На правах рукописи

Павлова Татьяна Вениаминовна

Полнота и редуцированность для ассоциативных артиновых колец

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Омск
2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Омский государственный педагогический университет».

Научный руководитель:	Мартынов Леонид Матвеевич, доктор физико-математических наук, профессор.
Официальные оппоненты:	Мальцев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный педагогический университет», профессор кафедры алгебры и методики обучения математике. Коробков Сергей Самсонович, кандидат физико-математических наук, доцент. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уральский государственный педагогический университет», доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике.
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Защита диссертации состоится «___» __________ 2020 года в __ часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.05 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук», по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН» и на сайте https://www.imm.uran.ru.

Автореферат разослан «___» __________ 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, с. н. с. И. Н. Белоусов.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория абелевых групп дает яркий пример развитой структурной теории. При этом важную роль в ней играют понятия полной (делимой) и редуцированной группы. Напомним, что аддитивная абелева группа G называется *полной*, если для всякого натурального числа n и любого элемента $g \in G$ уравнение $nx = g$ имеет в группе G хотя бы одно решение. Это эквивалентно следующему: для любого простого числа p и любого элемента $g \in G$ уравнение $px = g$ разрешимо в группе G. Группа, не содержащая ненулевых полных подгрупп, называется *редуцированной*.

В работе [32] Л. М. Мартыновым было показано, что к определениям этих понятий возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. А именно, аддитивная абелева группа является полной тогда и только тогда, когда она не имеет гомоморфизмов на ненулевые группы из атомов решетки многообразий абелевых групп, которые исчерпываются сериями многообразий $\mathcal{A}_p = var\{px = 0\}$ абелевых групп периода p по всем простым числам p. Это дало возможность Л. М. Мартынову определить в [32] аналоги обозначенных понятий для произвольных (универсальных) алгебр. Поскольку решетка $\boldsymbol{L}(\mathcal{V})$ подмногообразий любого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр является атомной, естественно назвать алгебру из $\mathcal{V}$ *(атомно) полной*, если у нее нет гомоморфизмов на нетривиальные алгебры из атомов решетки $\boldsymbol{L}(\mathcal{V})$. Алгебра, не имеющая нетривиальных полных подалгебр, называется *(атомно) редуцированной.*

Кроме понятий полноты и редуцированности, в [32] были определены также естественные аналоги сервантности и слабой сервантности (чистоты) и периодичности (в частности, примарности). Позднее Л. М. Мартыновым в работе [11] была сформулирована обширная программа по их изучению для произвольных алгебр. Исследование перечисленных понятий в последующие годы довольно интенсивно осуществлялось различными авторами как в общей ситуации, так и для классических алгебр. Обзор этих результатов содержится в работе [15]. Там же приведены основные факты о полных и редуцированных алгебрах; проблематика, обозначенная ранее в [11], дополнена новыми проблемами, естественно возникшими в свете новых результатов; указаны возможные направления для дальнейших исследований.

Введенные Л. М. Мартыновым понятия полноты и редуцированности позволяют указать следующий методологический подход к развитию структурной теории алгебр, хорошо зарекомендовавший себя в теории абелевых групп. Отправляясь от атомов решетки подмногообразий данного многообразия $\mathcal{V}$ алгебр, которые зачастую определяются хорошими тождествами и их алгебры устроены довольно просто, с помощью расширений конструируются редуцированные алгебры с «блоками-факторами» из атомов. С другой стороны, полные алгебры — это антиподы редуцированным, их нельзя «собрать» из алгебр атомов, но иногда можно охарактеризовать исчерпывающим образом, как в случае абелевых групп (см., напр., [2, с. 88]) или унаров (см. [19]). Поскольку во многих случаях алгебры из $\mathcal{V}$ являются расширениями полных алгебр с помощью редуцированных (см. [12]), изучение произвольных алгебр из $\mathcal{V}$ можно свести к изучению полных и редуцированных алгебр из $\mathcal{V}$ и их расширений.

В обзоре [15] отмечалось, что этот подход, будучи универсальным, не может быть эффективно реализован для произвольных алгебр, и указывалось на его возможную плодотворность, подтвержденную рядом проведенных исследований, для тех видов алгебр, решетка подмногообразий которых имеет «хорошие» атомы. В частности, этим качеством обладает многообразие всех ассоциативных колец $Ass(\mathbb{Z})$, атомы решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ всех подмногообразий которого исчерпываются (см. [35]) многообразиями $\mathcal{Z}_p = var\{px = 0, xy = 0\}$ и $\mathcal{F}_p = var\{px = 0, x^p = x\}$ по всем простым числам p.

Приведем соответствующие определения для ассоциативных колец. Условимся далее под *кольцом* понимать ассоциативное кольцо (не обязательно содержащее единицу), а под *идеалом* кольца — его двусторонний идеал. Кольцо, удовлетворяющее условию минимальности для левых идеалов, называется *артиновым слева*. Далее под *артиновым* понимается артиново слева кольцо.

