На правах рукописи

Минигулов Николай Александрович

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ГРАФОВ ГРЮНБЕРГА—КЕГЕЛЯ

Специальность 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН).

Научный руководитель:	Кондратьев Анатолий Семенович, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Алеев Рифхат Жалядович, доктор физико-математических наук, профессор Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры системного программирования
	Старолетов Алексей Михайлович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российского отделения наук, старший научный сотрудник лаборатории алгебры
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»

Защита состоится "____"____________ 2022 года на заседании диссертационного совета Д 004.006.05 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) и на сайте https://www.imm.uran.ru/.

Автореферат разослан "____"____________ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандитат физ.-мат. наук   И.Н. Белоусов

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы

Введем необходимые определения. Пусть G – конечная группа. Множество всех простых делителей числа $|G|$ обозначается через $\pi(G)$. Граф Грюнберга–Кегеля (граф простых чисел) $\Gamma(G)$ группы G – это граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$.

Все рассматриваемые в данной работе группы будут конечными. Если n – натуральное число и p – простое число, то через n_p обозначается p-часть числа n. Через $A \leftthreetimes B$ или $A : B$ обозначается расщепляемое расширение (полупрямое произведение) группы A посредством группы (на группу) B. Через $A{\cdot}B$ обозначается нерасщепляемое расширение группы A посредством группы B.

Наибольшая нормальная разрешимая подгруппа (*разрешимый радикал*) группы G обозначается через $S(G)$.

Конечная группа G называется *квазипростой* если $G' = G$ и $G/Z(G)$ – простая неабелева группа.

Для группы G через $G^{(\infty)}$, $Soc(G)$ и $E(G)$ обозначаются последний член производного ряда, цоколь и слой (подгруппу, порожденную всеми субнормальными квазипростыми подгруппами) группы G соответственно.

Конечная группа G называется группой *Фробениуса* с ядром A и дополнением B, если $G = A \leftthreetimes B$, где группы A и B неединичны и $C_A(b) = 1$ для любого неединичного элемента b из B. Конечная группа G называется группой 2-*фробениувой* группой, если существуют подгруппы A, B и C в G такие, что $G = ABC$, A и AB — нормальные подгруппы в G, а AB и BC – группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно.

Если K и L два соседних члена в главном ряде конечной группы G такие, что $K < L \leq S(G)$, то (главный) фактор $V = L/K$ — элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p; он называется *p-главным фактором* группы G.

Через $L_n^\delta(q)$ для $\delta \in \{+,-\}$ обозначается $L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\delta = +$ и $U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\delta = -$. Если n – четное натуральное число, то через $L_2(3^n).2_3$ обозначается группа $L_2(3^n)\langle df_1\rangle$, где $PGL_2(3^n) = L\langle d\rangle$ и f_1 – инволютивный полевой автоморфизм группы $L_2(3^n)$.

Изучение конечных групп в зависимости от их арифметических свойств (порядков элементов и подгрупп, мощностей классов сопряженных элементов, различных π-свойств, степеней неприводимых характеров и т.д.) является важным направлением исследований в теории конечных групп, имеющим богатую историю. Тематика изучения конечных групп по свойствам графа Грюнберга–Кегеля является современным аспектом этого направления.

Понятие графа простых чисел возникло при исследовании некоторых когомологических вопросов, связанных с целочисленными представлениями конечных групп, и оказалось весьма плодотворным. Граф $\Gamma(G)$ является фундаментальным арифметическим инвариантом группы G. Заметим, что граф $\Gamma(G)$ может быть однозначно определён по таблице характеров группы G.

