ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

БАБЕНКО Марина Владимировна

Полукольца косых многочленов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
доцент В. В. Чермных

Киров
2022

Содержание

Введение

В работе мы используем термин «полукольцо» в соответствии с определением Дж. Голана. Как указано в его монографии [40], впервые термин полукольцо появился в 1934 г. в статье Г. Вандивера [49] при исследовании идеалов кольца. Однако впервые использование полуколец можно обнаружить у Р. Дедекинда [35] (1884 г.) и Д. Гильберта [42] (1899 г.) при исследовании вопросов аксиоматики числовых систем.

Полукольцо отличается от ассоциативного кольца с единицей возможно необратимостью аддитивной операции. Кроме колец еще один важный подкласс класса полуколец составляют ограниченные дистрибутивные решетки. Имеется также много числовых полуколец, а самое естественное полукольцо образует множество целых неотрицательных чисел с обычными операциями сложения и умножения. Стандартным образом возникают матричные полукольца, полукольца многочленов, формальных степенных рядов, полукольца эндоморфизмов коммутативных моноидов.

Начальным периодом становления теории полуколец можно считать 50–80 гг. 20 века. В это время появилось много работ посвященных переносу кольцевых и общеалгебраических понятий на полукольца (идеалы и их различные виды, гомоморфизмы, конгруэнции и т. д.). Отметим некоторые интересные результаты, например, полукольцевой аналог теоремы Веддерберна–Артина для полупервичных колец, исследование различных радикалов полуколец. В рамках теории полуколец началось изучение полуполей и полутел [20, 51].

С 90-х гг. интерес к полукольцам заметно вырос. Этому способствовало появление большого количества прикладных задач, при решении которых существенно используются полукольца. Укажем в этом контексте развитие теории MV-алгебр и MV-полуколец, имеющих непосредственную связь с многозначными логиками. При изучении нечеткой логики (раздела математики, обобщающего классическую логику и теорию множеств) возникают многочисленные полукольца при рассмотрении t-норм и t-конорм — ассоциативных операций на единичном отрезке.

Изучение полуколец с идемпотентным сложением привело к развитию тропической математики. И в этом случае предпосылками для развития стали в первую очередь прикладные задачи. Например, некоторые задачи оптимизации удобней формулировать в терминах тропических полуколец. Большой вклад в развитие тропической математики был внесен школой академика В. П. Маслова [12, 18]. Созданные в результате идемпотентный анализ и идемпотентный функциональный анализ имеют кроме многочисленных приложений и большое теоретическое значение. Активно развивается в настоящее время матричная и линейная алгебра над идемпотентными полукольцами. Также популярной в настоящее время становится тропическая геометрия [46].

Укажем еще несколько разделов математики, в которых активно используются полукольца: компьютерные науки, теория автоматов, теория оптимального управления, теория графов, комбинаторика, теория кодирования.

К 90-м годам теория полуколец оформилась в успешно развивающийся раздел математики. Накопленный материал нашел отражение в монографии Г. Вейнерта и У. Хебиша [41]. Значительный толчок к развитию теории полуколец дала монография Голана [39] и ее дополненный вариант [40]. Скажем также о важной роли обзоров по полукольцам и их приложениям К. Глазека [37, 38].

Кроме отмеченных выше, имеются несколько активно работающих в области теории полуколец российских центров и/или математиков. Отметим А. Э. Гутермана и его ученика Я. Н. Шитова, внесших существенный вклад в развитие линейной алгебры над полукольцами [9, 29].

Вопросами гомологической классификации полуколец и полумодулей над полукольцами занимается С. Н. Ильин [10, 11].

Исследования Е. М. Вечтомова и его учеников посвящены в первую очередь решению задач функциональной алгебры — ими активно развивается теория полуколец непрерывных функций и теория пучковых представлений полуколец и полумодулей [3, 26]. Кроме этой тематики, исследования посвящены и вопросам общей теории полуколец: укажем развитие теории полутел, теории решеточно упорядоченных полуколец, продолжаются исследования мультипликативно идемпотентных полуколец. Имеется заметные продвижения в изучении циклических полуколец и полуколец с малым числом элементов [6]. Сведения о полученных в последнее время результатах в школе Вечтомова можно найти в обзорной статье [8].

Кратко отметим исторические предпосылки для исследований полуколец косых многочленов. Появление алгебр косых многочленов (и рядов) связывают с именем О. Оре [47], который исследовал в 1930 г. следующую конструкцию. Пусть F — тело, φ — эндоморфизм F, δ — так называемое φ-дифференцирование (т. е. $\delta(a+b)=\delta(a)+\delta(b)$ и $\delta(ab)=\delta(a)b+\varphi(a)\delta(b)$ для всех $a,b\in F$). Тогда на множестве многочленов над F определяется умножение $x\cdot a=\varphi(a)x+\delta(a)$ для любого $a\in F$, позволяющее ввести умножение на $F[x]$. Возникает ассоциативное кольцо $F[x,\varphi,\delta]$ — расширение Оре. Используются также альтернативные названия — кольцо косых многочленов или кольцо дифференциальных многочленов. К настоящему времени первый термин чаще употребляется для обозначения кольца $R[x,\varphi]$ (*Ore extension of endomorphism type*), а второй — для кольца $R[x,\delta]$. Подобным образом строятся кольцо косых формальных степенных рядов и кольцо косых рядов Лорана.

Необходимо отметить, что конструкция скрученного умножения использовалась значительно раньше (1899 г.) в книге Д. Гильберта «Основания геометрии» [43]. Говоря современным языком, было построено кольцо косых формальных рядов Лорана над полем рациональных функций. В действительности это кольцо является телом, и тела, получаемые подобным путем, носят названия тел Гильберта. Тела Гильберта позволяют привести пример тела, бесконечномерного над своим центром. Кольца косых многочленов входили в сферу интересов многих авторов. Отметим их активное использование в монографиях Д. Макконнела и Д. Робсона [45], А. А. Туганбаева [23], информацию об алгебрах косых многочленов и рядов можно найти в обзорах [1], [24].

К основным результатам нашей диссертации относятся исследования пирсовских слоев полуколец многочленов. Конструкция пирсовского пучка колец появилась впервые в статье Р. С. Пирса [48] в 1967 г. и хорошо зарекомендовала себя при изучении различных алгебр. Аналоги пирсовского пучка были получены для решеточно упорядоченных колец [44], дистрибутивных решеток [36], полуколец [25], колец и полуколец с инволюцией [14, 21], drl-полуколец [28], полутел [7]. Первые результаты о характеризации колец свойствами пирсовских слоев были уже в пионерской работе Пирса и регулярно появлялись в дальнейшем как для колец, так и для других алгебраических систем. Особо отметим важные работы В. Д. Беджеса и В. Стефенсона [31, 32], и результаты А. А. Туганбаева, оформленные в монографии [23]. Подход Туганбаева, на наш взгляд, отличается от аналогичных работ предшественников. Именно, им получены чисто алгебраические характеризации колец свойствами пирсовских слоев, т. е. без привлечения топологических свойств накрывающего или базисного пространств пучка.

Исследования пирсовских слоев полуколец впервые появились в работах Р. В. Маркова и В. В. Чермных [15, 17]. Можно считать, что связанные с пирсовским слоями результаты нашей диссертации являются продолжением их исследований.

Дадим сейчас краткую характеристику работы.

Основным **объектом** изучения в диссертации является полукольцо косых многочленов.

В нашей диссертации основной **целью** является исследование свойств полуколец косых многочленов, нахождение связей между полукольцами косых многочленов и полукольцами их коэффициентов.

В работе используются алгебраические **методы**, в частности, методы теории колец, теории полуколец, теории решеток, теории пучковых представлений алгебр.

Для достижения поставленных целей решаются следующие общие **задачи**.

1) Для описания m-идеалов полуколец многочленов и дальнейшего их использования вводится в рассмотрение и исследуется конструкция φ-цепей коэффициентных множеств.

2) Нахождение новых алгебраических свойств полуколец косых многочленов.

3) Выделение полуколец (и полуколец многочленов), которые допускают описание в терминах их пирсовских слоев; получение характеризаций таких полуколец.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 10 параграфов, заключения, предметного указателя, списка литературы. Общий объем работы составляет 107 страниц. Список литературы состоит из 59 источников.

Дадим краткое описание **содержания работы.**

В **главе 1** вводятся основные понятия и конструкции, которые будут использоваться нами для исследования полуколец косых многочленов.

В параграфе 1 определяются понятия полукольца и полукольца косых многочленов.

Полукольцом называется непустое множество S с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, $0 \neq 1$, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, сохраняющий нуль и единицу, $R = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов от переменной x и с коэффициентами из S, записываемых слева от степеней x. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$.

Непосредственно проверяется, что $S[x,\varphi]$ является полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов*.

Пусть B — произвольный левый или правый идеал полукольца $R = S[x,\varphi]$. Будем называть множества

$$B_i = \{a \in S : ax^i \text{ — одночлен в некотором многочлене } f \in B\}$$

коэффициентными множествами идеала B.

Коэффициентные множества левого идеала из R являются левыми идеалами полукольца S.

Л. Дэйл в [34] ввел понятие *монического* идеала (monic ideal) полукольца многочленов $S[x]$ над коммутативным полукольцом S — идеала, который вместе с любым многочленом содержит каждый его одночлен; в нашей работе идеал с таким свойством назван m-идеалом.

Левый идеал L полукольца R назовем *левым m-идеалом*, если из того, что многочлен $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ принадлежит L следует, что $a_k x^k \in L$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n$. Аналогично определяется правый m-идеал.

Следующая конструкция позволяет получить описание левых m-идеалов. Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Будем называть последовательность левых идеалов $L_0, L_1, \ldots$ из S *левой φ-цепью*, если для произвольного целого неотрицательного i выполняется $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$. Каждая φ-цепь $\{L_i\}$ задает левый m-идеал $L^* = \{f = a_0 + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_n \in R : a_i \in L_i\}$.

Важным оказывается вопрос о строении главных левых m-идеалов и особенностях порождающих их многочленов. Этому посвящен параграф 2 настоящей работы. Полукольцо S называется *риккартовым слева*, если для любого $a \in S$ левый аннулятор $\operatorname{ann}_l(a)$ равен Se для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$. Напомним, что полукольцо называется *левым полукольцом Безу*, если каждый его конечно порожденный левый идеал является главным левым идеалом. Эндоморфизм φ полукольца S называется *жестким*, если $a\varphi(a) = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in S$.

Теорема 2.1. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$, $R = S[x, \varphi]$.*

1) *Если для любого $i = 0, \dots, k-1$ выполнено*

$$f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i),$$

то $R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ — главный левый m-идеал полукольца R.

2) *Если L — главный левый m-идеал в R, то найдется такой многочлен $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, что $L = Rf$ и*

$$f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i)$$

для всех $i = 0, \dots, k-1$.

В доказательстве этой теоремы строится конструкция, позволяющая получить коэффициенты образующего многочлена. На ее основе описан один способ построения образующего многочлена главного левого m-идеала произвольного полукольца $S[x, \varphi]$, если $\varphi(e) = e$ для любого центрального дополняемого идемпотента (замечание 2.2).

В параграфе 3 рассматриваются полукольца косых многочленов над полукольцами с делением и над нётеровыми полукольцами.

Известно, что левое кольцо косых многочленов над телом является кольцом главных левых идеалов. В примере 3.1 показано, что полукольцо многочленов с неотрицательными рациональными коэффициентами $\mathbb{Q}^+[x]$ не является кольцом главных идеалов.

Использование m-идеалов полукольца косых многочленов над полутелом позволяет получить

Предложение 3.1. *Если F — полукольцо с делением, φ — эндоморфизм F, то $R = F[x, \varphi]$ — полукольцо без делителей нуля, каждый левый m-идеал которого является главным. Если φ — автоморфизм, то каждый правый m-идеал полукольца $R = F[x, \varphi]$ является главным.*

Приведен пример полукольца $F[x, \varphi]$ над полуполем с инъективным эндоморфизмом φ, содержащий бесконечно порожденный правый m-идеал.

Несложно показать, что полукольцо многочленов над нётеровым полукольцом S будет нётеровым в точности тогда, когда S — нётерово кольцо. Привлечение m-идеалов позволило получить следующий аналог теоремы Гильберта о базисе (для полукольца косых многочленов).

Теорема 3.1 *Пусть φ — автоморфизм полукольца S. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *S — нётерово слева (справа) полукольцо;*

2) *$S[x, \varphi]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых (правых) m-идеалов.*

Во второй главе изучаются алгебраические свойства полуколец косых многочленов.

Параграф 4 посвящен идемпотентам полуколец косых многочленов.

В предложениях 4.2.и 4.4 получена важная информация об идемпотентах полуколец S и $R = S[x, \varphi]$. Выясняется, когда идемпотенты этих полуколец центральны, дополняемы, найдены условия, при которых совпадают множества BS и BR всех центральных дополняемых идемпотентов полуколец S и R.

В параграфе 5 исследуются следующие условия полукольца косых многочленов: коммутативность, отсутствие делителей нуля и ненулевых нильпотентных элементов, риккартовость.

Рассматриваемые в §4 и §5 полукольца допускают похожие характеризации. Именно, при некоторых дополнительных ограничениях на эндоморфизм φ (инъективность или жесткость) полукольцо косых многочленов $S[x,\varphi]$ удовлетворяет одному из указанных свойств в точности тогда, когда ему удовлетворяет полукольцо S (предложения 4.3, 5.1–5.4). Для иллюстрации сказанного укажем формулировку следующего результата.

Предложение 5.4. *Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x,\varphi]$, то равносильны условия:*

1) *R — риккартово справа полукольцо без нильпотентных элементов;*

2) *R — риккартово слева полукольцо без нильпотентных элементов;*

3) *каждый многочлен из R является произведением центрального дополняемого идемпотента, лежащего в S, и неделителя нуля;*

4) *S — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов и φ — жесткий эндоморфизм.*

Параграф 6 посвящен исследованию полукольца косых многочленов над полукольцом Безу.

Обобщается следующий результат [22, теорема 1]: если A — кольцо, в котором каждый левый аннуляторный идеал является идеалом, то кольцо многочленов $A[x]$ является левым кольцом Безу тогда и только тогда, когда A — риккартово слева левое кольцо Безу, каждый неделитель нуля которого обратим в A. Для полуколец обычных (некосых) многочленов этот результат уже не является верным, хотя справедливо следующее утверждение:

Теорема 6.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$, и все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами. Если R — левое полукольцо Безу, то S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$.*

Пример 6.1 показывает, что обратное утверждение к теореме 6.2 не верно. Для получения характеризации мы вновь используем свойства m-идеалов.