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое подмногообразие многообразия $Ass(\mathbb{Z})$. Кольцо называется $\mathcal{X}$-полным, если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из многообразия $\mathcal{X}$. Кольцо называется *(атомно) полным*, если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из атомов $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$ решетки подмногообразий $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$, по всем простым p. Если кольцо не имеет ненулевых атомно полных подколец, то оно называется *(атомно) редуцированным*. Далее слово «атомно» будем опускать, а понятие «редуцированное кольцо» использовать в обозначенном нами смысле (в отличие от, к примеру, [34, с. 201], где под редуцированным кольцом понимается кольцо без ненулевых нильпотентных элементов). Заметим, что нулевое кольцо является одновременно полным и редуцированным.

В силу основного результата работы [12], в любом кольце R существует наибольшее полное подкольцо $C(R)$, которое является идеалом в R, а факторкольцо $R/C(R)$ является редуцированным. Кроме того, согласно утверждениям $1, 2$ работы [11], класс $\mathcal{R}$ всех полных колец является замкнутым относительно гомоморфных образов и расширений, а согласно утверждению 5 той же работы, класс $\mathcal{S}$ всех редуцированных колец замкнут относительно взятия подколец, прямых произведений (в частности, прямых сумм) и расширений. При этом идеал $C(R)$ содержит любое полное подкольцо кольца R. Это означает, что в многообразии $Ass(\mathbb{Z})$ определен строгий радикал (в смысле Куроша и Амицура, [30, с. 22]), где $\mathcal{R}$ — радикальный класс, а $\mathcal{S}$ — полупростой класс. Идеал $C(R)$ кольца R называется *полным радикалом* кольца R.

Цели и задачи работы. Основной *целью* диссертации является исследование вопросов полноты и редуцированности для ассоциативных артиновых слева колец.

Выбор артиновых колец, как объектов для изучения понятий полноты и редуцированности, обусловлен рядом причин. Прежде всего, программа по изучению обозначенных понятий работы [15] содержит ряд проблем, поставленных для конечных алгебр, а класс артиновых колец включает в себя класс конечных колец. Также, заметную роль при исследовании артиновых колец играет структурная теория, в основе которой лежит радикал Джекобсона. Наконец, важное значение имеет тот факт, что для аддитивной группы артинова кольца известна точная структурная теорема (см., к примеру, теорема 122.4 [28, с. 349]). Это дает возможность в полной мере использовать предложенный Л. М. Мартыновым единый подход к определению понятий полноты и редуцированности, который позволяет выражать свойства артинова кольца через одноименные свойства его аддитивной группы, и наоборот.

Цель диссертационного исследования реализуется в следующих *задачах*:

1. *Описание полных (в частности, минимально полных) ассоциативных артиновых слева колец.* В программе исследования понятий полноты и редуцированности работы [15] эта задача относится к проблемам 3.7 характеризации конечных полных алгебр и 3.10 характеризации минимально полных алгебр для данного многообразия алгебр. Заметим, что в случае групп, проблема 3.7 равносильна описанию конечных групп, совпадающих со своим коммутантом.

Для произвольных алгебр, нетривиальная полная алгебра называется *минимально полной*, если она не имеет собственных нетривиальных подалгебр. Хорошо известно, что любая полная абелева группа является прямой суммой минимально полных абелевых групп, которые с точностью до изоморфизма исчерпываются аддитивной группой поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и квазициклическими группами C_{p^∞} по всем простым p. Кроме того, как и для абелевых групп, в случае произвольных алгебр, понятие полноты оказывается тесно связанным с понятием чистоты. Например, любая полная алгебра всегда является всюду чистой, любая минимально полная алгебра является простой по чистоте алгеброй и т. д. (см. [15]). Все это делает актуальной задачу описания полных и минимально полных ассоциативных колец.

Изучением проблемы 3.7 характеризации полных конечных алгебр занимались многие авторы. Работы [7, 24, 26] посвящены изучению этой проблемы в случае полугрупп; полные унары характеризуются в работе [19]; полные решетки изучались в работе [22]. Изучение проблемы 3.10 характеризации минимально полных алгебр, для модулей осуществлялось в работе [21]; для минимально полных полугрупп — в работах [3–6, 25]; работа [18] содержит исчерпывающее описание минимально полных унаров.

2. *Описание редуцированных ассоциативных артиновых слева колец.* Эта задача относится к проблеме 3.8 работы [15] характеризации конечных редуцированных алгебр для данного многообразия алгебр. Заметим, что в случае групп указанным в проблеме 3.8 свойством обладают только разрешимые (в обычном смысле) конечные группы.