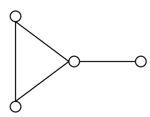
В 1977 г. в трех независимых работах Н.Д. Подуфалова (см. [8]), Л.М. Гордона (см. [16]) и Л.Ф. Флетчера, Б. Штельмахера и У.Б. Стюарта (см. [15]) были определены конечные простые группы без элементов порядка 6. В данной работе с помощью этого результата получено довольно полное описание строения общей конечной группы с этим свойством. Это описание существенно обобщает классификации C_{22}-групп (М. Судзуки 1962 [31]) и C_{33}-групп (Г. Хигман 1968 [22], Л.Ф. Флетчера, Б. Штельмахера и У.Б. Стюарта [15]). Если p – простое число, то C_{pp}-группой называется конечная группа, порядок которой делится на p, а централизатор любого неединичного p-элемента является p-группой. Этот результат можно также рассматривать как вклад в направление исследований конечных групп по свойствам их графов Грюнберга-Кегеля. В терминах графов Грюнберга–Кегеля нами получено описание конечных групп, графы Грюнберга-Кегеля которых имеют несмежные вершины 2 и 3.

Далее рассмотрим конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых имеют небольшое число вершин.

А.С. Кондратьев и И.В. Храмцов в работах [5, 6] описали конечные группы с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, имеющим 3 или 4 вершины, в частности в этих работах описаны конечные почти простые 4-примарные группы, граф Грюнберга–Кегеля которых несвязен. А.С. Кондратьев в работе [27] описал конечные 5-примарные почти простые группы.

В этой работе мы завершаем описание конечных 4-примарных почти простых групп. А именно, мы рассматриваем случай, когда граф Грюнберга–Кегеля связен.

А.С. Кондратьев в работах [2, 3] описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп $Aut(J_2)$ и A_{10} соответственно. Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы (графы без пометок) графу "балалайка"("paw"), имеющему вид



.

Нами поставлена более общая задача: описать все конечные группы, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу "балалайка".

Цель и задачи исследования

Целью работы является исследование конечных групп с заданными свойствами графа Грюнберга–Кегеля. Для ее достижения в работе решаются следующие задачи:

1. Описание конечных групп без элементов порядка 6.
2. Исследование конечных групп G, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}. В работе эта задача решена в следующих случаях:
   (a) группа G почти проста.
   (b) группа G неразрешима и не имеет элементов порядка 6.
   (c) группа G неразрешима и в графе $\Gamma(G)$, вершина степени 1 делит порядок разрешимого радикала группы G.
3. Описание конечных 4-примарных почти простых групп со связным графом Грюнберга–Кегеля.

Основные результаты

1. Получено достаточно полное описание конечных групп без элементов порядка 6.
2. Получено полное описание конечных почти простых групп, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен подграфу графа Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.
3. Получено полное описание конечных неразрешимых групп без элементов порядка 6, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.
4. Получено полное описание конечных неразрешимых групп, в которых вершина степени 1 делит порядок разрешимого радикала, граф Грюнберга–Кегеля которых как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}.
5. Получено полное описание конечных 4-примарных почти простых групп со связным графом Грюнберга–Кегеля.

Научная новизна

Все результаты данной работы являются новыми.

Методы исследования

В данной работе использовались методы теории групп, теории модулярных представлений групп, теории чисел и теории графов.

На защиту выносится

Совокупность результатов в области изучения конечных групп с заданными ограничениями на их графы Грюнберга—Кегеля.

Апробация работы

Основные результаты докладывались на следующих конференциях: на 49-й, 50-й и 51-й Всеросийских (международных) молодежных школах-конференциях "Современные проблемы математики и ее приложений" (Екатеринбург 2018 —2020 гг.); на международной конференции "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2018 г.); на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 65-летию А.А. Махнева (Геленджик, 2018 г.); на международной конференции «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем», посвященной 70-летию А.Х. Журтова (Нальчик, 2019 г.); на международной конференции "The International Conference and PhD Summer School Groups and Graphs, Metrics and Manifolds" (G2M2, Екатеринбург, 2017 г.); на международной конференции "The International Conference and PhD Summer School Groups and Graphs, Designs and Dynamics" (Ичан, Китай, 2019 г.); на международной конференции "Ural Workshop on group theory and combinatorics" (Екатеринбург-онлайн, 2020 г.); на XIII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А.Белоногова (Екатеринбург-онлайн, 2020 г.); на международной конференции, посвященной 70-летию пермской алгебраической школы им. С.Н. Черникова (Пермь-онлайн, 2020 г.); на международной конференции "The 4th Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications" (Новосибирск 2021 г.).

