гомоморфизм. $\square$

Лемма 2.5. *Если идеал I кольца R лежит в ядре любого гомоморфизма на кольца из многообразия колец $\mathcal{X}$, то кольцо R будет $\mathcal{X}$-полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$-полно кольцо R/I.*

Доказательство. Гомоморфный образ $\mathcal{X}$-полного кольца есть $\mathcal{X}$-полное кольцо. Обратно, если φ — ненулевой гомоморфизм кольца R на кольцо из многообразия $\mathcal{X}$, то кольцо $(R/I)/(\ker\varphi/I) \cong R/\ker\varphi$ принадлежит многообразию $\mathcal{X}$, что невозможно по условию. $\square$

Лемма 2.6. *Нильпотентное кольцо R является полным тогда и только тогда, когда его аддитивная группа является полной.*

Доказательство. Пусть кольцо R полное нильпотентное. Если $R^2 = (0)$, то R^2 есть полное кольцо. Если $R^2 \neq (0)$, то найдется натуральное k такое, что $R^{2^{k+1}} = (0)$, но $R^{2^k} \neq (0)$. Кольца $R^2, R^4, ..., R^{2^k}$ также будут полными кольцами согласно лемме 2.1. Факторкольца с нулевым умножением

$$R/R^2,\ R^2/R^4, ..., R^{2^{k-1}}/R^{2^k},\ R^{2^k}/R^{2^{k+1}} = R^{2^k} \tag{2.2}$$

будут полными кольцами как гомоморфные образы полных колец. Из леммы 2.4 следует, что кольцо с нулевым умножением будет полным только тогда, когда оно $\mathcal{Z}$-полное, т. е. его аддитивная группа полная. Расширение полной абелевой группы с помощью полной — также полная группа, поэтому группа $\left(R^{2^{k-1}}\right)^+$ будет полной как расширение полной группы $\left(R^{2^k}\right)^+$ с помощью полной группы $\left(R^{2^{k-1}}/R^{2^k}\right)^+$. Аналогично, группы $\left(R^{2^{k-2}}/R^{2^{k-1}}\right)^+$ и $\left(R^{2^{k-1}}\right)^+$ полные, тогда и группа $\left(R^{2^{k-2}}\right)^+$ полная. Поднимаясь по цепочке (2.2), на шаге k получим, что группа R^+ полная. $\square$

Следующая лемма описывает все нильпотентные полные артиновы кольца.

Лемма 2.7. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
1) $R^+ \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_{p_i^\infty}$;
2) R — *полное артиново кольцо с нулевым умножением;*
3) R — *полное артиново нильпотентное кольцо.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Согласно замечанию 1.3, на прямой сумме квазициклических групп можно задать только нулевое умножение. Ясно, что кольцо R полное, так как его аддитивная группа полная.

2) $\Rightarrow$ 1). По лемме 2.6, нильпотентное кольцо R будет полным тогда и только тогда, когда его аддитивная группа R^+ будет полной. Напомним, ненулевая полная абелева группа разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел или квазициклическим группам C_{p^∞}, быть может, по различным простым числам p. Так как любая подгруппа R^+ является идеалом в кольце R, то R^+ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, и поэтому $R^+ \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_{p_i^\infty}$ для некоторых (не обязательно различных) простых чисел $p_1,\ p_2,\ \ldots p_n$.

2) $\Leftrightarrow$ 3). Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна. Обратно, обозначим $R_1 = R$, $R_2 = R_1^2, \ldots, R_i = R_{i-1}^2, \ldots$ Так как R нильпотентно, то $R = R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots \supseteq R_k \supseteq R_{k+1} = (0)$ для некоторого номера k. Из леммы 2.1 следует, что $R_1, R_2, \ldots, R_k$ — полные кольца. Имеем, R_{k-1}/R_k и R_k — полные артиновы кольца с нулевым умножением. Следовательно, ввиду 2) $\Rightarrow$ 1), их аддитивные группы изоморфны конечной прямой сумме квазициклических групп. Далее, R_k^+ — полная подгруппа в R_{k-1}^+ и, как полная подгруппа, выделяется прямым слагаемым в R_{k-1}^+, а второе слагаемое изоморфно $(R_{k-1}/R_k)^+$. Из сказанного выше следует, что R_{k-1}^+ также будет конечной прямой суммой квазициклических групп. Отсюда, ввиду справедливости импликации 1) $\Rightarrow$ 2), кольцо R_{k-1} также с нулевым умножением. Рассуждая аналогично для R_{k-2}/R_{k-1} и R_{k-1}, получим, что R_{k-2} — кольцо с нулевым умножением. Продолжая рассуждения, на $(k-1)$-м шаге получим, что R — полное кольцо с нулевым умножением. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Пусть R — полное артиново кольцо. Из теоремы 1.11 следует, что артиново кольцо R есть прямая сумма идеалов S и T, где S – кольцо без кручения, T — периодическая часть кольца R. Артиново слева кольцо без кручения S обладает левой единицей по теореме 1.12, поэтому $S^2 = S$. При этом, по замечанию 1.2, кольцо S полное как артиново кольцо без кручения, поэтому факторкольцо $S/J(S)$ также будет полным как гомоморфный образ полного кольца. По теореме Веддербёрна-Артина, факторкольцо $S/J(S)$ есть прямая сумма конечного числа простых колец, каждое из которых изоморфно кольцу всех матриц определенного порядка над некоторым телом. Кольцо $S/J(S)$ полное, поэтому каждое из этих слагаемых — полное кольцо. По лемме 2.3, всякое простое кольцо или полно, или принадлежит многообразию $\mathcal{F}_p$, поэтому $S/J(S)$ не содержит слагаемых, изоморфных простому полю $GF(p)$.

Из изложенного выше следует, что далее достаточно ограничиться случаем, когда аддитивная группа кольца R является периодической. Рассмотрим убывающую цепь идеалов кольца R: $R \supseteq R^2 \supseteq R^3 \supseteq \dots$ Так как R артиново, то $R^n = R^{n+1} = \dots$ для некоторого натурального n, то есть идеал R^n будет идемпотентным кольцом. Факторкольцо $\overline{R} = R/R^n$ есть полное артиново нильпотентное кольцо, а значит, кольцо с нулевым умножением по лемме 2.7. Отсюда, $xy \in R^n$ для всех x, y из R, и следовательно $R^2 = R^n$, то есть R^2 будет идемпотентным кольцом. Кроме того, по той же лемме 2.7, $R/R^2 \cong \bigoplus\limits_{j=1}^{n} C^0_{p_j^\infty}$.

Покажем, что идеал R^2 также будет артиновым кольцом. Пусть I — левый идеал R^2. Так как аддитивная группа кольца R является периодической, то для любого $i \in I$ найдется натуральное m такое, что $mi = 0$. По лемме 2.7, $R/R^2 \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{k} C^0_{p_i^\infty}$, поэтому для любого $r \in R$ можно найти $r_1 \in R$ такой, что $m\bar{r}_1 = \bar{r}$ в факторкольце $\overline{R} = R/R^2$. Так как $r - mr_1 \in R^2$, то произведение $ri = (r - mr_1 + mr_1)i = (r - mr_1)i + mr_1 i = (r - mr_1)i \in I$, то есть I — левый идеал R. Таким образом, кольцо R^2 артиново и полное по лемме 2.1. Поэтому факторкольцо $R^2/J(R^2)$ также является кольцом полным. Проведя рассуждения, аналогичные проведенным выше, для идеала S, получим, что $R^2/J(R^2) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(K_i)$, где K_i — тело, $M_{n_i}(K_i) \ncong GF(p)$ для всех $i = 1, ..., k$.

Обратно, пусть для идеала R^2 артинова кольца R выполняются условия 1) и 2) теоремы 1. Возможны четыре случая:

(i) $R = R^2 = (0)$. В этом случае, кольцо R нулевое, полное по определению.

(ii) $R \neq R^2 = (0)$ и $R/R^2 \cong \bigoplus\limits_{j=1}^{n} C^0_{p_j^\infty}$. В этом случае, кольцо $R = R/R^2$, как ненулевое артиново кольцо с нулевым умножением и полной аддитивной группой, будет полным по лемме 2.7.

(iii) $R = R^2 \neq (0)$ и $R/J(R) = R^2/J(R^2) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(K_i)$, где K_i — тело, $M_{n_i}(K_i) \ncong GF(p)$ для всех $i = 1, ..., k$. В этом случае, R — ненулевое идемпотентное артиново кольцо, факторкольцо по радикалу Джекобсона которого — полное кольцо. Радикал Джекобсона $J(R)$, как нилькольцо, является $\mathcal{F}$-полным кольцом по лемме 2.4. Это означает, что $J(R)$ лежит в ядре всякого гомоморфизма на кольца из многообразий $\mathcal{F}_p$ по всем простым p. Тогда по лемме 2.5, $\mathcal{F}$-полнота кольца $R/J(R)$ эквивалентна $\mathcal{F}$-полноте кольца R. Кольцо R, в силу идемпотентности, будет также $\mathcal{Z}$-полным, следовательно, полным кольцом.

(iv) $R \neq R^2$ и $R^2 \neq (0)$, где $R/R^2 \cong \bigoplus\limits_{j=1}^{n} C^0_{p_j^\infty}$, идеал R^2 — идемпотентное артиново кольцо, для которого $R^2/J(R^2) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(K_i)$, где для всех $i = 1, ..., k$, K_i — тело, $M_{n_i}(K_i) \ncong GF(p)$. Полнота кольца R^2 доказывается аналогично случаю (iii). Кольцо R/R^2 полное по лемме 2.7. В этом случае, кольцо R полное как расширение полного кольца R^2 с помощью полного кольца R/R^2. □

Из теоремы 1 следует справедливость следующих утверждений.

Следствие 2.8. *Ненулевое идемпотентное артиново кольцо R является полным тогда и только тогда, когда $R/J(R)$ — полное кольцо, изоморфное $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_{n_i}(K_i)$, где K_i — тело, $M_{n_i}(K_i) \ncong GF(p)$ для всех $i = 1, ..., n$.*

Следствие 2.9. *Конечное ненулевое кольцо R является полным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) кольцо R идемпотентно, т. е. $R^2 = R$;
2) $R/J(R)$ — полное кольцо, изоморфное $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(GF(p_i^{s_i}))$, где $s_i + n_i > 2$ для всех $i = 1, ..., k$.

Следствие 2.9 характеризует все полные конечные кольца. Конечное ненулевое кольцо R, не являющееся идемпотентным, не будет полным: иначе факторкольцо $R/R^2 \neq (0)$ есть кольцо с нулевым умножением и ограниченной аддитивной группой. Поэтому найдется гомоморфизм ψ кольца R/R^2 на ненулевое кольцо A из многообразия $\mathcal{Z}_p$. Тогда существует гомоморфизм R на A, являющийся композицией естественного гомоморфизма $\varphi : R \to R/R^2$ и гомоморфизма ψ.

Заметим, при этом условие 2) следствия 2.9 может выполняться. Примером тому является кольцо R матриц вида $\begin{pmatrix} K & J(K) \\ J(K) & J(K) \end{pmatrix}$, где $K \neq (0)$ — полное конечное идемпотентное кольцо и $J(K) \neq (0)$. Факторкольцо $R/J(R)$ является полным, так как представляет собой кольцо матриц вида $\begin{pmatrix} K/J(K) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, изоморфное полному кольцу $K/J(K)$. При этом кольцо R не является полным: $R^2 \neq R$ есть кольцо матриц вида $\begin{pmatrix} K & J(K) \\ J(K) & J^2(K) \end{pmatrix}$.

2.2 Редуцированные артиновы кольца

В подразделе охарактеризованы редуцированные артиновы кольца, в частности доказано, что любое такое кольцо является конечным. Основной результат подраздела формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Артиново кольцо R является редуцированным тогда и только тогда, когда R — конечное кольцо с $\mathcal{F}$-полным радикалом $C_{\mathcal{F}}(R) = J(R)$ и либо $R = J(R)$, либо $R/J(R) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} GF\,(p_i)$.*

Прежде чем перейти к доказательству основного результата, докажем ряд вспомогательных утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Следующая лемма утверждает, что аддитивная группа любого артинова редуцированного кольца является ограниченной.

Лемма 2.10. *Для артинова редуцированного кольца R найдется натуральное число m такое, что $mR = (0)$.*

Доказательство. Так как R редуцировано, то для некоторого простого числа p_1 либо $\mathcal{F}_{p_1}(R) = p_1R + R_{p_1} \neq R$, либо $\mathcal{Z}_{p_1}(R) = p_1R + R^2 \neq R$, откуда $p_1R \neq R$. Кольцо R не содержит полных подколец, поэтому для его идеала p_1R кольца R найдется простое число p_2 такое, что $\mathcal{F}_{p_2}(p_1R) \neq p_1R$ или $\mathcal{Z}_{p_2}(p_1R) \neq p_1R$, откуда $p_2(p_1R) \neq p_1R$. И так далее, получаем убывающую цепочку идеалов, которая в силу артиновости кольца R стабилизируется для некоторого $m = p_1 \cdot p_2 \dots p_k$:

$$R \supseteq p_1R \supseteq p_2(p_1R) \supseteq \dots \supseteq mR. \tag{2.3}$$

При этом $p(mR) = mR$ для любого простого числа p, то есть mR — полное подкольцо в редуцированном кольце R, поэтому $mR = (0)$. □

Таким образом, аддитивная группа артинова редуцированного кольца является ограниченной группой. Из теоремы 1.11 следует, что для описания артиновых редуцированных колец достаточно охарактеризовать артиновы редуцированные кольца R характеристики p^k, где p простое число и $k \in \mathbb{N}$. При этом, как показывает лемма ниже, достаточно рассмотреть вопрос об их $\mathcal{Z}$- и $\mathcal{F}$-редуцированности только для данного простого числа p.

Лемма 2.11. *Всякое кольцо R характеристики p^k, где $k \in \mathbb{N}$ и p простое число, является $\mathcal{Z}_q$-полным и $\mathcal{F}_q$-полным по всем простым числам $q \neq p$.*

Доказательство. Так как q и p^k взаимно просты, то $qk + p^n m = 1$ для некоторых $k, m \in \mathbb{Z}$. Тогда $r = (qk + p^n m)r = q(kr)$ для всех $r \in R$, т. е. $qR = R$. Отсюда следует $\mathcal{Z}_q$-полнота и $\mathcal{F}_q$-полнота кольца R. □

Лемма 2.12. *Кольцо R характеристики p^k для простого p и $k \in \mathbb{N}$, является полным кольцом тогда и только тогда, когда кольцо R/pR полное.*

Доказательство. Если R полное кольцо, то R/pR будет полным кольцом как гомоморфный образ полного кольца. Обратно, пусть кольцо R/pR полное. Тогда R будет $\mathcal{Z}_p$-полным и $\mathcal{F}_p$-полным кольцом по лемме 2.5, так как идеал pR лежит в ядре любого гомоморфизма на кольца из многообразий $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$. Для любого простого числа $q \neq p$, кольцо R характеристики p^k будет $\mathcal{Z}_q$-полным и $\mathcal{F}_q$-полным по лемме 2.11. Следовательно, кольцо R полное. □

Следующая лемма описывает полный радикал артинова кольца характеристики p^k для некоторого простого числа p и $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.13. *В артиновом кольце R характеристики p^k для $k \in \mathbb{N}$ и простого p, $\mathcal{F}$-полный радикал $C_{\mathcal{F}}(R) = \mathcal{F}_p(R)$, а полный радикал $C(R) = \mathcal{F}_p^n(R)$, где n — идемпотентная степень вербала $\mathcal{F}_p(R)$, т. е. $\mathcal{F}_p^n(R) = \mathcal{F}_p^{n+1}(R)$.*

Доказательство. Кольцо R характеристики p^k является $\mathcal{F}_q$-полным кольцом по лемме 2.11 для любого простого числа $q \neq p$. Из предложения 1.26 следует, что любой идеал $\mathcal{F}_q$-полного кольца, в частности, идеал $\mathcal{F}_p(R)$, также будет $\mathcal{F}_q$-полным кольцом. Из этого же предложения следует, что $\mathcal{F}_p(R)$ будет $\mathcal{F}_p$-полным кольцом. Следовательно, $\mathcal{F}_p(R)$ является $\mathcal{F}$-полным кольцом, т. е. $\mathcal{F}_p(R) \subseteq C_{\mathcal{F}}(R)$, откуда $\mathcal{F}_p(R) = C_{\mathcal{F}}(R)$.