Ясно, что кольцо, принадлежащее любому атому решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$ подмногообразий ассоциативных колец, является редуцированным. Заметим, из предложения 4.2.5 работы [15] следует (как упоминалось выше), что редуцированные кольца как бы «собраны» из атомов $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$, так как обладают рядом идеалов (конечным в случае артиновых колец), факторы которого принадлежат атомам решетки $\boldsymbol{L}(Ass(\mathbb{Z}))$. Актуальность изучения редуцированных колец состоит в том, что всякое ассоциативное кольцо, как уже упоминалось, есть расширение полного кольца с помощью редуцированного (см. [12]). Этим, изучение произвольных колец из $Ass(\mathbb{Z})$, можно свести к изучению полных и редуцированных колец из $Ass(\mathbb{Z})$ и их расширений.

Проблема 3.8 характеризации конечных редуцированных алгебр данного многообразия алгебр исследовалась различными авторами: для модулей в работе [20]; в работах [13, 14, 16, 26] для полугрупп; для унаров в работе [23].

3. *Изучение поведения полного радикала относительно некоторых кольцевых конструкций.* Как упоминалось выше, класс всех полных колец замкнут относительно гомоморфных образов, расширений и прямых произведений, а класс всех редуцированных колец замкнут относительно взятия подколец, прямых произведений и расширений. Чтобы строить кольца, не являющиеся полными или редуцированными, важно знать, какие еще кольцевые конструкции не выводят за пределы соответствующих классов полных и редуцированных колец. В решении этой задачи остановимся на следующих подзадачах:

3.1. *Получение условий полноты для полугруппового кольца.* Решением этой задачи в некоторых частных случаях занимались также другие авторы. В работе [37] дается описание полного радикала группового кольца над конечным простым полем и характеризуются редуцированные групповые кольца конечных групп над конечными простыми полями. В работе [8] вычислен полный радикал группового кольца над кольцом целых чисел. В работе [33] изучается задача нахождения полного радикала моноидного кольца.

3.2. *Описание полного радикала кольца всех квадратных матриц над произвольным ассоциативным кольцом*, является естественной задачей изучения поведения полного радикала относительно известнейшей кольцевой конструкции. Дополнительным аргументом здесь служит тот факт, что кольцо всех квадратных матриц над произвольным артиновым кольцом, также артиново (см., напр., теорему 28.3, [31, с. 138]). Аналогичная задача характеризации полного радикала для матричных алгебр Ли над любым кольцом операторов была решена в работе [1]. Также широко известным является (см., например, [29], теорема 1.2.6, с. 22) поведение радикала Джекобсона при его переходе от кольца R к кольцу $M_n(R)$ всех матриц порядка n над R. Соответствующий результат утверждает, что $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$.

3.3. *Описание расщепляемых ассоциативных артиновых слева колец.* Эту задачу можно отнести к проблеме 3.3 работы [15] характеризации нередуцированных (сильно) расщепляемых многообразий алгебр. В соответствии с [15], кольцо R называется *расщепляемым*, если полный радикал в нем отделяется прямым слагаемым. Если $R = C(R) \oplus A$, где A — идеал, то $C(R)$ назовем *отщепляемым полным радикалом*, а идеал A *дополняющим идеалом*.

Хорошо известно, что любая абелева группа является прямой суммой своих полной и редуцированной подгрупп. Более того, в случае абелевых групп любая полная подгруппа выделяется прямым слагаемым. Естественность аналогичной задачи для колец объясняется простотой и конструктивностью построения расширений полных колец с помощью редуцированных. Класс расщепляемых колец довольно широк — расщепляемыми являются все полные и все редуцированные кольца, а также кольца с нулевым умножением. Расщепляемыми являются все артиновы полупростые по Джекобсону кольца, так как такие кольца, согласно теореме Веддербёрна-Артина (см., например, [29], теоремы 1.4.4 и 2.1.6) представляют собой конечную прямую сумму простых колец, каждое из которых изоморфно полному матричному кольцу над некоторым телом, а любое простое кольцо является либо полным, либо редуцированным.

В общем случае задача описания расщепляемых алгебр, в том числе ассоциативных колец, является, по-видимому, весьма трудной (впрочем, как и описание ассоциативных колец с отщепляемым радикалом Джекобсона). Ситуация резко меняется, если ограничиться задачей описания многообразий или псевдомногообразий конечных алгебр, все алгебры которых расщепляемы. В работе [27] эта задача решена для псевдомногообразий конечных полугрупп, а в [17] для сильно расщепляемых многообразий групп и полугрупп. Другим ярким примером, подтверждающим сказанное, является известное (см. [36]) описание многообразий ассоциативных колец с отщепляемым радикалом Джекобсона. В диссертации не ставилась задача описания расщепляемых многообразий и псевдомногообразий конечных ассоциативных колец.