Публикации и личный вклад

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [36–49]. Работы [38, 44] выполнены автором лично. Остальные работы выполнены в неразрывном соавторстве с научным руководителем А.С.Кондратьевым. Статьи [36–39] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, и индексируются в Web of Science и/или в Scopus, причем статья [39] опубликована в издании, входящем в квартиль $Q1$.

Структура и обьем работы

Диссертация изложена на 58 страницах, содержит введение, четыре главы, заключение, и список литературы, состоящий из 49 источников. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Вспомогательные утверждения (леммы) и таблица имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер главы, вторая цифра — номер параграфа в текущей главе, третья — номер утверждения в текущем параграфе. Теоремы, следствия и замечания имеют двойную нумерацию: первая цифра – номер главы, вторая – номер теоремы в главе.

Краткое содержание работы

Глава 1. *"Определения, обозначения и предварительные результаты"*. В данной главе даны необходимые определения и предварительные результаты. Приведен список используемых обозначений. Даны известные утверждения, которые необходимы для доказательства теорем.

Глава 2. *"Конечные группы без элементов порядка 6"*. В этой главе приводится описание строения конечных групп без элементов порядка 6.

В параграфе 2.1 *"Конечные разрешимые группы без элементов порядка 6"* приводится описание строения конечных разрешимых групп без элементов порядка 6. Результат этого параграфа представлен в следующей теореме.

Теорема 2.1 Пусть G – конечная разрешимая группа без элементов порядка 6 и 6 делит $|G|$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $G/O(G)$ – циклическая или (обобщенная) кватернионная 2-группа, силовская 3-подгруппа в $O(G)$ абелева и $O(G)$ имеет 3-длину 1;

(2) $G/O_{3'}(G)$ – циклическая 3-группа или диэдральная группа порядка $2|G|_3$, ступень нильпотентности силовской 2-подгруппы из $O_{3'}(G)$ не превосходит 2 и $O_{3'}(G)$ имеет 2-длину, не превосходящую 1.

В параграфе 2.1 *"Конечные неразрешимые группы без элементов порядка 6"* приводится описание строения конечных неразрешимых групп без элементов порядка 6. Результат этого параграфа представлен в следующей теореме.

Теорема 2.2. Пусть G – конечная неразрешимая группа и 3 делит $|G|$. Тогда G не содержит элементов порядка 6 если и только если группа $O^{\{2,3\}'}(G/O_{\{2,3\}'}(G))$ изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$, $L_2(3^n)$, $PGL_2(3^n)$, $L_2(3^n).2_3$ (n четно), $L_2(q)$ ($q \equiv \pm 5\,(mod\,12)$), $L_3(2^n)$ ($(2^n-1)_3 \leq 3$), $U_3(2^n)$ ($(2^n+1)_3 \leq 3$), расширение нетривиальной элементарной абелевой 2-группы E посредством группы $L_2(2^n)$, где E как $GF(2^n)L_2(2^n)$-модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(2^n)L_2(2^n)$-модулей.

Из теоремы 2.2 извлекается

Следствие 2.1. Если G – конечная почти простая группа без элементов порядка 6, то G изоморфна расширению либо ее цоколя, либо группы $PGL_2(3^n)$, либо группы $L_2(3^{2k}).2_3$ посредством группы полевых автоморфизмов порядка, взаимно простого с 6.

Отметим, что наше доказательство этих результатов не зависит от классификации конечных простых групп. Ссылки на [18] и [10] приведены для удобства. Они могут быть заменены ссылками на исходные классические результаты, полученные задолго до классификации.

Глава 3. *"О конечных группах графы Грюнберга–Кегеля которых, как абстрактные графы изоморфны графу Грюнберга – Кегеля группы A_{10}"* В данной главе сначала доказано, что если G – конечная неразрешимая группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}, то группа $G/S(G)$ почти проста. Этот результат представлен теореме 3.1.