Убывающая цепочка идеалов $\mathcal{F}_p(R) \supseteq \mathcal{F}_p^2(R) \supseteq \mathcal{F}_p^3(R) \supseteq \ldots$ кольца R, содержащихся в $\mathcal{F}_p(R)$, стабилизируется на некотором шаге n, то есть $\mathcal{F}_p^n(R)$ — идемпотентное кольцо, поэтому $\mathcal{Z}$-полное. А так как для любого простого числа p идеал $\mathcal{F}_p$-полного кольца есть $\mathcal{F}_p$-полное кольцо (предложение 1.26), то $\mathcal{F}_p^n(R) \subseteq C(R)$. Обратно, так как $C(R) \subseteq \mathcal{F}_p(R)$, то $C^n(R) \subseteq \mathcal{F}_p^n(R)$, следовательно, $C(R) = C^n(R) \subseteq \mathcal{F}_p^n(R)$. □

Следующее предложение, представляющее самостоятельный интерес, является критерием конечности артинова кольца.

Предложение 2.14. *Артиново кольцо R является конечным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) $mR = (0)$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$*;*
2) *факторкольцо по радикалу Джекобсона* $R/J(R)$ *конечное.*

Доказательство. Пусть аддитивная группа артинова кольца R ограниченная, т. е. $mR = (0)$ для $m \in \mathbb{N}$. Прямое утверждение предложения очевидно.

Обратно, пусть кольцо $R/J(R)$ конечное. Если $R/J(R) = (0)$, то R нильпотентно. Аддитивная группа артинова нильпотентного кольца R удовлетворяет условию минимальности для подгрупп (см. задача 8.36, [10, с. 255]). По теореме

25.1 [87, с. 131], такая группа изоморфна конечной прямой сумме конечных циклических групп и квазициклических групп, откуда из ограниченности группы R^+ следует, что R является конечным кольцом.

Если $J(R) = (0)$, то доказываемое тривиально. Из условия $mR = (0)$ и теоремы 1.11 следует, что достаточно рассмотреть случай артинова кольца R характеристики p^n для некоторого натурального числа n и простого p.

Пусть $J(R) \neq (0)$. Возьмем ненулевой элемент $j_1 \in J(R)$. Обозначим через ${}_R(j_1)$ главный левый идеал, порожденный j_1, т. е. ${}_R(j_1) = Rj_1 + \mathbb{Z}j_1$, где $\mathbb{Z}j_1$ есть множество всех целых кратных элемента j_1. Если ${}_R(j_1) \neq J(R)$, то возьмем ненулевой элемент $j_2 \in J(R)$ и $j_2 \notin {}_R(j_1)$. Если ${}_R(j_1) + {}_R(j_2) \neq J(R)$, то возьмем $j_3 \in J(R)$, $j_3 \neq 0$ и $j_3 \notin {}_R(j_1) + {}_R(j_2)$, и так далее. Получим строго возрастающую цепочку левых идеалов, содержащихся в $J(R)$:

$$ {}_R(j_1) \subset {}_R(j_1) + {}_R(j_2) \subset {}_R(j_1) + {}_R(j_2) + {}_R(j_3) \subset \ldots \qquad (2.4) $$

Так как $p^n R = (0)$, то аддитивная группа артинова кольца R не содержит подгрупп, изоморфных квазициклической группе. По теореме 1.14, в этом случае артиново слева кольцо R является также нетеровым слева, поэтому возрастающая цепочка идеалов стабилизируется на некотором шаге k. Следовательно,

$$ J(R) = {}_R(j_1) + {}_R(j_2) + \ldots + {}_R(j_k). \qquad (2.5) $$

Радикал Джекобсона артинова кольца R нильпотентен, т. е. $J^t(R) = (0)$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Предположим, что $J^2(R) = (0)$. Для всех $i = 1, \ldots, k$ рассмотрим гомоморфизмы левых R-модулей $\varphi_i : R \to Rj_i$, где $\varphi_i : r \mapsto rj_i$ для всех $r \in R$. Каждый из гомоморфизмов φ_i сюръективен и $J(R) \subseteq \ker \varphi_i$, и так как $R/J(R)$ — конечное кольцо, то модули $Rj_i \cong R/\ker \varphi_i$ также являются конечными. В то же время, $p^n j_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$, то есть множества $\mathbb{Z}j_i$ также конечные. Поэтому радикал Джекобсона $J(R) = {}_R(j_1) + {}_R(j_2) + \ldots + {}_R(j_k)$, а, следовательно, и само кольцо R, также являются конечными кольцами.

Если $J^2(R) \neq (0)$, то для кольца $\overline{R} = R/J^2(R)$ доказанное справедливо. Так как $J^2(R) \subseteq J(R)$, то $J(\overline{R}) \cong J(R)/J^2(R)$ и $J^2(\overline{R}) = (\bar{0})$. Тогда из того, что факторкольцо $\overline{R}/J(\overline{R}) \cong \left(R/J^2(R)\right) / \left(J(R)/J^2(R)\right) \cong R/J(R)$ является конечным кольцом, следует, что кольцо $\overline{R} = R/J^2(R)$ также конечное. Если при этом $J^3(R) = (0)$, то для всех сюръективных гомоморфизмов $\varphi_i : R \to Rj_i$ выполняется $J^2(R) \subseteq \ker\, \varphi_i$. Так как кольцо $R/J^2(R)$ конечное, то модули $Rj_i \cong R/\ker\, \varphi_i$ также являются конечными. Тогда R также конечное кольцо.

Если же $J^3(R) \neq (0)$, то из того, что кольцо $R/J(R)$ является конечным, следует, что и $R/J^3(R)$ конечное кольцо. И так далее, рассуждая аналогично, из того, что $R/J^3(R)$ есть конечное кольцо, получим, что $R/J^4(R)$ также конечное кольцо. На шаге t получим, что $R/J^t(R) = R$ является конечным кольцом. $\square$

Согласно следующей лемме, все нильпотентные редуцированные артиновы кольца исчерпываются конечными нильпотентными кольцами.

Лемма 2.15. *Для артинова нильпотентного кольца R следующие условия эквивалентны:*
1) $mR = (0)$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$*;*
2) R *— конечное кольцо;*
3) R *— редуцированное кольцо.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Нильпотентное артиново кольцо с ограниченной аддитивной группой является конечным кольцом по предложению 2.14.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна.

1) $\Rightarrow$ 3). Так как кольцо R нильпотентно, то для любого его ненулевого подкольца K, факторкольцо $\overline{K} = K/K^2 \neq (\bar{0})$. В силу ограниченности R^+, найдется простое число p такое, что ненулевое кольцо $\overline{K}/p\overline{K}$ принадлежит многообразию $\mathcal{Z}_p$. То есть, для K существует ненулевой гомоморфизм на кольцо из многообразия $\mathcal{Z}_p$, являющийся композицией естественных гомоморфизмов $\varphi : K \to \overline{K}$ и $\psi : \overline{K} \to \overline{K}/p\overline{K}$. Следовательно, кольцо R редуцированное.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) справедлива по лемме 2.10. $\square$

Доказательство теоремы 2 опирается на утверждение следующей леммы, описывающей ненильпотентные редуцированные артиновы кольца характеристики p^k для простого p и натурального k.

Лемма 2.16. *Ненильпотентное артиново кольцо R характеристики p^k где p простое, $k \in \mathbb{N}$, есть редуцированное кольцо тогда и только тогда, когда R — конечное кольцо с $\mathcal{F}$-полным радикалом $C_{\mathcal{F}}(R) = \mathcal{F}_p(R) = J(R)$, факторкольцо по которому изоморфно конечной прямой сумме полей $GF(p)$.*

Доказательство. Равенство $C_{\mathcal{F}}(R) = \mathcal{F}_p(R)$ следует из леммы 2.13. Покажем, что $\mathcal{F}_p(R) = J(R)$. Из леммы 2.4 следует, что радикал Джекобсона, как нилькольцо, является $\mathcal{F}$-полным кольцом, поэтому $J(R) \subseteq \mathcal{F}_p(R)$. Обратно, по лемме 2.13 для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$-полный радикал $C_{\mathcal{F}}(R) = \mathcal{F}_p^n(R) = (0)$ в силу редуцированности кольца R. Таким образом, $\mathcal{F}_p(R)$ — нильпотентный идеал, следовательно, $\mathcal{F}_p(R) \subseteq J(R)$.

Для артинова кольца R факторкольцо $R/J(R)$ есть прямая сумма конечного числа простых колец, каждое из которых изоморфно полному матричному кольцу над некоторым телом. Так как $\mathcal{F}_p(R) = J(R)$, то факторкольцо $R/J(R)$ принадлежит многообразию $\mathcal{F}_p$, поэтому каждое из этих слагаемых принадлежит многообразию $\mathcal{F}_p$ и по лемме 2.3 изоморфно $GF(p)$. И так как $R/J(R)$ — конечное кольцо, то R конечное кольцо согласно предложению 2.14.

Обратно, так как R конечное кольцо, то $J(R)$ редуцировано по лемме 2.15. Следовательно, кольцо R редуцировано как расширение редуцированного кольца $J(R)$ с помощью редуцированного кольца $R/J(R)$. $\square$

Приведенные утверждения позволяют доказать теорему, описывающую строение артиновых редуцированных колец.

Теорема 2. *Артиново кольцо R является редуцированным тогда и только тогда, когда R — конечное кольцо с $\mathcal{F}$-полным радикалом $C_{\mathcal{F}}(R) = J(R)$ и либо $R = J(R)$, либо $R/J(R) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} GF(p_i)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.10, для любого артинова редуцированного кольца R найдется натуральное число m, такое, что $mR = (0)$. Пусть $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ — каноническое представление числа m. Тогда по теореме 1.11, кольцо R есть конечная прямая сумма идеалов R_i кольца R, где $p_i^{k_i} R_i = (0)$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Из свойств конечной прямой суммы колец следует, что кольца R_i для всех $1 \leq i \leq n$ являются редуцированными артиновыми кольцами. Если кольцо R_i ненильпотентно, то оно удовлетворяет условиям леммы 2.16, иначе — условиям леммы 2.15. Если R_i нильпотентно, то $C_{\mathcal{F}}(R_i) = R_i$, так как любое ниль-кольцо $\mathcal{F}$-полно по лемме 2.4. В любом случае, кольцо R_i конечное и $C_{\mathcal{F}}(R_i) = J(R_i)$. Таким образом, R есть конечное кольцо, $\mathcal{F}$-полный радикал которого

$$C_{\mathcal{F}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} C_{\mathcal{F}}(R_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{F}_{p_i}(R_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} J(R_i) = J(R). \tag{2.6}$$

При этом, если $R \neq J(R)$, то $R/J(R)$ разлагается в конечную прямую сумму идеалов, изоморфных простым конечным полям.

Обратно, любое конечное кольцо R, удовлетворяющее условиям теоремы, будет редуцированным кольцом как расширение редуцированного кольца $J(R)$ с помощью редуцированного кольца $R/J(R)$. $\square$

2.3 Минимально полные артиновы кольца

Основной результат подраздела дает исчерпывающее описание всех минимально полных артиновых колец и формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Артиново кольцо является минимально полным тогда и только тогда, когда изоморфно одному из следующих колец:*

1) *кольцу с нулевым умножением $C^0_{p^\infty}$ для некоторого простого числа p;*

2) *полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$;*

3) *кольцу Галуа $GR(p^{nq}, p^n)$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и простых чисел p и q.*

Прежде чем перейти к доказательству основного результата, докажем ряд вспомогательных утверждений. Часть из них имеют самостоятельное значение.

Следующая лемма утверждает свойство полного радикала, аналогичное свойству радикала Джекобсона (см., например, теорему 1.3.3 [89, с. 28]).

Лемма 2.17. *Для главного идемпотента e ненильпотентного артинова кольца R выполняется равенство $C(eRe) = eC(R)e$.*

Доказательство. Известно, что всякое ненильпотентное артиново кольцо содержит ненулевой главный идемпотент (см., к примеру, предложение 4.1, [95]). Пусть e — главный идемпотент кольца R, то есть $\varphi(e)$ — единица кольца $R/J(R)$ при естественном гомоморфизме $\varphi : R \to R/J(R)$.

Покажем, что $C(eRe) \subseteq eC(R)e$. Так как $C(R)$ — наибольшее полное подкольцо кольца R и содержит все полные подкольца R, то $C(eRe) \subseteq C(R)$. Умножая это включение слева и справа на e и учитывая, что e является единицей кольца eRe, получим $eC(eRe)e \subseteq eC(R)e$, откуда $C(eRe) \subseteq eC(R)e$.

Чтобы доказать обратное включение $eC(R)e \subseteq C(eRe)$, покажем, что кольцо $eC(R)e$ является полным. Кольцо $eC(R)e$ является кольцом с единицей, поэтому оно $\mathcal{Z}$-полное. Покажем, что $eC(R)e$ является также $\mathcal{F}$-полным кольцом. Так как при гомоморфизме $\varphi : R \to R/J(R)$ образ единицы $\varphi(e)$ есть единица в $R/J(R)$, то образ кольца $\varphi(eC(R)e) = \varphi(e)\varphi(C(R))\varphi(e) = \varphi(C(R))$ будет $\mathcal{Z}$-полным и $\mathcal{F}$-полным кольцом как гомоморфный образ полного кольца $C(R)$. Причем $\ker\varphi \bigcap eRe = J(R) \bigcap eRe$ есть кольцо нильпотентное, а значит, $\mathcal{F}$-полное по лемме 2.4. То есть, $\ker\varphi \bigcap eRe$ лежит в ядре любого гомоморфизма на кольца из многообразий $\mathcal{F}_p$ по всем простым p, поэтому по лемме 2.5 из $\mathcal{F}_p$-полноты кольца $\varphi(eC(R)e)$ следует $\mathcal{F}_p$-полнота кольца $eC(R)e$. Таким образом, из полноты кольца $eC(R)e$ и включения $eC(R)e \subseteq eRe$ следует требуемое включение $eC(R)e \subseteq C(eRe)$. □

Замечание 2.1. В отличие от радикала Джекобсона, требование того, чтобы идемпотент e являлся главным идемпотентом артинова кольца R, для полного радикала является существенным. К примеру, для идемпотента $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ не являющегося главным в полном кольце $R = M_2(GF(p))$, подкольцо eRe, изоморфное $GF(p)$, будет редуцированным кольцом.

Из леммы 2.17 следует, что полнота (редуцированность) ненильпотентного артинова кольца тесно связана с полнотой (редуцированностью) некоторого артинова кольца с единицей.

Следствие 2.18. *Если ненильпотентное артиново кольцо R является полным (редуцированным) кольцом, то для главного идемпотента e артиново кольцо eRe является полным (соответственно редуцированным) кольцом.*

Доказательство. Известно, что в артиновом кольце R для любого идемпотента e кольцо eRe также артиново (см., к примеру, предложение 4.1a, [95]), остальное напрямую следует из леммы 2.17. □

Следующее очевидное следствие из леммы 2.17 играет важную роль при доказательстве основного результата подраздела.

Следствие 2.19. *Ненильпотентное минимально полное артиново кольцо R содержит единицу.*

Доказательство. Ненильпотентное артиново кольцо содержит ненулевой главный идемпотент e (см., напр., предложение 4.1, [95]). В полном кольце R подкольцо $eRe \neq (0)$ полное по следствию 2.18, поэтому $eRe = R$. □

Лемма 2.20. *Если любая убывающая цепочка идеалов кольца R, содержащихся в его идеале I, стабилизируется на некотором конечном шаге, то из редуцированности кольца R следует редуцированность кольца R/I.*

Доказательство. Заметим сначала, что если факторкольцо R/I редуцированного кольца R по некоторому идеалу I имеет ненулевой полный радикал $C(R)$, то прообраз C последнего при естественном гомоморфизме $\sigma : R \to R/I$ будет редуцированным кольцом, как подкольцо редуцированного кольца R. Поэтому достаточно показать, что при выполнимости условий леммы факторкольцо R/I не может быть полным кольцом.

