ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Н.КРАСОВСКОГО

УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

УДК 512.54

Минигулов Николай Александрович

Конечные группы с заданными свойствами графа Грюнберга—Кегеля

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

А. С. Кондратьев

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2022

Содержание

Введение

Актуальность и степень разработанности темы

Введем необходимые определения. Пусть G — конечная группа. Множество всех простых делителей числа $|G|$ обозначается через $\pi(G)$. Граф Грюнберга–Кегеля (граф простых чисел) $\Gamma(G)$ группы G – это граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$.

Изучение конечных групп в зависимости от их арифметических свойств (порядков элементов и подгрупп, мощностей классов сопряженных элементов, различных π-свойств, степеней неприводимых характеров и т.д.) является важным направлением исследований в теории конечных групп, имеющим богатую историю. Тематика изучения конечных групп по свойствам графа Грюнберга–Кегеля является современным аспектом этого направления.

Понятие графа простых чисел возникло при исследовании некоторых когомологических вопросов, связанных с целочисленными представлениями конечных групп, и оказалось весьма плодотворным. Граф $\Gamma(G)$ является фундаментальным арифметическим инвариантом группы G. Заметим, что граф $\Gamma(G)$ может быть однозначно определён по таблице характеров группы G.

В 1977 г. в трех независимых работах Н.Д. Подуфалова (см. [8]), Л.М. Гордона (см. [16]) и Л.Ф. Флетчера, Б. Штельмахера и У.Б. Стюарта (см. [15]) были определены конечные простые группы без элементов порядка 6. В данной работе с помощью этого результата получено довольно полное описание строения общей конечной группы с этим свойством. Это описание существенно обобщает классификации C_{22}-групп (М. Судзуки 1962 [31]) и C_{33}-групп (Г. Хигман 1968 [22], Л.Ф. Флетчера, Б. Штельмахера и У.Б. Стюарта [15]). Если

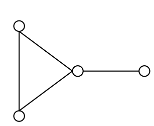
p — простое число, то C_{pp}-группой называется конечная группа, порядок которой делится на p, а централизатор любого неединичного p-элемента является p-группой. Этот результат можно также рассматривать как вклад в направление исследований конечных групп по свойствам их графов Грюнберга-Кегеля. В терминах графов Грюнберга–Кегеля нами получено описание конечных групп, графы Грюнберга-Кегеля которых имеют несмежные вершины 2 и 3.

Далее рассмотрим конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых имеют небольшое число вершин.

А.С. Кондратьев и И.В. Храмцов в работах [5,6] описали конечные группы с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, имеющим 3 или 4 вершины, в частности в этих работах описаны конечные почти простые 4-примарные группы, граф Грюнберга-Кегеля которых несвязен. А.С. Кондратьев в работе [27] описал конечные 5-примарные почти простые группы.

В этой работе мы завершаем описание конечных 4-примарных почти простых групп. А именно, мы рассматриваем случай, когда граф Грюнберга–Кегеля связен.

А.С. Кондратьев в работах [2, 3] описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп $Aut(J_2)$ и A_{10} соответственно. Графы Грюнберга-Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы (графы без пометок) графу "балалайка"("paw"), имеющему вид



.

Нами поставлена более общая задача: описать все конечные группы, граф Грюнберга-Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу "балалайка".

Цель и задачи исследования

Целью работы является исследование конечных групп с заданными свойствами графа Грюнберга–Кегеля. Для ее достижения в работе решаются следующие задачи:

1. Описание конечных групп без элементов порядка 6.

2. Исследование конечных групп G, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}. В работе эта задача решена в следующих случаях:

   (a) группа G почти проста.

   (b) группа G неразрешима и не имеет элементов порядка 6.

   (c) группа G неразрешима и в графе $\Gamma(G)$, вершина степени 1 делит порядок разрешимого радикала группы G.

3. Описание конечных 4-примарных почти простых групп со связным графом Грюнберга–Кегеля.

Основные результаты

1. Получено достаточно полное описание конечных групп без элементов порядка 6.

2. Получено полное описание конечных почти простых групп, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен подграфу графа Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.

3. Получено полное описание конечных неразрешимых групп без элементов порядка 6, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.

4. Получено полное описание конечных неразрешимых групп, в которых вершина степени 1 делит порядок разрешимого радикала, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.

5. Получено полное описание конечных 4-примарных почти простых групп со связным графом Грюнберга–Кегеля.

Научная новизна

Все результаты данной работы являются новыми.

Методы исследования

В данной работе использовались методы теории групп, теории модулярных представлений групп, теории чисел и теории графов.

На защиту выносится

Совокупность результатов в области изучения конечных групп с заданными ограничениями на их графы Грюнберга–Кегеля.

Апробация работы

Основные результаты докладывались на следующих конференциях: на 49-й, 50-й и 51-й Всеросийских (международных) молодежных школах-конференциях "Современные проблемы математики и ее приложений" (Екатеринбург 2018 —2020 гг.); на международной конференции "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2018 г.); на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 65-летию А.А. Махнева (Геленджик, 2018 г.); на международной конференции «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем», посвященной 70-летию А.Х. Журтова (Нальчик, 2019 г.); на международной конференции "The International Conference and PhD Summer School Groups and Graphs, Metrics and Manifolds" (G2M2, Екатеринбург, 2017 г.); на международной конференции "The International Conference and PhD Summer School Groups and Graphs, Designs and Dynamics" (Ичан, Китай, 2019 г.); на международной конференции "Ural Workshop on group theory and combinatorics" (Екатеринбург-онлайн, 2020 г.); на XIII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А.Белоногова (Екатеринбург-онлайн, 2020 г.); на международной конференции, посвященной 70-летию пермской алгебраической школы им. С.Н. Черникова (Пермь-онлайн, 2020 г.); на международной конференции "The 4th Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications" (Новосибирск 2021 г.).

Публикации и личный вклад

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [36–49]. Работы [38, 44] выполнены автором лично. Остальные работы выполнены в неразрывном соавторстве с научным руководителем А.С.Кондратьевым. Статьи [36–39] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, и индексируются в Web of Science и/или в Scopus, причем статья [39] опубликована в издании, входящем в квартиль $Q1$.

Структура и обьем работы

Диссертация изложена на 58 страницах, содержит введение, четыре главы, заключение, и список литературы, состоящий из 49 источников. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Вспомогательные утверждения (леммы) и таблица имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер главы, вторая цифра — номер параграфа в текущей главе, третья - номер утверждения в текущем параграфе. Теоремы, следствия и замечания имеют двойную нумерацию: первая цифра — номер главы, вторая — номер теоремы в главе.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, приведены цели работы, сформулированы полученные результаты и научная новизна.

В первой главе вводятся обозначения и приводятся вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов диссертации.

Во второй главе приводится описание строения конечных групп без элементов порядка 6. Результаты этой главы представлены в теоремах 2.1 (разрешимые группы) и 2.2 (неразрешимые группы).

В третьей главе сначала доказано, что если G — конечная неразрешимая группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}, то группа $G/S(G)$ почти проста. Этот результат представлен в теореме 3.1. Затем приводится описание таких групп G в следующих случаях:

1. G является почти-простой группой. Этот результат представлен в теореме 3.2.

2. G является неразрешимой группой без элементов порядка 6. Этот результат представлен в теоремах 3.3 и 3.4.

3. G является неразрешимой группой, в которой вершина степени 1 делит порядок разрешимого радикала группы G. Этот результат представлен в теореме 3.5.

В четвертой главе описаны все конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга–Кегеля. Результаты этой главы представлены в теореме 4.1 и в таблице 4.1.1.

В заключении перечисляются основные результаты и обсуждаются некоторые оставшиеся открытыми вопросы.

1 Определения, обозначения и предварительные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [9, 12, 17]. Приведем некоторые из них.

Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей ее порядка. Графом *Грюнберга–Кегеля* (*графом простых чисел*) группы G называется граф $\Gamma(G)$ с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G есть элемент порядка pq. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$.

Все рассматриваемые в данной работе группы будут конечными. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p обозначается p-часть числа n. Через $A \leftthreetimes B$ или $A : B$ обозначается расщепляемое расширение (полупрямое произведение) группы A посредством группы (на группу) B. Через $A{\cdot}B$ обозначается нерасщепляемое расширение группы A посредством группы B.

Наибольшая нормальная разрешимая подгруппа (*разрешимый радикал*) группы G обозначается через $S(G)$.

Конечная группа G называется *квазипростой* если $G' = G$ и $G/Z(G)$ — простая неабелева группа.

Для группы G через $G^{(\infty)}$, $Soc(G)$ и $E(G)$ обозначаются последний член производного ряда, цоколь и слой (подгруппу, порожденную всеми субнормальными квазипростыми подгруппами) группы G соответственно.

Конечная группа G называется группой *Фробениуса* с ядром A и дополнением B, если $G = A \leftthreetimes B$, где группы A и B неединичны и $C_A(b) = 1$ для любого неединичного элемента b из B. Конечная группа G называется группой 2-*фробениувой* группой, если существуют подгруппы A, B и C в G такие, что $G = ABC$, A и AB — нормальные подгруппы в G, а AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно.

Если K и L два соседних члена в главном ряде конечной группы G такие, что $K < L \leq S(G)$, то (главный) фактор $V = L/K$ — элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p; он называется *p-главным фактором* группы G.

Через $L_n^\delta(q)$ для $\delta \in \{+,-\}$ обозначается $L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\delta = +$ и $U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\delta = -$. Если n — четное натуральное число, то через $L_2(3^n).2_3$ обозначается группа $L_2(3^n)\langle df_1\rangle$, где $PGL_2(3^n) = L\langle d\rangle$ и f_1 — инволютивный полевой автоморфизм группы $L_2(3^n)$.

Рассмотрим некоторые результаты, которые будут нами использованы.

Лемма 1.1.1 (теорема Грюнберга — Кегеля [32, теорема A]). *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *G — группа Фробениуса;*

(2) *G — 2-фробениусова группа;*

(3) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \leq A \leq Aut(P)$, P — простая неабелева группа с $s(G) \leq s(P)$, и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 1.1.2 ([17, замечание на с. 377]). *Предположим, что G — конечная группа, силовская 2-подгруппа которой изоморфна (обобщенной) группе кватернионов и $\overline{G} = G/O(G)$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(a) *$\overline{G}$ изоморфна силовской 2-подгруппе в G;*

(b) *$\overline{G}$ изоморфна группе $2{\cdot}A_7$;*

(c) *$\overline{G}$ является расширением группы $SL_2(q)$, где q нечетно, с помощью циклической группы, порядок которой не делится на 4.*

Лемма 1.1.3 (лемма Мазурова [7, лемма 1]). *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то в G существует элемент порядка $s|C|$ для некоторого простого делителя s порядка группы N.*

Лемма 1.1.4 ([21, теорема 1]). *Пусть G — конечная разрешимая непримарная группа, порядки элементов которой являются степенями простых чисел. Тогда G бипримарна и G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа.*

Лемма 1.1.5 (следствие из [15]). *Конечная простая неабелева группа без элементов порядка 6 изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$, $L_2(3^n)$, $L_2(q)$ $(q \equiv \pm 5 \,(mod\, 12))$, $L_3(2^n)((2^n-1)_3 \leq 3))$, $U_3(2^n)$ $((2^n+1)_3 \leq 3)$, $Sz(2^n)$.*

Лемма 1.1.6 ([24, теорема VII.1.16]). *Предположим, что G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG-модуля V, $\langle\sigma\rangle = Aut(F)$, V_0 обозначает модуль V, рассматриваемый как $GF(p)G$-модуль, а $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$. Тогда,*

(1) *$W = \bigoplus_{i=1}^{m} V^{\sigma^i}$, где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряженный с V с помощью σ^i;*

(2) *V_0 является неприводимым $GF(p)G$-модулем и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$-модуль V_0;*

(3) *с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$-модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраически сопряженных неприводимых $\overline{GF(p)}G$-модулей, где $\overline{GF(p)}$ является алгебраическим замыканием поля $GF(p)$.*

Лемма 1.1.7 ([13, лемма 4]). *Предположим, что G — конечная квазипростая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — точный абсолютно* *неприводимый FG-модуль и β является характером Брауэра модуля V. Если g элемент простого порядка в G, взаимно простой с $p|Z(G)|$, то*

$$\dim C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Лемма 1.1.8 ([22, теорема 8.2] и [30, предложения 3.2, 4.2])**.** *Пусть G — конечная группа, $1 \neq H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong L_2(q)$, где $3 < q \neq 5$. Предположим, что $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из G. Тогда $q = 2^n \geq 4$, $H = O_2(G)$ и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2n} в G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)SL_2(2^n)$-модулю.*

Лемма 1.1.9 ([4, теорема 1], [24, теорема VII.1.16])**.** *Пусть q — степень простого числа p, G — конечная группа, $H := O_p(G) \neq 1$ и $G/H \cong SL_n(q)$ для $n \geq 2$. Предположим, что $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из G. Тогда любой p-главный фактор группы G как H-модуль изоморфен естественному или контргградиентному ему n-мерному $GF(q)SL_n(q)$-модулю.*

Лемма 1.1.10 ([28, теорема, замечание 1])**.** *Предположим, что G — конечная группа, $1 \neq H \trianglelefteq G$, $G/H \cong Sz(q)$ для $q \geq 8$ и $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 5 из G. Тогда $H = O_2(G)$, и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка q^4 группы G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному 4-мерному $GF(q)Sz(q)$-модулю.*

Предположим, что G — конечная группа, а V — kG-модуль для конечного поля k характеристики t. Действие G на V и пара (G, V) называются *p'-полурегулярными* для фиксированного простого числа p, если любое нетривиальное p'-элемент из G действует без неподвижных точек на $V \setminus \{0\}$. Это действие и пара (G, V) называются *сепарабельными*, если t не делит $|G|$, и *несепарабельными* в противном случае (когда $t = p$).