Затем приводится описание таких групп G в следующих трех случаях.

1. G является почти-простой группой. Этот результат получен в параграфе 3.1 и представлен в следующей теореме.

Теорема 3.2. Пусть G – конечная почти простая группа. Тогда граф $\Gamma(G)$, изоморфен как абстрактный граф подграфу графа $\Gamma(A_{10})$ тогда, и только тогда, когда выполняется одно из утверждений:

(a) граф $\Gamma(G)$ несвязен и группа G изоморфна одной из следующих групп:

(1) A_n при $5 \leq n \leq 9$, S_n при $5 \leq n \leq 8$, M_{10}, $L_2(q)$ при $q \in \{7, 8, 16, 17, 25, 49, 81\}$, $PGL_2(q)$ при $q \in \{7, 9, 17\}$, $L_2(q).2$ при $q \in \{16, 25, 49, 81\}$, $Aut(L_2(16))$, $L_2(27).3$, $L_2(81).4_1$, $L_2(81).4_2$, $L_3(q)$ при $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 17\}$, $Aut(L_3(q))$ при $q \in \{3, 5, 8, 17\}$, $L_3(q).2$ при $q \in \{2, 7, 8\}$, $L_3(8).3$, $L_4(3)$, $L_4(3).2_2$, $L_4(3).2_3$, $S_4(q)$ при $q \in \{3, 4, 5, 7, 9\}$, $Aut(S_4(q))$ при $q \in \{3, 4\}$, $S_4(4).2$, $S_4(9).2_1$, $S_4(9).2_3$, $S_6(2)$, $Aut(S_6(2))$, $U_3(q)$ при $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $Aut(U_3(q))$ при $q \in \{4, 5, 7, 9\}$, $U_3(q).2$ при $q \in \{5, 8, 9\}$, $U_3(8).3_1$, $U_3(8).3_3$, $U_3(8).6$, $U_4(3)$, $U_4(3).2_2$, $U_4(3).2_3$, $U_5(2)$, $Aut(U_5(2))$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, $Aut(Sz(32))$, ${}^3D_4(2)$, $Aut({}^3D_4(2))$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2F_4(2)$, M_{11}, M_{12}, $Aut(M_{12})$, J_2;

(2) $L_2(r)$ или $PGL_2(r)$, где r – простое число, $17 \neq r \geq 11$, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1 либо 2 при $r \in \{97, 577\}$;

(3) $L_2(2^m)$, где m, $2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ – простые числа большие чем 3;

(4) $L_2(3^m)$ или $PGL_2(3^m)$, где m и $(3^m - 1)/2$ – нечетные простые числа и $(3^m + 1)/4$ равно либо простому числу, либо11^2 *(*для $m = 5$*)*;

(b) граф $\Gamma(G)$ связен и группа G изоморфна одной из следующих групп: $Aut(A_6)$, S_9, A_{10}, $Aut(L_2(q))$ при $q \in \{25, 27, 49, 81\}$, $L_2(81).2^2$, $PGL_3(4)$, $L_3(4).6$, $L_3(4).2^2$, $PGL_3(4).2_2$, $PGL_3(4).2_3$, $PGL_3(7)$, $Aut(L_3(7))$, $L_4(3).2_1$, $Aut(L_4(3))$, $Aut(S_4(q))$ при $q \in \{5, 7, 9\}$, $S_4(9).2_2$, $Aut(U_3(q))$ при $q \in \{5, 8\}$, $U_3(5).3$, $U_3(8).3_2$, $U_3(8).3^2$, $U_3(8).S_3$, $U_4(3).2_1$, $U_4(3).2^2$, $U_4(3).4$, $Aut(U_4(3))$, $O_8^+(2).2$, $O_8^+(2).3$, $Aut(J_2)$

2. G является неразрешимой группой без элементов порядка 6. Этот результат получен в параграфе 3.2 и представлен в следующих двух теоремах.