Теорема 6.3. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами, $R = S[x, \varphi]$. Тогда равносильны утверждения:*

1) R — полукольцо без нильпотентных элементов и каждый конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;

2) S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$;

Третья глава диссертации посвящена изучению зависимостей между алгебраическими свойствами полукольца косых многочленов и свойствами полукольца его коэффициентов в терминах пирсовских пучков. Использование пирсовских пучков позволяет в некоторых случаях получить характеризацию полукольца S через свойства пирсовских слоев этого полукольца, а также через свойства пирсовских слоев полукольца косых многочленов с коэффициентами из S. Отметим, что пучковые конструкции в наших исследованиях выступают также тополого-алгебраическим аппаратом, помогающим в доказательстве утверждений.

В параграфе 7 изложены основные понятия, необходимые для применения пирсовских пучков к исследованию полуколец косых многочленов. Вводятся определения пирсовского пучка, пирсовского слоя, глобального сечения пучка. Приводятся необходимые начальные сведения о свойствах пучков и представлений.

Пусть M — максимальный идеал булева кольца BS центральных дополняемых идемпотентов полукольца S. Отношение

$$a \equiv b(\alpha_M) \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M$$

является конгруэнцией на S, и факторполукольцо S/α_M называется *пирсовским слоем.*

Далее в параграфе рассматривается класс $\mathcal{P}$ полуколец, удовлетворяющих условию: полукольцо S принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца S принадлежит $\mathcal{P}$. Вводится в рассмотрение естественный инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ пирсовского слоя S/α_M, на основе которого строится полукольцо косых многочленов $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$. Доказанное в предложении 7.1 утверждение

$$R \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}] \in \mathcal{P} \text{ для каждого пирсовского слоя } S/\alpha_M$$

позволяет выделить целый ряд полуколец, принадлежащих $\mathcal{P}$ (предложение 7.2).

Описаны пирсовские слои полукольца косых многочленов над булевым полукольцом и регулярным слабо симметрическим полукольцом. Полукольцо называется *слабо симметрическим*, если для любых $a, b, c, d \in S$ выполняется $bc = bd \Leftrightarrow cb = db$. Полукольцо S называется *arp-полукольцом*, если оно *регулярно* (для любого $a \in S$ разрешимо уравнение $axa = a$), *положительно* (элемент $a + 1$ обратим в S для любого $a \in S$), и *абелево* (каждый его идемпотент e централен); arp-полукольцо называется *булевым*, если каждый его идемпотент дополняем. Полукольцо, не содержащее ненулевых аддитивно обратимых элементов, называется *антикольцом*.

Теорема 7.1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$ и $R = S[x, \varphi]$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если S — регулярное слабо симметрическое полукольцо, любой идемпотент которого является центральным дополняемым идемпотентом, то каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля, в котором каждый левый m-идеал является главным;*

2) *если S — булево полукольцо, то каждый пирсовский слой полукольца R является антикольцом без делителей нуля, в котором каждый левый m-идеал является главным.*

В параграфе 8 продолжаются исследования риккартовых полуколец с некоторыми дополнительными условиями. Сначала была получена характеризация строго риккартова полукольца через пирсовские слои этого полукольца (предложение 8.1). В предложении 8.2 доказаны необходимые и достаточные условия отсутствия в полукольце косых многочленов левых (правых) уравнителей и левых (правых) слабых уравнителей. Эти утверждения понадобятся нам в доказательствах двух центральных теорем этой главы, в которых получены характеризации строго риккартова полукольца (теорема 8.1) и риккартова слева или справа полукольца без нильпотентных элементов (теорема 8.2), и описаны пирсовские слои таких полуколец, а также пирсовские слои полуколец косых многочленов над ними.

Левый идеал $\mathrm{eq}_l(a, b) = \{s \in S : sa = sb\}$ всех левых уравнителей элементов $a, b \in S$ является полукольцевым аналогом понятия аннулятора элемента. Полукольцо S называется *строго риккартовым*, если любых элементов $a, b \in S$ их левый уравнитель $\mathrm{eq}_l(a, b)$ порождается как левый идеал центральным дополняемым идемпотентом из S.

Теорема 8.1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Рассмотрим следующие условия:*

1) *$R = S[x, \varphi]$ — строго риккартово полукольцо;*

2) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без левых (равносильно, правых) уравнителей и $\mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любых $f, g \in R$;*

3) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без левых (равносильно, правых) слабых уравнителей и $\mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любых $f, g \in R$;*

4) *каждый пирсовский слой полукольца S является полукольцом без левых (равносильно, правых) уравнителей и $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS$ является главным идеалом кольца BS для любых $a, b \in S$;*

5) *S — строго риккартово полукольцо.*

Тогда $1) \Leftrightarrow 2), 3) \Leftrightarrow 4) \Leftrightarrow 5), 2) \Rightarrow 3)$. *Если S — аддитивно сократимое полукольцо (в частности, кольцо), то все пять условий равносильны.*

Теорема 8.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Тогда равносильны следующие условия:*

1) $R = S[x, \varphi]$ — *риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов;*

2) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля и* $\mathrm{ann}_l(f) \cap BR$ *является главным идеалом кольца BR для любого $f \in R$;*

3) *каждый пирсовский слой полукольца S является полукольцом без делителей нуля и* $\mathrm{ann}_l(a) \cap BS$ *является главным идеалом кольца BS для любого $a \in S$;*

4) S — *риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов.*

Завершает параграф теорема 8.3, которая дополняет теорему 6.3 о характеризации риккартова слева левого полукольца Безу и содержит описание пирсовских слоев такого полукольца.

В параграфе 9 вводится квазибэровское полукольцо, находятся его характеризации (лемма 9.1, предложение 9.2) и характеризации полукольца косых многочленов над ним (предложение 9.1, теорема 9.1). Полукольцо S назовем *квазибэровским*, если для любого идеала A из S $\mathrm{ann}_l(A) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$.

Теорема 9.1. *Пусть S — φ-жесткое полукольцо и M — полный идеал для любого $M \in Max\,BS$. Тогда равносильны условия:*

1) $R = S[x, \varphi]$ — *квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала A из S* $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$*;*

2) S — *квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала A из S* $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$*;*

3) S — *бирегулярное полукольцо без нильпотентных элементов;*

4) *каждый пирсовский слой полукольца S является простым полукольцом без делителей нуля.*

В параграфе 10 исследуются пирсовские слои нётерова слева полукольца. Легко проверить, что пирсовские слои нётерова слева полукольца являются нётеровыми слева. Пример 10.1 демонстрирует, что обратное утверждение неверно. Но если добавить к нётеровости пирсовских слоёв дополнительное требование — конечность множества центральных дополняемых идемпотентов полукольца S, то в этом случае полукольцо S будет нётеровым (предложение 10.1). На основе этого предложения доказывается характеризация нётерова полукольца S через свойства пирсовских слоев полукольца косых многочленов с коэффициентами из S.

Теорема 10.1. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, множество BS конечно. Тогда полукольцо S нётерово слева (справа) в точности тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца $R = S[x, \varphi]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых (правых) m-идеалов и множество центральных дополняемых идемпотентов каждого пирсовского слоя полукольца R конечно.*

По теме диссертации опубликовано 8 работ, в том числе 4 в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК.

Результаты неоднократно докладывались на ежегодных научных конференциях Вятского государственного университета, на научно-исследовательских семинарах кафедры прикладной математики и информатики и кафедры фундаментальной математики Вятского государственного университета. Результаты диссертации апробированы на Международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения проф. А. Г. Куроша (Москва, 2018 г.); IV и V Всероссийских научных конференциях с международным участием «Математическое моделирование и информационные технологии» (СГУ им. П. Сорокина, Сыктывкар, 2020, 2021 гг.); Международной (53-ей Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2022 г.).

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю Василию Владимировичу Чермных за поддержку, помощь и постоянное внимание к работе.

Глава 1

m-Идеалы полуколец косых многочленов

В главе вводятся основные понятия и конструкции, которые будут использоваться нами для исследования полуколец косых многочленов. Изучаются m-идеалы полукольца косых многочленов, для этого определяются коэффициентные множества и φ-цепи полукольца S. Найдены условия, при которых существует главный левый m-идеал полукольца $R = S[x, \varphi]$, порожденный неодночленом. В терминах возрастающих цепей m-идеалов получен аналог теоремы Гильберта о базисе для полукольца косых многочленов.

1. Коэффициентные множества, φ-цепи и m-идеалы

Ниже будут определены основные понятия, относящиеся к теме исследования.

Определение 1.1. [40] *Полукольцом* называется непустое множество S с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S, + \rangle$ —

коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, $0 \neq 1$, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Полукольца образуют широкий класс, включающий ассоциативные кольца с единицей, ограниченные дистрибутивные решетки.

Определение 1.2. Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, сохраняющий единицу, $R = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов от переменной x и с коэффициентами из S, записываемых слева от степеней x. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$. Непосредственно проверяется, что $S[x, \varphi]$ является полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов.*

Обычным образом определяются степень $\deg f$ многочлена f, старший и младший коэффициенты многочлена, свободный коэффициент. Левый, правый и двусторонний идеалы полукольца определяются так же, как и для колец. *Ядром эндоморфизма* φ полукольца S называется множество $\operatorname{Ker}\varphi$ всех элементов из S, имеющих нулевой образ. Отметим, что ядра гомоморфизмов полуколец являются идеалами, однако в отличие от колец ядро гомоморфизма не определяет сам гомоморфизм, т. е. могут существовать различные гомоморфизмы полукольца с совпадающими ядрами. В частности, существуют различные гомоморфизмы с нулевым ядром, причем они не обязаны быть инъективными.

Пусть B — произвольный левый или правый идеал полукольца $S[x, \varphi]$.

Определение 1.3. Будем называть множества

$$B_i = \{a \in S : ax^i \text{ — одночлен в некотором многочлене } f \in B\}$$

коэффициентными множествами идеала B.

В пункте 1 леммы 1.1 покажем, что коэффициентные множества левого идеала B являются левыми идеалами полукольца S, поэтому в дальнейшем будем их называть *коэффициентными левыми идеалами* левого идеала B.

Лемма 1.1. *Пусть L — левый идеал полукольца $R = S[x, \varphi]$, и L_i — его коэффициентные множества. Тогда справедливы утверждения:*

1) *любое L_i является левым идеалом полукольца S;*
2) *$\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$ для каждого целого неотрицательного i;*
3) *$\varphi^j(L_i) \subseteq L_{i+j}$ для произвольных целых неотрицательных i, j;*
4) *если L — конечно порожденный левый идеал полукольца R, то любой его коэффициентный левый идеал также конечно порожден.*

Доказательство. 1) Если $a, b \in L_i$, значит, ax^i является одночленом в некотором многочлене $f \in L$, а bx^i — одночлен в некотором многочлене $g \in L$. Многочлен $f + g$ принадлежит L и содержит одночлен $(a + b)x^i$, откуда $a + b \in L_i$. Если $c \in S$ — многочлен нулевой степени, то cf принадлежит левому идеалу L. Многочлен cf содержит одночлен cax^i, поэтому $ca \in L_i$.

2) Пусть $a \in L_i$. Тогда найдется такой $f \in L$, что $f = \ldots + ax^i + \ldots$. Так как $xf = \ldots + xax^i + \ldots = \ldots + \varphi(a)x^{i+1} + \ldots \in L$, то $\varphi(a) \in L_{i+1}$, следовательно, $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$.

3) Получаем индукцией из 2).

4) Пусть L порождается многочленами

$$f_1 = f_{10} + f_{11}x + \ldots,$$
$$\ldots$$
$$f_k = f_{k0} + f_{k1}x + \ldots,$$

и L_t — произвольный коэффициентный левый идеал. Для произвольного $a \in L_t$ найдется многочлен $f = \ldots + ax^t + \ldots$, лежащий в L. Тогда для некоторых $g_i = g_{i0} + g_{i1}x + \ldots \in R$, $i = 1, \ldots, k$, выполняется $f = g_1 f_1 + \ldots + g_k f_k$. Поэтому получим:

$$a = \sum_{i_1 + j_1 = t} g_{1i_1}\varphi^{i_1}(f_{1j_1}) + \ldots + \sum_{i_k + j_k = t} g_{ki_k}\varphi^{i_k}(f_{kj_k}).$$

Следовательно, L_t порождается элементами $\varphi^{t-j}(f_{ij})$ для $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, t$. $\square$

Пример 1.1. Утверждение, обратное к пункту 4 леммы 1.1, не верно. Рассмотрим булеву решетку $\langle A, +, \cdot\rangle$ со счетным множеством атомов $\{a_0, a_1, \ldots\}$. Пусть $b_0 = a_0, b_i = a_0 + \ldots + a_i$, и каждый элемент b_i порождает идеал B_i. Получим счетную строго возрастающую цепь главных идеалов $B_0 \subset B_1 \subset \ldots$. Стандартно проверяется, что $B^* = \{\sum b_i x^i \in A[x] : b_i \in B_i,$ суммы конечные$\}$ является идеалом полукольца $A[x]$, а $B_0, B_1, \ldots$ — его коэффициентные множества. Предположим, что B^* порождается многочленами $f_1, \ldots, f_k$. Пусть r — целое число, большее $\max\{\deg f_1, \ldots, \deg f_k\}$. Тогда $b_r \in B_r \setminus B_{r-1}$ и каждый многочлен, имеющий b_r среди своих коэффициентов (например, $b_r x^r \in B^*$), невозможно выразить через $f_1, \ldots, f_k$.

Определение 1.4. Левый идеал L полукольца $S[x, \varphi]$ назовем *левым m-идеалом*, если из того, что многочлен $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ принадлежит L, следует, что $a_k x^k \in L$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n$. Аналогично определяется правый m-идеал.

Несобственный и нулевой идеалы полукольца $S[x, \varphi]$ являются m-идеалами. Очевидно, что множество всех левых m-идеалов полукольца $S[x, \varphi]$ образует полную подрешетку решетки всех левых идеалов из $S[x, \varphi]$, так как произвольные сумма и пересечение левых m-идеалов снова являются левыми m-идеалами.

Введем в рассмотрение конструкцию, позволяющую получить описание левых m-идеалов.

Определение 1.5. Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Будем называть последовательность левых идеалов $L_0, L_1, \dots$ из S *левой φ-цепью*, если для произвольного целого неотрицательного i выполняется $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$.

Пусть $L_0, L_1, \dots$ — произвольная левая φ-цепь полукольца S. Очевидно, что множество

$$L^* = \{\sum a_i x^i \in S[x, \varphi] : a_i \in L_i, \text{ суммы конечные}\}$$

является левым m-идеалом. Пусть L — левый идеал полукольца $S[x, \varphi]$. По лемме 1.1 его коэффициентные левые идеалы образуют φ-цепь, для которой также возникает выше определенное множество L^*. Обозначение L^* мы будем использовать как для φ-цепи $\{L_i\}$, так и отталкиваясь от некоторого левого идеала L. Из текста всегда будет понятно, для какого случая применяется это обозначение.