Предположим, что R/I — ненулевое полное кольцо. В силу редуцированности R найдется такой атом $\mathcal{A}_1$ решётки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ подмногообразий ассоциативных колец, что для $\mathcal{A}_1$-вербала $\mathcal{A}_1(R) = T_1$ кольца R имеет место строгое включение $T_1 \subset R$. Из равенств $\mathcal{A}_1(R/I) = (\mathcal{A}_1(R) + I)/I = R/I$ вытекает равенство $R = I + T_1$. Введем обозначение $I_1 = I \cap T_1$. По свойствам гомоморфизмов колец имеем $R/I_1 \cong (I + T_1)/(I \cap T_1) \cong I/I_1 \oplus T_1/I_1$, где второе слагаемое, ввиду изоморфизмов $T_1/I_1 \cong (T_1/I_1 \oplus I/I_1)/(I/I_1) \cong (R/I_1)/(I/I_1) \cong R/I$, является полным по предположению. При этом $I \not\subseteq T_1$, иначе из $I \cap T_1 = I$ следовало бы, что $(R/T_1) \cong (R/I)/(T_1/I)$. Последнее противоречиво, так как гомоморфный образ полного кольца R/I является одновременно полным и редуцированным, изоморфным кольцу R/T_1 из атома $\mathcal{A}_1$ решётки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$, ненулевым кольцом.

Проведя аналогичные рассуждения для редуцированного кольца T_1, имеющего полный гомоморфный образ T_1/I_1, изоморфный R/I, получим, что для некоторого атома $\mathcal{A}_2$ решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ имеет место $T_2 = \mathcal{A}_2(T_1) \subset T_1$ и $T_1/T_2 \in \mathcal{A}_2$. Заметим, что в силу трансвербальности многообразия $Ass(\mathbb{Z})$ по атомам решётки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$, кольцо T_2 будет также идеалом и в кольце R. Точно также для идеала $I_2 = I \cap T_2$ имеем $T_2/I_2 \cong T_1/I_1 \cong R/I$ и $I_1 \not\subseteq T_2$, ибо в противном случае из равенства $I_1 \cap T_2 = I_1$, изоморфизмов $(T_1/T_2) \cong (T_1/I_1)/(T_2/I_1)$ и $T_1/I_1 \cong R/I$, снова получили бы противоречие с тем, что ненулевой гомоморфный образ полного кольца T_1/I_1 является одновременно полным и редуцированным. И так далее. Убывающая цепочка идеалов кольца R: $I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ по условию леммы стабилизируется на некотором шаге n:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n = I_{n+1} = \ldots . \tag{2.7}$$

Тогда $I_{n+1} = T_{n+1} \cap I_n = I_n$, т. е. $I_n \subseteq T_{n+1}$. Учитывая изоморфизм колец T_n/T_{n+1} и $(T_n/I_n)/(T_{n+1}/I_n)$, заключаем, что последнее кольцо является ненулевым редуцированным кольцом, так как принадлежит некоторому атому $\mathcal{A}_{n+1}$ решётки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$. С другой стороны, ввиду изоморфизма $T_n/I_n \cong R/I$ это же кольцо является является ненулевым полным кольцом. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Следствие 2.21. *Гомоморфный образ артинова редуцированного кольца является редуцированным кольцом.*

Следствие 2.22. *Гомоморфный образ минимально полного конечного кольца R является минимально полным кольцом.*

Доказательство. Гомоморфный образ $\overline{R}$ полного кольца R является полным кольцом. Поскольку любое собственное подкольцо кольца R есть конечное редуцированное кольцо, соответствующий ему гомоморфный образ в кольце R по следствию 2.21 будет редуцированным кольцом. $\square$

Замечание 2.2. В общем случае, для произвольного кольца, следствие 2.21 не выполняется. В качестве контрпримера можно привести кольцо многочленов $F_p[x]$ над конечным полем F_p, которое является редуцированным при любом простом p. Для этого достаточно показать, что любое ненулевое подкольцо H кольца $F_p[x]$ не является полным. Пусть k — минимальная степень ненулевых многочленов из H. При $k = 0$ имеем включение $F_p \subseteq H$, а отображение, ставящее любому многочлену из H его свободный член, является гомоморфизмом H на F_p. Следовательно, в этом случае подкольцо H не является полным.

Если же $k > 0$, то $H^2 \neq H$ и факторкольцо H/H^2 является ненулевым кольцом с нулевым умножением. При этом аддитивная группа факторкольца H/H^2 имеет простую экспоненту p, а значит является прямой суммой циклических групп порядка p, поэтому кольцо H/H^2 является прямой суммой колец, изоморфных кольцу Z_p^0. Таким образом, в этом случае подкольцо H гомоморфно отображается на кольцо Z_p^0 и поэтому не является полным. Итак, $F_p[x]$ — редуцированное кольцо. С другой стороны, среди гомоморфных образов кольца $F_p[x]$ содержатся все конечные поля характеристики p, а поле $GF(p^n)$ является полным кольцом при $n > 1$.

Лемма 2.23. *Если I — нильпотентный идеал кольца R характеристики p^n, где p простое и $n \in \mathbb{N}$, то для всякого редуцированного подкольца K кольца R, соответствующий ему гомоморфный образ $\overline{K}$ в кольце $\overline{R} = R/I$ будет также кольцом редуцированным.*

Доказательство. Пусть I — нильпотентный идеал, K — редуцированное подкольцо кольца R. Доказательство леммы проведем для случая $I^2 = (0)$. Если в общем случае, $I \supseteq I^2 \supseteq I^{2^2} \supseteq ... \supseteq I^{2^m} = (0)$, где $m \in \mathbb{N}$, то в качестве нильпотентного идеала в условии леммы возьмем $I^{2^{m-1}}$, для которого $(I^{2^{m-1}})^2 = (0)$. Тогда из редуцированности K, согласно доказываемому ниже, будет следовать редуцированность соответствующего ему гомоморфного образа K_1 в факторкольце $R/I^{2^{m-1}}$. Аналогично, так как $(I^{2^{m-2}}/I^{2^{m-1}})^2 = (\bar{0})$, из редуцированности K_1 в кольце $R/I^{2^{m-1}}$ будет следовать редуцированность его гомоморфного образа в кольце $\left(R/I^{2^{m-1}}\right)/\left(I^{2^{m-2}}/I^{2^{m-1}}\right) \cong R/I^{2^{m-2}}$, и т. д., на m-м шаге получим редуцированность $\overline{K}$ в кольце R/I.

Заметим, для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что гомоморфный образ $\overline{K} \cong K/K \cap I$ редуцированного подкольца K кольца R не является полным кольцом. Если в более общем случае $\overline{K}$ содержит полное подкольцо, то перейдем к рассмотрению прообраза этого подкольца в R.

Кольцо K редуцированное, при этом по лемме 2.11, $\mathcal{F}_q$-полное и $\mathcal{Z}_q$-полное для любого простого $q \neq p$. Это значит, что $\mathcal{F}_p(K) \neq K$ или $\mathcal{Z}_p(K) \neq K$. Кольцо $K \cap I$ нильпотентно и по лемме 2.4 содержится в ядре любого гомоморфизма на кольца из многообразия $\mathcal{F}_p$. В этом случае, согласно лемме 2.5, кольцо K будет $\mathcal{F}_p$-полным в точности тогда, когда $\mathcal{F}_p$-полно кольцо $\overline{K} = K/K \cap I$. Таким образом, если $\mathcal{F}_p(K) \neq K$, то $\mathcal{F}_p(\overline{K}) \neq \overline{K}$, гомоморфный образ $\overline{K}$ редуцированного подкольца K не является полным кольцом.

Пусть теперь $\mathcal{F}_p(K) = K$, но $\mathcal{Z}_p(K) \neq K$. Предположим при этом, что $\mathcal{Z}_p(\overline{K}) = p\overline{K} + \overline{K}^2 = \overline{K} \neq (\bar{0})$. Если φ — ограничение естественного гомоморфизма $f : R \to R/I$ на подкольцо K, то $K = pK + K^2 + \ker\varphi = pK + K^2 + K \cap I$. Тогда $K = p(pK + K^2 + K \cap I) + K^2 + K \cap I = p^2K + K^2 + K \cap I$, точно также, $K = p^2(pK + K^2 + K \cap I) + K^2 + K \cap I = p^3K + K^2 + K \cap I$. Так как $p^nK = (0)$, то на соответствующем шаге получим, что $K = K^2 + K \cap I$. Тогда $K^2 = (K^2 + K \cap I)(K^2 + K \cap I) \subseteq K^4 + K^2(K \cap I) \subseteq K^4 + K^3 = K^3$, поэтому $K^2 = K^3$, т. е. K^2 — идемпотентный идеал подкольца K. Если $K^2 \neq (0)$, то K^2 будет $\mathcal{Z}_p$-полным и в то же время $\mathcal{F}_p$-полным кольцом по предложению 1.26, как идеал $\mathcal{F}_p$-полного кольца K, а следовательно, полным кольцом. Но это невозможно, так как K редуцировано. Значит, $K^2 = (0)$ и $K = K^2 + K \cap I = K \cap I$, поэтому $\overline{K} = (\bar{0})$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Следствие 2.24. *Если R — минимально полное артиново кольцо характеристики p^n, где p простое число и $n \in \mathbb{N}$, то факторкольцо по радикалу Джекобсона $R/J(R)$ также является минимально полным кольцом.*

Для полноты изложения приведем доказательства следующих естественных утверждений об аддитивной группе артиновых колец специального вида.

Лемма 2.25. *Если артиново кольцо R совпадает со своим квадратом и его аддитивная группа R^+ является полной, то R^+ — группа без кручения.*

Доказательство. Из полноты аддитивной группы кольца и теоремы 1.10 следует, что $R^+ \cong (\oplus_\eta \mathbb{Q}^+) \oplus \left(\oplus_{i=1}^n C_{p_i^\infty}\right)$. В этом случае, согласно теореме 1.11, кольцо R есть прямая сумма идеалов S и C, где $S^+ \cong \oplus_\eta \mathbb{Q}^+$ и $C^+ \cong \oplus_{i=1}^n C_{p_i^\infty}$, причем $C \subseteq Ann\, R$ по лемме 1.13. Тогда $R^2 = (S \oplus C)^2 = S^2 = R$, т. е. $R = S$ и поэтому R^+ — группа без кручения. □

Лемма 2.26. *Если аддитивная группа R^+ артинова кольца R полная и без кручения, то группы $J(R)^+$ и $(R/J(R))^+$ также полные и без кручения.*

Доказательство. Для любого натурального n рассмотрим множество J_n всех решений уравнений вида $nx = j$ в кольце R, где j пробегает идеал $J(R)$,

$$J_n = \bigcup_{j \in J(R)} \big\{x \in R \;\big|\; nx = j\big\}. \tag{2.8}$$

Формально проверяется, что J_n будет идеалом в R. Так как все элементы $j \in J(R)$ нильпотентны, а R^+ — группа без кручения, то J_n — нильидеал. Следовательно, $J_n \subseteq J(R)$, т. е. в группе $J(R)^+$ для любого $j \in J(R)^+$ разрешимо уравнение $nx = j$. В силу произвольности выбора числа n, группа $J(R)^+$ — полная и без кручения, как подгруппа группы R^+ без кручения.

Группа $(R/J(R))^+$ — полная как факторгруппа полной группы. Если в группе $\overline{R} = (R/J(R))^+$ для некоторого натурального n имеет место равенство $n\bar{r} = \bar{0}$, т. е. $nr \in J(R)$ для некоторого $r \in R$, то в силу полноты группы $J(R)^+$ найдется $x \in J(R)^+$ такой, что $nx = nr$. Отсюда $n(x-r) = 0$. Поскольку $J(R)^+$ — группа без кручения, заключаем, что $x = r$, т. е. $r \in J(R)$ или $\bar{r} = \bar{0}$. Таким образом, $(R/J(R))^+$ — группа без кручения. □

Лемма 2.27. *Минимально полные нильпотентные кольца исчерпываются кольцом $\mathbb{Q}^0$ и кольцами $C^0_{p^\infty}$ по всем простым p, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, а C_{p^∞} — аддитивная квазициклическая группа типа p^∞.*

Доказательство. Пусть R — минимально полное нильпотентное кольцо. По лемме 2.1, R^2 — также полное кольцо. Если $R^2 \neq (0)$, то R^2 — ненулевое собственное полное подкольцо кольца R, что противоречит минимальной полноте кольца R. Таким образом, R обязано быть кольцом с нулевым умножением. Легко понять, что кольцо с нулевым умножением является минимально полным тогда и только тогда, когда его аддитивная группа является минимально полной. Учитывая, что любая полная аддитивная абелева группа есть прямая сумма групп типа $\mathbb{Q}$ и типа C_{p^∞}, получаем, что минимально полные абелевы группы с точностью до изоморфизма исчерпываются группами $\mathbb{Q}$ и C_{p^∞} по всем простым числам p. Отсюда и из сказанного выше следует требуемое. $\square$

Лемма 2.28. *Тело нулевой характеристики является минимально полным тогда и только тогда, когда оно изоморфно полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.*

Доказательство. Пусть K — тело нулевой характеристики. Тогда K содержит в качестве простого подполя поле, изоморфное полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Поскольку $\mathbb{Q}$ по лемме 2.3 является полным полем, в силу минимальной полноты тела K, оно обязано быть изоморфным полю $\mathbb{Q}$.

Обратно, полнота поля $\mathbb{Q}$ уже отмечалась. Покажем, что любое ненулевое собственное подкольцо A поля $\mathbb{Q}$ не является полным. Напомним, что аддитивная группа $\mathbb{Q}^+$ является локально циклической, т. е. в ней любая конечно порожденная подгруппа является циклической (см., например, теорему 13.1.1 [90, с. 216]). На самом деле, группа $\mathbb{Q}^+$ и любая ее ненулевая подгруппа является локально свободными, т. е. в них всякая ненулевая конечно порожденная подгруппа является свободной, в силу коммутативности $\mathbb{Q}^+$ и отсутствия кручения, бесконечной циклической группой (см., например, [48, с. 239]). Будучи счетными локально свободными группами, они являются объединениями возрастающей последовательности бесконечных циклических групп (см. там же). Понятно, что объединение любой такой бесконечной строго возрастающей последовательности является полной группой и поэтому совпадает с $\mathbb{Q}$ в силу того, что $\mathbb{Q}^+$ — минимально полная группа. Следовательно, подгруппа A^+ является бесконечной циклической группой. Но тогда $pA \neq A$ для любого простого числа p. Рассмотрим факторкольцо $\overline{A} = A/pA$. Его аддитивная группа является циклической простого порядка и поэтому $\overline{A}$ не имеет нетривиальных подколец. Нетрудно понять (см. также лемму 8 в [66]), что кольцо $\overline{A}$ изоморфно либо кольцу Z_p^0, либо полю $GF(p)$, принадлежащим соответственно атомам $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$ решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$. Следовательно, кольцо A не является полным. Таким образом, поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является минимально полным кольцом. $\square$

Лемма 2.29. *Тело простой характеристики p является минимально полным тогда и только тогда, когда оно изоморфно конечному полю $GF(p^q)$ для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Пусть K — минимально полное тело простой характеристики p. Тогда K содержит простое поле F_p, которое лежит в центре тела K. Если в K имеется алгебраическое число α степени $n > 1$ относительно поля F_p, то K содержит конечное поле $F_p(\alpha) = GF(p^n)$, состоящее из всевозможных значений $f(\alpha)$ в K всех многочленов $f(x)$ из кольца $F_p[x]$. По лемме 2.3, поле $GF(p^n)$ является полным. Ввиду минимальной полноты K отсюда получаем равенство $K = GF(p^n)$. Но при составном $n > 1$ поле $GF(p^n)$ содержит полное подполе $GF(p^m)$, где m — нетривиальный делитель n, что противоречит минимальной полноте тела K. Таким образом, n — простое число.