Теорема 3.3. Если 3 не делит $|G|$, то с точностью до перестановки чисел r и s выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $\overline{G} \cong Aut(Sz(32))$, $\{r,s\} = \{2,5\}$, $\{p,q\} = \{31,41\}$, $p \in \pi(S) \subseteq \{2,p\}$, $O_{2',2}(S)/O(S)$ – элементарная абелева 2-группа, $F^*(G/O_{2',2}(S)) = P \times E$, где P – p-группа и $E \cong Sz(32)$, и либо $S = O(G)$, либо группа E индуцирует на $O_{2',2}(S)/O_{2'}(S)$ прямую сумму модулей, каждый из которых изоморфен естественному 4-мерному $GF(32)Sz(32)$-модулю;

(2) $\overline{G} \cong Sz(8)$, $r = 2$, $\{p,s\} = \{5,7\}$, $q = 13$, $\pi(S) = \{2,p\}$, каждый 2-главный фактор G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 4-мерному или 16-мерному неприводимому $GF(8)Sz(8)$-модулю, причем вторая возможность всегда появляется;

(3) $\overline{G} \cong Sz(32)$ или $Aut(Sz(32))$, $r = 2$, $\{p,s\} \subseteq \{5,31,41\}$, $q \in \{31,41\}$, $\pi(S) = \{2,p\}$, каждый 2-главный фактор G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 4-мерному, одному из двух 16-мерных или одному из двух 64-мерных неприводимых $GF(32)Sz(32)$-модулей;

(4) $\overline{G} \cong Sz(8)$, $\{r,s\} = \{5,7\}$, $p = 2$, $q = 13$, $5 \in \pi(S) \subseteq \{5,p\}$, $G/O^2(S) = P \circ E$, где P – 2-группа и $E \cong 2{\cdot}Sz(8)$ или $(2\times 2){\cdot}Sz(8)$, а группа E индуцирует на каждом 5-главном факторе $O^2(G)$ точный неприводимый 8-мерный $GF(5)2{\cdot}Sz(8)$-модуль.

Теорема 3.4. Если 3 делит $|G|$ и G не имеет элементов порядка 6, то верно одно из следующих утверждений:

(1) $q = 2$, $\overline{G} \cong L_2(2^n)$, $S = O_{2',2}(G)$, $O(G) = O_p(G)$, $S/O(G)$ – элементарная абелева 2-группа, которая либо тривиальна, либо изоморфна как $\overline{G}$-модуль прямой сумме естественных $GF(2^n)\overline{G}$-модулей, и верно одно из следующих утверждений:

(1a) $n = 4$, $p = 17$ и $\{r,s\} = \{3,5\}$;

(1b) n – простое число, $n \geq 5$, $p = 2^n - 1$, $\{r,s\} = \{3,(2^n+1)/3\}$;

(2) $q = 2$, $S = O_p(G)$, $\overline{G} \cong L_2(p)$, $p \geq 31$, $p \equiv \varepsilon 5(mod\ 12)$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, $p - \varepsilon 1$ – степень 2, и $3 \in \{r,s\} = \pi((p+\varepsilon 1)/2)$;

(3) $q = 3$, $S = O_p(G)$, и верно одно из следующих утверждений:

(3a) $\overline{G} \cong PGL_2(9)$, $p > 5$, и $\{r,s\} = \{2,5\}$;

(3b) $\overline{G}$ изоморфна $L_2(81)$, $PGL_2(81)$ или $L_2(81).2_3$, $p = 41$, и $\{r,s\} = \{2,5\}$;

(3c) $\overline{G} \cong L_2(3^n)$ или $PGL_2(3^n)$, n – нечетное простое число, $p = (3^n - 1)/2$, и $\{r,s\} = \pi(3^n+1)$.

3. G является неразрешимой группой, в которой вершина степени 1 делит порядок разрешимого радикала группы G. Этот результат получен в параграфе 3.3 и представлен в следующей теореме.