Пример 1.2. В [34] было показано, что для любого левого идеала B полукольца $A[x]$ его коэффициентные левые идеалы образуют возрастающую цепь. В полукольце косых многочленов ситуация иная. Пусть S — произвольное полукольцо, $A = S \times S$, и $\varphi : A \to A$ — автоморфизм, заданный $(a, b) \to (b, a)$. Обозначим $B_0 = S \times 0$, тогда $0 \times S = \varphi(B_0) = B_1$ и $B_0 \nsubseteq B_1$. Получим левую φ-цепь

$B_0, B_1, B_0, B_1, \ldots$, которая не является возрастающей. Легко проверяется, что множество B^*, построенное для этой левой φ-цепи, является левым идеалом полукольца $A[x, \varphi]$, а его коэффициентными левыми идеалами являются B_i .

Предложение 1.1. *Пусть B, C — левые идеалы полукольца $R = S[x, \varphi]$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *B^* — левый m-идеал;*

2) *$B \subseteq B^*$, и B^* — наименьший левый m-идеал, содержащий B;*

3) *$B = B^*$ тогда и только тогда, когда B — левый m-идеал;*

4) *B^* является пересечением всех левых m-идеалов из R, содержащих B;*

5) *если $B \subseteq C$, то $B^* \subseteq C^*$;*

6) *$B^* \subseteq C^*$ тогда и только тогда, когда $B_i \subseteq C_i$ для всех коэффициентных левых идеалов для B и C;*

7) *$B^* = C^*$в точности тогда, когда $B_i = C_i$ для всех коэффициентных левых идеалов для B и C;*

8) *$(B \cap C)^* \subseteq B^* \cap C^*$.*

Доказательство. 1) Ясно, что B^* замкнут относительно суммы. Пусть $h = h_0 + h_1x + \ldots + h_mx^m \in R$ и $f = f_0 + f_1x + \ldots + f_nx^n \in B^*$. В произведении hf одночлен произвольной степени k имеет вид $\sum_{i+j=k} h_ix^if_jx^j = \sum_{i+j=k} h_i\varphi^i(f_j)x^k$. Покажем, что любое слагаемое $h_i\varphi^i(f_j)$, $i+j = k$, принадлежит идеалу B_k. Действительно, если $i = 0$, то $h_0f_k \in B_k$. Для $i \neq 0$ по лемме 1.1 $\varphi^i(f_j) \subseteq B_{i+j} = B_k$, откуда $h_i\varphi^i(f_j) \in B_k$. Следовательно, B^* — левый идеал. В силу определения B^* все одночлены f_ix^i многочлена f содержатся в B^*, поэтому B^* является левым m-идеалом.

2) Очевидно включение $B \subseteq B^*$. Пусть M — произвольный левый m-идеал, содержащий B. Покажем, что $B^* \subseteq M$. Пусть

$f = f_0 + \ldots + f_i x^i + \ldots + f_n x^n$ лежит в B^*, и $f_i x^i$ — его произвольный одночлен. Тогда найдется многочлен $g_i = \ldots + f_i x^i + \ldots$, лежащий в B, а следовательно, и в M. Поэтому $f_i x^i \in M$, откуда следует $f \in M$.

3) Если $B = B^*$, то по 1) B^*, а значит и B, является левым m-идеалом. Обратная импликация верна по 2).

4) Следует из 2).

5) Пусть $B \subseteq C$, тогда $B_i \subseteq C_i$ для всех коэффициентных левых идеалов, откуда $B^* \subseteq C^*$.

6) Покажем, что $B^* \subseteq C^*$ влечет $B_i \subseteq C_i$ для всех коэффициентных левых идеалов для B и C. Предположим, существует i, для которого не выполняется $B_i \subseteq C_i$, значит найдется $a \in B_i \backslash C_i$. Одночлен ax^i лежит в B^*, но не содержится в C^*, противоречие. Обратное очевидно.

7) Очевидно.

8) Поскольку из $B \cap C \subseteq B$ следует $(B \cap C)^* \subseteq B^*$ по утверждению 5) и, аналогично, $(B \cap C)^* \subseteq C^*$, то $(B \cap C)^* \subseteq B^* \cap C^*$. □

Пример 1.3. Дэйл в [34, theorem 3.6] утверждает, что в полукольце многочленов $A[x]$ над полукольцом A для любых идеалов $B, C \subseteq A[x]$ выполняется равенство $(B \cap C)^* = B^* \cap C^*$. Мы согласны с включением $(B \cap C)^* \subseteq B^* \cap C^*$, которое было доказано в предыдущем предложении для полукольца косых многочленов. Обоснование обратного включения Дэйл ограничивает фразой «очевидно». Покажем на примере, что это включение не верно. Рассмотрим цепь $L = \{0, b, c, 1\}, b < c$, полукольцо многочленов $L[x]$ и главные идеалы $B = (b + x)$ и $C = (c + x)$. Нетрудно проверить, что $B \cap C$ не содержит многочлена вида $a + x + \ldots$ для произвольного $a \in L$. Это означает, что $x \notin (B \cap C)^*$, хотя $x \in B^* \cap C^*$.

Подход к описанию правых m-идеалов левого полукольца косых многочленов $S[x, \varphi]$ аналогичен ситуации с левыми m-идеалами, однако, конструкции правых и левых m-идеалов имеют некоторые различия. Это происходит от того, что коэффициентные множества произвольного правого идеала из $S[x, \varphi]$ не обязаны быть правыми идеалами, и для них, в общем, не справедлив аналог леммы 1.1. Рассмотрим произвольный правый идеал R полукольца $S[x, \varphi]$, и $R_0, R_1, \ldots$ — его коэффициентные множества. Непосредственно проверяется, что R_i удовлетворяют условиям 1) и 2), заложенным в следующем определении.

Определение 1.6. Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Возрастающую цепь $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \ldots$ подмножеств полукольца S назовем *правой φ-цепью* полукольца S, если:

1) R_0 — правый идеал полукольца S, и R_i — аддитивные подмоноиды в S;

2) $R_i\varphi^i(S) \subseteq R_i$ для всех целых неотрицательных i.

Пусть $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \ldots$ — правая φ-цепь произвольного полукольца S. Как и в левостороннем случае, R_i являются коэффициентными множествами правого m-идеала

$$R^* = \{\sum a_i x^i \in S[x, \varphi] : a_i \in R_i, \text{ суммы конечные}\}.$$

Для правых m-идеалов справедливы утверждения, симметричные указанным в предложении 1.1. Доказательства принципиально не отличаются, поэтому в дальнейшем будем пользоваться этими результатами без дополнительных ссылок.

Заметим, что второе условие в определении 1.6 можно усилить до $R_i\varphi^i(S) = R_i$, поскольку φ сохраняет единицу. Далее, любая счетная возрастающая цепь правых идеалов R_i полукольца S, удовлетворяющая условию 2), является правой φ-цепью. Однако в

φ-цепи коэффициентных множеств произвольного правого идеала только R_0 гарантировано является правым идеалом.

Пример 1.4. Пусть $S = \langle \mathbb{R}^+_\infty, \vee, \wedge \rangle$ — линейно упорядоченное множество неотрицательных действительных чисел; добавленная «бесконечность» является единицей этого полукольца. Пусть $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ и $\varphi(a) = a + 1$ для всех $a \notin \{0, \infty\}$, тогда φ является инъективным эндоморфизмом полукольца S. Положим $R_0 = \{0\}$, $R_i = [1/2^i; 1] \cup \{0\}$ для всех натуральных i. Получаем строго возрастающую правую φ-цепь $R_0 \subset R_1 \subset \ldots$ коммутативного полукольца S. Ни один из элементов правой φ-цепи, кроме R_0, не является ни правым, ни левым идеалом. Отсюда также вытекает, что эти множества не образуют левую φ-цепь.

Пример 1.2 показывает, что и левая φ-цепь не обязана быть правой φ-цепью.

2. Существование главного m-идеала, порождаемого неодночленом

Очевидно, что нулевой и несобственный идеалы являются главными левыми m-идеалами полукольца $S[x, \varphi]$. Возникает вопрос: какие еще главные левые m-идеалы могут существовать в $S[x, \varphi]$? Легко проверяется, что левыми m-идеалами являются главные левые идеалы, порожденные одночленами x^k. Существуют ли главные левые m-идеалы, порожденные неодночленами, выясняется ниже.

Сначала было проведено исследование главных m-идеалов полукольца обычных (некосых) многочленов. Были получены следующие результаты:

Предложение 2.1. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу*[1]*, все левые аннуляторные идеалы из S являются идеалами, d — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$, $R = S[x]$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если для любого $i = 0, \dots, k-1$ выполнено условие $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(Sf_0 + \dots + Sf_i)$, то $R(f_0 + \dots + f_k x^k)$ — главный левый m-идеал полукольца R, коэффициентные левые идеалы которого образуют цепь $Sf_0 \subseteq Sf_0 + Sf_1 \subseteq \dots \subseteq Sf_0 + \dots + Sf_k = Sf_0 + \dots + Sf_k = \dots$;*

2) *если L — главный левый m-идеал в R, то найдется такой многочлен $f = f_0 + \dots + f_k x^k$, что $f_i \in BS$, $L = Rf$ и $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(Sf_0 + \dots + Sf_i)$ для всех $i = 0, \dots, k-1$;*

3) *каждый конечно порожденный левый m-идеал полукольца $R = S[x]$ является главным левым m-идеалом.*

Оставим это утверждение без доказательства, поскольку далее в параграфе рассматриваются косые варианты этого предложения (теорема 2.1 и предложение 2.2). Отметим, что прямое доказательство предложения 2.1 имеется в [52, предложение 3 и лемма 5].

Определение 2.1. *Идемпотентом* полукольца S называется элемент $e \in S$ такой, что $e = e^2$. Элемент $a \in S$ называется *центральным*, если $as = sa$ для любого $s \in S$. Элемент $e \in S$ называется *дополняемым*, если существует такой $e^{\perp} \in S$, что $e + e^{\perp} = 1$, $ee^{\perp} = e^{\perp}e = 0$.

Легко проверить, если e — дополняемый элемент, то он является идемпотентом, и его дополнение определяется однозначно и также

[1]риккартово слева левое полукольцо Безу определяется ниже в параграфе

является дополняемым идемпотентом. Действительно, пусть f — дополнение к e. Тогда из равенств $e+f=1$ и $ef=fe=0$ следует $e^2=e$ и $f^2=f$, значит, e,f являются идемпотентами. Предположим, что g также является дополнением к e. Из равенств $e+g=1$ и $fe=0$ следует $fg=f$. Аналогично, из $e+f=1$ и $eg=0$ получаем $fg=g$. Следовательно, $f=g$. Это означает, что дополнение определяется однозначно.

Обозначим через BS множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S. Со сложением $e\oplus f=ef^{\perp}+e^{\perp}f$ и обычным полукольцевым умножением получаем булево кольцо $\langle BS,\oplus,\cdot\rangle$.

Множество BS также можно представить как булеву решетку $\langle BS,\vee,\wedge\rangle$, если точную нижнюю грань $\wedge$ элементов взять совпадающей с полукольцевым умножением, а точную верхнюю грань определить следующим образом: $e\vee f=e+e^{\perp}f=ef^{\perp}+f$.

Лемма 2.1. *В полукольце S справедливы утверждения.*

1) *Если элемент из S представим в виде произведения центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля, то идемпотент определяется однозначно.*

2) *Пусть $a,g_0,g_1\in S$ и $a=ud, g_0=u_0d_0, g_1=u_1d_1$ для $u,u_i\in BS$ и неделителей нуля d,d_i. Тогда $Sg_0+Sg_1=Sa$ влечет $u=u_0\vee u_1$; в частности, при $g_1=0$ получаем, что из $Sg_0=Sa$ следует $u_0=u$.*

3) *Если $a,b,c\in BS$ и $a\vee b=c$, то $Sa+Sb=Sc$.*

Доказательство. 1) Пусть $ed=ft$ для $e,f\in BS$ и неделителей нуля d,t. Тогда $0=e^{\perp}ft$, откуда получаем $0=e^{\perp}f=e^{\perp}\wedge f$. Далее $e=e\vee 0=e\vee(e^{\perp}\wedge f)=1\wedge(e\vee f)=e\vee f$, следовательно $f\leq e$. Симметричным образом получаем $e\leq f$.

2) Пусть $a = s_0g_0 + s_1g_1$ для некоторых $s_i \in S$. Тогда

$$u(u_0 \vee u_1)d = s_0u_0(u_0 \vee u_1)d_0 + s_1u_1(u_0 \vee u_1)d_1 = \\ = s_0u_0d_0 + s_1u_1d_1 = s_0g_0 + s_1g_1 = ud.$$

Отсюда следует $u(u_0 \vee u_1) = u$, поэтому $u \leq u_0 \vee u_1$. Далее, $g_0 = ta$ для некоторого $t \in S$, откуда

$$uu_0d_0 = ug_0 = uta = utud = ta = u_0d_0.$$

Получаем $u_0 \leq u$. Аналогично, $u_1 \leq u$, следовательно, $u = u_0 \vee u_1$. По индукции утверждение справедливо для любого конечного числа элементов $g_0, \ldots, g_i \in S$.

3) Из условия следует $a + a^{\perp}b = c$, поэтому $Sc \subseteq Sa + Sb$. Из $a, b \leq c$ получаем $ac = a, bc = b$, поэтому $sa+tb = (sa+tb)c$, откуда $Sa + Sb \subseteq Sc$. □

Определение 2.2. Полукольцо S называется *коммутативным в нуле*, если $ab = 0$ влечет $ba = 0$ для любых $a, b \in S$.

Определение 2.3. Эндоморфизм φ полукольца S называется *жестким*, если $a\varphi(a) = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in S$. Полукольцо S назовем *φ-жестким*, если существует жесткий эндоморфизм φ полукольца S.

Определение 2.4. Полукольцо S называется *полукольцом без нильпотентных элементов*, если для любых $a \in S$ и $n \in \mathbb{N}$ справедлива импликация $a^n = 0 \Rightarrow a = 0$.

Известно, что S является полукольцом без нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда $a^2 \neq 0$ для любого ненулевого $a \in S$.

Через $\mathrm{ann}_r(B) = \{a \in S : Ba = 0\}$ обозначим *правый аннулятор подмножества* $B \subseteq S$; в случае $B = \{b\}$ правый аннулятор элемента b обозначаем через $\mathrm{ann}_r(b)$. Симметричным образом определяется *левый аннулятор* $\mathrm{ann}_l(B)$. Если необходимо указать, в каком полукольце рассматривается аннулятор, то будем использовать обозначение вида $\mathrm{ann}_{l,S}(B)$.

Лемма 2.2. *Пусть φ — жесткий эндоморфизм полукольца S. Тогда справедливы утверждения:*

1) *S — полукольцо без нильпотентных элементов и коммутативно в нуле; кроме того, если $a, b \in S$ и $ab = 0$, то $aSb = 0$;*
2) *каждый дополняемый идемпотент из S централен;*
3) *для $a, b \in S$ равенства $ab = 0$ и $a\varphi(b) = 0$ равносильны;*
4) *$\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$;*

Доказательство. 1) По [13, лемма 1] S — полукольцо без нильпотентных элементов и $ab = 0$ влечет $aSb = 0$ для $a, b \in S$. Пусть $ab = 0$, тогда $(ba)^2 = 0$, поэтому $ba = 0$, и S коммутативно в нуле.