Пусть $\mathcal{R}$ — множество всех простых чисел r, таких что $r-1 = 2^a \cdot 3^b$ для $a \geq 2$ и $b \geq 0$ и $(r+1)/2$ — простое число. Известно, что $5, 13, 37, 73, 193, 1153 \in \mathcal{R}$, но неизвестно, бесконечно ли $\mathcal{R}$.

Лемма 1.1.11 ([14, теорема 5.6]). *Предположим, что G нетривиальная конечная группа и $G' = G$. Если (G, V) — сепарабельная p'-полурегулярная пара, то верно одно из следующих утверждений:*

(a) *$p = 2$ и существует семейство $K_1, \ldots, K_m$ нормальных 2-подгрупп в G со следующими свойствами*:

(a1) $\bigcap_{i=1}^{m} K_i = 1$;

(a2) *любая фактор группа G/K_i либо изоморфна $SL_2(5)$ либо имеет вид $2_{-}^{1+4}.A_5$;*

(a3) *если $G/K_i \cong G/K_j \cong SL_2(5)$, то $K_i = K_j$;*

(b) *$p = 3$ и $G \cong SL_2(r)$, где $r \in \mathcal{R} \cup \{7, 9, 17\}$;*

(c) *$p \geq 5$ и $G \cong SL_2(5)$.*

Обратно, если (G, p) удовлетворяет любому из условий (a)–(c), то существует точный неприводимый G-модуль V над полем характеристики, не делящей $|G|$ такое, что пара (G, V) p'-полурегулярна.

Лемма 1.1.12 (Теорема Томпсона [17, теорема 5.3.11]). *Пусть p — простое число и P — конечная p-группа. Тогда P обладает характеристической подгруппой C, называемой критической подгруппой группы P, со следующими свойствами:*

(a) $C/Z(C)$ — элементарная абелева группа;

(b) $[P, C] \leq Z(C)$;

(c) $C_P(C) = Z(C)$;

(*d*) *каждый нетривиальный p'-автоморфизм P индуцирует нетривиальный автоморфизм C.*

Лемма 1.1.13. *Пусть p, q, r — попарно различные простые числа и G — конечная группа вида $G = P \rtimes (T \rtimes \langle x\rangle)$, где P — нетривиальная p-группа, T — q-группа, $|x| = r$ и $C_G(P) = Z(P)$. Пусть C — критическая подгруппа группы T и $[T, \langle x\rangle] \neq 1$. Тогда либо $C_P(x) \neq 1$, либо $Z(T) \leq Z(C) \leq C_T(x)$, $q = 2$, $r = 1 + 2^n$ — простое число Ферма, а $[C, \langle x\rangle]$ — экстраспециальная группа порядка 2^{2n+1}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $C_P(x) = 1$. Покажем сначала, что $Z(T) \leq Z(C) \leq C_T(x)$. Включение $Z(T) \leq Z(C)$ следует из леммы 1.1.12(c). Предположим, что $[Z(C), \langle x\rangle] \neq 1$. По [17, теореме 5.2.3] имеем $Z(C) = [Z(C), \langle x\rangle] \times C_{Z(C)}(x)$, следовательно $[Z(C), \langle x\rangle]\langle x\rangle$ — группа Фробениуса. Теперь по 1.1.3 получаем, что $C_P(x) \neq 1$, противоречие. Следовательно, $Z(T) \leq Z(C) \leq C_T(x)$.

Пусть $C_1 := [C, \langle x\rangle]$. По лемме 1.1.12 и [17, Theorem 5.3.6] имеем $C_1 = [C_1, \langle x\rangle] \neq 1$ и $C_1/Z(C_1) \cong C_1Z(C)/Z(C)$ имеет степень q. По [17, теоремы 5.1.4, 5.3.2] можно считать, что P — элементарная абелева группа и P является точным неприводимым $GF(p)C_1\langle x\rangle$-модулем. Пусть K — агебраическое замыкание поля $GF(p)$. По лемме 1.1.6 существует класс алгебраически сопряженных $\{W_1, \dots, W_m\}$ (абсолютно) неприводимых $KC_1\langle x\rangle$-модулей такой, что $P \otimes_{GF(p)} K = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ (здесь $GF(p^m)$ — поле определения $KC_1\langle x\rangle$-модулей $W_1, \dots, W_s$). Ясно, что W_1 — точный $KC_1\langle x\rangle$-модуль и $C_{W_1}(x) = 1$. Теперь, рассуждая, как при доказательстве леммы из [19], получаем все остальные утверждения леммы.

Лемма доказана.

Лемма 1.1.14 ([20]). *Пусть G — конечная простая 3-примарная группа.*

Тогда G изоморфна одной из следующих групп: A_5, $L_2(7)$, A_6, $L_2(8)$, $L_2(17)$, $L_3(3)$, $U_3(3)$, $U_4(2)$.

Лемма 1.1.15 ([11, 25, 29])**.** *Пусть G — конечная простая 4-примарная группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) *A_n при $7 \leq n \leq 10$, $L_2(q)$ при $q \in \{16, 25, 49, 81\}$, $L_3(q)$ при $q \in \{4, 5, 7, 8, 17\}$, $L_4(3)$, $S_4(q)$ при $q \in \{4, 5, 7, 9\}$, $S_6(2)$, $U_3(q)$ при $q \in \{4, 5, 7, 8, 9\}$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $O_8^+(2)$, $G_2(3)$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{11}, M_{12}, J_2;*

(2) *$L_2(r)$, где r – простое число, $17 \neq r \geq 11$, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ – простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$;*

(3) *$L_2(2^m)$, где m, $2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ – простые числа, большие 3;*

(4) *$L_2(3^m)$, где m и $(3^m - 1)/2$ – нечетные простые числа, а $(3^m + 1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 (при $m = 5$).*

Лемма 1.1.16 ([34, лемма 6.(iii)])**.** *Пусть a, s, t — положительные целые числа. Тогда*

(*a*) $(a^s - 1, a^t - 1) = a^{(s,t)} - 1$,

(*b*)

$$(a^s + 1, a^t + 1) = \begin{cases} a^{(s,t)} + 1, & \text{если } s/(s,t) \text{ и } t/(s,t) \text{ — нечетные числа,} \\ (2, a + 1), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

(*c*)

$$(a^s - 1, a^t + 1) = \begin{cases} a^{(s,t)} + 1, & \text{если } s/(s,t) \text{ — четное число и } t/(s,t) \text{ —} \\ & \text{нечетное число,} \\ (2, a + 1), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 1.1.17 (теорема Жигмонди [35])**.** *Пусть q и n — целые числа, оба большие 1. Тогда существует простое число r, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ для каждого $1 \leq i < n$ такое, что $r \equiv 1 \pmod n$, за исключением* *для следующих случаев:* $q = 2$ *и* $n = 6$*;* $q = 2^k - 1$ *для некоторого простого числа* k *и* $n = 2$.

2 Конечные группы без элементов порядка 6

В данной главе описаны все конечные группы без элементов порядка 6. Результаты приведены в теоремах 2.1 и 2.2

2.1 Конечные разрешимые группы без элементов порядка 6

Целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть G — конечная разрешимая группа без элементов порядка 6 и 6 делит $|G|$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $G/O(G)$ — циклическая или (обобщенная) кватернионная 2-группа, силовская 3-подгруппа в $O(G)$ абелева и $O(G)$ имеет 3-длину 1;

(2) $G/O_{3'}(G)$ — циклическая 3-группа или диэдральная группа порядка $2|G|_3$, ступень нильпотентности силовской 2-подгруппы из $O_{3'}(G)$ не превосходит 2 и $O_{3'}(G)$ имеет 2-длину, не превосходящую 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1, $S \in Syl_2(G)$ и $T \in Syl_3(G)$. По теореме Холла—Чунихина (см. [17, теорема 6.4.1]) в G существует бипримарная $\{2,3\}$-холлова подгруппа U, причем можно считать, что $U = ST$. Все элементы в U имеют примарные порядки, поэтому ввиду леммы 1.1.4 U — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Ясно, что либо $O_3(U) \neq 1$, либо $O_2(U) \neq 1$.

Лемма 2.1.1. *Если $O_3(U) \neq 1$, то выполняется утверждение* (1) *теоремы* 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $O_3(U) \neq 1$. Тогда ввиду [17, теорема 10.3.1] подгруппа S — либо циклическая группа, либо (обобщенная) группа кватернионов. Поэтому U — группа Фробениуса с ядром T и дополнением S. Из теоремы Бернсайда (см. [17, теорема 7.4.3]) и леммы 1.1.2

получаем $G = O(G)S$. Поскольку $C_T(s) = 1$ для (единственной) инволюции s из S, эта инволюция инвертирует T и, следовательно, T абелева. Поэтому ввиду [17, теорема 6.3.2] выполняется утверждение (1) теоремы 2.1. Лемма доказана.

Лемма 2.1.2. *Если $O_2(U) \neq 1$, то выполняется утверждение* (2) *теоремы* 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $O_2(U) \neq 1$. Тогда ввиду [17, теорема 10.3.1] подгруппа T циклическая. Ввиду [17, теорема 6.3.2] централизатор $C_G(T)$ содержится в $O_{3',3}(G)$. Поэтому $O_{3',3}(G) = O_{3'}(G)T$ и, следовательно, ввиду леммы Фраттини $G = O_{3'}(G)N_G(T)$. Поскольку $Aut(T)$ порождается автоморфизмом инвертирования группы T, отсюда следует, что $G/O_{3'}(G)$ — циклическая 3-группа или диэдральная группа порядка $2|G|_3$. Положим $K = O_{3'}(G)$. Поскольку $O_2(U) \neq 1$, подгруппа K имеет четный порядок. Без ограничения общности можно считать, что $O_{\{2,3\}'}(G) = 1$, поэтому $O(K) = 1$. Но тогда $O_2(K) = O_2(G) \neq 1$ и $C_G(O_2(K)) \leq O_2(K)$ (ввиду [17, теорема 6.3.2]). Если $K = O_2(K)$, то утверждение леммы верно. Пусть $O_2(K) < K$. Тогда $O_2(K) < O_{2,2'}(K)$. Пусть R — 2-дополнение в $O_{2,2'}(K)$. Ввиду [17, теорема 6.3.2] имеем $C_K(R) \leq O_2(K)R$. Ввиду леммы Фраттини имеем $G = O_2(K)N_G(R)$, поэтому можно считать, что T нормализует подгруппу R. Рассмотрим подгруппу $O_2(K) \leftthreetimes (R \leftthreetimes \langle t \rangle)$, где t — элемент порядка 3 из T. Если $[R, \langle t \rangle] \neq 1$, то ввиду равенства $C_{O_2(K)}(x) = 1$ и леммы 1.1.13 критическая подгруппа группы $O_2(K)$ экстраспециальна и, следовательно, инволюция из центра этой подгруппы лежит в $Z(G)$, что невозможно. Поэтому $[R, \langle t \rangle] = 1$. Поскольку $t \in C_G(R) \lhd N_G(R)$, имеем $[K, \langle t \rangle] \leq C_K(R) \leq O_2(K)R$, откуда легко видеть, что $K = O_2(K)R$. Поскольку $C_{O_2(K)}(t) = 1$, из [17, теорема 10.1.5] следует, что ступень нильпотентности группы $O_2(K)$ не превосходит 2. Лемма доказана.

Теорема 2.1 доказана.

2.2 Конечные неразрешимые группы без элементов порядка 6

В теореме 2.1 были описаны конечные разрешимые группы без элементов порядка 6. В данном параграфе описываются конечные неразрешимые группы без элементов порядка 6.

Целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть G — конечная неразрешимая группа и 3 делит $|G|$. Тогда G не содержит элементов порядка 6 если и только если группа $O^{\{2,3\}'}(G/O_{\{2,3\}'}(G))$ изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$, $L_2(3^n)$, $PGL_2(3^n)$, $L_2(3^n).2_3$ (n четно), $L_2(q)$ ($q \equiv \pm 5\,(mod\,12)$), $L_3(2^n)$ ($(2^n-1)_3 \leq 3$), $U_3(2^n)$ ($(2^n+1)_3 \leq 3$), расширение нетривиальной элементарной абелевой 2-группы E посредством группы $L_2(2^n)$, где E как $GF(2^n)L_2(2^n)$-модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(2^n)L_2(2^n)$-модулей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — контрпример минимального порядка к теореме 2.2 и $\overline{G} = G/S(G)$, где $S(G)$ — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в G. Тогда $O_{\{2,3\}'}(G) = 1$ и $O^{\{2,3\}'}(G) = G$. Поскольку группа $\overline{G}$ неразрешима, она имеет четный порядок.

Лемма 2.2.1. 3 *не делит* $|S(G)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Предположим, что 3 делит $|S(G)|$. Пусть $S \in Syl_2(G)$, $T \in Syl_3(S(G))$ и $W = S(G)S$. Тогда W — разрешимая группа, порядок которой делится на 6. Поэтому группа W удовлетворяет условиям теоремы 2.1 и, следовательно, для нее выполняется утверждение (1) или (2) из ее заключения. В первом случае ввиду леммы 1.1.2 группа G содержит элемент порядка 6, что невозможно. Поэтому выполняется второй случай. Тогда

T — циклическая группа и, следовательно, $|N_G(\langle x\rangle) : C_G(x)| \leq 2$ для элемента x порядка 3 из T. По лемме Фраттини $G = S(G)N_G(T)$, следовательно, $|\overline{G} : \overline{C_G(x)}| \leq 2$. Теперь из теоремы Бернсайда (см. [17, теорема 7.4.3]) и неразрешимости группы $\overline{G}$ вытекает, что централизатор $C_G(x)$ имеет четный порядок. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.2.2. *Группа $\overline{G}$ почти проста.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда $F^*(\overline{G}) = M_1 \times \cdots \times M_n$, где $n \geq 2$ и $M_1, \ldots, M_n$ — простые неабелевы группы. Ясно, что 3 не делит порядок каждой из этих групп, поэтому ввиду леммы 6 $M_i \cong Sz(2^{n_i})$ для $1 \leq i \leq n$. По лемме 2.2.1 в группе $\overline{G}$ существует элемент x порядка 3. Подгруппа $\langle x\rangle$ действует сопряжениями на множестве $M = \{M_1, \ldots, M_n\}$.