Теорема 3.5. Если G содержит элемент порядка 6 и q делит $|S|$, то верно одно из следующих утверждений:

(1) q не делит $|\overline{G}|$, $G/O_p(G) = A \rtimes B$, где A — нециклическая абелева q-группа, $B = O_p(B \leftthreetimes B_1$, $F^*(B) = O_p(B) \times F^*(B_1)$, и выполняется одно из следующих утверждений:

(1a) $F^*(B_1) \cong SL_2(5)$, $p = 3$, и $\{r, s\} = \{2, 5\}$;

(1b) $F^*(B_1) \cong SL_2(7)$, $p = 3$, и $\{r, s\} = \{2, 7\}$;

(1c) $F^*(B_1) \cong SL_2(9)$, $p = 3$, и $\{r, s\} = \{2, 5\}$;

(1d) $F^*(B_1) \cong SL_2(17)$, $p = 3$, и $\{r, s\} = \{2, 17\}$;

(1e) $F^*(B_1) \cong SL_2(5)$, $p = 5$, $\{r, s\} = \{2, 3\}$, и AB_1 группа Фробениуса с ядром A и дополнением B_1;

(2) q — простое число Ферма или Мерсенна, $q \geq 31$, $p = 2$, $\pi(q^2 - 1) = \{2, r, s\}$, $S = O_{2,2',2}(S)$, $O_{2,2'}(S)/O_2(S)$ — нециклическая абелева q-группа, $G/O_{2,2'}(S) = P \circ E$, где P — 2-группа, $E \cong SL_2(q)$, и группа E порождает на каждом q-главном факторе $O^2(G)$ 2-мерный естественный $GF(q)SL_n(q)$-модуль.

Глава 4. *"Конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга — Кегеля"*. В данной главе описаны все конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга—Кегеля. Результаты этой главы представлены в следующей теореме.

Теорема 4.1. Пусть G — конечная почти простая 4-примарная группа. Тогда граф $\Gamma(G)$ связен тогда и только тогда, когда группа G изоморфна одной из следующих групп: A_{10}, S_9, S_{10}, $Aut(J_2)$, $L_2(81).2^2$, $Aut(L_2(q))$ при $q \in \{25, 27, 49, 81\}$, $PGL_3(4)$, $PGL_3(4).2_2$, $PGL_3(4).2_3$, $L_3(4).6$, $L_3(4).2^2$, $Aut(L_3(4))$, $PGL_3(7)$, $Aut(L_3(7))$, $L_4(3).2_1$, $Aut(L_4(3))$, $U_3(5).3$, $Aut(U_3(5))$, $U_3(8).3_2$, $U_3(8).3^2$, $U_3(8).S_3$, $Aut(U_3(8))$, $S_4(9).2_2$, $Aut(S_4(q))$ при $q \in \{5, 7, 9\}$, $O_8^+(2).2$, $O_8^+(2).3$, $Aut(O_8^+(2))$. Графы Грюнберга—Кегеля этих групп приведены в таблице **??**.

В заключении перечисляются основные результаты и обсуждаются некоторые оставшиеся открытыми вопросы.

Я выражаю глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Семеновичу Кондратьеву за постановку задачи, всестороннюю помощь и поддержку во время работы над диссертацией. Также я хотел бы поблагодарить всех сотрудников сектора теории групп отдела алгебры и топологии Института математики и механики им. Н.Н. Красовского за полезные обсуждения основных результатов диссертации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеева, О. А., Кондратьев, А. С.** Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, №3. – P. 3–12.

2. **Кондратьев, А. С.** Конечные группы с графом простых чисел, как у группы $Aut(J_2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, №3. – P. 131–138.

3. **Кондратьев, А. С.** Конечные группы с графом простых чисел, как у группы A_{10} // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, №1. – P. 130–143.

4. **Кондратьев, А. С., Осиновская, А. А., Супруненко, И. Д.** О поведении элементов простого порядка из цикла Зингера в представлениях специальной линейной группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, №3. – P. 179–186.

5. **Кондратьев, А. С., Храмцов, И. В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 150–158.

6. **Кондратьев, А. С., Храмцов, И. В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 4. – С. 142–159.

7. **Мазуров, В. Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. – 1997. – Т. 36, № 1. – P. 37–53.