Рассмотрим теперь случай, когда все элементы тела K, не принадлежащие полю F_p, являются трансцендентными над F_p. Выберем один из них θ и рассмотрим в K подполе $F_p(\theta)$ значений частных $f(\theta)/g(\theta)$ всевозможных многочленов $f(x), g(x) \in F_p[x]$ (где $g(x) \neq 0$) от θ. По лемме 2.3, поле $F_p(\theta)$ является полным и поэтому, в силу минимальной полноты тела K, получаем равенство $K = F_p(\theta)$. Рассмотрим эндоморфизм Фробениуса φ поля $F_p(\theta)$, определенный по правилу $\varphi(a) = a^p$ для любого элемента a из $F_p(\theta)$. Он будет инъективным, так как поле $F_p(\theta)$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Причем $\theta \notin \operatorname{Im}\varphi$. В самом деле, если бы $\varphi(f(\theta)/g(\theta)) = \theta$, то $f(\theta)^p/g(\theta)^p = \theta$. Отсюда $f(\theta^p)/g(\theta^p) = \theta$, или $f(\theta^p) = \theta g(\theta^p)$. Последнее равенство означает, что элемент θ является корнем ненулевого многочлена $f(x^p) = xg(x^p)$ кольца $F_p[x]$. Таким образом, полное тело K содержит собственное полное подполе $\operatorname{Im}\varphi \cong F_p(\theta)$, т. е. минимально полным не является. Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен.

Обратно, поле $GF(p^n)$ при простых p и n содержит единственное собственное подкольцо, изоморфное $GF(p)$, поэтому является минимально полным. $\square$

Лемма 2.30. *Кольцо матриц $M_n(K)$ над телом K является минимально полным тогда и только тогда, когда оно изоморфно либо полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, либо конечному полю $GF(p^q)$ для некоторых простых p и q.*

Доказательство. Пусть $M_n(K)$ — минимально полное кольцо всех матриц порядка n над телом K. Будучи полным, кольцо $M_n(K)$ не принадлежит ни одному из атомов решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$, так как кольца последних будут редуцированными. Пусть $n = 1$. В этом случае кольцо $M_1(K)$ изоморфно K. По лемме 2.28, тело K в случае нулевой характеристики изоморфно полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Если характеристика K равна простому числу p, то тело K по лемме 2.29 изоморфно конечному полю $GF(p^q)$ для некоторого простого q.

При $n > 1$ кольцо $M_n(K)$ содержит в качестве собственного подкольца тело K, которое в силу минимальной полноты $M_n(K)$, является редуцированным кольцом, по лемме 2.3 изоморфным полю $GF(p)$ для некоторого простого числа p. Из задания элементов поля матрицами известно (см., например, [51, с. 90]), что элементы поля $GF(p^n) \cong GF(p)[x]/(f)$ можно представить многочленами над $GF(p)$ от матрицы A — сопровождающей матрицы нормированного многочлена $f(x)$. Так как A — матрица n-го порядка, то кольцо $M_n(GF(p))$ всех матриц порядка $n > 1$ над полем $GF(p)$ содержит подкольцо, изоморфное полному полю $GF(p^n)$, поэтому минимально полным кольцом не является. $\square$

Следствие 2.31. *Полупростое артиново кольцо является минимально полным тогда и только тогда, когда оно изоморфно либо полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, либо конечному полю $GF(p^q)$ для некоторых простых p и q.*

Доказательство. Действительно, полупростое артиново кольцо R по теореме Веддербёрна-Артина есть конечная прямая сумма простых колец, каждое из которых изоморфно полному матричному кольцу над некоторым телом. Поскольку прямая сумма колец есть полное кольцо тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых — полное кольцо, в силу минимальной полноты R, кольцо R изоморфно кольцу матриц $M_n(K)$ для некоторого тела K и натурального числа n. По лемме 2.30, кольцо R является минимально полным тогда и только тогда, когда оно изоморфно либо полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, либо конечному полю $GF(p^q)$ для некоторых простых чисел p и q. □

Лемма 2.32. *Всякое минимально полное конечное кольцо простой характеристики полупросто по Джекобсону.*

Доказательство. Конечное кольцо R характеристики p является алгеброй конечной размерности над полем $GF(p)$. Кольцо $\overline{R} = R/J(R)$ — минимально полное по следствию 2.22 как гомоморфный образ минимально полного конечного кольца. Поэтому по следствию 2.31, $\overline{R} \cong GF(p^q)$ для некоторых простых чисел p и q. Согласно замечанию 1.1, алгебра $\overline{R}$ есть сепарабельная алгебра над полем $GF(p)$. Следовательно, по теореме Веддербёрна-Мальцева (см. теорему 1.8), $R^+ = S^+ \oplus J(R)^+$, где S — подалгебра в R, изоморфная $\overline{R}$. Так как кольцо $\overline{R}$ полное, а R минимально полное, то $S = R$, т. е. R — полупростое кольцо. □

Следствие 2.33. *В минимально полном конечном кольце R характеристики p^k, где p простое число и $k \in \mathbb{N}$, радикал Джекобсона $J(R) = pR$.*

Доказательство. Действительно, в кольце R, удовлетворяющем условиям следствия, идеал pR нильпотентен и поэтому $pR \subseteq J(R)$. С другой стороны, кольцо R/pR является минимально полным по следствию 2.22 как гомоморфный образ минимально полного конечного кольца и, следовательно, полупростым по лемме 2.32. Тогда $J(R) \subseteq pR$, откуда $J(R) = pR$. □

Лемма 2.34. *Конечное идемпотентное кольцо R характеристики p^k, где p простое и $k \in \mathbb{N}$, является минимально полным тогда и только тогда, когда R/pR — минимально полное кольцо.*

Доказательство. По лемме 2.12 кольцо R, удовлетворяющее условиям леммы, является полным кольцом тогда и только тогда, когда будет полным кольцо R/pR. Если кольцо R минимально полное, то кольцо R/pR будет также минимально полным по следствию 2.22.

Обратно, пусть $\overline{R} = R/pR$ — минимально полное кольцо и C — полное подкольцо кольца R. Тогда соответствующий ему гомоморфный образ $\overline{C}$ в кольце $\overline{R}$ будет полным кольцом. В силу минимальной полноты кольца $\overline{R}$, либо $\overline{C} = (\bar{0})$, либо $\overline{C} = \overline{R}$. Если $\overline{C} = (\bar{0})$, то $C \subseteq pR$. Но идеал pR является редуцированным кольцом по лемме 2.15, а так как кольцо C полное, то в этом случае $C = (0)$.

Если $\overline{C} = \overline{R}$, то $(C + pR)/pR = R/pR$. Отсюда $C + pR = R$. Над кольцом целых чисел кольцо R является модулем конечной размерности, и любая подгруппа группы R^+, в частности, C^+ и $(pR)^+$, будут его подмодулями. Радикал $\operatorname{rad} R$ кольца R как модуля, есть пересечение его подмодулей A_i таких, что R/A_i — простой модуль. Из условий, накладываемых леммой на R, следует, что $p(R/A_i) = (0)$ для всех i, т. е. $pR \subseteq A_i$, а значит, $pR \subseteq \operatorname{rad} R$. Тогда по лемме Накаямы (см., напр., лемма Накаямы для модулей, [79, с. 78]), из условия $C + pR = R$ следует $R = C$. Таким образом, полное кольцо R не содержит собственных полных подколец, то есть является минимально полным. □

Как следует из теоремы 3, минимально полные кольца тесно связаны с классом колец Галуа. Напомним, *кольцом Галуа* порядка p^{nk} и характеристики p^n называется факторкольцо $Z_{p^n}[x]/(f(x))$, где $f(x)$ — унитарный многочлен степени k, образ которого при естественном гомоморфизме $Z_{p^n}[x] \to Z_p[x]$ является неприводимым над Z_p многочленом. Кольцо Галуа с точностью до изоморфизма определяется числами p, n и k и обозначается $GR(p^{nk}, p^n)$. Ясно, что $GR(p^n, p^n) \cong Z_{p^n}$ и $GR(p^k, p) \cong F_{p^k}$. Лемма 2.35 описывает минимально полные кольца всех квадратных матриц фиксированного порядка над кольцами Галуа.

Лемма 2.35. *Минимально полное кольцо всех матриц некоторого порядка над кольцом Галуа изоморфно кольцу Галуа* $GR(p^{nq}, p^n)$ *для некоторых простых чисел* p, q *и* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Ясно, что для всякого кольца Галуа $GR(p^{nk}, p^n)$, факторкольцо $GR(p^{nk}, p^n)/pGR(p^{nk}, p^n) \cong GR(p^k, p) = GF(p^k)$. Пусть кольцо $R = M_m(GR(p^{nk}, p^n))$ — минимально полное кольцо матриц порядка m над кольцом Галуа. Кольцо R удовлетворяет условиям леммы 2.34. Из нее следует, что R будет минимально полным кольцом тогда и только тогда, когда R/pR

будет минимально полным кольцом. Для любого идеала I кольца R, кольцо $M_m(R)/M_m(I) \cong M_m(R/I)$ (см., например, задача 7.54 [10, с. 200]), тогда

$$R/pR \cong M_m\big(GR(p^{nk}, p^n)/pGR(p^{nk}, p^n)\big) \cong M_m(GR(p^k, p)) = M_m(GF(p^k)). \tag{2.9}$$

При этом $pR = J(R)$ по следствию 2.33, т. е. R/pR — минимально полное полупростое кольцо. Полупростые минимально полные конечные кольца характеризуются следствием 2.31. Из него следует, что $R/pR \cong GF(p^q) = GR(p^q, p)$, где q также простое число, откуда $R \cong GR(p^{nq}, p^n)$.

Обратно, для любых простых чисел p и q кольцо $R = GR(p^{nq}, p^n)$ является минимально полным по лемме 2.34, так как кольцо $R/pR \cong GF(p^q)$ по лемме 2.29 является минимально полным. □

Перейдем к доказательству основного результата подраздела.

Теорема 3. *Артиново кольцо является минимально полным тогда и только тогда, когда изоморфно одному из следующих колец:*

1) *кольцу с нулевым умножением $C^0_{p^\infty}$ для некоторого простого числа p;*
2) *полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$;*
3) *кольцу Галуа $GR(p^{nq}, p^n)$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и простых чисел p и q.*

Доказательство. Пусть R — минимально полное артиново кольцо. Из леммы 2.1 следует, что кольцо R^2 также полное, поэтому либо $R^2 = (0)$, либо $R^2 = R$. Заметим, что в случае $R^2 = (0)$ кольцо R есть полное кольцо с нулевым умножением, что по лемме 2.6 возможно только тогда, когда его аддитивная группа R^+ полная.

С другой стороны, согласно лемме 1.1, наибольшая полная подгруппа I^+ аддитивной группы кольца R есть идеал кольца. То есть I — полное подкольцо кольца R. В силу минимальной полноты R получаем, что либо $I = R$, то есть группа R^+ полная, либо R^+ вообще не содержит ненулевых полных подгрупп.

Из теоремы 1.10 следует, что аддитивная группа артинова кольца R, не содержащая полных подгрупп, является ограниченной, то есть $mR = (0)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, при этом кольцо R есть конечная прямая сумма своих идеалов R_i таких, что $p_i^{k_i} R_i = (0)$ для некоторых простых чисел p_i и $k_i \in \mathbb{N}$.

Учитывая, что прямая сумма колец является полным кольцом тогда и только тогда, когда каждое слагаемое есть полное кольцо, заключаем, что для минимально полного артинова кольца R возможны только следующие случаи:
(i) $R^2 = (0)$ и R^+ — полная группа.
(ii) $R^2 = R$ и R^+ — полная группа.
(iii) $R^2 = R$ и $p^k R = (0)$ для некоторого простого числа p и $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим эти случаи.

(i) Пусть $R^2 = (0)$ и R^+ — полная группа. Минимально полные кольца с нулевым умножением описаны лемой 2.27, это кольца $\mathbb{Q}^0$ и $C^0_{p^\infty}$ по всем простым числам p. Любая подгруппа этих колец — идеал в кольце, поэтому кольцо $\mathbb{Q}^0$ артиновым не является, так как не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Получаем, что в этом случае $R = C^0_{p^\infty}$ для некоторого простого p, т. е. выполнено условие 1) теоремы 3.

(ii) Пусть $R^2 = R$ и R^+ — полная группа. По лемме 2.25, R^+ — полная группа без кручения. Тогда по лемме 2.26, группа $J(R)^+$ также полная, т. е. кольцо $J(R)$ полное. Но кольцо R — минимально полное и ненильпотентное по предположению. Поэтому $J(R) = (0)$, т. е. R — полупростое артиново кольцо с аддитивной группой без кручения. По следствию 2.31, в этом случае кольцо R изоморфно полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, т. е. выполняется условие 2) теоремы 3.

(iii) Пусть $R^2 = R$ и $p^k R = (0)$ для некоторого простого p и $k \in \mathbb{N}$. По следствию 2.24, факторкольцо $R/J(R)$ также является минимально полным кольцом, артиновым как гомоморфный образ артинова кольца R. Артиновы полупростые минимально полные кольца описаны следствием 2.31, в данном случае $R/J(R) \cong GF(p^q)$, где p и q — простые числа. Кольцо $R/J(R)$ является конечным кольцом, тогда, как следует из предложению 2.14, само артиново кольцо R также будет конечным кольцом. По следствию 2.19, ненильпотентное минимально полное кольцо R содержит единицу. Тогда из теоремы 1.9 следует, что R содержит подкольцо S, изоморфное прямой сумме колец матриц над кольцами Галуа такое, что $S/pS \cong R/J(R)$. Так как кольцо $R/J(R)$ полное, $S^2 = S$ и $p^k S = (0)$, а по лемме 2.12 кольцо S будет полным кольцом тогда и только тогда, когда кольцо S/pS будет полным, то делаем вывод, что кольцо S

является полным подкольцом кольца R. Поэтому $S = R$ в силу минимальной полноты кольца R. Прямая сумма колец является полным кольцом в том и лишь только в том случае, когда каждое слагаемое есть полное кольцо, следовательно, R изоморфно некоторому кольцу матриц над кольцом Галуа. Минимально полные кольца матриц над кольцами Галуа описаны в лемме 2.35, из нее заключаем, что $R \cong GR(p^{nq}, p^n)$ для некоторого натурального n и простых чисел p и q. Получили условие 3) теоремы 3.

Таким образом, кольцами, указанными в формулировке теоремы, исчерпываются все артиновы минимально полные кольца. $\square$

3 Полный радикал артиновых колец

В данном разделе изучаются вопросы полноты для полугрупповых и матричных колец, а также условия расщепляемости для артиновых колец. В подразделе 3.1 приводится критерий полноты полугруппового кольца (теорема 4), и как следствие — критерий полноты артинова группового кольца.

В подразделе 3.2 охарактеризованы полные кольца всех квадратных матриц некоторого порядка над произвольным кольцом, вычисляется полный радикал таких колец как в общем случае (теорема 5), так и в случае, когда кольцо артиново. Показано (следствие 3.6), что любое конечное кольцо вложимо в полное конечное кольцо, что в случае ассоциативных колец решает проблему 9 статьи [58] (проблему 3.9, [69]) характеризации многообразий алгебр, в которых любая конечная алгебра вложима в полную конечную алгебру. Заметим, указанным в проблеме 9 свойством обладает многообразие всех групп, так как общеизвестно, что любая конечная группа вкладывается в конечную простую некоммутативную группу, которая является, очевидно, полной.

Основной целью подраздела 3.3 является доказательство того, что любое коммутативное артиново кольцо, аддитивная группа которого не содержит квазициклических подгрупп, является расщепляемым (теорема 6), а также получение критерия расщепляемости для артиновых колец с односторонней единицей (теорема 7). Напомним, в соответствии с работой [69], кольцо R называется *расщепляемым*, если полный радикал в нем отделяется прямым слагаемым.