Методы исследования. Работа опирается на классические теоретико-кольцевые методы, используемые при исследовании ассоциативных некоммутативных колец и частные приемы, определяемые спецификой артиновых колец.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Основные результаты диссертации являются новыми, носят теоретический характер и могут использоваться в дальнейших исследованиях ассоциативных колец. Полученные результаты решают ряд естественных вопросов, входящих в рамки проблематики работы [15], могут применяться при чтении спецкурсов и написании монографий по теории колец.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования.

1. Характеризация полных ассоциативных артиновых колец, в частности, полных конечных колец [40].

2. Характеризация редуцированных ассоциативных артиновых колец [42], которые оказываются конечными [38].

3. Описание с точностью до изоморфизма всех минимально полных ассоциативных артиновых колец [38, 48].

4. Критерий полноты полугруппового кольца, в частности, артинова группового кольца [37].

5. Описание полного радикала полного матричного кольца над произвольным ассоциативным кольцом, критерий полноты такого кольца над ассоциативным артиновым кольцом [41].

6. Утверждение о расщепляемости ассоциативного коммутативного артинова кольца без квазициклических аддитивных подгрупп и критерий расщепляемости ассоциативного артинова кольца с правой единицей [39].

Кроме того, в диссертации получены другие результаты, имеющие самостоятельное значение для всего класса артиновых колец. Например, предложение 2.14 дает критерий конечности артинова кольца; предложение 3.8 есть критерий существования правой единицы в артиновом слева кольце, который обобщает известный аналогичный результат для конечных колец.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации представлялись на международной конференции по математике и механике, посвященной 125-летию ТГУ и 55-летию ММФ (Томск, 2003); международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2015), посвященной 75-летию Ю. Л. Ершова; всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2018), посвященной 140-летию ТГУ и 70-летию ММФ; докладывались на заседаниях алгебраического семинара ОмГПУ, Омского алгебраического семинара ОФ ИМ СО РАН, научном семинаре по теории колец АлтГПУ.

Публикации. Результаты диссертации представлены в двенадцати печатных изданиях [37–48], из них восемь статей, три из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК [37–39], три в тезисах конференций [45–47]. Основной результат диссертации, опубликованный в совместной работе [37], принадлежит автору.

Структура и содержание работы. Диссертация содержит 92 страницы и состоит из трех разделов, разбитых в совокупности на девять подразделов, введения, заключения и списка литературы. Библиография работы содержит 121 наименование.

Краткое содержание работы

Раздел 1 «Предварительные сведения» содержит все необходимые сведения: перечень используемых обозначений, определения основных понятий и пр. В подразделе 1.1 «О строении ассоциативных артиновых колец» особое внимание уделено строению артинова кольца и его аддитивной группы, которое оказывает существенное влияние на свойства кольца. Подраздел 1.2 «Краткие сведения из теории радикалов колец» посвящен изложению основ общей теории радикалов колец. В подразделе 1.3 «О полном радикале ассоциативного кольца» определяются классы полных и редуцированных колец как радикальных и полупростых классов соответственно, перечисляются свойства этих классов, дается определение полного радикала кольца и сопутствующих понятий.

Раздел 2 «Полные и редуцированные артиновы кольца» посвящен изучению полных, редуцированных и минимально полных артиновых колец.

Целью подраздела 2.1 «Полные артиновы кольца» является характеризация полных артиновых колец. Его основной результат формулируется так.

Теорема 1. *Артиново кольцо R является полным тогда и только тогда, когда для его идеала R^2 выполняются следующие условия:*
1) R^2 является идемпотентным артиновым кольцом и если $R^2 \neq (0)$, то $R^2/J(R^2) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(K_i)$, где K_i — тело, $M_{n_i}(K_i) \ncong GF(p)$ для всех $i = 1, ..., k$;
2) если $R^2 \neq R$, то $R/R^2 \cong \bigoplus\limits_{j=1}^{n} C^0_{p_j^\infty}$.

Следствие 2.8 из теоремы 1 утверждает, что полнота артинова идемпотентного кольца (кольца, совпадающего со своим квадратом), эквивалентна полноте его факторкольца по радикалу Джекобсона. Из теоремы 1 также следует описание полных конечных колец.

Следствие 2.9. *Конечное ненулевое кольцо R является полным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) кольцо R идемпотентно, т. е. $R^2 = R$;
2) $R/J(R)$ — полное кольцо, изоморфное $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} M_{n_i}(GF(p_i^{s_i}))$, где $s_i + n_i > 2$ для всех $i = 1, ..., k$.

Следствие 2.9 полностью характеризует ненулевые полные конечные ассоциативные кольца. Тем самым, для ассоциативных колец решается проблема 3.7 [15] описания конечных полных алгебр. Вспомогательные утверждения подраздела в том числе характеризуют полные нильпотентные кольца в общем случае (лемма 2.6) и в случае артинова кольца (лемма 2.7). Лемма 2.7 утверждает, что всякое полное артиново нильпотентное кольцо является кольцом с нулевым умножением и аддитивной группой, изоморфной конечной прямой сумме квазициклических групп.