8. **Подуфалов, Н. Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6 // Алгебра и логика. – 1977. – Т. 16, № 2. – P. 200–203.

9. **Aschbacher, M.** Finite group theory. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1986. – 274 p.

10. **Bray, J. N., Holt, D. F., Roney-Dougal, C. M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2013.

11. **Bugeaud, Y., Cao, Z., Mignotte, M.** On simple K_4-groups // J. Algebra. – 2001. – Vol. 241, №10, – P. 658–668.

12. **Conway, J. H., Curtis R. T., Norton, S. P., Parker R. A., Wilson R. A.** Atlas of finite groups. – Oxford: Clarendon Press. – 1985. – 252 p.

13. **Dolfi, S., Jabara, E., Lucido M. S.** C55-groups // Siberian Math. J. – 2004. – Vol. 45, №6. – P. 1053–1062.

14. **Fleischmann, P., Lempken, W., Tiep, P. H.** Finite p'-semiregular groups // J. Algebra. – 1997. – Vol. 188, № 2. – P. 547–579.

15. **Fletcher, L. F., Stellmacher, B., Stewart, W. B.** Endliche Gruppen, die kein Element der Ordnung 6 enthalten // Quart. J. Math. Oxford. Ser. – 1977. – Vol. 28, №2. – P. 143–154.

16. **Gordon, L. M.** Finite simple groups with no elements of order six // Bull. Austral. Math. Soc. – 1977. – Vol. 17, № 2. – P. 235–246.

17. **Gorenstein, D.** Finite groups. – N. Y.: Harper and Row. – 1968. – 528 p.

18. **Gorenstein, D., Lyons, R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc.. – 1991. –420 p.

19. **Hartley, B., Meixner, T.** Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small // Arch. Math. (Basel). – 1981. – Vol. 36, № 3. – P. 211–213.

20. **Herzog, M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. – 1968. – Vol. 10, №3 – P. 383–388.

21. **Higman, G.** Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. (2). – 1957. – Vol. 32. – P. 335–342.

22. **Higman, G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. – Michigan: University Michigan. – 1968.

23. **Huppert, B.** Endliche Gruppen I. – Berlin: Springer-Verlag. – 1967.

24. **Huppert, B., Blackburn, N.** Finite groups II. – Berlin: Springer-Verlag. – 1982.

25. **Huppert, B., Lempken, W.** Simple groups of order divisible by at most four primes // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2000. – Vol. 16, № 3. – С. 64–75.

26. **Jansen, C., Lux, K., Parker, R., Wilson, R.** An atlas of Brauer characters. – Oxford: Clarendon Press, – 1995. – 327 p.

27. **Kondrat'ev, A. S.** Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2014. – Vol. 11. – P. 634–674.

28. **Martineau, R. P.** On 2-modular representations of the Suzuki groups // Amer. J. Math. – 1972. – Vol. 94. – P. 55–72.

29. **Shi, W. J.** On simple K_4-groups // Chinese Science Bull. – 1991. – Vol.36, №17. – P. 1281–1283.

30. **Stewart, W. B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. – 1973. – Vol. 426, №4 – P. 653–680.

31. **Suzuki, M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. – 1962. – Vol. 75, №1 – P. 105–145.

32. **Williams, J. S.** Prime graph components of finite groups // Journal of Algebra. – 1981. – Vol. 69, № 2. – P. 487–513.

33. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.10.0. 2018. URL: http://www.gap-system.org.

34. **Zavarnitsine, A. V.** Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. – 2004. – Vol. 7, № 1. – P. 81–97.

35. **Zsigmondy, K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsch. Math. Phys. – 1892. – Vol. 3, № 1. – P. 265–284.