2) По пункту 1) $ese^{\perp} = 0$ для дополняемого идемпотента $e \in S$ и произвольного $s \in S$. Тогда $es = ese + ese^{\perp} = ese$. Симметрично показывается $se = ese$.

3) Пусть $ab = 0$. Тогда $\varphi(a)\varphi(b) = 0$, что влечет $\varphi(b)\varphi(a) = 0$ в силу того, что S коммутативно в нуле. Поэтому $a\varphi(b)\varphi(a\varphi(b)) = a\varphi(b)\varphi(a)\varphi^2(b) = 0$, откуда $a\varphi(b) = 0$ в силу жесткости эндоморфизма φ. Обратно, пусть $a\varphi(b) = 0$. Тогда по доказанному в пункте 1) имеем $ab\varphi(ab) = ab\varphi(a)\varphi(b) = 0$, откуда $ab = 0$.

4) Стандартно проверяется, что для любого $e \in BS$ $\varphi(e)$ — дополняемый идемпотент, а по пункту 2) $\varphi(e)$ централен. Следовательно, $\varphi(BS) \subseteq BS$. По доказанному в пункте 3) получаем, что для любых $d, e \in BS$ равенство $de = 0$ равносильно $d\varphi(e) = 0$. Поэтому $\mathrm{ann}_{l,BS}(e) = \mathrm{ann}_{l,BS}(\varphi(e))$ для любого $e \in BS$. В [2, теорема

1] показано, что совпадение аннуляторов элементов булева кольца влечет равенство этих элементов. Поэтому $e = \varphi(e)$. $\square$

Определение 2.5. Полукольцо S называется *риккартовым справа (слева)*, если для любого $a \in S$ найдется такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $\mathrm{ann}_r(a) = eS$ ($\mathrm{ann}_l(a) = Se$). Риккартово справа и слева полукольцо называется *риккартовым.*

Лемма 2.3. *Пусть S — коммутативное в нуле риккартово слева полукольцо. Тогда каждый элемент из S является произведением центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля.*

Доказательство. Известно, что в коммутативном в нуле полукольце каждый дополняемый идемпотент централен. Действительно, для дополняемого идемпотента $e \in S$ и произвольного $s \in S$ из $ee^{\perp}s = 0$ следует $e^{\perp}se = 0$. Тогда $se = ese + e^{\perp}se = ese$. Симметрично показывается $es = ese$.

Пусть a — ненулевой элемент из S, тогда $\mathrm{ann}_l(a) = Se$ для некоторого $e \in BS$. Отсюда получаем $ae = 0$ и $ae^{\perp} = a$. Положим $d = ae^{\perp} + e$. Имеем $ed = e$ и $e^{\perp}d = e^{\perp}(ae^{\perp} + e) = e^{\perp}a = a$, откуда следует, что $d \neq 0$. Осталось показать, что d — неделитель нуля. Пусть $0 = bd = b(ae^{\perp} + e) = bae^{\perp}$, поскольку $be = bed = 0$. Тогда $ba = ba(e + e^{\perp}) = bae = 0$. Получаем $b \in \mathrm{ann}_l(a) = Se$ и $b = be = 0$. $\square$

Определение 2.6. Полукольцо называется *левым полукольцом Безу*, если каждый его конечно порожденный левый идеал является главным левым идеалом.

Теорема 2.1. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S,*

$\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$, $R = S[x, \varphi]$.

1) Если для любого $i = 0, \ldots, k-1$ выполнено

$$f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i),$$

то $R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ — главный левый m-идеал полукольца R.

2) Если L — главный левый m-идеал в R, то найдется такой многочлен $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, что $L = Rf$ и

$$f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i)$$

для всех $i = 0, \ldots, k-1$.

Доказательство. 1) По лемме 2.3 $f_i = u_i d_i$ для $u_i \in BS$ и неделителя нуля $d_i \in S$. Непосредственно проверяется, что в силу леммы 2.2 множества

$$\begin{aligned}
L_0 &= Sf_0, \\
L_1 &= S\varphi(f_0) + Sf_1 = Su_0 + Sf_1, \\
&\ldots \\
L_k &= S\varphi^k(f_0) + S\varphi^{k-1}(f_1) + \ldots + Sf_k = Su_0 + \ldots + Su_{k-1} + Sf_k, \\
L_{k+1} &= S\varphi^{k+1}(f_0) + S\varphi^k(f_1) + \ldots + S\varphi(f_k) = Su_0 + \ldots + Su_k
\end{aligned}$$

являются коэффициентными левыми идеалами левого идеала Rf для многочлена $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$. Поскольку

$$L_{k+j} = S\varphi^{k+j}(f_0) + S\varphi^{k+j-1}(f_1) + \ldots + S\varphi^j(f_k) = Su_0 + \ldots + Su_k,$$

то $L_{k+j} = L_{k+1}$ для любого $j \geq 1$.

Полукольцо S является левым полукольцом Безу, поэтому $L_i = Sa_i$ для некоторых $a_i \in S$. Нам надо показать $Sa_i x^i \subseteq Rf$. Проведем индукцию по i для $i \leq k-1$.

Получаем такую цепь: $\varphi^k(Sa_0) \subseteq \varphi^{k-1}(Sa_1) \subseteq \ldots \subseteq Sa_k$. Полукольцо S является φ-жестким, поэтому из леммы 2.2, пункт 3) следует $\mathrm{ann}_l(B) = \mathrm{ann}_l(\varphi(B))$ для любого подмножества $B \subseteq S$, а поскольку φ-жесткое полукольцо является полукольцом без нильпотентных элементов (лемма 2.2, пункт 1)), то $\mathrm{ann}_l(a) = \mathrm{ann}_l(Sa)$ для любого $a \in S$. Поэтому $\mathrm{ann}_l(a_k) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_{k-1}) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{ann}_l(a_0)$. Полукольцо S — риккартово слева, поэтому $\mathrm{ann}_l(a_i) = Se_i$ для подходящих $e_i \in BS$. Для любого $i \geq 1$ выполняется $f_i \in \mathrm{ann}_l(a_{i-1}) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_0) = Se_0$. Следовательно, $f_i e_0^{\perp} = 0$ для всех $i \geq 1$. Кроме того, $f_0 e_0 = 0$, поэтому $f_0 e_0^{\perp} = f_0$. Получаем $e_0^{\perp}(f_0 + \ldots + f_k x^k) = f_0 \in Rf$, и доказано включение $Sa_0 \subseteq Rf$.

Пусть $Sa_j x^j \subseteq Rf$ для всех $j = 0, \ldots, i$ — индуктивное предположение. Из $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(a_i) = Se_i$ получаем $f_{i+1} = f_{i+1}e_i$, откуда $f_{i+1}e_i^{\perp} = 0$. Для любого $j = 0, \ldots, i$ справедливо $\varphi^{i-j}(f_j) \in Sa_i$, т. е. $\varphi^{i-j}(f_j) = s_j a_i$ для некоторого $s_j \in S$. Из $e_i a_i = 0$ следует $e_i \varphi^{i-j}(f_j) = 0$, поэтому $e_i f_j = 0$ (по лемме 2.2, пункт 3)). Далее, для любого $j = i+2, \ldots, k$ из $f_j \in \mathrm{ann}_l(a_{j-1}) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_{i+1}) = Se_{i+1}$ следует $f_j = t_j e_{i+1}$, откуда $e_{i+1}^{\perp} f_j = 0$. Получаем:

$$
\begin{aligned}
e_i e_{i+1}^{\perp} f &= 0 + \ldots + 0x^i + e_i e_{i+1}^{\perp} f_{i+1} x^{i+1} + 0x^{i+2} + \ldots + 0x^k = \\
&= e_{i+1}^{\perp} f_{i+1} x^{i+1} \in Rf.
\end{aligned}
$$

Воспользуемся тем, что $a_{i+1} = s_0 u_0 + \ldots + s_i u_i + s_{i+1} f_{i+1}$ для некоторых $s_j \in S$. Пусть $a_j = v_j t_j$ для некоторых $v_j \in BS$ и неделителей нуля t_j, тогда по лемме 2.1 $v_j = u_0 \vee \ldots \vee u_j$. Из этого равенства следует $u_j v_j = u_j(u_0 \vee \ldots \vee u_j) = u_j$, а поскольку $\varphi(v_j) = v_j$, то $u_j = u_j \varphi^{i+1-j}(v_j)$ для любого $0 \leq j \leq i$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&s_j u_j \varphi^{i+1-j}(t_j)^{-1} x^{i+1-j} \cdot a_j x^j = s_j u_j \varphi^{i+1-j}(t_j)^{-1} \varphi^{i+1-j}(a_j) x^{i+1} = \\
&= s_j u_j \varphi^{i+1-j}(t_j)^{-1} \varphi^{i+1-j}(t_j) \varphi^{i+1-j}(v_j) x^{i+1} = \\
&= s_j u_j \varphi^{i+1-j}(v_j) x^{i+1} = s_j u_j x^{i+1}.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}e_{i+1}^{\perp}a_{i+1}x^{i+1} &= e_{i+1}^{\perp}(s_0u_0 + \ldots + s_iu_i + s_{i+1}f_{i+1})x^{i+1} = \\ &= e_{i+1}^{\perp}(s_0u_0\varphi^{i+1}(t_0)^{-1}x^{i+1}\cdot a_0 + s_1u_1\varphi^{i}(t_1)^{-1}x^{i}\cdot a_1x + \ldots \\ &\ldots + s_iu_i\varphi(t_i)^{-1}x\cdot a_ix^i + s_{i+1}f_{i+1}x^{i+1}).\end{aligned}$$

Заметим, что многочлены $a_0, a_1x, \ldots, a_ix^i$ лежат в Rf по индуктивному предположению, а $e_{i+1}^{\perp}s_{i+1}f_{i+1}x^{i+1} \in Rf$ по доказанному выше и в силу центральности идемпотента $e_{i+1}^{\perp}$. Поэтому $e_{i+1}^{\perp}a_{i+1}x^{i+1} \in Rf$. Поскольку $\mathrm{ann}_l(a_{i+1}) = Se_{i+1}$, то $a_{i+1} = e_{i+1}^{\perp}a_{i+1}$. Следовательно, $a_{i+1}x^{i+1} \in Rf$, и $Sa_{i+1}x^{i+1} \subseteq Rf$.

Осталось показать, что $Sa_{k+1}x^{k+j} \in Rf$ для $j \geq 1$. Пусть $a_{k+1} = t_0u_0 + \ldots + t_{k-1}u_{k-1} + t_ku_k = t + t_ku_k$. Поскольку $t \in L_k$, то $tx^k \in Rf$. Пусть $t = ud$ для $u \in BS$ и неделителя нуля d, тогда $t\varphi^j(d)^{-1}x^j \cdot tx^k = ud\varphi^j(d)^{-1}\varphi^j(u)\varphi^j(d)x^{k+j} = udux^{k+j} = tx^{k+j}$. Из $tx^k \in Rf$ получаем $tx^{k+j} \in Rf$. Аналогичными рассуждениями из $a_kx^k \in Rf$ следует $t_ku_k\varphi^j(d_k)^{-1}x^j \cdot a_kx^k = t_ku_kx^{k+j} \in Rf$. Наконец, $a_{k+1}x^{k+j} = (t + t_ku_k)x^{k+j} = tx^{k+j} + t_ku_kx^{k+j} \in Rf$.

2) Пусть $L = R(g_0 + \ldots + g_kx^k)$ — главный левый m-идеал, $g_i = v_it_i$, $v_i \in BS$, t_i — неделитель нуля по лемме 2.3. Рассуждая как и в пункте 1) и используя лемму 2.1, получаем, что $Sa_0 = Sg_0$, $Sa_i = S(v_0 \vee \ldots \vee v_{i-1}) + Sg_i$ для $i \leq k$ и $Sa_{k+1} = S(v_0 \vee \ldots \vee v_k)$ — коэффициентные левые идеалы левого m-идеала L. Каждый элемент a_i имеет вид $a_i = u_id_i$ для однозначно определенного $u_i \in BS$ и неделителя нуля $d_i \in S$. Поскольку $Sa_i \subseteq Sa_{i+1}$, то $u_id_i = a_i = sa_{i+1} = su_{i+1}d_{i+1}$ для некоторого $s \in S$. Отсюда следует $\varphi(u_i)\varphi(d_i) = \varphi(s)\varphi(u_{i+1})\varphi(d_{i+1})$, и поэтому $u_i = u_{i+1}\varphi(s)\varphi(d_{i+1})\varphi(d_i)^{-1}$. Умножив последнее равенство на u_{i+1}, получаем $u_{i+1}u_i = u_i$, т. е. $u_i \leq u_{i+1}$. Таким образом, идемпотенты образуют цепь $u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_k$. Положим $e_0 = u_0$ и для любого

$i \geq 1$ пусть $e_i \in BS$ — относительное дополнение идемпотента u_{i-1} в интервале $[0, u_i] \subseteq BS$ (т. е. такой элемент e_i, что $e_i \wedge u_{i-1} = 0$ и $e_i \vee u_{i-1} = u_i$). Уточним, что e_i существует, поскольку любая булева решетка является решеткой с относительными дополнениями. Пусть $f_i = e_i t_i$. Наша задача — показать, что $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$ является искомым многочленом. Из условия $e_1 \wedge u_0 = 0$ следует $f_1 \in \mathrm{ann}_l(Sf_0)$. Пусть $f_i \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^{i-1}(f_0) + \ldots + S\varphi(f_{i-2}) + Sf_{i-1})$, тогда из $e_{i+1} \wedge u_i = 0$ и $u_i = e_0 \vee \ldots \vee e_i$ получаем $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(e_0 \vee \ldots \vee e_i) = \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + \ldots + S\varphi(f_{i-1}) + Se_i) \subseteq \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + \ldots + S\varphi(f_{i-1}) + Sf_i)$. Таким образом, выполнены условия пункта 1), поэтому $K = R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ — главный левый m-идеал. Покажем, что его коэффициентные левые идеалы K_i совпадают с соответствующими коэффициентными левыми идеалами Sa_i. Имеем, $K_i = S\varphi^i(f_0) + \ldots + S\varphi(f_{i-1}) + Sf_i = Su_{i-1} + Se_i t_i$. Поскольку $Su_{i-1} + Sg_i = Sa_i$, то $su_{i-1} + tg_i = u_i d_i$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $\varphi(s)u_{i-1} + \varphi(tt_i)v_i = \varphi(d_i)u_i$. С другой стороны, $u_i = u_{i-1} \vee e_i = e_i + e_i^{\perp} u_{i-1}$. Воспользовавшись тем, что $\varphi(d_i)$ — обратимый элемент, для подходящих $a, b \in S$ получаем $au_{i-1} + bv_i = u_i = e_i + e_i^{\perp} u_{i-1}$. Умножив равенство на e_i, получаем $bv_i e_i = e_i$, откуда следует $e_i \leq v_i$. Следовательно, $K_i = Su_{i-1} + Sf_i \subseteq Su_{i-1} + Sg_i = Sa_i$. Вновь воспользуемся тем, что $su_{i-1} + tg_i = a_i$. Тогда $a_i = a_i u_i = (su_{i-1} + tg_i)u_i = su_{i-1}u_i + tt_i v_i(e_i^{\perp} u_{i-1} + e_i) = su_{i-1} + tt_i v_i e_i^{\perp} u_{i-1} + tv_i e_i t_i = au_{i-1} + bf_i$ для $a, b \in S$. Показали, что $Sa_0 = K_0, \ldots, Sa_k = K_k$. Кроме того, $Sa_{k+r} = Sa_{k+1} = S(v_0 \vee \ldots \vee v_k) = S(u_0 \vee \ldots \vee u_k) = K_{k+1} = K_{k+r}$ для любого $r \in \mathbb{N}$, поэтому из совпадения соответствующих коэффициентных левых идеалов следует $L = R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$. $\square$

Замечание 2.1. В доказательстве пункта 2 предыдущей теоремы рассматривалась конструкция, позволяющая «подправить» образующий многочлен главного левого m-идеала. Сейчас мы покажем, как можно найти такой образующий без опоры на какой-либо имеющийся многочлен, но зная коэффициентные левые идеалы.