Основной результат подраздела 2.2 «Редуцированные артиновы кольца» характеризует все редуцированные артиновы кольца. Прежде чем привести формулировку основного результата, заметим (как будет показано далее), что наибольшее полное по всем многообразиям $\mathcal{F}_p$ подкольцо $C_{\mathcal{F}}(R)$ произвольного кольца R также является идеалом и радикалом, который называется *$\mathcal{F}$-полным радикалом* кольца R. Аналогично определяется *$\mathcal{Z}$-полный радикал* $C_{\mathcal{Z}}(R)$ как наибольшее полное по всем многообразиям $\mathcal{Z}_p$ подкольцо в R.

Теорема 2. *Артиново кольцо R является редуцированным тогда и только тогда, когда R является конечным кольцом с $\mathcal{F}$-полным радикалом $C_{\mathcal{F}}(R) = J(R)$ и либо $R = J(R)$, либо $R/J(R) \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} GF\,(p_i)$.*

Из теоремы 2 следует, что любое артиново редуцированное кольцо R является конечным кольцом, которое либо нильпотентно, либо его факторкольцо $R/J(R)$ изоморфно конечной прямой сумме простых конечных полей. Теорема 2 решает проблему 3.8 [15] описания конечных редуцированных алгебр в случае ассоциативных колец. Вспомогательным утверждением, имеющим важное значение для доказательства основного результата и для последующих подразделов, а также представляющее самостоятельный интерес для теории артиновых колец, является следующий критерий конечности артинова кольца.

Предложение 2.14. *Артиново кольцо R является конечным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) $mR = (0)$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$*;*
2) *факторкольцо по радикалу Джекобсона* $R/J(R)$ *конечное.*

Целью подраздела 2.3 «Минимально полные артиновы кольца» является описание всех минимально полных ассоциативных артиновых слева колец. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Артиново кольцо является минимально полным тогда и только тогда, когда изоморфно одному из следующих колец:*
1) *кольцу с нулевым умножением* $C^0_{p^\infty}$ *для некоторого простого числа* p*;*
2) *полю рациональных чисел* $\mathbb{Q}$*;*
3) *кольцу Галуа* $GR(p^{nq}, p^n)$*, для некоторого* $n \in \mathbb{N}$ *и простых чисел* p *и* q*.*

Теорема 3 дает исчерпывающее описание всех минимально полных артиновых колец. Из нее следует, что минимально полные кольца тесно связаны с классом колец Галуа. Напомним, *кольцом Галуа* порядка p^{nk} и характеристики p^n называется факторкольцо $Z_{p^n}[x]/(f(x))$, где $f(x)$ — унитарный многочлен степени k, образ которого при естественном гомоморфизме $Z_{p^n}[x] \to Z_p[x]$ является неприводимым над Z_p многочленом. Кольцо Галуа с точностью до изоморфизма определяется числами p, n и k и обозначается $GR(p^{nk}, p^n)$. Так как $GR(p^n, p^n) \cong Z_{p^n}$ и $GR(p^k, p) \cong F_{p^k}$, то класс колец Галуа включает в себя как класс всех конечных полей, так и класс колец классов вычетов по модулю p^n. Кольца Галуа впервые рассматривал В. Крулль (W. Krull, 1924). Хотя изложение полученных им результатов содержится в его книге (1935), они были забыты и вновь получены в работах Г. Дж. Януша (G. J. Janusz, 1966) и Р. Рагавендрана (R. Raghavendran, 1969). В настоящее время кольца Галуа играют важную роль в структурной теории конечных ассоциативных колец и в приложениях.

Заметим также, что, к сожалению, основной результат подраздела в опубликованном в статье [38] варианте содержит неточность. Кольца пункта 3) теоремы 5 [38], изоморфные $M_2(Z_{p^n})$ по всем простым числам p и натуральным числам n, не являются минимально полными, так как:

1) кольцо всех матриц $M_2(GF(p))$ второго порядка над простым конечным полем $GF(p)$ не является минимально полным — согласно представлению полей матрицами (см., напр., [10, с. 90]), для любого простого числа p, кольцо $M_2(GF(p))$ содержит подкольцо, изоморфное полному полю $GF(p^2)$.

2) конечное идемпотентное кольцо R, где $p^kR = (0)$ для некоторого простого числа p и натурального k, согласно лемме 2.34, является минимально полным тогда и только тогда, когда факторкольцо R/pR минимально полное.

Исправление формулировки теоремы 5 работы [38] опубликовано в [48].

Подраздел 2.3 содержит большое число вспомогательных утверждений, часть из которых имеет и самостоятельное значение. Лемма 2.17 утверждает (за некоторыми ограничениями) свойство полного радикала, аналогичное свойству радикала Джекобсона (см., например, теорему 1.3.3 [29, с. 28]).