Статьи в научных журналах из списка ВАК

36. **Kondrat'ev, A. S., Minigulov, N. A.** Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10} // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2018. – Vol. 15. – P. 1378–1382. DOI:10.17377/semi.2018.15.113 (Web of Science)

37. **Кондратьев, А. С., Минигулов, Н. А.** Конечные группы без элементов порядка 6 // Математические заметки. – 2018. – Т. 104, №5. – P. 717–724. DOI:10.4213/mzm11751. (Английский перевод: **Kondrat'ev, A. S., Minigulov, N. A.** Finite groups with no elements of order 6 // Mathematical Notes. – 2018. – Vol. 104, №5. – P. 79–84. DOI:10.1134%2FS000143461811010X) (Web of Science, Scopus)

38. **Минигулов, Н.А.** Конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга—Кегеля // Труды Института математики и механики. – 2019. – Т. 25, №4. – С. 142–146. DOI:10.21538/0134-4889-2019-25-4-142-146. (Английский перевод: **Minigulov, N. A.** Finite Almost Simple 4-Primary Groups with Connected Gruenberg–Kegel Graph // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2020. – Vol.309, №4, suppl.1. – P. 93–97. DOI:10.21538/0134-4889-2019-25-4-142-146) (Web of Science, Scopus)

39. **Kondrat'ev, A. S., Minigulov, N. A.** On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graph are isomorphic to the paw // Communications in Mathematics and Statistics. – 2021. – 15p. DOI:10.1007/s40304-021-00242-x (Web of Science Q1, Scopus)

Другие публикации по теме диссертации

40. **Kondrat'ev, A., Minigulov, N.** Finite groups with no elements of order 6 // Groups and Graphs, Metrics and Manifolds: Internatinal Conference and PhD-Master Summer School, Yekaterinburg, July 22-30, 2017 : abstracts. – Yekaterinburg: Ural Federal University. – 2017. – P. 62.

41. **Кондратьев, А. С., Минигулов, Н. А.** Конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10} // Теория групп и ее приложения : XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию А.А. Махнева, Геленджик, 13-20 мая 2018: материалы. Краснодар: Кубанский государственный университет. – 2018. – С. 83–85.

42. **Кондратьев, А. С., Минигулов, Н. А.** Конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10} // Тезисы докладов международной конференции "Мальцевские чтения". Новосибирск: Новосибирский гос. университет. – 2018. – С. 97.

43. **Кондратьев, А. С., Минигулов Н. А.** О конечных неразрешимых 4-примарных $3'$-группах // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем: тезисы международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова. Нальчик: Изд-во КБГУ, – 2019. – С. 56.

44. **Minigulov, N.** Finite Almost Simple 4-Primary Groups with Connected Gruenberg–Kegel Graph // Groups and Graphs, Designs and Dynamics: Internatinal Conference and PhD-Master Summer School, Yichang, China,

August 12-25, 2019 : program and abstracts. – Yichang: Three Gorges Mathematical Reserch Center. – 2019. – P. 56.

45. **Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A.** On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw // 2020 Ural Workshop on group theory and combinatorics, Yekaterinburg-Online, Russia, August 24–30, 2020: abstracts. Yekaterinburg: IMM UB RAS. – 2020. – P. 56.

46. **Кондратьев, А. С., Минигулов Н. А.** О конечных неразрешимых 4-примарных группах // Теория групп и ее приложения: XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А.Белоногова, Екатеринбург, 3-7 августа 2020: тезисы докладов. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. – 2020. – С. 50–51.

47. **Кондратьев, А. С., Минигулов Н. А.** О конечных неразрешимых 4-примарных группах без элементов порядка 6 // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов: 8-я школа-конференция, 27 января по 1 февраля 2020, Москва: тезисы докладов. Москва: МЦНМО. – 2020. – С. 36–37.

48. **Кондратьев, А. С., Минигулов Н. А.** О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10} // Алгебра и ее приложения: конференция, посвященная 70-летию пермской алгебраической школы им. С.Н. Черникова: тезисы докладов / Пермский гос. нац. иссл. ун-т, ИММ УрО РАН. Пермь. – 2020. – С. 28–29.

49. **Kondrat'ev, A., Minigulov, N.** On finite groups which Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw // The 4th Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications: International conference : book abstracts. Novosibirsk: Mathematical Center in Akademgorodok. – 2021. – P. 24.