Пусть L — главный левый m-идеал полукольца $R = S[x, \varphi]$, удовлетворяющего условиям теоремы 2.1. Пусть L_i — его коэффициентные левые идеалы. Отметим, что для произвольного полукольца косых многочленов множество коэффициентных левых идеалов, задающих левый m-идеал, не обязано быть возрастающей цепью, но необходимо выполняется включение $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$ (лемма 1.1). В нашем случае представимость любого элемента полукольца в виде ed, $e = \varphi(e) \in BS$, и обратимость $\varphi(d)$ для неделителя нуля гарантирует также включение $L_i \subseteq L_{i+1}$. Поскольку S — левое полукольцо Безу, то L_i являются главными левыми идеалами полукольца S. Пусть $L_i = Sa_i$, $a_i = u_i d_i$ для $u_i \in BS$ и неделителя нуля $d_i \in S$ и $Sa_0 \subseteq Sa_1 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k \subsetneq Sa_{k+1} = \ldots$ и $\varphi(Sa_i) \subseteq Sa_{i+1}$.

Возможны следующие два варианта.

i) Идемпотенты в разложениях a_k и a_{k+1} совпадают. Тогда $a_k = u_k d_k$, где d_k — неделитель нуля, не являющийся обратимым элементом, так как в противном случае получаем $Sa_k = Su_k = Sa_{k+1}$, противоречие. Поскольку $\varphi(Sa_{k+1}) \subseteq Sa_{k+2}$, то $Su_k \subseteq Sa_{k+2} = Su_k d_{k+2} \subseteq Su_k$, поэтому все левые идеалы, начиная с Sa_{k+1}, равны Su_k. Для цепи $u_0 \leq \ldots \leq u_k = u_{k+1}$ выбираем идемпотенты $e_0, \ldots, e_k, e_{k+1}$ как относительные дополнения на каждом шаге. Заметим, что в этом случае $e_{k+1} = 0$. Положим $f_0 = a_0 = e_0 d_0$. В теореме 2.1 f_i определялся как $f_i = e_i t_i$, где t_i заимствовался у первоначального многочлена g. Сейчас нам g не известен, поэтому из $u_1 = e_0 \vee e_1 = e_0 + e_0^{\perp} e_1 = e_0 + e_1$ имеем $a_1 = e_0 d_1 + e_1 d_1$, и можем положить $f_1 = e_1 d_1$. Далее, пользуясь разложением в прямую сумму $Sa_i = Se_0 \oplus \ldots \oplus Se_{i-1} \oplus Se_i d_i$, определяем $f_i = e_i d_i$. Получаем $L = R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ и $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(Sa_i)$. Действительно, это следует из совпадения коэффициентных левых идеалов L'_i левого идеала Rf с соответствующими L_i. В силу определения $L'_0 = Sa_0$. Поскольку $\varphi(Sa_j) \subseteq Sa_{j+1}$, то $Se_j \subseteq Sa_i$ для любого $j < i$. Понятно, что $Sf_i \subseteq Sa_i$. Поэтому $L'_i = Se_1 + \ldots + Se_{i-1} + Sf_i \subseteq Sa_i$. Обратное включение очевидно. Таким образом, для $i \leq k$ выполняется $L'_i = Sa_i$. Наконец, $L'_{k+1} = Se_0 + \ldots + Se_k = S(e_0 \vee \ldots \vee e_k) = Su_k = Sa_{k+1}$.

ii) Идемпотенты в разложениях a_k и a_{k+1} различны. Тогда $a_k = u_k d_k$, $a_{k+1} = u_{k+1} d_{k+1}$ и d_k, d_{k+1} — неделители нуля, $u_k < u_{k+1}$. Заметим, что $Su_{k+1} = Sa_{k+1} = Sa_{k+2} = \ldots$. Определение коэффициентов $f_0, \ldots, f_k$ такое же, как и в предыдущем случае. Положим $f_{k+1} = u_{k+1}$. Многочлен $f = f_0 + \ldots + f_{k+1} x^{k+1}$ порождает левый m-идеал Rf с коэффициентными левыми идеалами Sa_i, т. е. $L = Rf$.

Замечание 2.2. Конструкция, применяемая в теореме 2.1, позволяет рассмотреть ее для произвольного полукольца S. Пусть φ — такой эндоморфизм полукольца S, что $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, и $c_0 \leq c_1 \leq \ldots \leq c_k$ — произвольная цепь идемпотентов из BS. Покажем, что левый m-идеал L, задаваемый цепью $Sc_0 \subseteq Sc_1 \subseteq \ldots \subseteq Sc_k = Sc_k \ldots$, является главным левым m-идеалом полукольца $R = S[x, \varphi]$. Положим $f_0 = c_0$ и f_{i+1} — относительное дополнение идемпотента c_i в интервале $[0, c_{i+1}]$ булевой решетки BS. Рассмотрим $f = f_0 + \ldots + f_k x^k \in R$. Для любых $j < i \leq k$ выполняется $f_j \leq c_j \leq c_{i-1}$, поэтому $f_j \wedge f_i \leq c_{i-1} \wedge f_i = 0$. Получаем, что идемпотенты f_i, $i = 0, \ldots, k$ образуют ортогональную систему. Вспомним, что операция $\wedge$ в BS совпадает с полукольцевым умножением в S. Поэтому $f_i f = f_i x^i \in Rf$ для любого $i \geq 0$, и Rf — главный левый m-идеал полукольца R. Пусть L_i — его произвольный коэффициентный левый идеал. Несложно понять, что $L_i x^i$ состоит из одночленов вида $s_0 f_0 x^i, \ldots, s_i f_i x^i$ и их конечных сумм. По лемме 2.1 $L_i = Sf_0 + \ldots + Sf_i = S(f_0 \vee \ldots \vee f_i) = Sc_i$. Отсюда следует, что $L = Rf$.

Проведенные в замечании 2.1 рассуждения позволяют получить следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$. Тогда любая конечная цепь $Sa_0 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k \subseteq Sa_{k+1}$ главных левых идеалов, удовлетворяющая условиям $\varphi(Sa_i) \subseteq Sa_{i+1}$ для всех $i \leq k$ и $\varphi(Sa_{k+1}) \subseteq Sa_{k+1}$, задает главный левый m-идеал L полукольца $R = S[x, \varphi]$, коэффициентные левые идеалы L_i которого совпадают с Sa_i.*

Предложение 2.2. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$. Тогда каждый конечно порожденный левый m-идеал полукольца $R = S[x, \varphi]$ является главным левым m-идеалом.*

Доказательство. Пусть $Rf + Rg$ — сумма главных левых m-идеалов, $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, $g = g_0 + \ldots + g_k x^k$, где $k = \max\{\deg f, \deg g\}$. По теореме 2.1 коэффициентные левые идеалы для Rf и Rg образуют цепи $Sa_0 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k \subseteq Sa_{k+1} = \ldots$ и $Sb_0 \subseteq \ldots \subseteq Sb_k \subseteq Sb_{k+1} = \ldots$ соответственно. Заметим, что выполняются условия $\varphi(Sa_i) \subseteq Sa_{i+1}$; аналогично для Sb_i. Левый идеал $Rf + Rg$ является левым m-идеалом, коэффициентные левые идеалы которого образуют цепь $Sa_0 + Sb_0 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k + Sb_k \subseteq$

$Sa_{k+1} + Sb_{k+1} = \ldots$. Коэффициентные левые идеалы удовлетворяют условиям теоремы 2.2, поэтому $Rf + Rg$ — главный левый m-идеал полукольца R. □

3. Аналог теоремы Гильберта о базисе для полуколец косых многочленов

В параграфе рассматриваются полукольца косых многочленов над полукольцами с делением и над нётеровыми полукольцами. С помощью m-идеалов для известных кольцевых результатов приводятся их аналоги для случая полуколец косых многочленов.

Определение 3.1. *Полукольцом с делением* называется полукольцо с 1, в котором каждый ненулевой элемент обратим; полукольцо с делением, не являющееся телом, называется *полутелом*, а коммутативное полутело — *полуполем*.

Пусть φ — эндоморфизм полукольца с делением F. Описание левых m-идеалов полукольца $F[x, \varphi]$ просто. Заметим, что любая левая φ-цепь полукольца F состоит из нулевых и несобственных идеалов; два крайних случая определяют нулевой m-идеал полукольца $F[x, \varphi]$ и m-идеал, совпадающий с $F[x, \varphi]$. Пусть сейчас $B_k = F$ — первый ненулевой идеал в левой φ-цепи $B_0, B_1, \ldots$. Поскольку эндоморфизм φ ненулевой, то $0 \neq \varphi(B_k) \subseteq B_{k+1}$, откуда $B_{k+1} = F$. По индукции получаем $B_n = F$ для любого $n \geq k$. Тогда левый m-идеал B^*, соответствующий левой φ-цепи $B_0, B_1, \ldots$, является главным левым идеалом, порожденным многочленом x^k.

Если φ — автоморфизм полукольца с делением F, то правые φ-цепи будут состоять из идеалов полукольца F, поэтому строение правых m-идеалов из $F[x, \varphi]$ будет таким же, как левых m-идеалов. Ситуация изменится, если φ автоморфизмом не является. Ниже в примере 3.3 рассмотрено полукольцо косых многочленов над полуполем $\langle \mathbb{Q}^+, \vee, \cdot \rangle$ с инъективным эндоморфизмом φ. Элементы построенных в примере правых φ-цепей (за исключением начального) не являются идеалами в $\mathbb{Q}^+$, и задаваемые этими φ-цепями правые m-идеалы в $\mathbb{Q}^+[x, \varphi]$ уже не будут главными. Более того, приведен пример правого m-идеала, даже не являющегося конечно порожденным.

Известно, что кольцо многочленов (а также левое кольцо косых многочленов с инъективным эндоморфизмом) над телом является кольцом главных левых идеалов (см., например, [23, предл. 15.1], [45, theorem 2.9]). Полукольцо косых многочленов над полутелом уже не является полукольцом главных левых идеалов. Однако, можно получить некоторую информацию о полукольце косых многочленов над полукольцом с делением в терминах m-идеалов.

Предложение 3.1. *Если F — полукольцо с делением, φ — эндоморфизм F, то $R = F[x, \varphi]$ — полукольцо без делителей нуля, каждый левый m-идеал которого является главным. Если φ — автоморфизм, то каждый правый m-идеал полукольца $R = F[x, \varphi]$ является главным.*

Доказательство. Пусть $f = f_i x^i + \ldots$, $g = g_j x^j + \ldots$ — такие ненулевые многочлены из R, что $fg = 0$, а f_i, g_j — их младшие (ненулевые) коэффициенты. Тогда $f_i \varphi^i(g_j) = 0$. Случай $i = 0$ влечет $f_i g_j = 0$, поэтому невозможен. Если $i \neq 0$, то $\varphi^i(g_j) = 0$, откуда $\varphi(a) = 0$ для некоторого $a \neq 0$. Тогда $\varphi(1) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = 0$ влечет, что φ — нулевой эндоморфизм. Вновь полученное противоречие доказывает, что R не содержит делителей нуля. Для произвольного ненулевого левого m-идеала B полукольца R соответствующая ему φ-цепь коэффициентных левых идеалов имеет вид $0, \ldots, 0, F, F, \ldots$ с первым идеалом F на k-ом месте. Поэтому $B = (x^k)$. Строение правых m-идеалов в случае автоморфизма φ рассмотрено перед предложением. $\square$

Пример 3.1. Рассмотрим $\mathbb{Q}^+[x]$ — полукольцо многочленов с неотрицательными рациональными коэффициентами. Пусть $A \subseteq \mathbb{Q}^+[x]$ — множество всех многочленов ненулевой степени. Очевидно, что A является идеалом полукольца $\mathbb{Q}^+[x]$. Предположим, что существует многочлен f, порождающий идеал A. Ясно, что $\deg f = 1$ и $f_0 = 0$, т. е. он имеет вид $f = ax, a \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$. При этом каждый многочлен вида $x + b$, где $b \in \mathbb{Q}^+$, должен делиться на f, что невозможно. Значит, A не является главным идеалом.

Пример 3.2. Покажем, что не каждый главный левый идеал полукольца многочленов, а значит, и полукольца косых многочленов, является левым m-идеалом. Пусть $\mathbb{Q}^+$ — полуполе неотрицательных рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения. Допустим, что главный идеал $B = (1 + x)$ полукольца $\mathbb{Q}^+[x]$ является m-идеалом. Тогда B содержит 1 и, следовательно, совпадает с $\mathbb{Q}^+[x]$. Но ясно, что не каждый многочлен кратен многочлену $1 + x$.

Определение 3.2. Полукольцо S называется *нётеровым слева*, если S не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых идеалов.

Характеризация нётеровых полуколец известна и совпадает с кольцевой.

Предложение 3.2. [40, prop. 6.16] *Для полукольца S равносильны условия:*

1) S *— нётерово слева;*

2) *любое множество левых идеалов из S имеет максимальный элемент;*

3) *каждый левый идеал из S конечно порожден.*

В монографии Дж. МакКоннелла и Дж. Робсона [45] приводится пример (example 2.11(ii)) правого (а значит, и левого) кольца $F[x, \varphi]$ косых многочленов над полем F с инъективным эндоморфизмом φ, не являющегося нётеровым справа (соотв., слева). При этом строится бесконечная строго возрастающая последовательность правых идеалов, которая является последовательностью правых m-идеалов. Класс полей не пересекается с классом полуполей, поэтому приведем аналогичный пример для полуполей. Покажем, что левое полукольцо косых многочленов над полуполем с инъективным эндоморфизмом не обязано удовлетворять условию максимальности для правых m-идеалов.