Предположим, что x фиксирует (нормализует) элемент M_i этого множества. Поскольку в группе $\overline{G}$ нет элементов порядка 6, элемент x индуцирует на M_i полевой автоморфизм порядка 3 и, в частности, 3 делит n_i. Но $C_{M_i}(x) \cong Sz(2^{n_i/3})$, следовательно, в подгруппе $C_{M_i}(x) \times \langle x\rangle$ есть элемент порядка 6; противоречие.

Таким образом, подгруппа $\langle x\rangle$ действует на множестве M без неподвижных точек. Можно считать, что $\{M_1, M_2, M_3\}$ есть $\langle x\rangle$-орбита на M. Тогда $(M_1 \times M_2 \times M_3)\langle x\rangle \cong M_1 \wr \langle x\rangle$ и, следовательно, $C_{M_1M_2M_3}(x) \cong M_1$. Поэтому в подгруппе $C_{M_1M_2M_3}(x) \times \langle x\rangle$ есть элемент порядка 6; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.2.3. *Группа $\overline{G}$ либо проста, либо изоморфна $PGL_2(3^n)$, либо изоморфна $L_2(3^n).2_3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть L — цоколь группы $\overline{G}$. Будем отождествлять L с $Inn(L)$ и считать, что $\overline{G} \leq Aut(L)$. По предположению $L < \overline{G}$. Простая подгруппа L изоморфна одной из групп из заключения леммы 1.1.5. В частности, $L = \Phi(q)$ — простая группа лиева типа $\Phi \in \{A_1, A_2, {}^2A_2, {}^2B_2\}$ над конечным полем характеристики p подходящего порядка $q = p^n$. Ввиду [18, предложение 2.5.12] $Aut(L) = Inndiag(L) \rtimes (\langle f \rangle \times \langle g \rangle)$, где $Inndiag(L)$ — группа внутренне-диагональных автоморфимов группы L (она изоморфна $PGL_2(q)$ при $\Phi = A_1$, $PGL_3(q)$ при $\Phi = A_2$, $PGU_3(q)$ при $\Phi = {}^2A_2$ и L при $\Phi = {}^2B_2$), $\langle f \rangle$ — группа полевых автоморфимов группы L (она изоморфна $Aut(GF(q))$ при $\Phi \neq {}^2A_2$ и $Aut(GF(q^2))$ при $\Phi = {}^2A_2$) и g — графовый автоморфизм группы L ($g = 1$ при $\Phi \neq A_2$ и $|g| = 2$ при $\Phi = A_2$). Поскольку $O^{\{2,3\}'}(\overline{G}) = \overline{G}$, $\overline{G}/L$ является $\{2, 3\}$-группой.

Пусть $L \cong L_2(q)$. Предположим, что пересечение $\overline{G} \cap \langle f \rangle$ нетривиально, и возьмем в нем элемент x простого порядка m. Тогда $m \in \{2, 3\}$. Ввиду [18, предложение 4.9.1] имеем $C_L(x) \cong L_2(q^{1/m})$. Теперь легко видеть, что подгруппа $C_L(x) \times \langle x \rangle$ содержит элемент порядка 6, что невозможно. Таким образом, $\overline{G} \cap \langle f \rangle = 1$. Отсюда следует, что q нечетно и $|\overline{G} : L| = 2$.

Пусть $q = 3^n$, где $n \geq 2$. Группа $PGL_2(3^n)$ не имеет элементов порядка 6, так как ввиду [10, табл. 8.1] любая ее максимальная 3-локальная подгруппа есть группа Фробениуса вида $3^n : (3^n - 1)/2$. Поэтому случай $\overline{G} = PGL_2(3^n)$ не противоречит лемме. Таким образом, $\overline{G} \cap PGL_2(3^n) = \overline{G} \cap \langle f \rangle = 1$. Отсюда следует, что n четно и $\overline{G} = L_2(3^n).2_3$, что не противоречит лемме.

Пусть $q = p^n \equiv \pm 5 \,(mod\, 12)$. Тогда $q \equiv \varepsilon 1 \,(mod\, 4)$ для некоторого $\varepsilon \in \{+, -\}$ и, следовательно, $q + \varepsilon 1 \equiv \varepsilon 6 \,(mod\, 12)$. Ввиду [10, табл. 8.1] в L имеется единственный класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных диэдральной группе порядка $q + \varepsilon 1$. Пусть x — элемент порядка 3 из такой подгруппы. Тогда $N_{\overline{G}}(\langle x \rangle) = C_{\overline{G}}(x)\langle t \rangle$, где t — инволюция из L, инвертирующая x. Из леммы Фраттини, примененной к силовской 3-подгруппе из L, следует, что $\overline{G} = LN_{\overline{G}}(\langle x \rangle) = LC_{\overline{G}}(x)$. Но тогда $\overline{G} = L$, что не так.

Пусть $L \cong Sz(2^n)$, где n нечетно. Тогда группа $\overline{G}$ содержит элемент x

порядка 3. Ввиду [18, предложение 4.9.1] имеем $C_L(x) \cong Sz(q^{1/3})$. Теперь легко видеть, что подгруппа $C_L(x) \times \langle x \rangle$ содержит элемент порядка 6, что невозможно.

Пусть $L \cong L_3^\delta(q)$, где $\delta \in \{+,-\}$, $q = 2^n \geq 4$ и $(q-\delta 1)_3 \leq 3$. Если $q = 4$, то ввиду [12] группа $\overline{G}$ содержит элемент порядка 6, что невозможно. Поэтому $q \geq 8$ и ввиду [10, табл. 8.3,8.5] в L имеется единственный класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных группе $(q-\delta 1)^2/(3, q-\delta 1) : S_3$. Пусть M — представитель этого класса и $T = T_\delta$ — нормальная в M абелева подгруппа вида $(q-\delta 1)^2/(3, q-\delta 1)$. Ввиду рассуждений Фраттини $\overline{G} = LN_{\overline{G}}(M)$. Пусть S — силовская 2-подгруппа в M. Тогда $|S| = 2$ и, следовательно, по лемме Фраттини $N_{\overline{G}}(M) = MC_{\overline{G}}(T)$. Поэтому $\overline{G} = LC_{\overline{G}}(T)$ и, следовательно, $\overline{G}/L$ является 2-группой.

Предположим, что 3 делит $q-\delta 1$. Тогда $(q-\delta 1)_3 = 3$ и, следовательно, $|O_3(T)| = 3$. Пусть x — элемент порядка 3 из $O_3(T)$. Тогда подгруппа $\langle x \rangle$ нормальна в M и $|M : C_M(x)| = 2$. Если подгруппа $\langle x \rangle$ нормальна в $N_{\overline{G}}(M)$, то $\overline{G} = LC_{\overline{G}}(x)$, откуда $\overline{G} = L$, противоречие. Таким образом, подгруппа $\langle x \rangle$ не нормальна в $N_{\overline{G}}(M)$. Тогда существует элемент y из $N_{\overline{G}}(M)$ такой, что $\langle x \rangle^y \neq \langle x \rangle$ и, следовательно, $T^y \neq T$. Поэтому $O(M) = TT^y = T \times \langle x \rangle^y$. Силовская 3-подгруппа $\langle x \rangle \times \langle x \rangle^y$ группы M содержится в некоторой силовской 3-подгруппе R группы L. Ввиду [10, табл. 8.3, 8.5] R содержится в некоторой максимальной подгруппе N вида $\mathbb{Z}_{(q^2+\delta q+1)/3} : \mathbb{Z}_3$ группы L. Но тогда подгруппа $\langle x \rangle \times \langle x \rangle^y$ содержит неединичный элемент z из $Z(N)$ и, следовательно, $C_L(z)$ содержит N и $O(M)$, что невозможно.

Итак, 3 делит $q+\delta 1$. Пусть R — силовская 3-подгруппа в M. Тогда $|R| = 3$ и $|N_M(R) : C_M(R)| = 2$, откуда по лемме Фраттини $N_{\overline{G}}(M) = MC_{\overline{G}}(R)$. Поэтому $\overline{G} = LC_{\overline{G}}(R)$ и, следовательно, $\overline{G} = L$, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.2.4. *Группа G не является контрпримером к теореме* 2.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если порядок группы $S(G)$ нечетен, то ввиду леммы 2.2.1 имеем $S(G) = O_{\{2,3\}'}(G) = 1$ и, следовательно, ввиду леммы 2.2.3 группа G не является контрпримером к теореме 2.2. Таким образом, порядок группы $S(G)$ четен. Возьмем $T \in Syl_3(G)$ и положим $W = S(G)T$. Тогда W — разрешимая группа порядка, делящегося на 6, и по теореме 2.1 $S(G) = O_{3'}(W)$ и T — циклическая группа. Поскольку $O(S(G)) = O_{\{2,3\}'}(G) = 1$, из теоремы 2.1 следует, что подгруппа $S(G)$ является 2-замкнутой, т. е. $S(G) = O_2(G) \leftthreetimes R$, где R — некоторая $\{2,3\}'$-подгруппа из $S(G)$. Можно считать, что T нормализует подгруппу R. Пусть t — элемент порядка 3 из T. Из леммы 1.1.13 следует, что t централизует подгруппу R. Пусть $\widetilde{G} = G/O_2(G)$. Тогда $\widetilde{S(G)} = \widetilde{R}$ и $\widetilde{t}$ централизует $\widetilde{R}$. Поэтому $\widetilde{R}C_{\widetilde{G}}(\widetilde{R})/\widetilde{R}$ содержит цоколь группы $\widetilde{G}/\widetilde{R}$, изоморфной почти простой (по лемме 2.2.2) группе $\overline{G}$. Ясно, что $\widetilde{R}C_{\widetilde{G}}(\widetilde{R})/\widetilde{R} \cong C_{\widetilde{G}}(\widetilde{R})/Z(\widetilde{R})$. Пусть $\widetilde{K}$ — последний член ряда коммутантов группы $C_{\widetilde{G}}(\widetilde{R})$. Тогда $\widetilde{K}$ — совершенное центральное расширение простой группы, изоморфной цоколю группы $\overline{G}$, с центром, являющимся $\{2,3\}'$-группой. Но мультипликатор Шура этой простой группы ввиду леммы 6 и [12, табл. 5] является $\{2,3\}$-группой. Поэтому $\widetilde{K}$ — простая группа, изоморфная цоколю группы $\overline{G}$. Пусть K — полный прообраз в G подгруппы $\widetilde{K}$. Тогда $K/O_2(K)$ — простая группа с нетривиальной циклической силовской 3-подгруппой, причем элемент порядка 3 из K действует на $O_2(K) \setminus \{1\}$ без неподвижных точек. В частности, ввиду леммы 2.2.3 группа $\overline{G}$ проста.

Пусть $K/O_2(K) \cong L_2(q)$, где $3 < q \neq 5$. Тогда ввиду леммы 1.1.8 q четно и, следовательно, ввиду леммы 2.1.2 $\widetilde{G} = \widetilde{K} \times \widetilde{R}$. Поскольку $O^{\{2,3\}'}(G)) = G$, получаем $R = 1$. Теперь ввиду леммы 1.1.8 группа G не является контрпримером к теореме 2.2.

Пусть $K/O_2(K) \cong L_3^{\delta}(q)$, где $\delta \in \{+,-\}$ и q четно. Тогда ввиду [10, табл.

8.3,8.5] в $K/O_2(K)$ имеется единственный класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных группе Фробениуса вида $\mathbb{Z}_{q^2+\delta q+1} : \mathbb{Z}_3$. Поэтому ввиду леммы 1.1.3 элемент порядка 3 из такой подгруппы централизует некоторый неединичный элемент из $O_2(K)$, что невозможно.

Лемма доказана.

Утверждение необходимости для теоремы 2.2 доказано. Утверждение достаточности вытекает из леммы 1.1.5 и доказательства леммы 2.2.3.

Теорема 2.2 доказана.

Из теоремы 2.2 извлекается

Следствие 2.1. *Если G — конечная почти простая группа без элементов порядка* 6*, то G изоморфна расширению либо ее цоколя, либо группы $PGL_2(3^n)$, либо группы $L_2(3^{2k}).2_3$ посредством группы полевых автоморфизмов порядка, взаимно простого с* 6*.*

Отметим, что наше доказательство этих результатов не зависит от классификации конечных простых групп. Ссылки на [18] и [10] приведены для удобства. Они могут быть заменены ссылками на исходные классические результаты, полученные задолго до классификации.

3 О конечных группах графы Грюнберга–Кегеля которых, как абстрактные графы изоморфны графу Грюнберга – Кегеля группы A_{10}

Целью данной главы является описание всех конечных 4-примарных групп со связным графом Грюнберга–Кегеля. Результаты сформулированы в теоремах

3.1 Конечные почти простые группы графы Грюнберга–Кегеля которых, как абстрактные графы изоморфны подграфу графа Грюнберга–Кегеля группы A_{10}

Теорема 3.1. *Пусть группа G — конечная неразрешимая группа, граф $\Gamma(G)$ которой, как абстрактный граф изоморфен графу $\Gamma(A_{10})$. Тогда группа $\overline{G} = G/S(G)$ почти проста.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа $\overline{G}$. Тогда $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, где $M_1, \ldots, M_n$ — изоморфные неабелевы простые группы.

Допустим, что$n > 1$. Тогда любая вершина графа $\Gamma(M)$ смежна по крайней мере с двумя другими вершинами этого графа, следовательно $\pi(M_1) = \{r, s, p\}$. Из леммы 1.1.14, $\{2, 3\} \in \pi(M_1)$ и $Out(M_1)$ — 2-группа.