3.1 Полнота полугрупповых колец

В подразделе приведен критерий полноты полугруппового кольца (теорема 4), из которого следует критерий полноты артинова группового кольца (следствие 3.2). Напомним, *полугрупповым кольцом* полугруппы S над кольцом R с единицей называется кольцо RS, элементами которого являются формальные суммы вида $\sum\limits_{s\in S} r_s s$, где $r_s \in R$ и почти все r_s равны нулю, а сложение и умножение определяются равенствами

$$\sum_{s\in S} x_s s + \sum_{s\in S} y_s s = \sum_{s\in S}(x_s+y_s)s, \left(\sum_{s\in S} x_s s\right)\left(\sum_{t\in S} y_t t\right) = \sum_{w\in S}\left(\sum_{\substack{u,v\in S\\ uv=w}} x_u y_v\right)w. \quad (3.1)$$

Множество $R0 = \{r0 \mid r\in R,\ 0 \text{ — ноль в } S\}$ будет идеалом в полугрупповом кольце RS, а $RS/R0$ называется *сжатым* полугрупповым кольцом.

Основным результатом этого подраздела является следующая теорема.

Теорема 4. *Для кольца R с единицей и полугруппы S выполняется:*
1) *если аддитивная группа R^+ кольца R полная, то полугрупповое кольцо RS является полным кольцом;*
2) *если R^+ не является полной группой, то полугрупповое кольцо RS будет полным тогда и только тогда, когда будет полным кольцо R и $S^2 = S$.*

Следующая лемма проверяется формально.

Лемма 3.1. *Пусть $\varphi\colon R_1\to R_2$ есть сюръективный гомоморфизм колец с единицей, $\psi\colon S_1\to S_2$ есть сюръективный гомоморфизм полугрупп. Тогда отображение $\xi\colon R_1S_1\to R_2S_2$, где $\xi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_is_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(r_i)\psi(s_i)$, будет сюръективным гомоморфизмом полугрупповых колец.*

Перейдем к доказательству теоремы 4.

Доказательство. 1). Очевидно, что $(RS)^+ \cong \bigoplus\limits_{s\in S} R^+$. Если группа R^+ полная, то группа $(RS)^+$ также является полной как прямая сумма полных групп, следовательно, кольцо RS полное.

2). Пусть полугрупповое кольцо RS является полным кольцом. По лемме 3.1, отображение $\varphi\colon RS\to R$, где $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_is_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$, будет гомоморфизмом кольца RS на кольцо R. Кольцо R также кольцо полное как гомоморфный образ полного кольца RS. Покажем,что $S^2 = S$. Если $S^2\neq S$, то $\overline{S} = S/S^2$ — ненулевая полугруппа с нулевым умножением. Для сюръективного гомоморфизма полугруппы S на полугруппу $\overline{S}$ по лемме 3.1 существует сюръективный гомоморфизм $\alpha\colon RS\to R\overline{S}$. Кольцо $R\overline{S}$ при этом полное как гомоморфный образ полного кольца. Пусть β есть естественный гомоморфизм кольца $R\overline{S}$ на сжатое полугрупповое кольцо $\overline{R} = R\overline{S}/R\bar{0}$. Кольцо $\overline{R}$ — ненулевое кольцо с нулевым умножением, полное как гомоморфный образ полного кольца $R\overline{S}$. Следовательно, его аддитивная группа $\overline{R}^+ \cong \bigoplus\limits_{i\in I} R^+$ по лемме 2.6 является полной группой. Отсюда, группа R^+ также полная, что противоречит условиям теоремы.

Обратно, пусть R полное кольцо и $S^2 = S$. Возьмем произвольный элемент a из RS, т. е. $a = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i s_i$, где $r_i \in R$, $s_i \in S$ по всем i. Кольцо R полное, следовательно, для любого простого p элементы r_i можно представить в виде $r_i = ph_i + \sum\limits_{j=1}^{m} k_j l_j$, где $h_i, k_j, l_j \in R$ по всем i, j. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{n}\Big(ph_i + \sum_{j=1}^{m} k_j l_j\Big)s_i = p\Big(\sum_{i=1}^{n} h_i s_i\Big) + \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} k_j l_j\Big)s_i. \tag{3.2}$$

Так как $S^2 = S$, то для каждого s_i найдутся такие s_i', s_i'' из S, что $s_i = s_i' \cdot s_i''$. Из (3.2) получаем, что $a = p\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} h_i s_i\Big) + \sum\limits_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} k_j l_j\Big)s_i'\Big]s_i''$. Элемент s_i'' принадлежит RS, так как R — кольцо с единицей, следовательно, $a \in \mathcal{Z}_p(RS)$ для любого простого p, т. е. кольцо RS будет $\mathcal{Z}$-полным.

Покажем, что кольцо RS является $\mathcal{F}$-полным. Единицу $\mathcal{F}_p$-полного кольца R можно представить в виде $1 = pr + \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\big(x_i^p - x_i\big)h_i$, где $r, r_i, x_i, h_i \in R$ по всем i. Тогда для произвольного s из S выполняется $s = 1\cdot s = prs + \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\big(x_i^p - x_i\big)h_i s$. Так как $S^2 = S$, то найдутся s_1, s_2, s_3 из S такие, что $s = s_1 s_2 s_3$. Получаем, $s = prs + \sum\limits_{i=1}^{n}(r_i s_1)\ \big((x_i^p - x_i)s_2\big)(h_i s_3)$ принадлежит $\mathcal{F}_p(RS)$, так как для каждого i, элемент $(x_i^p - x_i)s_2 = x_i^p s_2 - x_i s_2 + x_i^p s_2^p - x_i^p s_2^p = \big((x_i s)^p - (x_i s)\big) - x_i^p\big((1\cdot s_2)^p - (1\cdot s_2)\big)$ лежит в $\mathcal{F}_p(RS)$. Тогда и всякий x из RS, где $x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i s_i$, принадлежит $\mathcal{F}_p(RS)$, т. е. $RS = \mathcal{F}_p(RS)$ для любого простого p. Кольцо RS полное. $\square$

Следствие 3.2. *Для артинова кольца R с единицей и конечной группы G, групповое кольцо RG будет полным тогда и только тогда, когда кольцо R является полным.*

Доказательство. Из теоремы 1.10 об аддитивной группе артинова кольца, леммы 1.13 о том, что квазициклические подгруппы артинова кольца принадлежат его аннулятору, и теоремы 1.11 следует, что всякое артиново кольцо R

с единицей есть прямая сумма артиновых колец S и T, где аддитивная группа кольца S является полной группой без кручения, а аддитивная группа кольца T ограниченная. Так как $RG = SG \oplus TG$, то SG — полное кольцо по условию (1) теоремы 4. Так как $G^2 = G$, то кольцо TG по условию (2) полное тогда и только тогда, когда кольцо T, а, следовательно, и кольцо R также полное. $\square$

Известно (см., напр., предложение 6, [50, с. 244]), что групповое кольцо RG артиново в точности тогда, когда кольцо R артиново, а группа G конечная. Поэтому следствие 3.2 характеризует все полные артиновы групповые кольца.

3.2 Полный радикал кольца всех квадратных матриц над произвольным ассоциативным кольцом

В этом подразделе дается описание полных колец матриц $M_n(R)$ над произвольным ассоциативным кольцом R. На основе этого, характеризуется полный радикал в таких кольцах, что составляет основной результат подраздела (теорема 5). Следствие 3.4 из теоремы 5 характеризует полный радикал кольца $M_n(R)$ в случае, когда кольцо R артиново. Основной результат подраздела формулируется следующим образом.

Теорема 5. *Полный радикал кольца $M_n(R)$ всех матриц порядка $n > 1$ над кольцом R равен $M_n(C_{\mathcal{Z}}(R))$, где $C_{\mathcal{Z}}(R)$ есть $\mathcal{Z}$-полный радикал кольца R.*

Доказательство теоремы 5 опирается на следующую лемму.

Лемма 3.3. *Кольцо $M_n(R)$ всех матриц порядка $n > 1$ над произвольным кольцом R является полным тогда и только тогда, когда $C_{\mathcal{Z}}(R) = R$.*

Доказательство. Пусть кольцо $M_n(R)$ полное и $n > 1$. Факторкольцо $M_n(R)/M_n(R^2)$ есть полное кольцо с нулевым умножением, согласно лемме 2.6, его аддитивная группа является полной группой. Для всякого идеала I кольца R выполняется $M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$ (см., напр., задача 7.54, [10, с. 200]). Поэтому $\big(M_n(R)/M_n(R^2)\big)^+ \cong \big(M_n(R/R^2)\big)^+ \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n^2}(R/R^2)^+$. Следовательно, группа $(R/R^2)^+$ также полная, то есть $p(R/R^2)^+ = (R/R^2)^+$ для любого простого p. Получаем, что $p(R/R^2) = (pR + R^2)/R^2 = R/R^2$, откуда $pR + R^2 = R$, то есть R — кольцо $\mathcal{Z}_p$-полное для любого простого p.

Обратно, пусть $C_{\mathcal{Z}}(R) = R$. Так как R есть $\mathcal{Z}$-полное кольцо, то для любого простого p каждое $x \in R$ можно представить в виде $x = pr + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k b_k$, где $r, a_k, b_k \in R$ по всем k. Всякую матрицу из $M_n(R)$ можно представить как сумму матриц вида $A = xE_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, поэтому для доказательства полноты кольца $M_n(R)$ достаточно показать, что A принадлежит вербалам $\mathcal{Z}_p\big(M_n(R)\big)$ и $\mathcal{F}_p\big(M_n(R)\big)$. Для некоторого $l = 1, \ldots, n$, матрица $A = xE_{ij} = \Big(pr + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k b_k\Big)E_{ij} = p(rE_{ij}) + \sum\limits_{k=1}^{m} (a_k b_k)E_{ij} = p(rE_{ij}) + \sum\limits_{k=1}^{m} (a_k E_{il})(b_k E_{lj})$, поэтому $A \in p\big(M_n(R)\big) + \big(M_n(R)\big)^2 = \mathcal{Z}_p\big(M_n(R)\big)$.

Заметим, что если $i \neq j$, то $A^2 = (xE_{ij})^2 = O$, поэтому $A^p = O$ для любого простого p. Тогда $A = -(O - A) = -(A^p - A) \in \big(M_n(R)\big)_p$. Если же $i = j$, то для некоторого $l = 1, \ldots, n$ такого, что $l \neq i$, $A = xE_{ij} = p(rE_{ij}) + \sum\limits_{k=1}^{m} (a_k b_k)E_{ij} = p(rE_{ij}) + \sum\limits_{k=1}^{m} (a_k E_{il})(b_k E_{lj})$. Каждый из множителей $a_k E_{il}$ и $b_k E_{lj}$, как было показано выше, принадлежит $\big(M_n(R)\big)_p$, следовательно, в любом случае $A \in p\big(M_n(R)\big) + \big(M_n(R)\big)_p = \mathcal{F}_p\big(M_n(R)\big)$. $\square$

Хорошо известно (см., напр., теорема 28.3, [96, с. 138]), что кольцо всех матриц $M_n(R)$ над кольцом R артиново тогда и только тогда, когда кольцо R артиново. При этом кольцо R не обязано содержать единицу. Поэтому следующее следствие является критерием полноты артинова кольца, изоморфного кольцу всех матриц некоторого порядка.

Следствие 3.4. *Кольцо $M_n(R)$ всех матриц порядка $n > 1$ над артиновым кольцом R является полным кольцом тогда и только тогда, когда кольцо $M_n(R/R^2)$ полное.*

Доказательство. Из леммы 3.3 следует, что для доказательства следствия достаточно проверить справедливость утверждения: артиново кольцо R является $\mathcal{Z}$-полным тогда и только тогда, когда факторкольцо R/R^2 есть $\mathcal{Z}$-полное кольцо. Прямое утверждение очевидно. Обратно, если факторкольцо $R/R^2 = \overline{R}$

артинова кольца R является $\mathcal{Z}$-полным кольцом, то для любого простого числа p, $\mathcal{Z}(\overline{R}) = \overline{R}^2 + p\overline{R} = \overline{R}$. Но $\overline{R}$ — кольцо с нулевым умножением, поэтому $p\overline{R} = \overline{R}$, откуда $pR + R^2 = R$, то есть R является $\mathcal{Z}$-полным кольцом. □

Перейдем к доказательству теоремы 5.

Доказательство. Согласно лемме 3.3, кольцо матриц $M_n(C_{\mathcal{Z}}(R))$ является полным, поэтому содержится в полном радикале кольца $M_n(R)$. Покажем, что обратное также справедливо, т. е. $C(M_n(R)) \subseteq M_n(C_{\mathcal{Z}}(R))$. Пусть $\overline{R} = R/I$, где $I = C_{\mathcal{Z}}(R)$. Предположим, факторкольцо $M_n(R)/M_n(I)$, изоморфное $M_n(R/I) = M_n\big(\overline{R}\big)$ (задача 7.54, [10, с. 200]), имеет ненулевой полный радикал $\overline{C}$. Подкольцо $\overline{C}$ является идеалом в $M_n\big(\overline{R}\big)$, поэтому представляет собой множество матриц, элементы которых образуют некоторый идеал $\overline{J}$ кольца $\overline{R}$. Кольцо $\overline{R}$ имеет нулевой $\mathcal{Z}$-полный радикал, а значит, $\mathcal{Z}_p\big(\overline{J}\big) = p\overline{J} + \overline{J}^2 \neq \overline{J}$ для некоторого простого числа p. Тогда и $p\overline{C} + \overline{C}^2 \neq \overline{C}$, что противоречит полноте $\overline{C}$. Получили, $\overline{C} = C\big(M_n(\overline{R})\big) = (\overline{0})$. Из этого следует требуемое. □

Полный радикал кольца $M_n(R)$ в случае, когда R — артиново кольцо с ограниченной аддитивной группой (в частности, когда кольцо R конечное), характеризуется следующим следствием.

Следствие 3.5. *Для полного кольца матриц $M_n(R)$ порядка $n > 1$ над артиновым кольцом R с ограниченной аддитивной группой, полный радикал $C(M_n(R)) = M_n(I)$, где I — наибольший идемпотентный идеал кольца R. В частности, кольцо $M_n(R)$ полное тогда и только тогда, когда $R^2 = R$.*

Доказательство. В силу артиновости кольца R, убывающая цепочка натуральных степеней кольца $R \supseteq R^2 \supseteq R^3 \supseteq \ldots$ стабилизируется на некоторой степени $R^k = I$. Ясно, что идемпотентный идеал I является $\mathcal{Z}$-полным кольцом, при этом R/I является нильпотентным артиновым кольцом с ограниченной аддитивной группой, поэтому редуцированным по лемме 2.15. Это означает, что $C_{\mathcal{Z}}(R) = I$ и по теореме 5, $C(M_n(R)) = M_n(I)$. □

Следствие 3.6. *Любое конечное кольцо может быть вложено в конечное полное кольцо.*

Доказательство. Любое конечное кольцо R можно вложить в конечное кольцо с единицей R_1 с помощью операции присоединения единицы (см., к примеру, [5, с. 21]). Хорошо известно, что всякое конечное кольцо с единицей изоморфно кольцу матриц n-го порядка над кольцом классов вычетов Z_m для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$ (см., к примеру, теорема 11, [5, с. 135]). Следовательно, кольцо R_1 вложимо в кольцо $M_n(Z_m)$, полное по следствию 3.5. □

3.3 Об артиновых кольцах с отщепляемым полным радикалом

Основной целью подраздела 3.3 является получение критерия расщепляемости для артиновых колец с односторонней единицей и доказательство того, что любое коммутативное артиново кольцо, аддитивная группа которого не содержит квазициклических подгрупп, является расщепляемым кольцом.

Основные результаты подраздела формулируются следующим образом. В коммутативном случае справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Коммутативное артиново кольцо R, аддитивная группа которого не содержит квазициклических подгрупп, является расщепляемым.*

В теореме 7 приведен критерий расщепляемости для артиновых колец с односторонней единицей.