Пример 3.3. Пусть $S = \langle \mathbb{Q}^+, \vee, \cdot \rangle$ — аддитивно идемпотентное полуполе неотрицательных рациональных чисел ($\vee$ — операция взятия максимума двух чисел), φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, заданный $\varphi(a) = a^2$. Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&B_1 = \varphi(S),\\
&B_2 = \varphi(S) \cup 2\varphi^2(S),\\
&B_3 = \varphi(S) \cup 2\varphi^2(S) \cup 3\varphi^3(S),\\
&B_4 = \varphi(S) \cup 2\varphi^2(S) \cup 3\varphi^3(S) \cup 5\varphi^4(S),\\
&\qquad \dots\\
&B_k = \varphi(S) \cup p_1\varphi^2(S) \cup \ldots \cup p_{k-1}\varphi^k(S),
\end{aligned}
$$

где p_i — i-ое простое число. Заметим, что для любых натуральных $i \leq k$ выполняется равенство $\varphi^i(S)\varphi^k(S) = \varphi^i(S)$. Отсюда получаем $B_k\varphi^k(S) = B_k$. Очевидно, каждое B_k является аддитивным (относительно операции $\vee$) подмоноидом $\mathbb{Q}^+$, поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность

$$0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_{k-1} \subset B_k \subseteq B_k \subseteq \ldots$$

является правой φ-цепью. Обозначим через B_k^* соответствующий этой правой φ-цепи правый m-идеал. Тем самым получаем бесконечную строго возрастающую цепь $B_1^* \subset B_2^* \subset B_3^* \subset \ldots$ правых m-идеалов полукольца $R = S[x, \varphi]$. Покажем, что каждый B_k^* является конечно порожденным правым m-идеалом с образующими $x, 2x^2, 3x^3, 5x^4, \ldots, p_{k-1}x^k$. Действительно, каждый из одночленов $x = \varphi(1)x$ или $p_{i-1}x^i = p_{i-1}\varphi^i(1)x^i$ лежит в правом идеале B_k^*, поэтому $xR + 2x^2R + \ldots + p_{k-1}x^kR \subseteq B_k^*$. Обратно, пусть $f \in B_k^*$ и ax^i — произвольный одночлен многочлена f. Элемент a лежит в некотором B_i, поэтому $a \in \varphi(S)$, либо $a \in p_{j-1}\varphi^j(S)$ для некоторого $j \leq i$. В первом случае $a = \varphi(u)$ для некоторого $u \in S$ и тогда $ax^i = \varphi(u)x^i = x \cdot ux^{i-1}$. Во втором случае $a = p_{j-1}\varphi^j(v)$ для некоторого $v \in S$ и $ax^i = p_{j-1}\varphi^j(v)x^i = p_{j-1}x^j \cdot vx^{i-j}$. Получили, что каждый ax^i равен произведению некоторого образующего на подходящий многочлен из R. Следовательно, f равен конечной сумме произведений образующих на многочлены из R, поэтому $B_k^* \subseteq xR + 2x^2R + \ldots + p_{k-1}x^kR$. Несложно проверить, что никакая строго меньшая подсистема образующих не будет порождать B_k^*. Таким образом, B_1^* — главный правый m-идеал, порожденный x, а для всех $k > 1$ B_k^* являются конечно порожденными, но не главными правыми m-идеалами полукольца $S[x, \varphi]$.

Если же мы рассмотрим бесконечную строго возрастающую правую φ-цепь $0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_k \subset \ldots$, то правый m-

идеал B^*, соответствующий ей, не будет конечно порожденным. Действительно, пусть $f_1, \dots, f_k \in B^*$. Будем считать, что все коэффициенты этих многочленов являются несократимыми дробями, и пусть p_n — максимальное из простых чисел, присутствующих в разложении числителя или знаменателя коэффициентов многочленов $f_i, i = 1, \dots, k$. Тогда $p_{n+1}x^{n+2}$ лежит в B^*, но не лежит в правом идеале, порожденном многочленами $f_1, \dots, f_k$.

В известной теореме Гильберта о базисе утверждается, что кольцо многочленов над нётеровым слева кольцом нётерово слева. Для кольца косых многочленов $S[x,\varphi]$ в случае, если φ является автоморфизмом, из правой (или левой) нётеровости кольца S следует правая (соответственно, левая) нётеровость кольца $S[x,\varphi]$ [45, theorem 2.9]. В той же работе приведен пример (example 2.1(iii)) кольца косых многочленов $R[x,\varphi]$ над кольцом главных идеалов с инъективным эндоморфизмом φ, которое не является нётеровым ни слева, ни справа. Для полуколец теорема Гильберта о базисе не верна.

Пример 3.4. Рассмотрим множество B всех многочленов ненулевой степени в полукольце $\mathbb{N}[x]$. Очевидно, что B — идеал в $\mathbb{N}[x]$. Заметим, что многочлены $x, x+1, x+2, \dots$ обязаны лежать в любой системе образующих идеала B. Следовательно, идеал B не является конечно порожденным, хотя каждый идеал в полукольце $\mathbb{N}$ конечно порожден (см., например, [30], [4, предл. 8.1]).

Несложно показать, что полукольцо многочленов над нётеровым полукольцом S будет нётеровым в точности тогда, когда S — нётерово кольцо. Привлечение m-идеалов позволило получить следующий аналог теоремы Гильберта о базисе (для полукольца косых многочленов).

Теорема 3.1. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *S — нётерово слева (справа) полукольцо;*

2) *$S[x,\varphi]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых (правых) m-идеалов.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть S — нётерово слева полукольцо и $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ — возрастающая цепь левых m-идеалов полукольца $S[x,\varphi]$. Для левого m-идеала B_i будем обозначать через $B_{i0}, B_{i1}, \ldots$ его коэффициентные левые идеалы. Для каждого натурального i выполняется $\varphi(B_{ii}) \subseteq B_{i,i+1} \subseteq B_{i+1,i+1}$, откуда получаем возрастающую цепь $B_{11} \subseteq \varphi^{-1}(B_{22}) \subseteq \varphi^{-2}(B_{33}) \subseteq \ldots$ левых идеалов полукольца S. В силу левой нётеровости, начиная с некоторого $k \in \mathbb{N}$, имеем $\varphi^{-k+1}(B_{k,k}) = \varphi^{-k}(B_{k+1,k+1}) = \ldots$. Из того, что φ является автоморфизмом, следует $\varphi(B_{ss}) = B_{s+1,s+1}$ для всех $s \geq k$. Отсюда получаем, что $\varphi^j(B_{kk}) = B_{k+j,k+j}$ для любого натурального j. Для любого целого неотрицательного j, удовлетворяющего условию $0 \leq i \leq j$, выполняется

$$\varphi^j(B_{kk}) \subseteq B_{k,k+j} \subseteq B_{k+i,k+j} \subseteq B_{k+j,k+j} = \varphi^j(B_{kk}),$$

откуда $B_{k,k+j} = B_{k+i,k+j}$. Если $i > j$, то

$$\varphi^i(B_{kk}) \subseteq \varphi^{i-j}(B_{k,k+j}) \subseteq \varphi^{i-j}(B_{k+i,k+j}) \subseteq B_{k+i,k+i} = \varphi^i(B_{kk}),$$

откуда $\varphi^{i-j}(B_{k,k+j}) = \varphi^{i-j}(B_{k+i,k+j})$. Из этого равенства получаем $B_{k,k+j} = B_{k+i,k+j}$. Таким образом, у левых m-идеалов $B_k, B_{k+1}, \ldots$ коэффициентные множества при x^{k+j} совпадают для любого целого неотрицательного j. Пусть $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Рассмотрим возрастающую цепь $B_{1i} \subseteq B_{2i} \subseteq \ldots$ коэффициентных левых идеалов. Существует такое $n_i \in \mathbb{N}$, что $B_{n_i,i} = B_{ji}$ для каждого $j \geq n_i$.

Пусть $r = \max\{n_0, \ldots, n_{k-1}, k\}$. Тогда для любых $s, t \geq r$ выполняется $B_{si} = B_{ti}$ для всех $i = 0, 1, \ldots$. Получили, что у левых m-идеалов B_s и B_t совпадают соответствующие коэффициентные множества, откуда $B_s = B_t$.

Пусть S — нётерово справа полукольцо, и $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ — возрастающая цепь правых m-идеалов полукольца $S[x, \varphi]$. Для правого m-идеала C_i обозначим через $C_{i0}, C_{i1}, \ldots$ его коэффициентные множества. Заметим, что если φ — автоморфизм полукольца S, то коэффициентные множества каждого правого идеала полукольца $S[x, \varphi]$ являются правыми идеалами в S. Поэтому для возрастающей цепи $C_{11} \subseteq C_{22} \subseteq C_{33} \subseteq \ldots$ правых идеалов полукольца S в силу правой нётеровости, начиная с некоторого $k \in \mathbb{N}$, имеем $C_{ss} = C_{s+1,s+1}$ для всех $s \geq k$. Далее повторим рассуждения как и для левого случая, и получим требуемый результат.

2) $\Rightarrow$ 1) Возьмем произвольную возрастающую цепь $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$ левых (правых) идеалов полукольца S и покажем, что она стабилизируется с некоторого номера k. Каждому левому (правому) идеалу S_i этой цепи поставим в соответствие множество $S_i^* \subseteq S[x, \varphi]$, составленное из всех многочленов, свободный член которых лежит в S_i. Нетрудно заметить, что каждое из S_i^* является левым (правым) m-идеалом (другими словами, S_i^* определяется левой (правой) φ-цепью $S_i, S, S, \ldots$). Ясно, что $S_1^*, S_2^*, \ldots$ образуют возрастающую цепь. По условию эта цепь стабилизируется, т. е. начиная с некоторого $k \in \mathbb{N}$, имеем $S_s^* = S_k^*$ для всех $s \geq k$, откуда получим $S_s = S_k$ для всех $s \geq k$. $\square$

Глава 2

Характеризации и свойства полуколец косых многочленов

Глава посвящена описанию алгебраических свойств полуколец косых многочленов. Выясняется зависимость между свойствами полукольца косых многочленов и полукольца его коэффициентов. Получены некоторые характеризации полуколец косых многочленов.

4. Идемпотенты в полукольцах косых многочленов

В параграфе рассматриваются идемпотенты полуколец косых многочленов, выявляется связь между множествами центральных дополняемых идемпотентов полукольца косых многочленов и полукольца его коэффициентов.

Напомним, что *конгруэнцией* на полукольце S называется отношение эквивалентности $\sim$, стабильное относительно полукольцевых операций:

$$a \sim b, c \sim d \Rightarrow a + c \sim b + d, ac \sim bd.$$

Для многочленов

$$f = f_0 + f_1 x + \ldots + f_k x^k,$$
$$g = g_0 + g_1 x + \ldots + g_m x^m$$

полукольца $R = S[x, \varphi]$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ положим:

$$f \equiv_n g \Longleftrightarrow f_0 = g_0, \ldots, f_{n-1} = g_{n-1}.$$

В частности, $f \equiv_1 g \Longleftrightarrow f_0 = g_0$. Стандартно проверяется, что отношение $\equiv_n$ является конгруэнцией на R. Класс нуля этой конгруэнции есть идеал Rx^n. Очевиден также изоморфизм $S \cong R/\equiv_1$.

Предложение 4.1. *Пусть $h_n : R \to R/\equiv_n$ — естественный эпиморфизм. Тогда $h_n(Rx)$ — нильпотентный идеал в $h_n(R)$*

Доказательство. При $n = 1$ получаем, что $h_1(Rx)$ является нулевым идеалом полукольца $h_1(R) \cong S$. При $n > 1$ достаточно заметить, что произведение n многочленов с нулевыми свободными членами является многочленом, у которого первые n коэффициентов нулевые. □

Лемма 4.1. *Для любого $a \in S$ равенства $ax = xa$ и $a = \varphi(a)$ равносильны.*

Доказательство. Из $ax = xa$ следует $ax = \varphi(a)x$, следовательно, $a = \varphi(a)$. Если $a = \varphi(a)$, то $xa = \varphi(a)x = ax$. □

Определение 4.1. Полукольцо, в котором для любого его элемента a из $a + a = a$ следует $a = 0$, назовем *полукольцом без аддитивных идемпотентов.*

Определение 4.2. Полукольцо S называется *аддитивно сократимым*, если $a + c = b + c$ влечет $a = b$ для любых $a, b, c \in S$.

Пример 4.1. Класс полуколец без аддитивных идемпотентов строго содержит класс аддитивно сократимых полуколец. Действительно, если $a + a = a$, то аддитивная сократимость влечет $a = 0$. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных (без нуля) чисел, $S = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{(0,0)\}$. Положим $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b \vee d)$ и $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$, где $+$ является обычным сложением целых чисел, $\vee$ — взятие максимума. Тогда $(S, \oplus, \cdot)$ — полукольцо без аддитивных идемпотентов, не являющееся аддитивно сократимым.

Предложение 4.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, f — многочлен из $R = S[x,\varphi]$ со свободным членом f_0, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, h_n : R \to R/\equiv_n$ — естественный эпиморфизм.*

1) *Если $h_n(f)$ — ненулевой идемпотент в $h_n(R)$, то f_0 — ненулевой идемпотент в S.*

2) *Если $h_n(f)$ лежит в центре $h_n(R)$, то f_0 лежит в центре R и $f_0 = \varphi(f_0)$.*

Пусть дополнительно S является полукольцом без аддитивных идемпотентов. Тогда выполняются следующие условия.

3) *Если $h_n(f)$ — идемпотент в $h_n(R)$ и f_0 — центральный идемпотент в R, то $h_n(f) = h_n(f_0)$.*

4) *Если $h_n(f)$ — центральный идемпотент в $h_n(R)$, то f_0 — центральный идемпотент в R, $f_0 = \varphi(f_0)$ и $h_n(f) = h_n(f_0)$.*

5) *Если f — центральный идемпотент в R, то $f \in S$ и $f = \varphi(f)$.*

Доказательство. 1) По условию $f \neq 0$. Поскольку $h_n(f)$ является идемпотентом, то $f \equiv_n f^2$. Свободные члены у f и f^2 равны, поэтому $f_0 = f_0^2$ — идемпотент полукольца S. Предположим, что $f_0 = 0$. Тогда f можно представить в виде

$$f = (a + gx)x^k, \text{ где } a \in S \setminus \{0\}, g \in R, k \geq 1.$$

Получаем, что a — это коэффициент при x^k в многочлене f, а коэффициент при x^k в многочлене f^2 равен нулю. Поэтому $a = 0$, противоречие.

2) Пусть $h_n(f)$ лежит в центре $h_n(R)$. Тогда

$$h_n(fx) = h_n(f)h_n(x) = h_n(x)h_n(f) = h_n(xf).$$

Получаем, что коэффициенты при x многочленов fx и xf равны, следовательно, $f_0x = xf_0$. Таким же образом проверяется, что f_0 перестановочен с любым элементом из S. Следовательно, f_0 лежит в центре R. По лемме 4.1 $f_0 = \varphi(f_0)$.