Предположим, что $q \in \pi(\overline{G})$. Тогда существует элемент x порядка q в $\overline{G}$. Подгруппа $\langle x \rangle$ действует (через сопряжение) на множестве $\{M_1, \ldots, M_n\}$ без неподвижных точек. Действительно, предположим, что элемент x нормализует M_1. Поскольку $N_{\overline{G}}(M_1)/M_1C_{\overline{G}}(M_1)$ — 2-группа, елемент x централизует M_1. Следовательно x централизует элементы порядка 2 и 3 в M_1, противоречие с видом графа $\Gamma(G)$. Таким образом, подгруппа $K = \langle M_1, x \rangle$ изоморфна сплетению $M_1 \wr \mathbb{Z}_q$. Следовательно, $C_K(x) \cong M_1$, а значит, x централизует некоторые элементы порядка 2 и 3 в K. Это невозможно.

Итак, $q \notin \pi(\overline{G})$. Следовательно $q \in \pi(S(G))$. Пусть $Q \in Syl_q(S(G))$. По лемме Фраттини, $G = S(G)N_G(Q)$, и, следовательно, $N_G(Q)/N_{S(G)}(Q) \cong \overline{G}$. Так как $n > 1$, то силовская 2-подгруппа из $N_G(Q)$ содержит четвертую подгруппу, поэтому $p = 2$. Следовательно, силовские r- и s-подгруппы в $N_G(Q)$, а значит, и в $\overline{G}$, цикличны, что противоречит предположению $n > 1$.

Итак, $n = 1$, т. е. подгруппа M простая. Если $\overline{G}$ содержит отличные от M минимальные нормальные подгруппы N, то, как доказано выше, N является простой и централизуемой M. Тогда, рассуждая, как выше, приходим к противоречию.

Теорема 3.1 доказана.

В теореме 3.1 было доказано, что граф $\Gamma(G)$, изоморфен как абстрактный граф подграфу графа $\Gamma(A_{10})$. Поэтому основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть G — конечная почти простая группа. Тогда граф $\Gamma(G)$, изоморфен как абстрактный граф подграфу графа $\Gamma(A_{10})$ тогда, и только тогда, когда выполняется одно из утверждений:*

(a) *граф $\Gamma(G)$ несвязен и группа G изоморфна одной из следующих групп:*

(1) *A_n при $5 \leq n \leq 9$, S_n при $5 \leq n \leq 8$, M_{10}, $L_2(q)$ при $q \in \{7, 8, 16, 17, 25, 49, 81\}$, $PGL_2(q)$ при $q \in \{7, 9, 17\}$, $L_2(q).2$ при $q \in \{16, 25, 49, 81\}$, $Aut(L_2(16))$, $L_2(27).3$, $L_2(81).4_1$, $L_2(81).4_2$, $L_3(q)$ при $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 17\}$, $Aut(L_3(q))$ при $q \in \{3, 5, 8, 17\}$, $L_3(q).2$ при $q \in \{2, 7, 8\}$, $L_3(8).3$, $L_4(3)$, $L_4(3).2_2$, $L_4(3).2_3$, $S_4(q)$ при $q \in \{3, 4, 5, 7, 9\}$, $Aut(S_4(q))$ при $q \in \{3, 4\}$, $S_4(4).2$, $S_4(9).2_1$, $S_4(9).2_3$, $S_6(2)$, $Aut(S_6(2))$, $U_3(q)$ при $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $Aut(U_3(q))$ при $q \in \{4, 5, 7, 9\}$, $U_3(q).2$ при $q \in \{5, 8, 9\}$, $U_3(8).3_1$, $U_3(8).3_3$, $U_3(8).6$, $U_4(3)$, $U_4(3).2_2$, $U_4(3).2_3$, $U_5(2)$, $Aut(U_5(2))$, $Sz(8)$, $Sz(32)$,*

$Aut(Sz(32))$, ${}^3D_4(2)$, $Aut({}^3D_4(2))$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2F_4(2)$, M_{11}, M_{12}, $Aut(M_{12})$, J_2;

(2) $L_2(r)$ или $PGL_2(r)$, где r — простое число, $17 \neq r \geq 11$, $r^2-1 = 2^a3^bs^c$, $s > 3$ простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1 либо 2 при $r \in \{97, 577\}$;

(3) $L_2(2^m)$, где m, $2^m - 1$ и $(2^m+1)/3$ — простые числа большие чем 3;

(4) $L_2(3^m)$ или $PGL_2(3^m)$, где m и $(3^m-1)/2$ — нечетные простые числа и $(3^m+1)/4$ равно либо простому числу, либо11^2 (для $m = 5$);

(b) граф $\Gamma(G)$ связен и группа G изоморфна одной из следующих групп: $Aut(A_6)$, S_9, A_{10}, $Aut(L_2(q))$ при $q \in \{25, 27, 49, 81\}$, $L_2(81).2^2$, $PGL_3(4)$, $L_3(4).6$, $L_3(4).2^2$, $PGL_3(4).2_2$, $PGL_3(4).2_3$, $PGL_3(7)$, $Aut(L_3(7))$, $L_4(3).2_1$, $Aut(L_4(3))$, $Aut(S_4(q))$ при $q \in \{5, 7, 9\}$, $S_4(9).2_2$, $Aut(U_3(q))$ при $q \in \{5, 8\}$, $U_3(5).3$, $U_3(8).3_2$, $U_3(8).3^2$, $U_3(8).S_3$, $U_4(3).2_1$, $U_4(3).2^2$, $U_4(3).4$, $Aut(U_4(3))$, $O_8^+(2).2$, $O_8^+(2).3$, $Aut(J_2)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.2, и пусть L — ее цоколь.

Лемма 3.1.1. *Если $|\pi(L)| = 3$, тогда G либо удовлетворяет условию ($a1$) теоремы 3.2, либо изоморфна $Aut(A_6)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из 1.1.14 и [5, Table].

Ввиду леммы 3.1.1, в дальнейшем мы можем считать, что $|\pi(L)| = 4$.

Лемма 3.1.2. *Если граф $\Gamma(G)$ несвязен, то G удовлетворяет условию (a) теоремы 3.2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из теоремы 3.1 и [6, Table 1].

Ввиду леммы 3.1.2, в дальнейшем мы можем считать, что граф $\Gamma(G)$ связен.

Лемма 3.1.3. *Если* L *изоморфна группе из пункта* (1) *леммы* 1.1.15*, тогда* G *удовлетворяет условию* (b) *теоремы 3.2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из теоремы 3.1 и [6, Table 1].

Лемма 3.1.4. L *не изоморфна группе из пункта* (2) *леммы* 1.1.15.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда $G \cong Aut(L)$ и ввиду [6, Table 1] граф $\Gamma(G)$ несвязен, противоречие.

Лемма 3.1.5. L *не изоморфна группе из пункта* (3) *леммы* 1.1.15.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда $L \cong L_2(2^m)$, где $m, u = 2^m - 1$ и $t = (2^m + 1)/3$ — простые числа, большие 3. Поскольку граф $\Gamma(L)$ несвязна, имеем $L < G$. Следовательно, $G \cong Aut(L) \cong L_2(2^m) : \mathbb{Z}_m$. Поскольку $\pi(G) = \{2, 3, u, t\}$, имеем $m \in \{u, t\}$.

Пусть $m = u$. Тогда $m = 2^m - 1$, т.е., $2^m = m + 1$. Покажем индукцией по m, что $2^m > m + 1$ при $m \geq 2$. При $m = 2$, имеем $2^2 = 4 > 2 + 1 = 3$, таким образом база индукции доказана. Предположим, что $m \geq 2$ и $2^m > m + 1$. Тогда $2^{m+1} > 2m + 2 = m + (m + 2) > m + 2$, так что шаг индукции также выполняется. Таким образом, $m \neq u$.

Итак, $m = t = (2^m + 1)/3$. Тогда $2^m = 3m - 1$. Покажем индукцией по m что $2^m > 3m - 1$ для $m > 3$. Для $m = 4$, имеем $2^4 = 16 > 3 \cdot 4 - 1 = 11$, таким образом база индукции доказана. Предположим, что $m > 3$ and $2^m > 3m - 1$. Тогда $2^{m+1} > 6m - 2 = 3(m + 1) - 1 + (3m - 4) > 3(m + 1) - 1$, так что шаг индукции также выполняется. Таким образом, $m \neq t$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.1.6. *Если* L *изоморфна группе из пункта* (4) *леммы* 1.1.15*, тогда* $G \cong Aut(L_2(27))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $L \cong L_2(3^m)$, где m и $u = (3^m - 1)/2$ нечётные простые числа, а $(3^m + 1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 для $m = 5$. Тогда $\pi((3^m+1)/4) = \{t\}$ для некоторого простого числа t. Ввиду [6, Table 1], графы $\Gamma(L_2(3^m))$ и $\Gamma(PGL_2(3^m))$ несвязны.

Поскольку $|Out(L)| = 2m$ (см. [12, Table 5]) и граф $\Gamma(G)$ связен, группа G изоморфна либо $L : \mathbb{Z}_m$ или $Aut(L)$. Следовательно, $m \in \pi(G) = \pi(L) = \{2, 3, u, t\}$.

Предположим, что $m \in \{u, t\}$. Тогда $m > 3$, и, значит, $m \in \pi(L)$. Но тогда полевой автоморфизм φ порядка m группы L централизует элемент порядка m в L. У нас есть $C_L(\varphi) \cong L_2(3) \cong A_4$ (см. [18, 4.9.1]); противоречие. Таким образом, $m = 3$. В силу [6, Table 1] граф $\Gamma(L_2(3^3).\mathbb{Z}_3)$ несвязен, следовательно, $G \cong Aut(L_2(3^3))$.

Утверждение необходимости теоремы 3.2 следует из лемм 3.1.1–3.1.6.

Утверждение достаточности теоремы 3.2 следует из [5, 6, 12, 18].

Теорема 3.2 доказана.

Из теоремы 3.2 и [12, 18] вытекает следующее следствие.

Следствие 3.1. *Пусть G — конечная почти простая группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен $\Gamma(A_{10})$. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: S_9, A_{10}, $PGL_3(4).2_3$, $PGL_3(4).2_2$ $PGL_3(7)$, $Aut(L_3(7))$, $Aut(S_4(5))$, $Aut(S_4(7))$, $S_4(9).2_2$, $Aut(S_4(9))$, $U_3(5).3$, $Aut(U_3(5))$, $U_3(8).S_3$, $Aut(U_3(8))$, $O_8^+(2).2$, $O_8^+(2).3$, $Aut(J_2)$.*

3.2 О конечных неразрешимых группах графы Грюнберга–Кегеля которых, как абстрактные графы изоморфны графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}

В этом параграфе группа G – конечная неразрешимая группа, граф Грюнберга–Кегеля которой, как абстрактный граф изоморфен графу

Грюнберга–Кегеля группы A_{10}. В следующей теореме рассматривается случай, когда порядок группы G не делится на 3.

Теорема 3.3. *Если 3 не делит $|G|$, то с точностью до перестановки чисел r и s выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\overline{G} \cong Aut(Sz(32))$, $\{r,s\} = \{2,5\}$, $\{p,q\} = \{31,41\}$, $p \in \pi(S) \subseteq \{2,p\}$, $O_{2',2}(S)/O(S)$ — элементарная абелева 2-группа, $F^*(G/O_{2',2}(S)) = P \times E$, где P — p-группа и $E \cong Sz(32)$, и либо $S = O(G)$, либо группа E индуцирует на $O_{2',2}(S)/O_{2'}(S)$ прямую сумму модулей, каждый из которых изоморфен естественному 4-мерному $GF(32)Sz(32)$-модулю;

(2) $\overline{G} \cong Sz(8)$, $r = 2$, $\{p,s\} = \{5,7\}$, $q = 13$, $\pi(S) = \{2,p\}$, каждый 2-главный фактор G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 4-мерному или 16-мерному неприводимому $GF(8)Sz(8)$-модулю, причем вторая возможность всегда появляется;

(3) $\overline{G} \cong Sz(32)$ или $Aut(Sz(32))$, $r = 2$, $\{p,s\} \subseteq \{5,31,41\}$, $q \in \{31,41\}$, $\pi(S) = \{2,p\}$, каждый 2-главный фактор G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 4-мерному, одному из двух 16-мерных или одному из двух 64-мерных неприводимых $GF(32)Sz(32)$-модулей;

(4) $\overline{G} \cong Sz(8)$, $\{r,s\} = \{5,7\}$, $p = 2$, $q = 13$, $5 \in \pi(S) \subseteq \{5,p\}$, $G/O^2(S) = P \circ E$, где P — 2-группа и $E \cong 2{\cdot}Sz(8)$ или $(2 \times 2){\cdot}Sz(8)$, а группа E индуцирует на каждом 5-главном факторе $O^2(G)$ точный неприводимый 8-мерный $GF(5)2{\cdot}Sz(8)$-модуль.

Замечание 3.1. *Можно доказать, что все случаи из заключения теоремы 3.3 реализуемы. Утверждение (1) верно для группы $\mathbb{Z}_p \times (2^{20} \leftthreetimes Aut(Sz(32))$, где $p \in \{31,41\}$. Утверждение (2) верно для групп $\mathbb{Z}_p \times (2^{12} \leftthreetimes Sz(8))$ и $\mathbb{Z}_p \times (2^{48} \leftthreetimes Sz(8))$, где $p \in \{5,7\}$. Утверждение (3) верно для групп $\mathbb{Z}_p \times (2^m \leftthreetimes Sz(32))$ и $\mathbb{Z}_p \times (2^m \leftthreetimes Aut(Sz(32)))$, где $p \in \{5,31,41\}$ и $m \in \{20,80,320\}$.*

Утверждение (4) *верно для группы* $5^8 \rightthreetimes 2{\cdot}Sz(8)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.3, и T — силовская 2-подгруппу G. По 3.1, $\overline{G} = G/S \cong Sz(8)$, $Sz(32)$ или $Aut(Sz(32))$. Согласно [12], $\Gamma(\overline{G})$ является вполне несвязным графом (кокликой), если $\overline{G} = Soc(\overline{G})$ и имеет вид:

$$2 - 5 \quad 31 \quad 41$$

если $\overline{G} \cong Aut(Sz(32))$.