Лемма 2.17. *Для главного идемпотента e ненильпотентного артинова кольца R выполняется равенство $C(eRe) = eC(R)e$.*

Идемпотент e кольца R называется *главным*, если $\varphi(e)$ — единица кольца $R/J(R)$ при естественном гомоморфизме $\varphi : R \to R/J(R)$. Известно, что всякое ненильпотентное артиново кольцо содержит ненулевой главный идемпотент. Из леммы 2.17 следует, что полнота (редуцированность) артинова кольца тесно связана с полнотой (редуцированностью) некоторого артинова кольца с единицей (следствие 2.18), а ненильпотентное минимально полное артиново кольцо R содержит единицу (следствие 2.19).

Лемма 2.20. *Если любая убывающая цепочка идеалов кольца R, содержащихся в его идеале I, стабилизируется на некотором конечном шаге, то из редуцированности кольца R следует редуцированность кольца R/I.*

Лемма 2.20 имеет два важных следствия. Следствие 2.21 утверждает, что гомоморфный образ артинова редуцированного кольца также является редуцированным кольцом, что не выполняется в общем случае — к примеру, для кольца многочленов $F_p[x]$ над простым конечным полем это не так. Следствие 2.22 утверждает, что гомоморфный образ минимально полного конечного кольца является минимально полным кольцом.

В разделе 3 «Полный радикал артиновых колец» изучаются вопросы полноты для полугрупповых и матричных колец, исследуются условия расщепляемости для артиновых колец. В подразделе 3.1 «Полнота полугрупповых колец» приводится критерий полноты полугруппового кольца. Основным результатом подраздела 3.1 является следующая теорема.

Теорема 4. *Для кольца R с единицей и полугруппы S выполняется:*
1) *если аддитивная группа R^+ кольца R полная, то полугрупповое кольцо RS является полным кольцом;*
2) *если R^+ не является полной группой, то полугрупповое кольцо RS будет полным тогда и только тогда, когда будет полным кольцо R и $S^2 = S$.*

Известно (см., например, [9], с. 244, предложение 6), что групповое кольцо RG будет артиновым тогда и только тогда, когда кольцо R артиново, а группа G конечная. Поэтому следующее следствие из теоремы 4 характеризует все полные артиновы групповые кольца.

Следствие 3.2. *Для артинова кольца R с единицей и конечной группы G, групповое кольцо RG будет полным тогда и только тогда, когда кольцо R является полным.*

В подразделе 3.2 «Полный радикал кольца всех квадратных матриц над произвольным ассоциативным кольцом» дан критерий полноты кольца матриц $M_n(R)$ над любым кольцом R. Он позволяет охарактеризовать полный радикал в таких кольцах, что составляет основной результат подраздела:

Теорема 5. *Полный радикал кольца $M_n(R)$ всех матриц порядка $n > 1$ над кольцом R равен $M_n(C_{\mathcal{Z}}(R))$, где $C_{\mathcal{Z}}(R)$ — $\mathcal{Z}$-полный радикал кольца R.*

Хорошо известно, что кольцо всех матриц $M_n(R)$ над кольцом R артиново в точности тогда, когда кольцо R артиново (см., напр., теорему 28.3, [31, с. 138]). Поэтому следствие ниже из теоремы 5 является критерием полноты для артинова кольца, изоморфного кольцу всех матриц некоторого порядка.

Следствие 3.4. *Кольцо $M_n(R)$ всех матриц порядка $n > 1$ над артиновым кольцом R есть полное кольцо тогда и только тогда, когда кольцо $M_n(R/R^2)$ полное.*

Следствие 3.6 из теоремы 5 утверждает, что любое конечное кольцо вложимо в полное конечное кольцо. В случае ассоциативных колец это решает проблему 3.9 [15] характеризации многообразий алгебр, в которых любая конечная алгебра вложима в полную конечную алгебру.

Целью подраздела 3.3 «Об артиновых кольцах с отщепляемым полным радикалом» является получение критерия расщепляемости для артиновых колец с односторонней единицей, а также изучение вопроса расщепляемости коммутативного артинова кольца. В коммутативном случае справедлива теорема 6.

Теорема 6. *Коммутативное артиново кольцо R, аддитивная группа которого не содержит квазициклических подгрупп, является расщепляемым.*

Следствие 3.14 является критерием расщепляемости кольца с единицей.

Следствие 3.14. *Кольцо R с единицей является расщепляемым тогда и только тогда, когда полный радикал $C(R)$ также есть кольцо с единицей.*

Основной результат подраздела формулируется следующим образом.

Теорема 7. *Для артинова слева кольца R с правой единицей e следующие условия эквивалентны:*
1) *кольцо R расщепляемо;*
2) *кольцо eR расщепляемо;*
3) *полный радикал кольца eR является кольцом с единицей.*

В заключении приведен перечень основных результатов диссертации, отмечена плодотворность предложенной в работах [15, 32] проблематики для ассоциативных колец, указаны возможные пути дальнейших исследований.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю, профессору Леониду Матвеевичу Мартынову за интересные постановки задач, терпеливое и внимательное отношение к работе, постоянную помощь и всестороннюю поддержку.