3) Утверждение очевидно, если $h_n(f) = 0$. Предположим, что $h_n(f) = f_0 + f_1x + \ldots + f_{n-1}x^{n-1} \neq 0$. Заметим, что $f_0 \neq 0$ по пункту 1). Из $h_n(f) = (h_n(f))^2 = f_0^2 + (f_0f_1 + f_1\varphi(f_0))x + \ldots$ следует $f_1 = f_0f_1 + \varphi(f_0)f_1$. Учитывая, что $\varphi(f_0) = f_0$, получаем $f_0f_1 = f_0f_1 + f_0f_1$. В силу отсутствия аддитивных идемпотентов получим $f_0f_1 = 0$ и $f_1 = 0$. Индукцией покажем, что $f_k = 0$ для $1 \leq k \leq n-1$. С учетом индуктивного предположения имеем $f_k = f_0f_k + f_k\varphi(f_0) = f_0f_k + f_0f_k$, откуда $f_0f_k = 0$ и $f_k = 0$. Таким образом, $h_n(f) = f_0 = h_n(f_0)$.

4) По пункту 1) f_0 — идемпотент, по пункту 2) — центральный в R и $f_0 = \varphi(f_0)$. По пункту 3) $h_n(f) = h_n(f_0)$.

5) Пусть k такое натуральное число, что $\deg(f) < k$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $h_k : R \to R/\equiv_k$. Тогда $h_k(f) \equiv f$, поэтому f — центральный идемпотент в $h_k(R)$. По пункту 4) $f_0 \equiv h_k(f_0) = h_k(f) \equiv f$, откуда $f \in S$ и $f = f_0 = \varphi(f_0) = \varphi(f)$. □

Определение 4.3. Полукольцо называется *абелевым*, если каждый его идемпотент является центральным.

Предложение 4.3. *Если S — полукольцо без аддитивных идемпотентов, φ — инъективный эндоморфизм полукольца S и $R = S[x, \varphi]$, то равносильны условия:*

1) R — абелево полукольцо;

2) $R/\equiv_2$ — абелево полукольцо;

3) $R/\equiv_n$ — абелево полукольцо для всех $n \in \mathbb{N}$;

4) S — абелево полукольцо и $\varphi(e) = e$ для каждого идемпотента из S.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 4). Очевидно, что S — абелево полукольцо. Пусть e — идемпотент в S. Он является также идемпотентом в R, поэтому лежит в центре полукольца R, следовательно, по лемме 4.1 $\varphi(e) = e$.

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть f — идемпотент полукольца R. Тогда f_0 является идемпотентом абелева полукольца S, поэтому f_0 централен в S. Поскольку $f_0 = \varphi(f_0)$, то по лемме 4.1 $f_0 x = x f_0$, следовательно, f_0 — центральный идемпотент в R. Пусть $\deg(f) = n$, и $h_{n+1} : R \to R/\equiv_{n+1}$ — естественный гомоморфизм. Тогда $h_{n+1}(f) = h_{n+1}(f_0)$ по предложению 4.2 пункт 3), откуда $f = f_0$, и f — центральный идемпотент полукольца R.

2) $\Rightarrow$ 4). Пусть $h_2 : R \to R/\equiv_2$ — естественный эпиморфизм. Очевидно, что S является абелевым полукольцом. Пусть e — идемпотент из S. Тогда $h_2(e)$ — идемпотент абелева полукольца $h_2(R)$. Поэтому $h_2(xe) = h_2(x)h_2(e) = h_2(e)h_2(x) = h_2(ex)$. С другой стороны, $h_2(xe) = h_2(\varphi(e)x)$, откуда получаем $ex \equiv_2 \varphi(e)x$ и $e = \varphi(e)$.

4) $\Rightarrow$ 3). Пусть $h_n(f)$ — ненулевой идемпотент в $h_n(R)$. По предложению 4.2 пункт 1) f_0 является ненулевым идемпотентом в S, поэтому $\varphi(f_0) = f_0$. Тогда по лемме 4.1 $x f_0 = f_0 x$, и f_0 — центральный идемпотент в R. По предложению 4.2 пункт 3) $h_n(f) = h_n(f_0)$ — центральный идемпотент в $h_n(R)$.

3) $\Rightarrow$ 2). Очевидно. $\square$

Рассмотрим связь между множествами центральных дополняемых идемпотентов полуколец S, $R = S[x, \varphi]$ и $h_n(R)$.

Предложение 4.4. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, f — многочлен из $R = S[x, \varphi]$ со свободным членом f_0, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, h_n : R \to R/ \equiv_n$ — естественный эпиморфизм. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если $h_n(f)$ — центральный дополняемый идемпотент в $h_n(R)$, то f_0 — центральный дополняемый идемпотент в R, $f_0 = \varphi(f_0)$ и $h_n(f) = h_n(f_0)$;*

2) *если f — центральный дополняемый идемпотент в R, то $f \in S$ и $f = \varphi(f)$;*

3) *множество BR всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца R совпадает с множеством βS всех таких центральных дополняемых идемпотентов e полукольца S, что $\varphi(e) = e$;*

4) *множество $Bh_n(R)$ всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца $h_n(R)$ совпадает с $h_n(\beta S) \cong \beta S$.*

Доказательство. 1) Случай $h_n(f) = 0$ очевиден, поэтому пусть $h_n(f) \neq 0$. Из $f \equiv_n f^2$ следует $f_0 = f_0^2$. Если $f_0 = 0$, то для младшего (ненулевого) члена ax^k, $0 < k < n$, получаем, что у f^2 член k-ой степени равен нулю, противоречие. Очевидно, что f_0 является центральным в S. Из $h_n(f)h_n(x) = h_n(x)h_n(f)$ получим $f_0x = xf_0 = \varphi(f_0)x$, следовательно, f_0 — центральный идемпотент полукольца R и $f_0 = \varphi(f_0)$. Можно считать, что многочлен f имеет вид $f_0 + f_1x + \ldots + f_{n-1}x^{n-1}$, а дополнение к $h_n(f)$ — класс $h_n(g)$

для $g = g_0 + g_1 x + \ldots + g_{n-1} x^{n-1}$. Из равенств

$$h_n(f)h_n(g) = h_n(0), \tag{1}$$

$$h_n(f) + h_n(g) = h_n(1) \tag{2}$$

получаем:

$$f_0 g_0 = 0,\ f_0 + g_0 = 1,\ f_i + g_i = 0 \text{ для } i = 1, \ldots, n-1.$$

Ясно, что g_0 является центральным идемпотентом и $\varphi(g_0) = g_0$. Покажем индукцией, что $f_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$. Из (1) имеем $0 = f_0 g_1 + f_1 \varphi(g_0) = f_0 g_1 + f_1 g_0$. Отсюда $0 = g_0(f_0 g_1 + f_1 g_0) = f_1 g_0$ и $0 = f_0(f_0 g_1 + f_1 g_0) = f_0 g_1$. Далее, $0 = f_0(f_1 + g_1) = f_0 f_1$. Следовательно, $0 = f_1 g_0 + f_0 f_1 = f_1(g_0 + f_0) = f_1$, база индукции установлена. Из (1) в силу индуктивного предположения следует $0 = f_0 g_k + f_k g_0$. Откуда $0 = g_0(f_0 g_k + f_k g_0) = f_k g_0$ и $0 = f_0(f_0 g_k + f_k g_0) = f_0 g_k$. Кроме этого $0 = f_0(f_k + g_k) = f_0 f_k$. Таким образом, из (2) получаем $0 = f_k g_0 + f_k f_0 = f_k(g_0 + f_0) = f_k$. Следовательно, $h_n(f) = h_n(f_0)$.

2) Пусть n — целое число, большее степени многочлена f. Рассмотрим естественный эпиморфизм $h_n : R \to R/\equiv_n$. Тогда $h_n(f)$ является центральным дополняемым идемпотентом в $h_n(R)$. Из пункта 1) $h_n(f) = h_n(f_0)$, поэтому $f = f_0 \in S$ и $\varphi(f) = \varphi(f_0) = f_0 = f$.

3) Включение $BR \subseteq \beta S$ доказано в пункте 2). Любой $e \in \beta S$ является дополняемым идемпотентом в R, а условие $\varphi(e) = e$ влечет $ex = xe$, и поскольку e перестановочен с любым элементом из S, то e — центральный элемент в R.

4) Следует из пунктов 1) и 3). $\square$

Заметим, что для произвольного полукольца S и его эндоморфизма φ включение $e \in \beta S$ влечет $e^{\perp} \in \beta S$; это следует из единственности дополнения у любого центрального дополняемого идемпотента полукольца S. Далее непосредственно проверяется, что множество βS является подкольцом с единицей кольца $\langle BS, \oplus, \cdot\rangle$. Подкольцо βS может быть собственным подкольцом BS. Например, рассмотрим перестановку атомов полной атомной булевой решетки L. Она продолжается до автоморфизма φ решетки L. Атомы, не являющиеся неподвижными при исходной перестановке, не будут лежать в βL.

5. Полукольца косых многочленов: коммутативность, делители нуля, нильпотентные элементы

В параграфе исследуется следующие свойства полукольца косых многочленов: коммутативность, отсутствие делителей нуля и ненулевых нильпотентных элементов, риккартовость.

Предложение 5.1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Тогда S является полукольцом без делителей нуля в точности тогда, когда $R = S[x, \varphi]$ — полукольцо без делителей нуля.*

Доказательство. Пусть S — полукольцо без делителей нуля, f, g — ненулевые многочлены из R, a, b — старшие коэффициенты многочленов f и g соответственно. Тогда старший коэффициент многочлена fg равен $a\varphi^m(b)$, где $m = \deg(f)$ — степень многочлена f. Так как эндоморфизм φ является инъективным, то из $b \neq 0$ следует $\varphi(b) \neq 0$, откуда по индукции $\varphi^m(b) \neq 0$, поэтому старший коэффициент многочлена fg отличен от нуля. Получили, что

R — полукольцо без делителей нуля. Обратная импликация имеет место, поскольку S является подполукольцом полукольца без делителей нуля. □

Определение 5.1. Полукольцо называется *инвариантным справа*, если каждый его правый идеал является идеалом.

Предложение 5.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *R — инвариантное справа полукольцо;*
2) *R — коммутативное полукольцо;*
3) *S — коммутативное полукольцо и $\varphi \equiv 1_S$ — тождественный автоморфизм.*

Доказательство. Если выполнено 3), то $S[x, \varphi] = S[x]$ является коммутативным полукольцом, поэтому справедлива импликация 3) $\Rightarrow$ 2). Также очевидна импликация 2) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть a, b — произвольные ненулевые элементы из S. Правый идеал $(1+x)R$ является идеалом, поэтому $b(1+x) = (1+x)f$ для некоторого многочлена f степени n, со старшим коэффициентом f_n и свободным членом f_0. Тогда $b + bx = \varphi(f_n)x^{n+1} + g$ для некоторого $g \in R$, $\deg(g) \leq n$. Отсюда $n = 0$, $b = \varphi(f_n)$ и $f_n = f_0 = f \in S$. Получаем равенство $b + bx = f_0 + \varphi(f_0)x$, откуда $\varphi(f_0) = b = f_0$, следовательно, $\varphi(b) = b$ для любого $b \in S$. Поэтому $\varphi \equiv 1_S$. Аналогично, для идеала $(a + x)R$ найдется многочлен f, $\deg(f) = n$, со старшим коэффициентом f_n, такой, что $b(a + x) = (a + x)f = \varphi(f_n)x^{n+1} + g$, $\deg(g) \leq n$. Тогда $n = 0$, $f = c \in S$, следовательно, $ba + bx = ac + \varphi(c)x = ac + cx$. Приравняем соответствующие коэффициенты, и получим $b = c$, откуда $ba = ab$, значит, S коммутативно. □

Лемма 5.1. *Пусть S — полукольцо без нильпотентных элементов.*

1) *Если $a, b \in S$, то $ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0 \Leftrightarrow aSb = bSa = 0$.*

2) *Если $a, b, c \in S$, то $abc = 0 \Leftrightarrow acb = 0$.*

3) *Если $a_1, \ldots, a_k \in S$ и $a_1 \ldots a_k = 0$, то $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(k)} = 0$ для любой перестановки σ индексов $1, \ldots, k$.*

4) *$ann_r(a) = ann_r(a^n)$ для любых $a \in S$ и $n \in \mathbb{N}$.*

5) *Для любого подмножества $B \subseteq S$ $\mathrm{ann}_r(B)$ — идеал и*

$$\mathrm{ann}_r(B) = \mathrm{ann}_r(SBS) = \{a \in S : SBS \cap SaS = 0\};$$

аналогичные равенства верны для левых аннуляторов.

6) *Каждый дополняемый идемпотент из S централен.*

Доказательство. 1) Пусть $ab = 0$, тогда $0 = b(ab)a = (ba)^2$, откуда $ba = 0$. Из $ba = 0$ получаем $bas = 0$ для любого $s \in S$, поэтому $asb = 0$ и $aSb = 0$.

2) Если $abc = 0$, то используя пункт 1), получаем $0 = acbc = acbacb = (acb)^2$. В полукольце S ненулевые нильпотентные элементы отсутствуют, следовательно, $acb = 0$.

3) следует из пунктов 1) и 2).

4) Включение $\mathrm{ann}_r(a) \subseteq \mathrm{ann}_r(a^n)$ очевидно. Пусть $a^n s = 0$, тогда $a^n s^n = 0$, откуда получаем $(as)^n = 0$, поэтому $as = 0$.

5) Обозначим $D = \{a \in S : SBS \cap SaS = 0\}$. Для любого $a \in D$ и любого $b \in B$ выполняется $ba \in SBS \cap SaS = 0$, следовательно, $D \subseteq \mathrm{ann}_r(B)$; аналогично, $D \subseteq \mathrm{ann}_l(B)$. По 1) $\mathrm{ann}_r(B) = \mathrm{ann}_l(B) \subseteq \mathrm{ann}_r(SBS)$. Если $a \in \mathrm{ann}_r(SBS)$, то $(SBS \cap SaS)^2 = 0$, следовательно, $SBS \cap SaS = 0$. Это означает, что $\mathrm{ann}_r(SBS) \subseteq D$.