Теорема 7. *Для артинова слева кольца R с правой единицей e следующие условия эквивалентны:*
1) *кольцо R расщепляемо;*
2) *кольцо eR расщепляемо;*
3) *полный радикал кольца eR является кольцом с единицей.*

Прежде чем перейти к их доказательству, приведем ряд вспомогательных утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Рассмотрим сначала вопросы расщепляемости для коммутативных артиновых колец. Не найдя соответствующей ссылки, для полноты изложения приведем доказательство, возможно известного утверждения.

Лемма 3.7. *Всякое ненильпотентное коммутативное артиново кольцо R есть прямая сумма идеалов — артинова кольца с единицей и нильпотентного артинова кольца.*

Доказательство. Известно, что всякое ненильпотентное артиново кольцо содержит ненулевой идемпотент e (см., к примеру, предложение 4.1, [95]). Относительно e кольцо R может быть представлено в виде прямой суммы идеалов: $R = Re \oplus (R - Re)$, где Re — артиново кольцо с единицей. Если артиново кольцо $R_1 = R - Re$ нильпотентно, то все доказано. Иначе $R_1 = R_1e_1 \oplus (R_1 - R_1e_1)$ для некоторого идемпотента $e_1 \in R_1$, и так далее. В силу артиновости R, убывающая цепочка идеалов кольца $R = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots \supseteq R_i \supseteq \ldots$, где $R_i = R_{i-1} - R_{i-1}e_{i-1}$ для $i \in \mathbb{N}$, стабилизируется на некотором шаге n, при этом получим, что $R = Re \oplus R_1e_1 \oplus \ldots \oplus R_{n-1}e_{n-1} \oplus R_n$, где $Re \oplus R_1e_1 \oplus \ldots \oplus R_{n-1}e_{n-1}$ есть кольцо с единицей $1 = e + e_1 + \ldots + e_{n-1}$, а кольцо R_n нильпотентно. $\square$

Из леммы 3.7 следует, что идемпотентное коммутативное артиново кольцо R содержит единицу. Поэтому вопрос расщепляемости коммутативного артинова кольца сводится к тому, будут ли расщепляемыми коммутативные артиновы кольца с единицей и нильпотентные коммутативные артиновы кольца.

В некоммутативном случае идемпотентное артиново кольцо может не иметь даже односторонней единицы. К примеру, таким является кольцо матриц вида $\begin{pmatrix} R & J(R) \\ J(R) & J^2(R) \end{pmatrix}$ для любого не полупростого конечного кольца R с единицей.

Критерием существования правой единицы в артиновом слева кольце, обобщающим аналогичный результат для конечных колец (см., напр., теорема 3, [5, с. 11]), является следующее предложение, имеющее самостоятельный интерес.

Предложение 3.8. *Артиново слева кольцо R обладает правой единицей тогда и только тогда, когда $Rx = R$ для некоторого $x \in R$.*

Доказательство. Прямое утверждение очевидно, если в качестве элемента $x \in R$ взять правую единицу кольца. Обратно, пусть $R = Rx \neq (0)$ для некоторого $x \in R$. Прежде всего, покажем, что в кольце, удовлетворяющему условию предложения, для произвольного $a \in R$ равенство $ax = 0$ возможно только при $a = 0$. То есть x является правым неделителем нуля в R. Предположим противное — пусть для некоторого ненулевого элемента $a_1 \in R$ произведение $a_1 x = 0$. Так как $a_1 \in Rx$, то $a_1 = a_2 x$ для некоторого $a_2 \neq 0$, $a_2 \in Rx$, при этом $a_2 x^2 = 0$. Аналогично, элемент $a_2 \in Rx$ можно представить как $a_2 = a_3 x$ для некоторого $a_3 \neq 0$, при этом $a_3 x^3 = 0$. И так далее, для a_1 найдутся элементы $a_i \in Rx$, $i \in \mathbb{N}$ такие, что $a_1 = a_2 x = a_3 x^2 = \ldots = a_i x^{i-1} = \ldots \neq 0$, но $a_1 x = a_2 x^2 = a_3 x^3 = \ldots = a_i x^i = \ldots = 0$.

Для всех $i \in \mathbb{N}$ обозначим $A_i = \{r \in R \mid r x^i = 0\}$. Множества A_i будут левыми идеалами кольца R. Ясно, что $A_{i-1} \subseteq A_i$ для всех $i > 1$, при этом $a_i \in A_i$, но $a_i \notin A_{i-1}$, то есть цепочка левых идеалов A_i кольца R является строго возрастающей: $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. Но кольцо R идемпотентно, поэтому является также нетеровым слева кольцом (см., к примеру, предложение 2.6 [98]). Поэтому любая возрастающая цепочка его левых идеалов стабилизируется для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает, что в кольце, удовлетворяющему условию леммы, для всех $a \in R$ из равенства $ax = 0$ следует $a = 0$.

Так как $Rx = R$ для некоторого $x \in R$, то в кольце R существует $e \in R$ такой что $ex = x$, тогда для всех $r \in R$, $rex = rx$, откуда $(re - r)x = 0$. Из доказанного выше следует, что $re - r = 0$, или $re = r$ для всех $r \in R$, то есть e будет правой единицей в R. □

Перейдем к доказательству теоремы 6.

Доказательство. Согласно замечанию 1.2, можно считать, что аддитивная группа кольца R является периодической. Из теоремы 1.10 следует, что аддитивная группа кольца R, удовлетворяющая условиям теоремы, ограниченная. Если R нильпотентно, то оно редуцировано по лемме 2.15, поэтому расщепляемо по определению. В противном случае, коммутативное артиново кольцо R по лемме 3.7 представимо в виде прямой суммы идеалов $R = A \oplus B$, где A — артиново кольцо с единицей, а B — нильпотентное кольцо, редуцированное согласно сказанному выше. Осталось показать, что кольцо A расщепляемо.

Известно, что коммутативное артиново кольцо с единицей A является конечной прямой суммой локальных артиновых колец A_i (см., к примеру, теорему 8.7, [93], с. 90). Для каждого из этих колец факторкольцо по радикалу Джекобсона $A_i/J(A_i)$ есть поле, а любое поле, ввиду отсутствия собственных идеалов, является либо полным кольцом, либо редуцированным. Поэтому, согласно теоремам 1 и 2, кольца A_i будут соответственно полными или редуцированными. Таким образом, кольцо A также расщепляемое. $\square$

Очевидным следствием теоремы 6 является следующее утверждение.

Следствие 3.9. *Любое конечное коммутативное кольцо расщепляемо.*

Также из доказанной теоремы 6 следует, что все коммутативные артиновы кольца с единицей являются расщепляемыми, так как не содержат квазициклических аддитивных подгрупп. Кроме того, любое нильпотентное артиново кольцо, не содержащее квазициклических подгрупп, будет редуцированным, поэтому расщепляемым по определению. Если же артиново кольцо содержит квазициклические подгруппы, кольцо может быть нерасщепляемым. Следующее кольцо является примером нерасщепляемого нильпотентного артинова кольца.

Положим $R^+ = C_{p^\infty} + \langle a \rangle$, где $pa = 0$. Умножение в R определим соотношениями $a^2 = c_1$, $ac_i = c_i a = 0$, где c_i — порождающие C_{p^∞}. Напомним, на квазициклической группе можно задать только нулевое умножение. Более того, по лемме 1.13, квазициклические подгруппы артинова кольца содержатся в его полном аннуляторе, а для коммутативного кольца, согласно теореме 6, в его нильпотентном слагаемом. Тогда полная подгруппа C_{p^∞} выделяется прямым слагаемым в группе R^+ и содержится в аннуляторе кольца R, т. е. $C(R) = C^0_{p^\infty}$, но дополняющего идеала для полного радикала в кольце нет.

Если аддитивная группа артинова кольца содержит квазициклические подгруппы, то выполняется следующее утверждение.

Предложение 3.10. *Наибольшая полная подгруппа D артинова кольца R является идеалом в R, который выделяется прямым слагаемым в кольце R в случае, когда факторкольцо R/D содержит одностороннюю единицу.*

Доказательство. Отметим, если полная подгруппа D артинова кольца содержит подгруппы, изоморфные аддитивной группе $\mathbb{Q}$ поля рациональных чисел, то они всегда выделяются прямым слагаемым в кольце (см. замечание 1.2). Поэтому доказательство предложения достаточно провести для случая, когда аддитивная группа R^+ кольца R является периодической. Тогда полная подгруппа $D \cong \oplus_\mu C_{p_i^\infty}$ по лемме 1.13 содержится в аннуляторе $Ann\ R$ кольца R и выделяется прямым слагаемым в аддитивной группе кольца: $R^+ = A \oplus D$. Пусть факторкольцо R/D содержит левую единицу $\bar{e}$. Так как D — нилькольцо, то (см., например, [89], лемма 1.3.2) найдется идемпотент $e \in R$, являющийся прообразом $\bar{e}$ при естественном гомоморфизме $\varphi : R \to R/D$.

Множество $B = eA = \{ea \,|\, a \in A\}$ будет подгруппой в R и для всех $r \in R$, $er - r = d \in D$, откуда $r = er - d \in eA + D$, то есть $R^+ = eA + D$. Из включения $D \subseteq Ann\ R$ следует, что если для некоторого $a \in A$, произведение $ea \in D$, то $ea = e \cdot ea = 0$, то есть последняя сумма будет прямой: $R^+ = eA \oplus D$. Также из включения $D \subseteq Ann\ R$ следует, что для того, чтобы подгруппа eA была идеалом кольца R, достаточно, чтобы $eA = B$ была подкольцом в R. Если для некоторых $b_1, b_2 \in B$, где $b_1 = ea_1$, произведение $b_1 b_2 = b + d$, где $b = ea \in B$, $d \in D$, то $d = b_1 b_2 - b = ea_1 b_2 - ea = e^2 a_1 b_2 - e^2 a = e(ea_1 b_2 - ea) = ed = 0$, откуда $b_1 b_2 = b$. Следовательно, B является идеалом кольца R и $R = B \oplus D$. □

Следствие 3.11. *Если в артиновом кольце R с наибольшей полной подгруппой D факторкольцо R/D редуцировано и содержит одностороннюю единицу, то R является расщепляемым кольцом.*

Из доказательства леммы 3.7 следует, что для того, чтобы коммутативное артиново кольцо было представимо в виде прямой суммы своих собственных идеалов, достаточно, чтобы оно содержало нетривиальный идемпотент (который является центральным в силу коммутативности кольца). Из утверждения ниже следует, что выполнение подобного требования в некоммутативном случае также означает, что кольцо разлагается в прямую сумму своих идеалов. Не найдя ссылок на него, для полноты изложения приведем его с доказательством.

Лемма 3.12. *Если идеал I кольца R является кольцом с единицей e, то найдется идеал K кольца R такой, что $R = I \oplus K$. При этом e является центральным идемпотентом кольца R.*

Доказательство. Пусть идеал I содержит собственную двустороннюю единицу e, то есть $e \in I$ и $ei = ie = e$ для всех $i \in I$. Рассмотрим левое разложение Пирса аддитивной группы кольца R относительно идемпотента e, $R = Re \oplus (R - Re)$, где Re и $K = R - Re$ — левые идеалы кольца R. Так как $e \in I$, то $Re \subseteq I$. Обратно, $I = Ie \subseteq Re$, поэтому $I = Re$. Аналогично, $I = eR$.

Так как e — двусторонняя единица идеала $I = Re = eR$, то для любого элемента $r \in R$ выполняется $ere = (er)e = e(er) = er$. С другой стороны, $ere = e(re) = (re)e = re$, откуда $re = er$, то есть e — центральный идемпотент кольца R. Поэтому левый идеал $K = \{r - re \mid \forall r \in R\}$ будет двусторонним идеалом кольца R, откуда следует требуемое. □

Следствие 3.13. *Идеал I кольца R с единицей выделяется прямым слагаемым в R тогда и только тогда, когда сам является кольцом с единицей.*

Доказательство. Пусть e — единица в R, где кольцо $R = I \oplus K$ есть прямая сумма двух идеалов. Пусть $e = e_1 + e_2$, где $e_1 \in I$, $e_2 \in K$. Тогда $e = e^2 = e_1^2 + e_2^2$, откуда, в силу единственности разложения e по компонентам, принадлежащим I и K получаем, что $e_1 = e_1^2$ и $e_2 = e_2^2$. Аналогично лемме 3.12 проверяется, что $e_1R = I$, $e_2R = K$. При этом для любого $r \in R$, $r = re = er$, поэтому $r = re_1 + re_2 = e_1r + e_2r$, откуда, в силу единственности разложения r, $re_1 = e_1r$ и $re_2 = e_2r$, то есть e_1 и e_2 — центральные идемпотенты R.

Обратное утверждение следует из леммы 3.12. □

Следствие 3.14. *Кольцо R с единицей является расщепляемым тогда и только тогда, когда полный радикал $C(R)$ является кольцом с единицей.*

Кольцо матриц вида $\begin{pmatrix} F_{p^n} & F_{p^n} \\ 0 & F_p \end{pmatrix}$ при $n > 1$ является примером нерасщепляемого кольца с единицей. Полный радикал этого кольца — это подкольцо матриц вида $\begin{pmatrix} F_{p^n} & F_{p^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, которое содержит только левую, но не правую единицу, поэтому отщепляемым не является.

Теорема 7 обобщает утверждение следствия 3.14 на случай артинова кольца с односторонней единицей. Докажем ее.

Теорема 7. *Для артинова слева кольца R с правой единицей e следующие условия эквивалентны:*
1) *кольцо R расщепляемо;*
2) *кольцо eR расщепляемо;*
3) *полный радикал кольца eR является кольцом с единицей.*

Доказательство. Из условий теоремы, замечания 1.2 и теоремы 1.12 следует, что достаточно рассмотреть случай, когда аддитивная группа кольца R является периодической. Из предложения 2.6 [98] о том, что идемпотентное артиново кольцо является нетеровым слева и теоремы 1.14 следует, что аддитивная группа кольца R не содержит квазициклических подгрупп. Поэтому R^+ ограниченная группа по теореме 1.10.

По условию, e — правая единица кольца R. Тогда для любого $r \in R$, $r - re = (r - re)^2 = 0 \in J(R)$, то есть при гомоморфизме $\varphi : R \to R/J(R)$, образ $\varphi(e)$ является единицей кольца $R/J(R)$. Следовательно, e является главным идемпотентом кольца R. Также из того, что e является правой единицей в кольце R, следует, что подкольцо $eRe = eR$ будет правым идеалом кольца R. Но, для основной части промежуточных утверждений доказательства достаточно, чтобы e являлся главным идемпотентом R, поэтому приведем его в максимальной общности.

1) $\Rightarrow$ 2). Если кольцо R расщепляемо, то есть $R = A \oplus C(R)$, то для главного идемпотента e кольца, при этом $eRe = eAe + eC(R)e = eAe + C(eRe)$ по лемме 2.17. Последняя сумма также будет прямой, так как eRe является кольцом с единицей e и произведение $eAe \cdot eC(R)e \subseteq A \cdot C(R) = (0)$. Если $x \in eAe \cap eC(R)e$, то $x = x \cdot e \in x \cdot eRe = x \cdot (eAe + eC(R)e) = (0)$. Заметим, что даже при $eAe = (0)$ или $C(eRe) = (0)$, кольцо eRe является расщепляемым, согласно определению.

2) $\Rightarrow$ 1). Обратно, пусть кольцо eRe расщепляемо, $eRe = A \oplus C$, где $C = C(eRe) = eC(R)e$. Кольцо eRe является кольцом с единицей e, поэтому по следствию 3.13, идеалы A и C кольца eRe также являются кольцами с собственными единицами, пусть e_a и e_c соответственно. Элементы e_a и e_c явля-

ются ортогональными идемпотентами, перестановочными со всеми элементами из eRe, при этом $e_a + e_c = e$. В этом случае $A = e_a \cdot (eRe) = (eRe) \cdot e_a = e_a R e_a$ и $C = e_c \cdot (eRe) = (eRe) \cdot e_c = e_c R e_c$.