Предположим, что r и s оба не делят $|S|$. Тогда r и s — смежные вершины графа $\Gamma(\overline{G})$. Следовательно, $\overline{G} \cong Aut(Suz(32))$, $\{r, s\} = \{2, 5\}$ и $\pi(S) \subseteq \{p, q\} = \{31, 41\}$, поэтому $S = O(G)$.

Предположим, что $q \in \pi(S)$ и $Q \in Syl_q(S)$. По аргументу Фраттини $G = SN_G(Q)$, и мы можем предположить, что $T < N_G(Q)$. Тогда T содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, поэтому некоторая инволюция из T централизует некоторый элемент из Q, а значит, 2 и q являются смежным в $\Gamma(G)$, противоречие.

Таким образом, $q \notin \pi(S)$, следовательно, $S = O_p(G)$ и верно утверждение (1) теоремы 3.3.

Предположим, что r или s делит $|S|$. Без ограничения общности пусть $r \in \pi(S)$. Пусть $Q \in Syl_q(G)$. Разрешимая группа SQ содержит $\{r, q\}$-холлову подгруппу U. Так как граф $\Gamma(U)$ несвязен, по лемме 1.1.1 U является либо группой Фробениуса, либо 2-фробениусовой группой, а подгруппа $F(U)$ либо $O_r(U)$ или $O_q(U)$.

Предположим, что $F(U) = O_q(U)$. Тогда силовская r-подгруппа R группы S является либо циклической группой, либо (обобщенной) группой кватернионов. Тогда $\overline{C_G(\Omega_1(R))} \geq Soc(\overline{G})$, следовательно, $r = p$, противоречие.

Таким образом, $F(U) = O_r(U)$, следовательно, Q — либо циклическая группа, либо (обобщенная) группа кватернионов. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем, что q не делит $|S|$, значит, $q \neq 2$. Кроме того, U — группа Фробениуса с ядром $U \cap S$ и циклическим дополнением Q.

Предположим, что $p \notin \pi(S)$. Если $s \notin \pi(S)$, то $S = O_r(G)$ и, следовательно, p и s — смежные вершины графа $\Gamma(\overline{G})$, где $\overline{G} \cong Aut(Suz(32))$, $\{p, s\} = \{2, 5\}$ и $\{r, q\} = \{31, 41\}$. Из таблицы r-модулярных характеров Брауэра группы $Sz(32)$ (см. [26]) и леммы 1.1.7 получаем, что $C_S(x) \neq 1$ для элемента x порядка q из G, противоречие. Таким образом, $\pi(S) = \{r, s\}$. Элемент порядка q из G действует на $S \setminus \{1\}$ без неподвижных точек, поэтому по лемме 1.1.1 $S = F(G)$. По лемме 1.1.10, $q \neq 5$, а значит, $q > 5$. Следовательно, p и q смежны в $\Gamma(\overline{G})$, значит, $\{p, q\} = \{2, 5\}$, противоречие.

Таким образом, $p \in \pi(S)$. Рассуждая, как выше, получаем, что $\{r, s, q\}$-холлова подгруппа V разрешимой группы SQ является группой Фробениуса с ядром $W := F(V) = V \cap S$ и дополнением Q. Имеем $G = SN_G(W)$, следовательно, $N_G(W)/N_S(W) \cong \overline{G}$. Пусть $N = N_G(W)$. Тогда $S(N) = N_S(W) = W \rightthreetimes P$, где $P \in Syl_p(S(N))$. Ясно, что $F(N) = W \times C_P(W) = WC_N(W)$ и $C_P(W) = O_p(N)$. Положим $\widetilde{N} = N/O_p(N)$.

Предположим, что $S(\widetilde{N}) = \widetilde{W}$. Тогда $\widetilde{N}/\widetilde{W} \cong \overline{G}$ и $\widetilde{W} = F(\widetilde{N})$.

Предположим, что граф $\Gamma(\widetilde{N})$ связен. Тогда p и q — смежные вершины графа $\Gamma(\overline{G})$. Следовательно, $\overline{G} \cong Aut(Sz(32))$, $\{p, q\} = \{2, 5\}$ и $\{r, s\} = \{31, 41\}$. Тогда $\widetilde{W} = O_{\{2,5\}'}(\widetilde{N})$ и силовская 2-подгруппа и силовская 5-подгруппа группы $\overline{G}$ содержат подгруппы, изоморфные $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ соответственно. Следовательно, q и r смежны в $\Gamma(\widetilde{N})$, противоречие.

Следовательно, граф $\Gamma(\widetilde{N})$ несвязен и по [6, теоремы 3 и 4] выполняется одно из утверждений (1) – (3) теоремы 3.3.

Пусть $S(\widetilde{N}) \neq \widetilde{W}$. Тогда $S(\widetilde{N}) = \widetilde{W} \rightthreetimes \widetilde{P}$, где $\widetilde{P}$ — нетривиальная p-группа, а $C_{\widetilde{N}}(\widetilde{W}) \leq \widetilde{W}$. Можно предположить, что $S(\widetilde{N})\widetilde{Q} = \widetilde{W} \leftthreetimes (\widetilde{P} \rtimes \widetilde{Q})$. Пусть $\langle x\rangle = \Omega_1(\widetilde{Q})$.

Покажем, что $[\widetilde{P}, \langle x\rangle] = 1$. Предположим противное, что $[\widetilde{P}, \langle x\rangle] \neq 1$. Пусть C — критическая подгруппа в $\widetilde{P}$. Применим леммы 1.1.12 и 1.1.13 к группе $\widetilde{W} \leftthreetimes (\widetilde{P} \leftthreetimes \langle x\rangle)$. Тогда получаем следующее: $\overline{G} \cong Sz(8)$ или $Sz(32)$, $p = 2$, $q = 5$, $\langle [\widetilde{P}, C], Z(\widetilde{P}), \Phi(C)\rangle \leq Z(C) \leq C_{\widetilde{P}}(x)$, $[C, \langle x\rangle]$ — экстраспециальная группа порядка 32. Подгруппы $\widetilde{W}C$ и $\widetilde{W}Z(C)$ нормальны в $\widetilde{N}$. Установим $H = \widetilde{N}/\widetilde{W}Z(C)$ и $V = \widetilde{W}C/Z(C)$. Тогда V — нормальная элементарная абелева 2-подгруппа группы H, $C_H(V) = O_2(H)$, $H/O_2(H) \cong \overline{G}$ и $|[V, \langle t\rangle]| = 16$ для некоторого элемента t порядка 5 из H. В частности, V является точным $GF(2)\overline{G}$-модулем. Ясно, что модуль V имеет композиционный фактор V_0 размерности не менее 2. Пусть K — агебраическое замыкание поля $GF(2)$. По лемме 1.1.6 для точного неприводимого $GF(2)\overline{G}$-модуля V_0 существует класс алгебраически сопряженных $\{W_1, \ldots, W_m\}$ точного (абсолютно) неприводимого $K\overline{G}$-модули с полем определения $GF(2^m)$ такие, что $V_0 \otimes_{GF(2)} K = \bigoplus_{i=1}^m W_i$. Обозначим через W_0 модуль W_1, рассматриваемый как $GF(2^m)$-модуль. Тогда модуль V_0 можно отождествить с модулем W_0, рассматриваемым как $GF(2)\overline{G}$-модуль. Следовательно, для элемента g порядка 5 из $\overline{G}$ имеем $\dim V_0 = m \dim W_0$ и $\dim C_{V_1}(g) = m \dim C_{W_0}(g)$, следовательно,

$$\dim[V_0, \langle g\rangle] = \dim V_0 - \dim C_{V_0}(g) = m(\dim W_0 - \dim C_{W_0}(g)) = 4.$$

По таблицам 2-модулярных характеров Брауэра $Sz(8)$ и $Sz(32)$ (см. [26]) и лемме 1.1.7 получаем следующее: если $\dim W_0 = 4$, то $\dim C_{W_0}(g) = 0$ и m равно 3 или 5 для $Sz(8)$ или $Sz(32)$ соответственно; если $\dim W_0 \neq 4$, то $\dim W_0 - \dim C_{W_0}(g) > 4$. В любом случае, $\dim[V_0, \langle g\rangle] > 4$, противоречие.

Итак, $[\widetilde{P}, \langle x\rangle] = 1$, следовательно, $Soc(\widetilde{N}/S(\widetilde{N})) \leq C_{\widetilde{N}}(\widetilde{P})S(\widetilde{N})/S(\widetilde{N})$. Обозначим через L последний член производного ряда $C_{\widetilde{N}}(\widetilde{P})\widetilde{W}/\widetilde{W}$. По [12],

$L \cong Sz(8)$, $Sz(32)$, $2^{\cdot}Sz(8)$ или $2^{2\cdot}Sz(8)$. Пусть K — полный прообраз L в $\widetilde{N}$.

Если $Z(L) = 1$, то $K/\widetilde{W}$ — простая группа. Рассуждая, как выше, получаем, что $\widetilde{W} = O_2(\widetilde{N})$, $p > 2$ и выполняется одно из утверждений (1)–(3) теоремы 3.3.

Пусть $Z(L) \neq 1$. Тогда $p = 2$ и $\overline{G} \cong Sz(8)$. Можно допустить, что L неприводимо действует на $O_r(\widetilde{W})/\Phi(O_r(\widetilde{W}))$. Следовательно, $L \cong 2^{\cdot}Sz(8)$. По таблицам характеров Брауэра группы $2^{\cdot}Sz(8)$ (см. [26]) и лемме 1.1.7 получаем, что $\widetilde{W} = O_5(S(\widetilde{N}))$, $\{r, s\} = \{5, 7\}$, $q = 13$ и 5-главные факторы группы G изоморфны точному неприводимому 8-мерному $GF(5)2^{\cdot}Sz(8)$-модулю, так как $2^{\cdot}Sz(8) < \Omega_8^+(5)$ по [10, Таблица 8.50]. Следовательно, выполняется утверждение (4) теоремы 3.3.

Теорема 3.3 доказана.

В следующей теореме описывается случай, когда порядок группы G делится на 3, но при этом группа G не содержит элементов порядка 6.

Теорема 3.4. *Если 3 делит $|G|$ и G не имеет элементов порядка 6, то верно одно из следующих утверждений:*

(1) *$q = 2$, $\overline{G} \cong L_2(2^n)$, $S = O_{2',2}(G)$, $O(G) = O_p(G)$, $S/O(G)$ — элементарная абелева 2-группа, которая либо тривиальна, либо изоморфна как $\overline{G}$-модуль прямой сумме естественных $GF(2^n)\overline{G}$-модулей, и верно одно из следующих утверждений:*

(1a) *$n = 4$, $p = 17$ и $\{r, s\} = \{3, 5\}$;*

(1b) *n — простое число, $n \geq 5$, $p = 2^n - 1$, $\{r, s\} = \{3, (2^n + 1)/3\}$;*

(2) *$q = 2$, $S = O_p(G)$, $\overline{G} \cong L_2(p)$, $p \geq 31$, $p \equiv \varepsilon 5(mod\ 12)$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $p - \varepsilon 1$ — степень 2, и $3 \in \{r, s\} = \pi((p + \varepsilon 1)/2)$;*

(3) *$q = 3$, $S = O_p(G)$, и верно одно из следующих утверждений:*

(3a) *$\overline{G} \cong PGL_2(9)$, $p > 5$, и $\{r, s\} = \{2, 5\}$;*

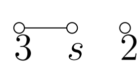
(3b) $\overline{G}$ *изоморфна* $L_2(81)$, $PGL_2(81)$ *или* $L_2(81).2_3$, $p = 41$, *и* $\{r, s\} = \{2, 5\}$;

(3c) $\overline{G} \cong L_2(3^n)$ *или* $PGL_2(3^n)$, n *— нечетное простое число,* $p = (3^n - 1)/2$, *и* $\{r, s\} = \pi(3^n + 1)$.

Замечание 3.2. *Можно доказать, что все случаи из заключения теоремы* 3.4 *реализуемы. Утверждение* (1a) *верно для группы* $\mathbb{Z}_{17} \times L_2(16)$. *Утверждение* (1$b$) *верно для групп* $\mathbb{Z}_{2^n-1} \times L_2(2^n)$, *где* $n \geq 5$, $2^n - 1$ *и* $(2^n+1)/3$ *— простые числа. Утверждение* (2) *верно для группы* $\mathbb{Z}_{31} \times L_2(31)$. *Утверждение* (3$a$) *верно для групп* $\mathbb{Z}_p \times PGL_2(9)$, *где* $p > 5$ *простое число. Утверждение* (3b) *верно для групп* $\mathbb{Z}_{41} \times L_2(81)$, $\mathbb{Z}_{41} \times PGL_2(81)$ *и* $\mathbb{Z}_{41} \times L_2(81).2_3$. *Утверждение* (3$c$) *верно для групп* $\mathbb{Z}_p \times L_2(3^n)$ *и* $\mathbb{Z}_p \times PGL_2(3^n)$,*где* n *и* $(3^n - 1)/2$ *— нечетные простые числа, и* $|\pi(3^n + 1)| = 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.4. Тогда $p > 3$, и мы можем считать, что $\{r, q\} = \{2, 3\}$. Ввиду 2.2, 3.1 и 3.2, $\overline{G} = G/S$ — почти простая группа, граф которой $\Gamma(\overline{G})$ несвязен, $\varnothing \neq \pi(O(S)) \subseteq \{p, s\}$ и $S = O_{2',2}(G)$.

Предположим, что $q = 2$. Тогда $r = 3$. Если $2 \in \pi(S)$, то из 2.2, [2] и [3] следует, что $O(S) = O_p(G)$ и утверждение (1) теоремы 3.4 выполняется. Пусть $2 \notin \pi(S)$. Тогда по 2.2 $S = O(G)$ и $\pi(S) \subseteq \{p, s\}$. Поскольку силовская 2-подгруппа почти простой группы $\overline{G}$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, вершина 2 в графе $\Gamma(G)$ смежна с каждой вершиной из $\pi(S)$. Следовательно, $S = O_p(P)$, следовательно,



является индуцированным подграфом несвязного графа $\Gamma(\overline{G})$. Таким образом, в силу [5] и [6] выполняется утверждение (2) теоремы 3.4.