Список литературы

1. Знаева, И. В. *О полном радикале матричной алгебры Ли* / И. В. Знаева // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2008. — Вып. 7. — С. 13–18.

2. Каргаполов, М. И. *Основы теории групп* / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Наука, 1982. — 288 с.

3. Князев, О. В. *О полных нильполугруппах* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2009. — Вып. 8. — С. 10–12.

4. Князев, О. В. *О минимально полных коммутативных нильполугруппах* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2010. — Вып. 9. — С. 12–14.

5. Князев, О. В. *О минимально полных коммутативных полугруппах* / О. В. Князев // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2011. — Вып. 10. — С. 6–8.

6. Князев, О. В. *Минимальные полные периодические полугруппы с нулем, в которых множество нильэлементов не образуют подполугруппу* / О. В. Князев, Т. Ю. Финк // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2009. — Вып. 8. — С. 12–15.

7. Корнев, А. И. *О полных модулях* / А. И. Корнев // Абелевы группы и модули. — Томск : ТГУ, 2000. — Вып. 15. — С. 30–37.

8. Корнев, А. И. *Полные радикалы некоторых групповых колец* / А. И. Корнев // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1065–1072.

9. Ламбек, И. *Кольца и модули* / И. Ламбек ; пер. с англ. А. В. Михалёва ; под ред. Л. А. Скорнякова. — Москва : Мир, 1971. — 280 с.

10. Лидл, Р. *Конечные поля.* В 2 томах. Т. 1 / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер ; пер. с англ. Е. А. Жукова и В. И. Петрова ; под ред. В. И. Нечаева. — Москва : Мир, 1988. — 430 с.

11. Мартынов, Л. М. *О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр* / Л. М. Мартынов // Универс.

алгебра и ее приложения : Труды междунар. семинара. — Волгоград : Перемена, 2000. — С. 179–190.

12. Мартынов, Л. М. *Об одном радикале алгебр со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям* / Л. М. Мартынов // Вестн. Ом. ун-та. — 2004. — № 2. — С. 19–21.

13. Мартынов, Л. М. *Редуцированные многообразия полугрупп* / Л. М. Мартынов // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 2. — С. 76-79.

14. Мартынов, Л. М. *Многообразия, в которых каждая полугруппа редуцирована* / Л. М. Мартынов // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2004. — Вып. 4. — С. 13–21.

15. Мартынов, Л. М. *Полнота, редуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы* / Л. М. Мартынов. — DOI 10.17377/semi.2016.13.016 // Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 181–241.

16. Мартынов, Л. М. *О примарных полугруппах* / Л. М. Мартынов, Т. Ю. Финк // Вестн. Ом. ун-та. — 2002. — № 3. — С. 18–20.

17. Мартынов, Л. М. *Расщепляемые многообразия групп и полугрупп* / Л. М. Мартынов, Т. Ю. Финк // Вестн. Ом. ун-та. — 2013. — № 2. — С. 32–36.

18. Мартынова, Т. А. *Минимально полные унары* / Т. А. Мартынова // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2010. — Вып. 9. — С. 36–39.

19. Мартынова, Т. А. *Полные унары* / Т. А. Мартынова // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2011. — Вып. 10. — С. 11–16.

20. Овчинников, В. В. *О кольцах, над которыми каждый модуль является редуцированным* / В. В. Овчинников // Абелевы группы и модули. — Томск : ТГУ, 2000. — Вып. 15. — С. 46–54.

21. Овчинников, В. В. *О минимальных полных модулях над коммутативными локальными кольцами* / В. В. Овчинников // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. — Вып. 2. — С. 54–56.

22. Рудаков, В. Н. *Об атомно полных решетках* / В. Н. Рудаков // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2011. — Вып. 10. — С. 19–22.

23. Рудаков, В. Н. *Редуцированные многообразия унаров* / В. Н. Рудаков // Вестн. Ом. ун-та. — 2013. — № 2. — С. 45–47.

24. Финк, Т. Ю. *Конечные полные полугруппы* / Т. Ю. Финк // Естественные науки и экология: Межвуз. сб. науч. тр. : Ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 1999. — Вып. 4. — С. 8–14.

25. Финк, Т. Ю. *Вложимость и минимальная полнота конечных полугрупп* / Т. Ю. Финк // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. — Вып. 1. — С. 20–25.

26. Финк, Т. Ю. *Конечные полугруппы с наибольшими полными подполугруппами* / Т. Ю. Финк // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. — Вып. 2. — С. 28–34.