Пусть R_{eRe} — минимальный двусторонний идеал кольца R, порожденный подкольцом eRe, тогда $R_{eRe} = R(eRe)R + R(eRe) + (eRe)R + eRe$. Заметим, для любого идемпотента e, подкольцо $Re = Re \cdot ee \subseteq Re \cdot Re = (Re)^2$, то есть $Re = (Re)^2$. Аналогично, $eR = (eR)^2$. Отсюда, $R_{eRe} = ReR + Re + eR + eRe$, где $ReR = \{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i e s_i \mid r_i, s_i \in R\}$. При этом $eRe = e(Re) \subseteq eR$, в свою очередь, $eR = eeR \subseteq ReR$ и $Re = Ree \subseteq ReR$. Таким образом, $R_{eRe} = ReR$.

Покажем, что $ReR = R$. Так как e — главный идемпотент кольца R, то при естественном гомоморфизме $\varphi : R \to R/J(R)$, $\varphi(ReR) = \varphi(R^2) = \varphi(R)$, так как $R^2 = R$. Тогда для любого элемента $r \in R$, образ $\varphi(r) \in \varphi(ReR)$ поэтому $r \in ReR + \ker\varphi = ReR + J(R)$. Таким образом, $R = ReR + J(R)$. Возводя обе части полученного равенства в степень, учитывая идемпотентность кольца R и нильпотентность радикала Джекобсона в артиновом кольце, для некоторого натурального числа n получим $R = R^n \subseteq ReR + J^n(R)$, откуда $R = ReR$.

Ясно, что $R = ReR = Re_aR + Re_cR$. Покажем, что $Re_cR = C(R)$. Так как аддитивная группа кольца R ограничена, то $C^2(R) = C(R)$, иначе факторкольцо полного кольца $C(R)/C^2(R)$ являлось бы ненулевым кольцом с нулевым умножением и ограниченной аддитивной группой, то есть редуцированным кольцом. Тогда $C(R) = C^3(R) = RC(R)R$. Если $x \in C(R) = RC(R)R$, то $x \in (ReR)C(R)(ReR)$, откуда $x \in Re\big(RC(R)R\big)eR \subseteq Re_cRe_cR \subseteq Re_cR$. Обратно, $e_c \in e_cRe_c = C(eRe) \subseteq C(R)$, следовательно, $Re_cR \subseteq C(R)$.

Остается показать, что сумма $R = Re_aR + Re_cR$, где $Re_cR = C(R)$, будет прямой. Пусть $x \in Re_aR \cap Re_cR$. Идемпотенты e_a и e_c ортогональны и перестановочны со всеми элементами из eRe, поэтому $e_aRe_c = e(e_aRe_c)e = e_a(eRe)e_c = (eRe)e_ce_a = (0)$. Следовательно, $x \cdot Re_aR = (0)$ и $x \cdot Re_cR = (0)$, откуда $x \cdot R = x \cdot (Re_aR + Re_cR) = (0)$. Так как e — правая единица кольца R, то $x = x \cdot e \in x \cdot R = (0)$, поэтому $x = 0$.

Условия 2) и 3) теоремы эквивалентны по следствию 3.14. $\square$

Следствие 3.15. *Идемпотентное артиново кольцо R является полным (редуцированным) кольцом тогда и только тогда, когда для главного идемпотента e артиново кольцо eRe является полным (соответственно редуцированным) кольцом.*

Доказательство. Прямое утверждение это следствие 2.18. Справедливость обратного утверждения следует из доказательства теоремы 7. Если eRe — полное кольцо, идемпотент $e_c = e$ будет главным идемпотентом кольца R. Тогда $C(R) = Re_cR = ReR = R$, то есть кольцо R полное. Аналогично, если кольцо eRe редуцированное, то $e_a = e$ является главным идемпотентом в R, при этом $e_c = 0$. Тогда $C(R) = Re_cR = (0)$, то есть кольцо R редуцированное. □

Заключение

В диссертации изучаются вопросы полноты и редуцированности (в смысле Л. М. Мартынова, [58, 69]) для ассоциативных артиновых колец. Основные полученные результаты состоят в следующем:

1. Охарактеризованы полные ассоциативные артиновы кольца, в частности, полные конечные кольца.

2. Охарактеризованы редуцированные ассоциативные артиновы кольца. Доказано, что любое такое кольцо является конечным.

3. С точностью до изоморфизма описаны все минимально полные ассоциативные артиновы кольца.

4. Найден критерий полноты полугруппового кольца, приведен критерий полноты артинова группового кольца.

5. Описан полный радикал кольца всех матриц некоторого порядка над произвольным ассоциативным кольцом, дан критерий полноты такого кольца над артиновым кольцом.

6. Доказано, что любое ассоциативное коммутативное артиново кольцо без квазициклических аддитивных подгрупп является расщепляемым. Найден критерий расщепляемости ассоциативного артинова кольца с правой единицей.

Кроме перечисленных основных результатов, в работе содержатся и другие результаты, полученные в ходе их доказательства и имеющие самостоятельный интерес для теории артиновых колец.

Достигнутые результаты иллюстрируют плодотворность предложенной в работах [58, 69] проблематики по изучению понятий полноты и редуцированности для ассоциативных колец. Идущая из теории абелевых групп, она, на наш взгляд, «вдохнула новую жизнь» в теорию артиновых колец, исследования по которой в настоящее время стали затухать. Исключение здесь составляют конечные кольца, которые продолжают активно изучаться (см., напр., [6–9, 40–46, 54, 56, 97]).

И хотя полной аналогии между теорией абелевых групп и теорией ассоциативных колец не существует, известно (см. [2]), что ассоциативное кольцо простой или нулевой характеристики вложимо в простое кольцо (которое, естественно, будет полным). Также в диссертационной работе доказано вложение любого конечного ассоциативного кольца в полное ассоциативное кольцо (следствие 3.6). То есть, имеют место случаи, аналогичные известному факту вложения произвольной абелевой группы в полную группу.

Общеизвестно, что любая абелева группа является прямой суммой своих полной и редуцированной подгрупп. Естественность аналогичной задачи для колец объясняется простотой и конструктивностью построения расширений полных колец с помощью редуцированных. В общем случае задача описания расщепляемых колец, является, по-видимому, весьма трудной. Ситуация меняется, если ограничиться задачей описания многообразий или псевдомногообразий конечных алгебр, все алгебры которых расщепляемы. В работе [85] эта задача решена для псевдомногообразий конечных полугрупп, в [72] для многообразий групп и полугрупп. Известный результат работы [107] характеризует многообразия ассоциативных колец с отщепляемым радикалом Джекобсона. Для полного радикала вопрос описания расщепляемых многообразий и псевдомногообразий конечных ассоциативных колец (проблема 3.3, [69]) остается открытым.

Кроме этого, хорошо известно, что многообразие всех абелевых групп не является редуцированным, в то время как все его собственные подмногообразия являются редуцированными. Пока нет никаких исследований по проблеме описания многообразий ассоциативных колец с аналогичным свойством (проблема 3.26, [69]).

Отметим также, что теория абелевых групп вызывает к жизни вопрос описания минимально радикальных колец, который в общей теории радикалов не ставился, но заслуживает, на наш взгляд, внимания.

Список литературы

1. Андрунакиевич, В. А. *Радикалы алгебр и структурная теория* / В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин. — Москва : Наука, 1979. — 496 с.

2. Бокуть, Л. А. *Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп* / Л. А. Бокуть // Сибирский мат. журнал. — 1963. — Т. 4, № 3. — С. 500–518 ; Т. 4, № 5. — С. 729–743.

3. Бокуть, Л. А. *Некоммутативные кольца* / Л. А. Бокуть, И. В. Львов, В. К. Харченко // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — Москва : ВИНИТИ, 1988. — Т. 18. — С. 5–116.

4. Джекобсон, Н. *Строение колец* / Н. Джекобсон ; пер. с англ. В. А. Андрунакиевича ; под ред. А. Г. Куроша. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1961. — 392 с.

5. Елизаров, В. П. *Конечные кольца* / В. П. Елизаров. — Москва : Гелиос АРВ, 2006. — 304 с. — ISBN 5-85438-158-3.

6. Журавлев, Е. В. *О группе обратимых элементов конечных локальных колец характеристики p* / Е. В. Журавлев // Сибирские электронные мат. известия. — 2014. — Т. 11. — С. 362–371. — URL: semr.math.nsc.ru/v11/p362-371.pdf. — Дата публикации: 23.05.2014.

7. Журавлев, Е. В. *О классификации конечных коммутативных локальных колец* / Е. В. Журавлев. — DOI 10.17377/semi.2015.12.050 // Сибирские электронные мат. известия. — 2015. — Т. 12. — С. 625–638. — URL: semr.math.nsc.ru/v12/p625-638.pdf. — Дата публикации: 22.09.2015.

8. Журавлев, Е. В. *О группе обратимых элементов конечных локальных колец с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона* / Е. В. Журавлев. — DOI 10.17377/semi.2017.14.048 // Сибирские электронные мат. известия.

— 2017. — Т. 14. — С. 552–567. — URL: semr.math.nsc.ru/v14/p552-567.pdf. — Дата публикации: 13.06.2017.

9. Журавлев, Е. В. *Строение колец, удовлетворяющих тождеству индекса два* / Е. В. Журавлев, Ю. Н. Мальцев // Сибирские электронные мат. известия. — 2014. — Т. 11. — С. 800–810. — URL: semr.math.nsc.ru/v11/p800-810.pdf. — Дата публикации: 27.10.2014.

10. *Задачи и теоремы теории ассоциативных колец* : учебное пособие / Е. В. Журавлев, И. М. Исаев, А. В. Кислицин [и др.] ; под науч. ред. Ю. Н. Мальцева. — Барнаул : АлтГПУ, 2018. — 334 с. — ISBN 978-5-88210-924-9.

11. Знаева, И. В. *Наследственно чистые алгебры Ли* / И. В. Знаева // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2007. — Вып. 6. — С. 12–15.

12. Знаева, И. В. *О полном радикале матричной алгебры Ли* / И. В. Знаева // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2008. — Вып. 7. — С. 13–18.

13. Каргаполов, М. И. *Основы теории групп* / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Наука, 1982. — 288 с.

14. Князев, О. В. *О чистых алгебрах* / О. В. Князев // Вестник Омского ун-та. — 2001. — № 3. — С. 18–20.

15. Князев, О. В. *О чистых алгебрах с выделенным идемпотентом* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. — Вып. 1. — С. 17–19.

16. Князев, О. В. *Об абсолютно чистых алгебрах с выделенным элементом* / О. В. Князев // Матем. и информатика: наука и образование : Межвуз. сб. науч. тр. : Ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. — Вып. 2. — С. 23–26.

17. Князев, О. В. *Наследственно чистые коммутативные моноиды* / О. В. Князев // Матем. и информатика: наука и образование : Межвуз. сб. науч. тр. : Ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2003. — Вып. 3. — С. 13–15.

18. Князев, О. В. *О наследственно чистых полугруппах* / О. В. Князев // Вестник Омского ун-та. — 2003. — № 3. — С. 13–15.

19. Князев, О. В. *Полугруппы с наследственно чистыми подполугруппами* / О. В. Князев // Изв. Урал. гос. ун-та. Серия «Математика и механика». — 2005. — Вып. 8. — С. 69–79.

20. Князев, О. В. *Наследственно чистые моноиды* / О. В. Князев // Сибирские электронные мат. известия. — 2005. — Т. 2. — С. 83–87. — URL: semr.math.nsc.ru/v2/p83-87.pdf. — Дата публикации: 30.06.2005.

21. Князев, О. В. *О чистых циклических полугруппах групп* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2006. — Вып. 5. — С. 24–26.

22. Князев, О. В. *Простые по чистоте вполне регулярные полугруппы* / О. В. Князев // Вестник Омского ун-та. — 2006. — № 4. — С. 9–13.

23. Князев, О. В. *О простых по чистоте моноидах* / О. В. Князев // Электрон. науч. журнал «Вестник ОмГПУ», 2007. — URL: www.omsk.edu/article/vestnik-omgpu-169.pdf. — Дата публикации: 14.05.2007.

24. Князев, О. В. *Полугруппы с нулями без чистых циклических подполугрупп* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2007. — Вып. 6. — С. 15–17.

25. Князев, О. В. *О простых по чистоте полугруппах с нулем* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2008. — Вып. 7. — С. 19–21.

26. Князев, О. В. *О полных нильполугруппах* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2009. — Вып. 8. — С. 10–12.

27. Князев, О. В. *О минимально полных коммутативных нильполугруппах* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2010. — Вып. 9. — С. 12–14.

28. Князев, О. В. *О минимально полных коммутативных полугруппах* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2011. — Вып. 10. — С. 6–8.

29. Князев, О. В. *О чистых алгебрах и ретрактах* / О. В. Князев // Актуальные проблемы соврем. науки и образования : сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф.: в 5 ч. — Москва : АР-Консалт, 2015. —Ч. 1. — С. 32–34.

30. Князев, О. В. *О чистых подалгебрах универсальных алгебр с выделенным идемпотентом* / О. В. Князев // Современнная математика и концепции инновационного мат. образования. — Москва : Изд. дом МФО, 2016. — Т. 3 (1).— С. 44–49.

31. Князев, О. В. *О минимально полных полугруппах* / О. В. Князев // Вестник Омского ун-та. — 2017. — № 2 (84). — С. 4–7.

32. Князев, О. В. *Минимальные полные периодические полугруппы с нулем, в которых множество нильэлементов не образуют подполугруппу* / О. В. Князев, Т. Ю. Финк // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2009. — Вып. 8. — С. 12–15.

33. Князев, О. В. *Минимально полные конечные полугруппы с нулем, в которых множество нильэлементов является подполугруппой* / О. В. Князев, Т. Ю. Финк // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2010. — Вып. 9. — С. 14–18.

34. Корнев, А. И. *О модулях с чистыми подмодулями* / А. И. Корнев // Универсальная алгебра и ее приложения : тр. междунар. семинара. — Волгоград : Перемена, 2000. — С. 144–152.

35. Корнев, А. И. *Простые по чистоте модули редуцированных многообразий модулей над коммутативными кольцами* / А. И. Корнев // Вестник Омского ун-та. — 2000. — № 4. — С. 30–37.

36. Корнев, А. И. *О полных модулях* / А. И. Корнев // Абелевы группы и модули. — Томск : ТГУ, 2000. — Вып. 15. — С. 30–37.

37. Корнев, А. И. *Кольца, над которыми все модули абсолютно чистые* / А. И. Корнев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. — Вып. 1. — С. 29–31.

38. Корнев, А. И. *Чисто инъективные модули* / А. И. Корнев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. — Вып. 2. — С. 26–28.

39. Корнев, А. И. *Полные радикалы некоторых групповых колец* / А. И. Корнев // Сибирский мат. журнал. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1065–1072.

40. Коробков, С. С. *Конечные кольца, содержащие в точности два максимальных подкольца* / С. С. Коробков // Известия вузов. Математика. — 2011. — № 6. — С. 55–62.

41. Коробков, С. С. *Проектирования колец Галуа* / С. С. Коробков // Алгебра и логика. — 2015. — № 1 (54). — С. 16–33.

42. Коробков, С. С. *Проектирования конечных коммутативных колец с единицей* / С. С. Коробков // Алгебра и логика. — 2018. — № 3 (57). — С. 285–305.

43. Кузьмина, А. С. *Описание конечных ненильпотентных колец, имеющих планарные графы делителей нуля* / А. С. Кузьмина // Дискретная математика. — 2009. — № 4 (21). — С. 60–75.

44. Кузьмина, А. С. *Конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля* / А. С. Кузьмина, Ю. Н. Мальцев // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 3. — С. 24–30.

45. Кузьмина, А. С. *Конечные кольца с некоторыми ограничениями на графы делителей нуля* / А. С. Кузьмина, Ю. Н. Мальцев // Известия вузов. Математика. — 2014. — № 12. — С. 48–59.