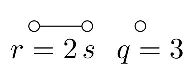
Предположим, что $q = 3$. Тогда $r = 2$ и ввиду 2.2, 3 не делит $|S|$. Следовательно, $3 \in \pi(\overline{G})$.

Предположим, что $s \in \pi(S)$. Пусть U — $\{2, s\}$-холлова подгруппа группы S. Тогда $G = SN_G(U)$, следовательно, $N_G(U)/N_S(U) \cong \overline{G}$. Таким образом, $N_G(U)$ содержит элемент x порядка 3. Так как $C_U(x) = 1$, подгруппа U нильпотентна.

Предположим, что $O^s(O(S)) < O(S)$. Так как группа $S/O^s(O(S))$ нильпотентна, имеем $O^s(S) < S$. Можно считать, что S — нетривиальная элементарная абелева s-группа. Каждый элемент порядка 3 группы $\overline{G}$ действует на $S \setminus \{1\}$ без неподвижных точек, поэтому силовская 3-подгруппа группы $\overline{G}$ является циклической. По 2.2 цоколь $\overline{G}$ изоморфен $L_2(2^n)$, $L_3(2^n)$, $U_3(2^n)$ или $L_2(q)$, где $q \equiv \pm 5 (mod\ 12)$. По лемме 1.1.8 последний случай невозможен. По [10] группы $L_3(2^n)$ и $U_3(2^n)$ содержат подгруппы, изоморфные $L_2(2^n)$, поэтому можно считать, что $\overline{G} \cong L_2(2^n)$. По лемме 1.1.8 $S = O_2(G)$, противоречие с $S = O_s(G)$ при $s > 2$.

Таким образом, $O^s(O(S)) = O(S)$, откуда $p \in \pi(S)$, $O^p(O(S)) < O(S)$ и $O^{p,p'}(O(S)) < O^p(O(S))$. Можно предположить, что $O^p(O(S)) = O_s(O(S)) = F(O(S))$. Пусть $\widetilde{G} = G/O^p(O(S))$. Тогда по лемме 1.1.13 каждый элемент порядка 3 из $\widetilde{G}$ действует тривиально на $O_p(\widetilde{G})$, поэтому $Soc(\overline{G})$ действует тривиально на $O_p(\widetilde{G})$. Согласно 2.2 и [12], порядок множителя Шура простой группы $Soc(\overline{G})$ делит 6. Следовательно, $\widetilde{G}^{(\infty)} \cong Soc(\overline{G})$. Пусть K — полный прообраз $\widetilde{G}^{(\infty)}$ в G. Тогда $S(K) = O_s(K \neq 1$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем противоречие.

Таким образом, $s \notin \pi(S)$, а значит, $S = O_p(G)$. Следовательно



является индуцированным подграфом несвязного графа $\Gamma(\overline{G})$. В силу [5] и [6] выполняется утверждение (3) теоремы 3.4.

Теорема 3.4 доказана.

В следующей теореме описывается случай, когда q делит $|S(G)|$.

Теорема 3.5. *Если G содержит элемент порядка 6 и q делит $|S|$, то верно одно из следующих утверждений:*

(1) q не делит $|\overline{G}|$, $G/O_p(G) = A \rtimes B$, где A — нециклическая абелева q-группа, $B = O_p(B \leftthreetimes B_1$, $F^*(B) = O_p(B) \times F^*(B_1)$, и выполняется одно из следующих утверждений:

(1a) $F^*(B_1) \cong SL_2(5)$, $p = 3$, и $\{r, s\} = \{2, 5\}$;

(1b) $F^*(B_1) \cong SL_2(7)$, $p = 3$, и $\{r, s\} = \{2, 7\}$;

(1c) $F^*(B_1) \cong SL_2(9)$, $p = 3$, и $\{r, s\} = \{2, 5\}$;

(1d) $F^*(B_1) \cong SL_2(17)$, $p = 3$, и $\{r, s\} = \{2, 17\}$;

(1e) $F^*(B_1) \cong SL_2(5)$, $p = 5$, $\{r, s\} = \{2, 3\}$, и AB_1 группа Фроббениуса с ядром A и дополнением B_1;

(2) q — простое число Ферма или Мерсенна, $q \geq 31$, $p = 2$, $\pi(q^2 - 1) = \{2, r, s\}$, $S = O_{2,2',2}(S)$, $O_{2,2'}(S)/O_2(S)$ — нециклическая абелева q-группа, $G/O_{2,2'}(S) = P \circ E$, где P — 2-группа, $E \cong SL_2(q)$, и группа E порождает на каждом q-главном факторе $O^2(G)$ 2-мерный естественный $GF(q)SL_n(q)$-модуль.

Замечание 3.3. *Можно доказать, что все случаи из заключения теоремы* 3.5 *реализуются. Утверждение* (1a) *верно для группы* $\mathbb{Z}_3 \times (q^2 \leftthreetimes SL_2(5))$, *где $q > 5$ — простое число и* $q \equiv \pm 1 \pmod{10}$, *и для группы* $\mathbb{Z}_3 \times (q^4 \leftthreetimes SL_2(5))$, *где $q > 5$ — простое число. Утверждение* (1b) *верно для группы* $\mathbb{Z}_3 \times (q^6 \leftthreetimes SL_2(7))$, *где $3 < q \neq 7$ — простое число и* $q \equiv \pm 7 \pmod{16}$, *и для группы* $\mathbb{Z}_3 \times (q^{12} \leftthreetimes SL_2(7))$, *где $3 < q \neq 7$ — простое число и* $q \equiv \pm 3, \pm 5 \pmod{16}$. *Утверждение* (1$c$) *верно для группы* $\mathbb{Z}_3 \times (q^4 \leftthreetimes SL_2(9))$, *где $q > 5$ —*

простое число. Утверждение (1d) *верно для группы* $\mathbb{Z}_3 \times (q^8 \leftthreetimes SL_2(17))$*, где* $3 < q \neq 17$ *— простое число и* $q \equiv \pm 1, \pm 2 \pm 4, \pm 8 \pmod{16}$*, и для группы* $\mathbb{Z}_3 \times (q^{16} \leftthreetimes SL_2(17))$*, где* $3 < q \neq 17$ *— простое число. Утверждение* (1e) *верно для группы* $\mathbb{Z}_5 \times (q^2 \leftthreetimes SL_2(5))$*, где* $q > 5$ *— простое число и* $q \equiv \pm 1 \pmod{10}$*, и для группы* $\mathbb{Z}_5 \times (q^4 \leftthreetimes SL_2(5))$*, где* $q > 5$ *— простое число и* $q \equiv \pm 3 \pmod{10}$*. Утверждение* (2) *верно для группы* $31^2 \leftthreetimes SL_2(31)$*.*

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.5. Пусть $q \in \pi(S)$, $Q \in Syl_q(S)$ и $N = N_G(Q)$. По аргументу Фраттини $G = SN$. Следовательно, $\overline{G} = G/S \cong N/N \cap S$ — почти простая группа, а значит, $S(N) = S \cap N$.

Подгруппа Q содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$. В противном случае $Soc(\overline{N}) \leq \overline{C_N(\Omega_1(Q))}$, а значит, степень вершины q в $\Gamma(G)$ не меньше 2 , это не так. Следовательно, $O_{q'}(S) = O_p(S)$ и $Q_0 := Q \cap O_{q',q}(S)$ — нетривиальная силовская q-подгруппа в $O_{q',q}(S)$, которая является нормальной подгруппой в N. По [17, теорема 6.3.3], $C_S(Q_0) \leq O_{q',q}(S)$. Если $C_G(Q_0) \nleq S$, то $Soc(\overline{N}) \leq \overline{C_N(Q_0)}$, что невозможно. Следовательно, $C_G(Q_0) = C_S(Q_0) = Q_0 \times C_{O_p(G)}(Q_0)$.

Пусть $G_r \in Syl_r(G)$ и $G_s \in Syl_s(G)$. Поскольку $G = O_p(G)N_G(Q_0)$, можно считать, что G_r и G_s содержатся в $N_G(Q_0)$. Поскольку Q_0G_r и Q_0G_s — группы Фробениуса с ядром Q_0 и дополнением G_r и G_s соответственно, каждая из групп G_r и G_s является циклической группой или (обобщенной) группой кватернионов.

Предположим, что $2 \in \{r, s\}$. Без ограничения общности можно считать, что $r = 2$. По [17, Theorem 10.3.1] G_r — (обобщенная) группа кватернионов, а G_s — циклическая группа. По лемме 1.1.2 $S = Z^*(G)$ и группа $Soc(G/O(G))$ изоморфна либо $2{\cdot}A_7$, либо $SL_2(t)$, где t нечетно и $t \geq 5$. Так как степень вершины r в $\Gamma(G)$ равна 2, то $|\pi(Soc(\overline{G}))| = 3$, а значит, по лемме 1.1.14 $Soc(G/O(G)) \cong SL_2(t)$, где $t \in \{5, 7, 9, 17\}$. Отсюда $\{2, 3\} \subset \pi(\overline{G}) = \pi(Soc(G)) = \{r, s, p\}$.

Группа SG_2 разрешима, поэтому по [17, теореме 6.4.1] можно считать, что QG_2 является $\{2, q\}$-холловской подгруппой группы SG_2. По лемме 1.1.1 QG_2 — группа Фробениуса с ядром Q и дополнением G_2. Поскольку (единственная) инволюция группы G_2 действует на $Q \setminus \{1\}$ без неподвижных точек, эта инволюция инвертирует Q, а значит, группа Q абелева. Таким образом, $Q = Q_0$ и $G = O_p(G)N$.

Покажем, что утверждение (1) теоремы 3.5 3 верно для G. Можно считать, что $O_p(G) = 1$, а значит, $G = N_G(Q)$, $C_G(Q) = Q$ и $Q \in Syl_q(G)$. По теореме Шура–Цассенгауза (см. [17, теорема 6.2.1]), $G = Q \rtimes G_0$ для группы G_0 и, следовательно, $S = QS(G_0)$, где $S(G_0) = Z^*(G_0)$ и $\pi(O(G_1)) \subseteq \{p, s\}$.

Предположим, что $s \in \pi(O(G_0))$, $U \in Syl_s(O(G_0))$ и $K = C_{G_0}(U)$. Тогда $O(K) = O_s(K) \times O_p(K)$ и $F^*(K/O(K)) \cong SL_2(t)$, где $t \in \{5, 7, 9, 17\}$. Если $t = 9$, то силовская 3-подгруппа группы G является нециклической, а значит, $s \neq 3$. Поскольку порядок множителя Шура $L_2(t)$ делит 6 (см. [12]), имеем $F^*(K/O_p(K)) \cong O_s(K) \times SL_2(t)$, отсюда следует, что силовские s-подгруппы в K нецикличны, что противоречит цикличности G_s.

Таким образом, $O(G_0) = O_p(G_0)$. Пусть x — элемент порядка s из G_0. Применяя лемму 1.1.13 к группе $Q \rtimes (O_p(G_1) \rtimes \langle x \rangle)$, получаем, что $F^*(G_0) \cong O_p(G_0) \times SL_2(t)$. Пусть $E = E(G_0)$. Тогда $E = (G_0)^{(\infty)}$ и $(E, \Omega_1(Q))$ — сепарабельная p'-регулярная пара, поэтому по лемме 1.1.16 7 либо $p = 3$ и $\{r, s\} = \{2, 5\}$ или $p = t = 5$, $\{r, s\} = \{2, 3\}$ и $E \cong SL_2(5)$. Если $p = 5$, то из обычной таблицы характеров $SL_2(5)$ (см. [12]) и леммы 1.1.7 следует, что QE — группа Фробениуса с ядром Q и дополнением E. Таким образом, по лемме 1.1.8 выполняется утверждение (1) теоремы 3.5.

Далее будем считать, что r и s нечетны, поэтому подгруппы G_r и G_s циклические и $2 \in \{p, q\}$.

Покажем, что r и s не делят $|S|$. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что r делит $|S|$. Тогда вершина r смежна с каждой вершиной из $\pi(Soc(\overline{G})) \setminus \{r\}$ в $\Gamma(G)$. Поскольку вершины r и q несмежны в графе $\Gamma(G)$, $\pi(Soc(\overline{G})) = \{r, s, p\}$, и, следовательно, $p = 2$. Поскольку подгруппы G_r и G_s циклические, из леммы 1.1.14 следует, что $Soc(\overline{G}) \cong L_2(t)$, где $t \in \{5, 7, 8, 17\}$. Таким образом, $\{r, s\}$ равно $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$ или $\{3, 17\}$, а значит, $q > 3$.

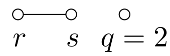
Пусть W $\{r, s, q\}$-холлова подгруппа группы S. Поскольку все такие подгруппы сопряжены в S, можно считать, что $Q \in Syl_q(W)$, $G = SN_G(W)$ и, значит, $\overline{G} = G/S \cong N_G(W)/N_S(W)$. Отсюда следует, что $S(N_G(W)) = N_S(W)$. Граф $\Gamma(W)$ несвязен, поэтому по лемме 1.1.1 W является либо группой Фробениуса, либо 2-Фробениусовой группой.