27. Финк, Т. Ю. *Расщепляемые псевдомногообразия конечных полугрупп* / Т. Ю. Финк // Вестн. Ом. ун-та. — 2005. — № 4. — С. 33–35.

28. Фукс, Л. *Бесконечные абелевы группы.* В 2 томах. Т. 2 / Л. Фукс ; пер. с англ. А. А. Мановцева и А. П. Мишиной ; под ред. Л. Я. Куликова. — Москва : Мир, 1977. — 416 с.

29. Херстейн, И. *Некоммутативные кольца* / И. Херстейн ; пер. с англ. Е. Н. Кузьмина ; под ред. А. И. Ширшова. — Москва : Мир, 1972. — 191 с.

30. Gardner, B. J. *Radical Theory of Rings* / B. J. Gardner, R. Wiegandt. — New York : Marcel Dekker, Inc., 2004. — 408 p.

31. Kertész, A. *Lectures on Artinian rings* / A. Kertész ; edited by R. Wiegandt. — Budapest : Akad. Kiadó, 1987. — 427 p.

32. Martynov, L. M. *On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility and purity for arbitrary algebras* / L. M. Martynov // International conference on Modern Algebra and Its Applications. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, May 14–18, 1996. Schudule and Abstracts. — Nashville, 1996. — P. 79–80.

33. Martynov, L. M. *On the complete radical of a monoid ring* / L. M. Martynov // Vestnik Omskogo universiteta = Herald of Omsk University. — 2017. — no. 2 (84). — P. 8–13.

34. Rowen, L. H. *Ring theory.* In 2 volumes. Vol. 1 / L. H. Rowen. — San Diego : Academic Press, 1988. — 543 p.

35. Tarski, A. *Equationally complete rings and relation algebras* / A. Tarski // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, series A. — 1956. — Vol. 18. — P. 39–46.

36. Volkov, M. V. *Separation of the radical in ring varieties* / M. V. Volkov // Acta Sci. Math. — 1983. — Vol. 46. — P. 73–75.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ВАК

37. Корнев, А. И. *Характеризация одного радикала групповых колец над конечными простыми полями* / А. И. Корнев, Т. В. Павлова // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 3. — С. 613–623.

38. Павлова, Т. В. *Минимально полные ассоциативные артиновы кольца* / Т. В. Павлова. — DOI 10.17377/semi.2017.14.105 // Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — Т. 14. — С. 1238–1247.

39. Павлова, Т. В. *Об артиновых кольцах с отщепляемым полным радикалом* / Т. В. Павлова. — DOI 10.25513/1812-3996.2018.23(4) // Вестн. Ом. ун-та. — 2018. — Т. 23, № 4. — С. 37–43.

Другие публикации

40. Павлова, Т. В. *Полные ассоциативные артиновы кольца* / Т. В. Павлова // Вестн. Ом. ун-та. — 2005. — № 1. — С. 17–19.

41. Павлова, Т. В. *Полный радикал полного кольца матриц над произвольным ассоциативным кольцом* / Т. В. Павлова // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2011. — Вып. 10. — С. 16–19.

42. Павлова, Т. В. *О редуцированных ассоциативных артиновых кольцах* / Т. В. Павлова // Проблемы и перспективы физико-математич. и технич. образования : сб. мат. Всерос. науч.-практ. конф. (20–21 нояб. 2014 г.) — Ишим : Изд-во филиала ТюмГУ в г. Ишиме, 2014. — С. 40–46.

43. Корнев, А. И. *Конечные полные ассоциативные кольца* / А. И. Корнев, Т. В. Павлова // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : ежегодник / Ом. гос. пед. ун-т. — Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. — Вып. 2. — С. 43–45.

44. Мартынов, Л. М. *О минимально полных ассоциативных кольцах* / Л. М. Мартынов, Т. В. Павлова // Вестн. Ом. ун-та. — 2016. — № 1. — С. 6–13.

45. Корнев, А. И. *О полных и редуцированных ассоциативных кольцах* / А. И. Корнев, Т. В. Павлова // Междунар. конф. по мат. и механике (16–18 сент. 2003 г.) : Тезисы докладов. — Томск : ТГУ, 2003. — С. 48.

46. Мартынов, Л. М. *О минимально полных ассоциативных кольцах* / Л. М. Мартынов, Т. В. Павлова // Междунар. конф. «Мальцевские чтения» (03–07 мая 2015 г.) : Тез. докл. — Новосибирск, 2015. — С. 166.

47. Павлова, Т. В. *Об ассоциативных кольцах с отщепляемым полным радикалом* / Т. В. Павлова // Всеросс. конф. по мат. и механике (02–04 окт. 2018 г.) : Тез. докл. — Томск : ТГУ, 2018. — С. 23.

48. Павлова, Т. В. *Исправление к статье: Минимально полные ассоциативные артиновы кольца* / Т. В. Павлова — DOI 10.33048/semi.2019.16.136 // Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 1913–1915.