46. Кузьмина, А. С. *Конечные кольца с эйлеровыми нильпотентными графами* / А. С. Кузьмина, Ю. Н. Мальцев. — DOI 10.17377/semi.2017.14.025 // Сибирские электронные мат. известия. — 2017. — Т. 14. — С. 274–279. — URL: semr.math.nsc.ru/v14/p274-279.pdf. — Дата публикации: 30.03.2017.

47. Курош, А. Г. *Радикалы колец и алгебр* / А. Г. Курош // Математический сборник. — 1953, — Т. 33 (1). — С. 13–26.

48. Курош, А. Г. *Теория групп* / А. Г. Курош. — 3-е изд., доп. — Москва : Наука, 1967. — 648 с.

49. Кэртис, Ч. *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр* / Ч. Кэртис, И. Райнер ; пер. с англ. Б. Н. Гартштейн [и др.] ; под ред. С. Д. Бермана. — Москва : Наука, 1969. — 668 с.

50. Ламбек, И. *Кольца и модули* / И. Ламбек ; пер. с англ. А. В. Михалёва ; под ред. Л. А. Скорнякова. — Москва : Мир, 1971. — 280 с.

51. Лидл, Р. *Конечные поля.* В 2 томах. Т. 1 / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер ; пер. с англ. Е. А. Жукова и В. И. Петрова ; под ред. В. И. Нечаева. — Москва : Мир, 1988. — 430 с. — ISBN 5-03-000065-8.

52. Мальцев, А. И. *Об умножении классов алгебраических систем* / А. И. Мальцев // Сибирский мат. журнал. — 1967. — Т. 8. — С. 346–365.

53. Мальцев, А. И. *Алгебраические системы* / А. И. Мальцев. — Москва : Наука, — 1970. — 392 с.

54. Мальцев, Ю. Н. *Описание многообразий колец, в которых конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля* / Ю. Н. Мальцев, Е. В. Журавлев, А. С. Кузьмина // Известия вузов. Математика. — 2013. — № 6. — С. 13–24.

55. Мальцев, Ю. Н. *Лекции по теории ассоциативных колец : учебное пособие* / Ю. Н. Мальцев, Е. В. Журавлев. — Барнаул : АлтГПА, 2014. — 422 с. — ISBN 978-5-88210-735-1.

56. Мальцев, Ю. Н. *Конечные кольца, нильпотентные графы которых удовлетворяют условию Дирака* / Ю. Н. Мальцев, А. С. Монастырева. — DOI 10.17377/semi.2017.14.118 // Сибирские электронные мат. известия. — 2017. — Т. 14. — С. 1373–1379. — URL: semr.math.nsc.ru/v14/p1373-1379.pdf. — Дата публикации: 08.12.2017.

57. Мартынов, Л. М. *О примарных и редуцированных многообразиях модулей* / Л. М. Мартынов // Вестник Омского ун-та. — 1999. — Вып. 4. — С. 29–31.

58. Мартынов, Л. М. *О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр* / Л. М. Мартынов // Универсальная алгебра и ее приложения : Труды междунар. семинара. — Волгоград : Перемена, 2000. — С. 179–190.

59. Мартынов, Л. М. *О примарных и редуцированных многообразиях моноассоциативных алгебр* / Л. М. Мартынов // Сибирский мат. журнал. — 2001. — Т. 42. — № 1. — С. 103–112.

60. Мартынов, Л. М. *Примарные многообразия полугрупп* / Л. М. Мартынов // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. — Вып. 1. — С. 3–9.

61. Мартынов, Л. М. *О полных и редуцированных алгебрах* / Л. М. Мартынов // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2003. — Вып. 3. — С. 3–8.

62. Мартынов, Л. М. *Об одном радикале алгебр со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям* / Л. М. Мартынов // Вестник Омского ун-та. — 2004. — № 2. — С. 19–21.

63. Мартынов, Л. М. *Редуцированные многообразия полугрупп* / Л. М. Мартынов // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 2. — С. 76-79.

64. Мартынов, Л. М. *Многообразия, в которых каждая полугруппа редуцирована* / Л. М. Мартынов // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2004. — Вып. 4. — С. 13–21.

65. Мартынов, Л. М. *Наследственно чистые ассоциативные кольца* / Л. М. Мартынов // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2010. — Вып. 9. — С. 25–36.

66. Мартынов, Л. М. *Наследственно чистые ассоциативные алгебры над дедекиндовым кольцом, максимальные идеалы которого имеют конечные индексы* / Л. М. Мартынов // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50. — С. 781–801.

67. Мартынов, Л. М. *О наследственно чистых ассоциативных алгебрах над дедекиндовыми кольцами* / Л. М. Мартынов. — DOI 10.17377/semi.2013.10.037 // Сибирские электронные мат. известия. — 2013. — Т. 10. — С. 475–490. — URL: semr.math.nsc.ru/v10/p475-490.pdf. — Дата публикации: 18.07.2013.

68. Мартынов, Л. М. *Многообразия коммутативных полугрупп, обладающих полным радикалом* / Л. М. Мартынов // Вестник Омского ун-та. — 2014. — № 4. — С. 14–18.

69. Мартынов, Л. М. *Полнота, редуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы* / Л. М. Мартынов. — DOI 10.17377/semi.2016.13.016 // Сибирские электронные мат. известия. — 2016. — Т. 13. — С. 181–241. — URL: semr.math.nsc.ru/v13/p181-241.pdf. — Дата публикации: 20.03.2016.

70. Мартынов, Л. М. *О конечных группах, в которых любая чистая подгруппа выделяется прямым множителем* / Л. М. Мартынов, О. В. Князев // Вестник Омского ун-та. — 2014. — № 2. — С. 25–26.

71. Мартынов, Л. М. *О примарных полугруппах* / Л. М. Мартынов, Т. Ю. Финк // Вестник Омского ун-та. — 2002. — № 3. — С. 18–20.

72. Мартынов, Л. М. *Расщепляемые многообразия групп и полугрупп* / Л. М. Мартынов, Т. Ю. Финк // Вестник Омского ун-та. — 2013. — № 2. — С. 32–36.

73. Мартынова, Т. А. *Минимально полные унары* / Т. А. Мартынова // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. :

ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2010. — Вып. 9. — С. 36–39.

74. Мартынова, Т. А. *Полные унары* / Т. А. Мартынова // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2011. — Вып. 10. — С. 11–16.

75. *Математическая энциклопедия.* В 5 томах. Т. 4 (Ок–Сло) / главный редактор И. М. Виноградов. — Москва : Сов. энцикл., 1984. — 1216 с.

76. *Общая алгебра.* В 2 томах. Т. 1 / О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков [и др.] ; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — Москва : Наука, 1990. — 592 с.

77. Овчинников, В. В. *О кольцах, над которыми каждый модуль является редуцированным* / В. В. Овчинников // Абелевы группы и модули. — Томск : ТГУ, 2000. — Вып. 15. — С. 46–54.

78. Овчинников, В. В. *О минимальных полных модулях над коммутативными локальными кольцами* / В. В. Овчинников // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. — Вып. 2. — С. 54–56.

79. Пирс, Р. *Ассоциативные алгебры* / Р. Пирс ; пер. с англ. А. С. Рапинчука и В. А. Янчевского ; под ред. А. Е. Залесского. — Москва : Мир, 1986. — 543 с.

80. Рудаков, В. Н. *Об атомно полных решетках* / В. Н. Рудаков // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2011. — Вып. 10. — С. 19–22.

81. Рудаков, В. Н. *Редуцированные многообразия унаров* / В. Н. Рудаков // Вестник Омского ун-та. — 2013. — № 2. — С. 45–47.

82. Финк, Т. Ю. *Конечные полные полугруппы* / Т. Ю. Финк // Естественные науки и экология: Межвуз. сб. научных тр. : Ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 1999. — Вып. 4. — С. 8–14.

83. Финк, Т. Ю. *Вложимость и минимальная полнота конечных полугрупп* / Т. Ю. Финк // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. — Вып. 1. — С. 20–25.

84. Финк, Т. Ю. *Конечные полугруппы с наибольшими полными подполугруппами* / Т. Ю. Финк // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. — Вып. 2. — С. 28–34.

85. Финк, Т. Ю. *Расщепляемые псевдомногообразия конечных полугрупп* / Т. Ю. Финк // Вестник Омского ун-та. — 2005. — № 4. — С. 33–35.

86. Финк, Т. Ю. *Псевдомногообразия конечных полугрупп, обладающие полным радикалом* / Т. Ю. Финк // Сибирские электронные мат. известия. — 2008. — Т. 5. — С. 673–684. — URL: semr.math.nsc.ru/v5/p673-684.pdf. — Дата публикации: 08.12.2008.

87. Фукс, Л. *Бесконечные абелевы группы.* В 2 томах. Т. 1 / Л. Фукс ; пер. с англ. А. П. Мишиной. — Москва : Мир, 1974. — 336 с.

88. Фукс, Л. *Бесконечные абелевы группы.* В 2 томах. Т. 2 / Л. Фукс ; пер. с англ. А. А. Мановцева и А. П. Мишиной ; под ред. Л. Я. Куликова. — Москва : Мир, 1977. — 416 с.

89. Херстейн, И. *Некоммутативные кольца* / И. Херстейн ; пер. с англ. Е. Н. Кузьмина ; под ред. А. И. Ширшова. — Москва : Мир, 1972. — 191 с.

90. Холл, М. *Теория групп* / М. Холл ; пер. с англ. Н. В. Дюмина, З. П. Жилинской ; под ред. Л. А. Калужнина. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1962. — 468 с.

91. Amitsur, S. A. *A general theory of radicals. I. Radicals in complete lattices* / S. A. Amitsur // Amer. J. Math. — 1952. — Vol. 74, — P. 774–786.

92. Artin, E. *Rings with minimum condition* / E. Artin, C. J. Nesbitt, R. M. Thrall. — Ann Arbor, Mich. : University of Michigan Press, 1944. — 123 p.

93. Atiyah, M. F. *Introduction to Commutative Algebra* / M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. — Massachusetts : Addison-Wesley, 1969. — 128 p.

94. Gardner, B. J. *Radical Theory of Rings* / B. J. Gardner, R. Wiegandt. — New York : Marcel Dekker, Inc., 2004. — 408 p. — ISBN 0-8247-5033-0.

95. Hopkins, C. *Rings with minimal condition for left ideals* / C. Hopkins // Ann. of Math. — 1939. — Vol. 40 (2). — P. 712–730.

96. Kertész, A. *Lectures on Artinian rings* / A. Kertész ; edited by R. Wiegandt. — Budapest : Akad. Kiadó, 1987. — 427 p. — ISBN 963-05-4309-5.

97. Kuzmina, A. S. *Finite Rings with Eulerian Zero-Divisor Graphs* / A. S. Kuzmina // Journal of Algebra and Its Applications. — 2012. — № 3 (11). — P. 12–19.

98. Levy, L. S. *Artinian, non-Noetherian rings* / L. S. Levy // J. Algebra. — 1977. — Vol. 47. — P. 276–304.

99. McDonald, B. R. *Finite rings with identity* / B. R. McDonald. — Pure Appl. Math. — Vol. 28. — New York : Marcel Dekker, 1974. — 429 p.

100. Martynov, L. M. *On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility and purity for arbitrary algebras* / L. M. Martynov // Int. conf. on Modern Algebra and Its Applications. Vanderbilt Univ., Nashville, Tennessee, May 14–18, 1996. Schudule and Abstracts. — Nashville, 1996. — P. 79–80.

101. Martynov, L. M. *On the complete radical of a monoid ring* / L. M. Martynov // Vestnik Omskogo universiteta = Herald of Omsk University. — 2017. — no. 2 (84). — P. 8–13.

102. Raghavendran, R. *Finite associative rings* / R. Raghavendran // Compos. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 195–229.

103. Rowen, L. H. *Ring theory.* In 2 volumes. Vol. 1 / L. H. Rowen. — San Diego : Academic Press, 1988. — 543 p. — ISBN 0-12-599841-4

104. Sussman, L. *On rings in which* $a^{n(a)} = a$ / L. Sussman, A. Foster // Math. Ann. — 1960. — Vol. 140 (4). — P. 324–333.

105. Tarski, A. *Equationally complete rings and relation algebras* / A. Tarski // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, series A. — 1956. — Vol. 18. — P. 39–46.

106. Tuganbaev, A. A. *Primitively pure submodules and primitively divisible modules* / A. A. Tuganbaev. — DOI https://doi.org/10.1023/A:1015143016421 // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 110, No. 3. — P. 2746–2754.

107. Volkov, M. V. *Separation of the radical in ring varieties* / M. V. Volkov // Acta Sci. Math. — 1983. — Vol. 46. — P. 73–75.

108. Wilson, R. S. *On structure of finite rings* / R. S. Wilson // Compos. Math. — 1973. — Vol. 26. — P. 79–93.

109. Wilson, R. S. *On structure of finite rings.* II / R. S. Wilson // Pasific J. Math. — 1974. — Vol. 51. — P. 317–325.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ВАК

110. Корнев, А. И. *Характеризация одного радикала групповых колец над конечными простыми полями* / А. И. Корнев, Т. В. Павлова // Сибирский мат. журнал. — 2004. — Т. 45, № 3. — С. 613–623.

111. Павлова, Т. В. *Минимально полные ассоциативные артиновы кольца* / Т. В. Павлова. — DOI 10.17377/semi.2017.14.105 // Сибирские электронные мат. известия. — 2017. — Т. 14. — С. 1238–1247. — URL: semr.math.nsc.ru/v14/p1238-1247.pdf. — Дата публикации: 28.11.2017.

112. Павлова, Т. В. *Об артиновых кольцах с отщепляемым полным радикалом* / Т. В. Павлова // Вестник Омского ун-та. — 2018. — Т. 23, № 4. — С. 37–43. — DOI 10.25513/1812-3996.2018.23(4).

Другие публикации

113. Павлова, Т. В. *Полные ассоциативные артиновы кольца* / Т. В. Павлова // Вестник Омского ун-та. — 2005. — № 1. — С. 17–19.

114. Павлова, Т. В. *Полный радикал полного кольца матриц над произвольным ассоциативным кольцом* / Т. В. Павлова // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2011. — Вып. 10. — С. 16–19.

115. Павлова, Т. В. *О редуцированных ассоциативных артиновых кольцах* / Т. В. Павлова // Проблемы и перспективы физико-математического и технического образования : сб. мат. Всерос. науч.-практ. конф. (20–21 нояб. 2014 г.) — Ишим : Изд-во филиала ТюмГУ в г. Ишиме, 2014. — С. 40–46.

116. Корнев, А. И. *Конечные полные ассоциативные кольца* / А. И. Корнев, Т. В. Павлова // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Омск. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. — Вып. 2. — С. 43–45.

117. Мартынов, Л. М. *О минимально полных ассоциативных кольцах* / Л. М. Мартынов, Т. В. Павлова // Вестник Омского ун-та. — 2016. — № 1. — С. 6–13.

118. Корнев, А. И. *О полных и редуцированных ассоциативных кольцах* / А. И. Корнев, Т. В. Павлова // Междунар. конф. по мат. и механике (16–18 сент. 2003 г.) : Тезисы докладов. — Томск : ТГУ, 2003. — С. 48.

119. Мартынов, Л. М. *О минимально полных ассоциативных кольцах* / Л. М. Мартынов, Т. В. Павлова // Междунар. конф. «Мальцевские чтения» (03–07 мая 2015 г.) : Тезисы докладов. — Новосибирск, 2015. — С. 166.

120. Павлова, Т. В. *Об ассоциативных кольцах с отщепляемым полным радикалом* / Т. В. Павлова // Всеросс. конф. по мат. и механике (02–04 окт. 2018 г.) : Тезисы докладов. — Томск : ТГУ, 2018. — С. 23.

121. Павлова, Т. В. *Исправление к статье: Минимально полные ассоциативные артиновы кольца* / Т. В. Павлова — DOI 10.33048/semi.2019.16.136 // Сибирские электронные мат. известия. — 2019. — Т. 16. — С. 1913–1915. — URL: http://semr.math.nsc.ru/v16/p1913-1915.pdf. — Дата публикации: 13.12.2019.