Так как $O_{q'}(W) = 1$, $q > 3$, а группы автоморфизмов силовских r-подгрупп и силовских s-подгрупп группы W являются $\{2, 3\}$-группами, последний случай невозможен. Следовательно, W — группа Фробениуса с ядром Q и некоторым дополнением D. По [23, теорема V.8.18] D является метациклической $\{r, s\}$-группой с нетривиальным центром. По теореме Шура–Цассенхауза (см. [17, теорема 6.2.1]) $N_G(W) = Q \rtimes X$ для некоторой подгруппы X, содержащей D. Поскольку $S(N_G(W)) = Q \rtimes D$ и $N_G(W)/S(N_G(W)) \cong \overline{G}$, имеем $S(X) = D$ и $X/D \cong \overline{G}$. Имеем $C_X(D)/Z(D) \cong Soc(X/D)$, так как D — метациклическая группа и, следовательно, $C_X(D)D/D$ содержит $Soc(X/D)$. Поскольку $Z(D) \neq 1$, а порядок множителя Шура $L_2(t)$ делит 2 (см. [12]), группа $C_X(D)$ содержит подгруппу, изоморфную $Z(D) \times L_2(t)$. Отсюда следует, что по крайней мере одна из групп G_r или G_s нециклическая, противоречие.

Таким образом, r и s не делят $|S|$.

Если группа G не содержит элементов порядка 6, то по теоремам 3.3 и 3.4 выполняется утверждение (2) теоремы 3.5 3. Поэтому в дальнейшем будем считать, что G содержит элемент порядка 6.

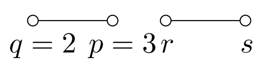
Предположим, что $q = 2$. Тогда



является индуцированным подграфом в $\Gamma(\overline{G})$. Если $3 \notin \pi(\overline{G})$, то $3 \in \pi(S)$ и, следовательно, $p = 3$ и $\pi(\overline{G}) = \{2, r, s\}$, это противоречит лемме 1.1.14. Следовательно, $3 \in \pi(\overline{G})$. Если $p \neq 3$, то G не содержит элементов порядка 6, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $\pi(G) = \pi(\overline{G})$.

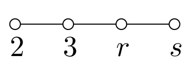
Предположим, что $\overline{G}$ не содержит элементов порядка 6. Тогда 2 — изолированная вершина в $\Gamma(\overline{G})$, а значит, по [31] $\overline{G}$ изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$, где $n \geq 2$; $L_2(t)$, где t – простое число Мерсенна или Ферма; $L_3(4)$. Ввиду [6], r и s — несмежные вершины в $\Gamma(\overline{G})$, противоречие.

Таким образом, $\overline{G}$ содержит элемент порядка 6, а значит



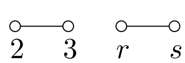
является подграфом $\Gamma(\overline{G})$. По [6] граф $\Gamma(\overline{G})$ связен.

Предположим, что $\Gamma(\overline{G}) \neq \Gamma(G)$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\Gamma(\overline{G})$ имеет вид



,

следовательно, по [1] $\Gamma(Soc(\overline{G}))$ имеет вид



,

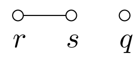
что невозможно по [6].

Таким образом, $\Gamma(\overline{G}) = \Gamma(G)$ и, следовательно, по 2.2, $q > 2$; противоречие.

Итак, $q \neq 2$, а значит, $p = 2$.

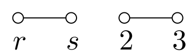
Предположим, что $q \notin \pi(\overline{G})$. Тогда $\pi(\overline{G}) = \{r, s, 2\}$. Ввиду [6], $3 \in \{r, s\}$, а значит, силовская 3-подгруппа в $\overline{G}$ циклическая. Поскольку r и s являются смежными вершинами $\Gamma(\overline{G})$, это противоречит [5].

Таким образом, $q \in \pi(\overline{G})$ и, следовательно, $\pi(\overline{G}) = \pi(G)$. В частности,

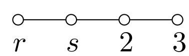


является индуцированным подграфом графа $\Gamma(\overline{G})$. Ясно, что $3 \in \{r, s, q\}$.

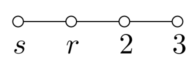
Предположим, что $q = 3$. Если 2 и 3 несмежны в $\Gamma(\overline{G})$, то граф $\Gamma(\overline{G})$ имеет вид, противоречащий [6]. Следовательно,



является подграфом $\Gamma(\overline{G})$. По [6] граф $\Gamma(\overline{G})$ связен. Следовательно, либо $\Gamma(\overline{G}) = \Gamma(G)$, либо $\Gamma(\overline{G})$ имеет одну из следующих форм:



или

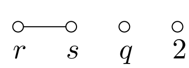


.

Это противоречит 4.1.

Таким образом, $q > 3$ и, следовательно, $3 \in \{r, s\}$.

Предположим, что 2 и 3 несмежны в $\Gamma(\overline{G})$. Тогда по 4.1 $\Gamma(\overline{G})$ несвязен. По [6] и учитывая цикличность G_r и G_s, получаем, что $\overline{G} \cong L_2(t)$, где либо $t = 2^m$, где m= 4, либо $m \geq 5$ — простое число, либо $t \geq 31$ — простое число Мерсенна или Ферма, а граф $\Gamma(\overline{G})$ имеет вид



.

По лемме 1.1.8 $O^q(S) = S$, а значит, $2 \in \pi(S)$, $O^2(S) < S$ и $O^{2,q}() < {}^2()$. Поскольку $Q \in Syl_q(O^2(S))$, по аргументу Фраттини имеем $G = O^2(S)N_G(Q)$. Можно считать, что $Q = O^2(S) \lhd G$. Положим $\widetilde{G} = G/Q$.

Предположим, что $C_{\widetilde{G}}(\widetilde{S}) \nleq \widetilde{S}$. Тогда $\widetilde{G} = \widetilde{S} \circ C_{\widetilde{G}}(\widetilde{S})$, $\widetilde{S} = O_2(\widetilde{G}) = F(\widetilde{G}) \neq 1$ и $E(\widetilde{G}) = C_{\widetilde{G}}(\widetilde{S})^{(\infty)} \cong L_2(t)$ или $SL_2(t)$. Пусть K — полный прообраз $E(\widetilde{G})$ в G. Тогда $O(K) = O_q(K) = Q$ и $K/Q \cong E(\widetilde{G})$. Ясно, что $C_K(Q) \leq S(K)$. Если $C_K(Q) \nleq Q$, то $O^q(S) < S$, это не так. Следовательно, $C_K(Q) \leq Q$. Элемент порядка 3 из K действует на $Q \setminus \{1\}$ без неподвижных точек, поэтому по лемме 1.1.8 $K/Q \cong SL_2(t)$, где $t = q \geq 31$ — простое число Мерсенна или Ферма. Пусть τ — инволюция из $Z^*(K)$. Тогда $K = QC_K(\tau)$.

Предположим, что $C_Q(\tau) \neq 1$, и положим $L = C_K(\tau)/\langle\tau\rangle$. Тогда $O(L) \cong C_Q(\tau) \neq 1$, $L/O(L) \cong L_2(t)$ и элемент порядка 3 из L действует на $O(L) \setminus \{1\}$ без неподвижных точек, противоречие с леммой 1.1.8.

Таким образом, $C_Q(\tau) = 1$, а значит, Q — абелева группа, а $(K/Q, \Omega_1(Q))$ – неразделимая q'-полуправильная пара. Следовательно, по лемме 1.1.9 выполняется утверждение (3) теоремы 3.5.

Предположим, что $C_{\widetilde{G}}(\widetilde{S}) \leq \widetilde{S}$. У нас есть $C_G(Q) = O_2(G) \times Z(Q)$. Если $S = O_2(G)Q$, то $O^q(S) < S$, это не так. Поэтому можно считать, что $O_2(G) = 1$, а значит, $C_G(Q) = Z(G)$. Пусть x и y — некоторые элементы порядков r и s из G соответственно. Применяя лемму 1.1.13 к группам $S\langle x\rangle$ и $S\langle y\rangle$, получаем, что r и s — простые числа Ферма. Поскольку $3 \in \{r, s\}$, можно считать, что $r = 3 = 1 + 2$ и $s = 1 + 2^k$ при $k = 2^l > 1$.

Пусть $t = 2^m$ для некоторого простого числа $m \geq 5$. Затем ввиду [5], $s = (2^m+1)/3$ и $q = 2^m-1$. Число $s = 1+2^k$ делит 2^m+1, причем $1 < k = 2^l < m$. Но $(k, m) = 1$, поэтому по лемме 1.1.16 получаем, что $(2^m + 1, 2^k + 1) = 1$; противоречие.

Таким образом, t — простое число Мерсенна или Ферма, т.е., $t - \varepsilon 1 = 2^m$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, $m \geq 5$, и $\{r, s\} = \pi((t + \varepsilon 1)/2)$.

Предположим, что $\varepsilon = +$. Тогда $t = 2^m + 1$, где $m = 2^n \geq 8$, и $\{r, s\} = \pi((t+1)/2)$. Имеем $(t+1)/2 = 2^m + 1$. Следовательно, по лемме 1.1.13 s делит $(2^{m-1} + 1, 2^k + 1) = 2^{(m-1,k)} + 1 = 3$; противоречие.

Таким образом, $\varepsilon = -$, а значит, $t = 2^m - 1$, где m — простое число, $m \geq 5$ и $\{r, s\} = \pi((t - 1)/2)$. У нас есть $(t - 1)/2 = 2^{m-1} - 1$. Число s делит $(2^{m-1} - 1, 2^k + 1)$, поэтому по лемме 1.1.16 13 $k/(m - 1, k)$ нечетно, а $(m-1)/(m-1, k)$ четно. Отсюда следует, что $2k$ делит $m-1$, поэтому $2^{2k}-1$ делит $2^{m-1} - 1$. Но $2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$ и $(2^k - 1, 2^k + 1) = 1$, поэтому $2^k - 1 = 3^v$ для некоторого $v \in \mathbb{N}$. Тогда по лемме 1.1.17 $v = 1$, а значит, $k = 2$ и $s = 2$. Если $m > 5$, то $m - 1 > 4$, а значит, по лемме 1.1.17 $2^{m-1} - 1$ имеет простой делитель, не равный 3 и 5; противоречие.

Следовательно, $m = 5$ и $t = 31$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 3.3, и используя леммы 1.1.7, 1.1.12–1.1.6 для простых чисел Ферма 3 или 5 и таблицу 2-модулярных характеров Брауэра $L_2(31)$ (см. [26]), получаем противоречие.

Теорема 3.5 доказана.

4 Конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга – Кегеля

Целью данной главы является доказательство теоремы 4.1.

Теорема 4.1. *Пусть G — конечная почти простая 4-примарная группа. Тогда граф $\Gamma(G)$ связен тогда и только тогда, когда группа G изоморфна одной из следующих групп*: A_{10}, S_9, S_{10}, $Aut(J_2)$, $L_2(81).2^2$, $Aut(L_2(q))$ *при* $q \in \{25, 27, 49, 81\}$, $PGL_3(4)$, $PGL_3(4).2_2$, $PGL_3(4).2_3$, $L_3(4).6$, $L_3(4).2^2$, $Aut(L_3(4))$, $PGL_3(7)$, $Aut(L_3(7))$, $L_4(3).2_1$, $Aut(L_4(3))$, $U_3(5).3$, $Aut(U_3(5))$, $U_3(8).3_2$, $U_3(8).3^2$, $U_3(8).S_3$, $Aut(U_3(8))$, $S_4(9).2_2$, $Aut(S_4(q))$ *при* $q \in \{5, 7, 9\}$, $O_8^+(2).2$, $O_8^+(2).3$, $Aut(O_8^+(2))$. *Графы Грюнберга–Кегеля этих групп приведены в таблице 4.1.1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — конечная почти простая 4-примарная группа, и L — ее цоколь.

Докажем условие необходимости теоремы. Пусть $\Gamma(G)$ связен.

Лемма 4.1.1. *Группа L не изоморфна группе из п.* (2) *леммы* 1.1.15.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что L изоморфна группе из п. (2) леммы 1.1.15. Тогда $G \cong Aut(L)$ и ввиду [6, табл. 1] граф $\Gamma(G)$ несвязен, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 4.1.2. *Группа L не изоморфна группе из п.* (3) *леммы* 1.1.15.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда $L \cong L_2(2^m)$, где $m, u = 2^m - 1$ и $t = (2^m + 1)/3$ — простые числа, большие 3. Поскольку граф $\Gamma(L)$ несвязен, имеем $L < G$ и, следовательно, $G \cong Aut(L) \cong L_2(2^m) : \mathbb{Z}_m$. Поскольку $\pi(G) = \{2, 3, u, t\}$, имеем $m \in \{u, t\}$.

Пусть $m = u$. Тогда $m = 2^m - 1$, т. е. $2^m = m+1$. Индукцией по m покажем, что $2^m > m + 1$ при $m \geq 2$. При $m = 2$ получим, что $2^2 = 4 > 2 + 1 = 3$, так что база индукции выполняется. Предположим, что $m \geq 2$ и $2^m > m+1$. Тогда $2^{m+1} > 2m + 2 = m + (m + 2) > m + 2$, так что и шаг индукции выполняется. Таким образом, $m \neq u$.

Итак, $m = t = (2^m + 1)/3$. Тогда $2^m = 3m - 1$. Индукцией по m покажем, что $2^m > 3m - 1$ при $m > 3$. При $m = 4$ получаем, что $2^4 = 16 > 3 \cdot 4 - 1 = 11$, так что база индукции выполняется. Предположим, что $m > 3$ и $2^m > 3m-1$. Тогда $2^{m+1} > 6m - 2 = 3(m + 1) - 1 + (3m - 4) > 3(m + 1) - 1$, так что и шаг индукции выполняется. Таким образом, $m \neq t$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4.1.3. *Если группа L изоморфна группе из п.* (4) *леммы* 1.1.15, *то* $G \cong Aut(L_2(27))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $L \cong L_2(3^m)$, где m и $u = (3^m - 1)/2$ – нечетные простые числа, а $(3^m + 1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 при $m = 5$. Тогда $\pi((3^m+1)/4) = \{t\}$ для некоторого простого числа t. Ввиду [6, табл. 1] графы $\Gamma(L_2(3^m))$ и $\Gamma(PGL_2(3^m))$ несвязны.

Поскольку $|Out(L)| = 2m$ (см. [12, табл. 5]) и граф $\Gamma(G)$ связен, группа G изоморфна либо $L : \mathbb{Z}_m$, либо $Aut(L)$. Поэтому $m \in \pi(G) = \pi(L) = \{2, 3, u, t\}$.

Предположим, что $m \in \{u, t\}$. Тогда $m > 3$ и, следовательно, $m \in \pi(L)$. Но тогда полевой автоморфизм φ порядка m группы L централизует в L элемент порядка m. Но $C_L(\varphi) \cong L_2(3) \cong A_4$ (см. [18, 4.9.1]); противоречие. Итак, $m = 3$. Ввиду [6, табл. 1] граф $\Gamma(L_2(3^3).\mathbb{Z}_3)$ несвязен, поэтому $G \cong Aut(L_2(3^3))$.

Лемма доказана.

Из лемм 4.1.1–4.1.3 следует, что L либо изоморфна группе из п. (1) леммы

1.1.15, либо $G \cong Aut(L_2(27))$. Все 4-примарные почти простые группы с таким L можно либо найти в [12] либо вычислить используя структуры групп внешних автоморфизмов, которые указаны в [12, ст. 239-242]. Из множества этих групп исключаются все конечные 4-примарные почти простые группы с несвязным графом Грюнберга–Кегеля (см. [6, Таблица 1]). Оставшиеся после исключения группы и их графы Грюнберга–Кегеля приведены в таблице ниже. Графы Грюнберга–Кегеля этих групп строятся с использованием их таблицы характеров которые приводится либо в [12] либо в [33].

Условие необходимости теоремы доказано.

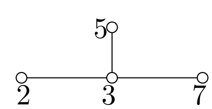
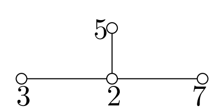
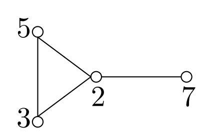
Пусть G изоморфна одной из групп из списка, приведенного в теореме. Все графы Грюнберга-Кегеля этих групп приведены в таблице и они все связны.

Условие достаточности теоремы доказано.

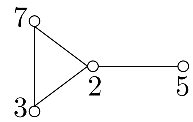
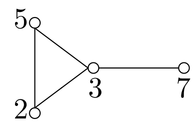
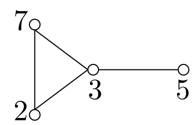
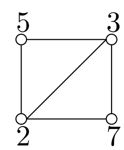
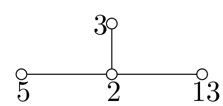
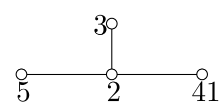
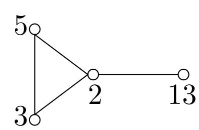
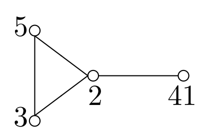
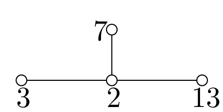
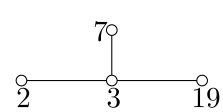
Теорема доказана.

Конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга – Кегеля перечислены в таблице 1.

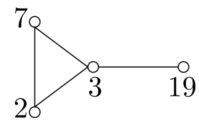
Таблица 4.1.1: Графы Грюнберга–Кегеля почти простых 4-примарных групп со связным графом Грюнберга–Кегеля

Группа G	Граф $\Gamma(G)$
$PGL_3(4), L_3(4).6$	
$U_4(3).2_1, U_4(3).4, U_4(3).2^2, Aut(U_4(3)),$ $Aut(L_2(49)), L_3(4).2^2$	
$S_9, Aut(J_2), O_8^+(2).2$	

Продолжение таблицы 4.1.1

Группа G	Граф $\Gamma(G)$
$Aut(S_4(7))$	
$A_{10}, PGL_3(4).2_3, O_8^+(2).3, U_3(5).3,$ $Aut(U_3(5))$	
$PGL_3(4).2_2$	
$S_{10}, Aut(L_3(4)), Aut(O_8^+(2))$	
$L_4(3).2_1, Aut(L_4(3)), Aut(L_2(25))$	
$L_2(81).2^2, Aut(L_2(81))$	
$Aut(S_4(5))$	
$S_4(9).2_2, Aut(S_4(9))$	
$Aut(L_2(27))$	
$U_3(8).3_2, U_3(8).3^2$	

Продолжение таблицы 4.1.1

Группа G	Граф $\Gamma(G)$
$PGL_3(7), Aut(L_3(7)), U_3(8).S_3,$ $Aut(U_3(8))$	

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках диссертационной работы были проведены исследование свойств конечных групп с заданными свойствами графа Грюнберга–Кегеля. Основные полученные результаты:

1. Получено полное описание конечных групп без элементов порядка 6.
2. Получено полное описание конечных 4-примарных почти простых групп со связным графом Грюнберга–Кегеля.
3. Получено полное описание конечных почти простых групп, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен подграфу графа Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.
4. Получено описание конечных неразрешимых групп без элементов порядка 6, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.
5. Получено описание конечных неразрешимых групп, в которых вершина степени 1 делит порядок разрешимого радикала, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.

Открытый вопрос:

Описать конечные неразрешимые группы, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}, которые содержат элемент порядка 6, а вершина степени 1 не делит порядок разрешимого радикала.

Описание конечных разрешимых групп, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10} получено, но в данной диссертационной работе не представляется.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Алексеева, О. А., Кондратьев, А. С.** Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21, №3. — P. 3–12.

[2] **Кондратьев, А. С.** Конечные группы с графом простых чисел, как у группы $Aut(J_2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, №3. — P. 131–138.

[3] **Кондратьев, А. С.** Конечные группы с графом простых чисел, как у группы A_{10} // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, №1. — P. 130–143.

[4] **Кондратьев, А. С., Осиновская, А. А., Супруненко, И. Д.** О поведении элементов простого порядка из цикла Зингера в представлениях специальной линейной группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, №3. — P. 179–186.

[5] **Кондратьев, А. С., Храмцов, И. В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 150–158.

[6] **Кондратьев, А. С., Храмцов, И. В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 4. — С. 142–159.

[7] **Мазуров, В. Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, № 1. — P. 37–53.

[8] **Подуфалов, Н. Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6 // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 2. — P. 200–203.

[9] **Aschbacher, M.** Finite group theory. — Cambridge: Cambridge University Press. — 1986. — 274 p.

[10] **Bray, J. N., Holt, D. F., Roney-Dougal, C. M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2013.

[11] **Bugeaud, Y., Cao, Z., Mignotte, M.** On simple K_4-groups // J. Algebra. — 2001. — Vol. 241, №10, — P. 658–668.

[12] **Conway, J. H., Curtis R. T., Norton, S. P., Parker R. A., Wilson R. A.** Atlas of finite groups. — Oxford: Clarendon Press. — 1985. — 252 p.

[13] **Dolfi, S., Jabara, E., Lucido M. S.** C55-groups // Siberian Math. J. — 2004. — Vol. 45, №6. — P. 1053–1062.

[14] **Fleischmann, P., Lempken, W., Tiep, P. H.** Finite p'-semiregular groups // J. Algebra. — 1997. — Vol. 188, № 2. — P. 547–579.

[15] **Fletcher, L. F., Stellmacher, B., Stewart, W. B.** Endliche Gruppen, die kein Element der Ordnung 6 enthalten // Quart. J. Math. Oxford. Ser. — 1977. — Vol. 28, №2. — P. 143–154.

[16] **Gordon, L. M.** Finite simple groups with no elements of order six // Bull. Austral. Math. Soc. — 1977. — Vol. 17, № 2. — P. 235–246.

[17] **Gorenstein, D.** Finite groups. — N. Y.: Harper and Row. — 1968. — 528 p.

[18] **Gorenstein, D., Lyons, R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. — Providence, R.I.: Amer. Math. Soc.. — 1991. —420 p.

[19] **Hartley, B., Meixner, T.** Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small // Arch. Math. (Basel). — 1981. — Vol. 36, № 3. — P. 211–213.

[20] **Herzog, M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. — 1968. — Vol. 10, №3 — P. 383–388.

[21] **Higman, G.** Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. (2). — 1957. — Vol. 32. — P. 335–342.

[22] **Higman, G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. — Michigan: University Michigan. — 1968.

[23] **Huppert, B.** Endliche Gruppen I. — Berlin: Springer-Verlag. — 1967.

[24] **Huppert, B., Blackburn, N.** Finite groups II. — Berlin: Springer-Verlag. — 1982.

[25] **Huppert, B., Lempken, W.** Simple groups of order divisible by at most four primes // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. — 2000. — Vol. 16, № 3. — С. 64–75.

[26] **Jansen, C., Lux, K., Parker, R., Wilson, R.** An atlas of Brauer characters. — Oxford: Clarendon Press, — 1995. — 327 p.

[27] **Kondrat'ev, A. S.** Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2014. — Vol. 11. — P. 634–674.

[28] **Martineau, R. P.** On 2-modular representations of the Suzuki groups // Amer. J. Math. — 1972. — Vol. 94. — P. 55–72.

[29] **Shi, W. J.** On simple K_4-groups // Chinese Science Bull. — 1991. — Vol.36, №17. — P. 1281–1283.

[30] **Stewart, W. B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 426, №4 — P. 653–680.

[31] **Suzuki, M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. — 1962. — Vol. 75, №1 — P. 105–145.

[32] **Williams, J. S.** Prime graph components of finite groups // Journal of Algebra. — 1981. — Vol. 69, № 2. — P. 487–513.

[33] The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.10.0. 2018. URL: http://www.gap-system.org.

[34] **Zavarnitsine, A. V.** Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. — 2004. — Vol. 7, № 1. — P. 81–97.

[35] **Zsigmondy, K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsch. Math. Phys. — 1892. — Vol. 3, № 1. — P. 265–284.

Статьи в научных журналах из списка ВАК

[36] **Kondrat'ev, A. S., Minigulov, N. A.** Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg-Kegel graph of the alternating group A_{10} // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2018. — Vol. 15. — P. 1378–1382. DOI:10.17377/semi.2018.15.113 (Web of Science)

[37] **Кондратьев, А. С., Минигулов, Н. А.** Конечные группы без элементов порядка 6 // Математические заметки. — 2018. — Т. 104, №5. — P. 717–724. DOI:10.4213/mzm11751. (Английский перевод: **Kondrat'ev, A. S., Minigulov, N. A.** Finite groups with no elements of order 6 // Mathematical Notes. — 2018. — Vol. 104, №5. — P. 79–84. DOI:10.1134%2FS000143461811010X) (Web of Science, Scopus)

[38] **Минигулов, Н.А.** Конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга–Кегеля // Труды Института математики и механики. — 2019. — Т. 25, №4. — С. 142–146. DOI:10.21538/0134-4889-2019-25-4-142-146. (Английский перевод: **Minigulov, N. A.** Finite Almost Simple 4-Primary Groups with Connected Gruenberg–Kegel Graph // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2020. — Vol.309, №4, suppl.1. — P. 93–97. DOI:10.21538/0134-4889-2019-25-4-142-146) (Web of Science, Scopus)

[39] **Kondrat'ev, A. S., Minigulov, N. A.** On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graph are isomorphic to the paw // Communications in Mathematics and Statistics. — 2021. — 15p. DOI:10.1007/s40304-021-00242-x (Web of Science Q1, Scopus)

Другие публикации по теме диссертации

[40] **Kondrat'ev, A., Minigulov, N.** Finite groups with no elements of order 6 // Groups and Graphs, Metrics and Manifolds: Internatinal Conference and PhD-Master Summer School, Yekaterinburg, July 22-30, 2017 : abstracts. — Yekaterinburg: Ural Federal University. — 2017. — P. 62.

[41] **Кондратьев, А. С., Минигулов, Н. А.** Конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу

Грюнберга–Кегеля группы A_{10} // Теория групп и ее приложения : XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию А.А. Махнева, Геленджик, 13-20 мая 2018: материалы. Краснодар: Кубанский государственный университет. — 2018. — С. 83–85.

[42] **Кондратьев, А. С., Минигулов, Н. А.** Конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10} // Тезисы докладов международной конференции "Мальцевские чтения". Новосибирск: Новосибирский гос. университет. — 2018. — С. 97.

[43] **Кондратьев, А. С., Минигулов Н. А.** О конечных неразрешимых 4-примарных $3'$-группах // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем: тезисы международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова. Нальчик: Изд-во КБГУ, — 2019. — С. 56.

[44] **Minigulov, N.** Finite Almost Simple 4-Primary Groups with Connected Gruenberg–Kegel Graph // Groups and Graphs, Designs and Dynamics: Internatinal Conference and PhD-Master Summer School, Yichang, China, August 12-25, 2019 : program and abstracts. — Yichang: Three Gorges Mathematical Reserch Center. — 2019. — P. 56.

[45] **Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A.** On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw // 2020 Ural Workshop on group theory and combinatorics, Yekaterinburg-Online, Russia, August 24–30, 2020: abstracts. Yekaterinburg: IMM UB RAS. — 2020. — P. 56.

[46] **Кондратьев, А. С., Минигулов Н. А.** О конечных неразрешимых 4-примарных группах // Теория групп и ее приложения: XIII школа-

конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А.Белоногова, Екатеринбург, 3-7 августа 2020: тезисы докладов. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. — 2020. — С. 50–51.

[47] **Кондратьев, А. С., Минигулов Н. А.** О конечных неразрешимых 4-примарных группах без элементов порядка 6 // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов: 8-я школа-конференция, 27 января по 1 февраля 2020, Москва: тезисы докладов. Москва: МЦНМО. — 2020. — С. 36–37.

[48] **Кондратьев, А. С., Минигулов Н. А.** О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10} // Алгебра и ее приложения: конференция, посвященная 70-летию пермской алгебраической школы им. С.Н. Черникова: тезисы докладов / Пермский гос. нац. иссл. ун-т, ИММ УрО РАН. Пермь. — 2020. — С. 28–29.

[49] **Kondrat'ev, A., Minigulov, N.** On finite groups which Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw // The 4th Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications: International conference : book abstracts. Novosibirsk: Mathematical Center in Akademgorodok. — 2021. — P. 24.