6) Пусть e — дополняемый идемпотент и $s \in S$. Тогда по пункту 1) $es = es(e + e^{\perp}) = ese$. Симметричным образом получаем $se = ese$. □

Предложение 5.3. *Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, то равносильны условия:*

1) *S — полукольцо без нильпотентных элементов и φ — жесткий эндоморфизм;*

2) *S — полукольцо без нильпотентных элементов и $a\varphi^n(a) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $a \in S \setminus \{0\}$;*

3) *S — полукольцо без нильпотентных элементов и $\varphi^n(a)b = b\varphi^n(a) = 0$ для всех таких $a, b \in S$, что $ab = 0$;*

4) *для любых многочленов $f, g \in S[x, \varphi]$ равенство $fg = 0$ равносильно равенству $C(f) \cap C(g) = 0$, где $C(f)$ — идеал полукольца S, порожденный всеми коэффициентами f_i многочлена f;*

5) *$S[x, \varphi]$ — полукольцо без нильпотентных элементов.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что в полукольце, удовлетворяющем условию 1), найдется наименьшее натуральное число n отличное от единицы, такое, что $a\varphi^n(a) = 0$ для некоторого $a \in S \setminus \{0\}$. Тогда для $b = a\varphi^{n-1}(a)$ имеем

$$b\varphi(b) = a\varphi^{n-1}(a)\varphi(a\varphi^{n-1}(a)) = a\varphi^{n-1}(a)\varphi(a)\varphi^n(a) = 0$$

по лемме 5.1. Из жесткости φ следует $b = a\varphi^{n-1}(a) = 0$, противоречие.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $ab = 0$, тогда $\varphi(a)\varphi(b) = 0$. Получаем $b\varphi(a)\varphi(b\varphi(a)) = b\varphi(a)\varphi(b)\varphi^2(a) = 0$. Из условия при $n = 1$ получаем, что эндоморфизм φ является жестким, следовательно, $b\varphi(a) = 0$. По индукции $b\varphi^n(a) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть $C(f) \cap C(g) = 0$, тогда $f_i g_j = 0$ для всех коэффициентов многочленов f и g. По условию $f_i\varphi^i(g_j) = 0$, значит, $fg = 0$. Обратно, пусть $fg = 0$. Докажем, что $f_i g_j = 0$. Индукцией по j покажем, что $f_0 g_j = 0$ для любого j. Обозначим через $(fg)_k$ коэффициент многочлена fg при x^k. Понятно, что $f_0 g_0 = (fg)_0 = 0$.

Пусть $f_0 g_j = 0$ для всех $j < k$. Тогда по условию и в силу леммы 5.1 $f_0 f_i \varphi^j(g_j) = 0$ для произвольного $i \in \mathbb{N}$. Обозначив $b = \varphi^0(b)$, получаем

$$0 = (fg)_k = f_0(fg)_k = f_0(\sum_{i+j=k} f_i \varphi^i(g_j)) = f_0 f_0 \varphi^0(g_k) = f_0^2 g_k.$$

По лемме 5.1 получаем $(f_0 g_k)^2 = 0$, откуда $f_0 g_k = 0$. Индукцией по i докажем, что $f_i g_j = 0$. Допустим, что $f_i g_j = 0$ верно для всех $i < n$ и всех j.

Представим f в виде $f = f_0 + \ldots + f_{n-1}x^{n-1} + (f_n + f_{n+1}x + \ldots)x^n = \alpha + \beta x^n, \alpha, \beta \in S[x, \varphi]$. По индуктивному предположению и условию имеем $\alpha g = 0$, поэтому $\beta x^n g = 0$. Многочлен $x^n g$ имеет вид $\varphi^n(g_0)x^n + \varphi^n(g_1)x^{n+1} + \ldots$. По доказанному выше произведение свободного члена f_n многочлена β на произвольный коэффициент многочлена $x^n g$ равно нулю, поэтому $f_n \varphi^n(g_j) = 0$, откуда по условию $0 = \varphi^n(f_n)\varphi^n(g_j) = \varphi^n(f_n g_j)$ и $f_n g_j = 0$ в силу инъективности эндоморфизма φ. Таким образом заключаем, что $f_i g_j = 0$ для всех i, j. Пусть $c \in C(f) \cap C(g)$, и $c = \sum a f_i b = \sum a' g_j b'$ — конечные суммы для некоторых $a, b, a', b' \in S$. Тогда по лемме 5.1 $c^2 = 0$, следовательно, $c = 0$.

4) $\Rightarrow$ 5). Допустим, что $S[x, \varphi]$ содержит нильпотентный элемент f, причем можно считать, что $f^2 = 0$. Тогда $C(f) = C(f) \cap C(f) = 0$, откуда $f = 0$.

5) $\Rightarrow$ 1). Очевидно, что S является полукольцом без нильпотентных элементов. Для каждого $a \neq 0$ из S получаем $0 \neq (ax)^2 = a\varphi(a)x^2$, откуда $a\varphi(a) \neq 0$. □

Лемма 5.2. *Для полукольца S равносильны условия:*

1) *S — риккартово справа или слева полукольцо, каждый дополняемый идемпотент которого централен;*

2) S — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов;

3) S — риккартово полукольцо без нильпотентных элементов;

4) каждый элемент в S — произведение центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля;

5) S — полукольцо без нильпотентных элементов, и для любого его конечно порожденного идеала B существует такой центральный дополняемый идемпотент $e \in S$, что $\operatorname{ann}_r(B) = \operatorname{ann}_l(B) = eS = Se$.

Доказательство. Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) очевидна, а 2) $\Rightarrow$ 1) следует из леммы 5.1.

1) $\Rightarrow$ 4). Пусть S — риккартово справа полукольцо, в котором найдется нильпотентный элемент s, причем можно считать $s^2 = 0$. Тогда $\operatorname{ann}_r(s) = eS$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента e. В силу того, что $s^2 = 0$, имеем $s \in \operatorname{ann}_r(s)$. Поэтому $s = es = se = 0$, и S — полукольцо без нильпотентных элементов. По лемме 5.1 $\operatorname{ann}_l(a) = \operatorname{ann}_r(a) = eS = Se$ для произвольного элемента из $a \in S$ и некоторого центрального дополняемого идемпотента e. Положим $d = e^{\perp}a + e$. Поскольку $a = a(e + e^{\perp}) = ae^{\perp}$, то $e^{\perp}d = e^{\perp}a + e^{\perp}e = e^{\perp}a = a$. Покажем, что d не является делителем нуля. Пусть $b \in \operatorname{ann}_r(d)$. Тогда $0 = db = (e^{\perp}a + e)b = e^{\perp}ab + eb$. Получаем $0 = e0 = e(e^{\perp}ab + eb) = eb$, следовательно, $e^{\perp}ab = 0$. Далее, $ab = (e + e^{\perp})ab = eab = 0$, откуда $b \in \operatorname{ann}_r(a) = eS$. Получаем $b = eb = 0$, и $\operatorname{ann}_r(d) = 0$. Справедливость равенства $\operatorname{ann}_l(d) = 0$ устанавливается симметричным образом.

4) $\Rightarrow$ 3). Условие 4) является право-лево-симметричным, поэтому достаточно установить, что S — риккартово справа. Пусть $a \in S$, и $a = ed$ для некоторых центрального дополняемого идемпотента e и неделителя нуля d. Покажем, что $\operatorname{ann}_r(a) = e^{\perp}S$. Вклю-

чение $e^{\perp}S \subseteq \mathrm{ann}_r(a)$ очевидно. Пусть $0 = as = eds$, откуда $es = 0$. Тогда $s = (e + e^{\perp})s = e^{\perp}s$ и $\mathrm{ann}_r(a) \subseteq e^{\perp}S$. Получили, что S — риккартово справа полукольцо. Очевидно отсутствие в S нильпотентных элементов.

3) $\Rightarrow$ 5). Пусть $B = \sum_{i=1}^{k} Sb_iS$ — конечно порожденный идеал, и e_i — такие центральные дополняемые идемпотенты, что $\mathrm{ann}_r(b_i) = e_iS$. Обозначим $e = e_1 \dots e_k$. Элемент e является центральным дополняемым идемпотентом (см., например, [27, предл. 2.1.3]), и $eS \subseteq \mathrm{ann}_r(B)$. Если $s \in \mathrm{ann}_r(B)$, то $s \in \mathrm{ann}_r(b_i)$ для каждого b_i, откуда $s = e_is$. Поэтому $s = e_1 \dots e_k s = es$, и $\mathrm{ann}_r(B) \subseteq eS$.

Справедливость импликации 5) $\Rightarrow$ 3) следует из того, что аннуляторы элемента b и главного идеала SbS равны по лемме 5.1. □

Предложение 5.4. *Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$, то равносильны условия:*

1) *R — риккартово справа полукольцо без нильпотентных элементов;*

2) *R — риккартово слева полукольцо без нильпотентных элементов;*

3) *любой многочлен из R является произведением центрального дополняемого идемпотента, лежащего в S, и неделителя нуля;*

4) *S — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов и φ — жесткий эндоморфизм.*

Доказательство. В предложении 4.4, пункт 2), было доказано, что произвольный центральный дополняемый идемпотент из R лежит в S. Поэтому в силу леммы 5.2 условия 1), 2) и 3) равносильны.

1) $\Rightarrow$ 4). По предложению 5.3 S — полукольцо без нильпотентных элементов и φ — жесткий эндоморфизм. Будем рассматривать $\mathrm{ann}_{r,R}(a)$ как идеал полукольца R. По леммам 5.2 и 5.1

$\mathrm{ann}_{r,R}(a) = \mathrm{ann}_{r,R}(RaR) = eR$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента e полукольца R. По предложению 5.3 отсутствие ненулевых нильпотентных элементов в R влечет условие $a\varphi^n(a) \neq 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $a \in S \setminus \{0\}$. Откуда следует, что $\deg(f^2) > \deg(f)$ для любого многочлена f степени не меньше 1. Следовательно, идемпотент полукольца R лежит в S. Получили, что $e \in S$. Очевидно, что правый аннулятор $\mathrm{ann}_r(a)$ в полукольце S совпадает с eS, т. е. S — риккартово справа полукольцо.

4) $\Rightarrow$ 1). По предложению 5.3 R — полукольцо без нильпотентных элементов. Пусть $f \in R$. Рассмотрим идеал $C(f)$ полукольца S, порожденный всеми коэффициентами многочлена f. Так как он конечно порожден, следовательно, по лемме 5.2 $\mathrm{ann}_r(C(f)) = eS$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента $e \in S$. Кроме того, по лемме 5.1 e является центральным элементом полукольца R, поэтому $eR \subseteq \mathrm{ann}_r(f)$. Пусть сейчас g — многочлен, лежащий в $\mathrm{ann}_r(f)$. Из $fg = 0$ получаем $C(f) \cap C(g) = 0$ по предложению 5.3. Следовательно, для произвольных коэффициентов f_i и g_j многочленов f и g соответственно $f_i g_j = 0$, поэтому $C(g) \subseteq eS$. Но тогда $g \in eR$, и $\mathrm{ann}_r(f) \subseteq eR$. Получили, что правый аннулятор многочлена f является идеалом полукольца R, порождаемым дополняемым идемпотентом $e \in R$. Доказали, что R риккартово справа. □

6. Полукольцо косых многочленов над полукольцом Безу

В данном параграфе представлены результаты исследования полукольца косых многочленов над полукольцом Безу.

Известно [22, теорема 1], что если A — кольцо, в котором каждый левый аннуляторный идеал является идеалом, то кольцо многочленов $A[x]$ является левым кольцом Безу тогда и только тогда, когда A — риккартово слева левое кольцо Безу, каждый делитель нуля которого обратим в A. Для полуколец обычных (некосых) многочленов этот результат не верен — свойство «быть полукольцом Безу» плохо переносится с полукольца коэффициентов на полукольцо многочленов.

Для полуколец обычных многочленов нами была доказана следующая теорема [52]:

Теорема 6.1. *Пусть все левые аннуляторные идеалы полукольца S являются идеалами, $R = S[x]$. Тогда равносильны утверждения:*

1) *R — полукольцо без нильпотентных элементов, и каждый конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;*

2) *S — риккартово слева левое полукольцо Безу, любой делитель нуля полукольца S обратим в S.*

Обобщение этой теоремы на случай полукольца косых многочленов представлено ниже.

Нам потребуется следующая характеризация левого полукольца Безу [16, лемма 3.3]: *полукольцо S является левым полукольцом Безу в точности тогда, когда для любых $m, n \in S$ найдутся такие $a, b, c, d \in S$, что $m = cam + cbn$ и $n = dbn + dam$.*

Лемма 6.1. *Пусть φ — такой инъективный эндоморфизм полукольца S, что $a \in S\varphi(a)a$ для любого $a \in S$.*

1) *$\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$;*

2) *если в S все левые аннуляторы являются идеалами, то* $\operatorname{ann}_l(a) = \operatorname{ann}_l(\varphi(a))$ *для любого* $a \in S$*,* S *— полукольцо без нильпотентных элементов,* φ *— жесткий эндоморфизм.*

Доказательство. 1) Пусть $e \in BS$ и $e = b\varphi(e)e$ для некоторого $b \in S$. Тогда $e\varphi(e) = b\varphi(e)^2 e = e$. Из $e^\perp = c\varphi(e^\perp)e^\perp$ следует $e^\perp\varphi(e) = 0$. Получаем $\varphi(e) = (e + e^\perp)\varphi(e) = e$.

2) Пусть $a = b\varphi(a)a$ для подходящего $b \in S$ и пусть $s \in \operatorname{ann}_l(\varphi(a))$. В силу условия $0 = sb\varphi(a) = sb\varphi(a)a = sa$. Показали, что $\operatorname{ann}_l(\varphi(a)) \subseteq \operatorname{ann}_l(a)$. Обратно, пусть $ra = 0$ и $r = c\varphi(r)r$ для некоторого $c \in S$. Поскольку $\varphi(r)\varphi(a) = 0$ и левый аннулятор является идеалом, то $r = c\varphi(r)r \in \operatorname{ann}_l(\varphi(a))$. Таким образом, $\operatorname{ann}_l(a) = \operatorname{ann}_l(\varphi(a))$.

Покажем, что S — полукольцо без нильпотентных элементов. Пусть $s^2 = 0$. Тогда $\varphi(s) \in \operatorname{ann}_l(\varphi(s)) = \operatorname{ann}_l(s)$, поэтому $\varphi(s)s = 0$. По условию $s = t\varphi(s)s$ для некоторого $t \in S$, поэтому $s = 0$.

Пусть $a\varphi(a) = 0$, тогда $a \in \operatorname{ann}_l(\varphi(a)) = \operatorname{ann}_l(a)$, поэтому $a^2 = 0$ и $a = 0$. Показали, что эндоморфизм φ жесткий. $\square$

Лемма 6.2. *Пусть* φ *— инъективный эндоморфизм полукольца* S*,* $R = S[x, \varphi]$ *и* $R/\equiv_2$ *— левое полукольцо Безу. Тогда для любого* $a \in S$ *найдутся такие* $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in S$*, что*

$$a = u_0 f_0 a,\ v_0 f_0 a = 0,\ v_0 g_0 + b\varphi(a) = 1.$$

Доказательство. Пусть $h : R \to R/\equiv_2$ — естественный эпиморфизм. По условию $h(R)$ — левое полукольцо Безу, поэтому $h(R)h(a) + h(R)h(x)$ — главный левый идеал в $R/\equiv_2$. По [16, лемма 3.3] (см. формулировку после определения полукольца Безу) получаем:

$$h(a) = h(u)h(f)h(a) + h(u)h(g)h(x),$$
$$h(x) = h(v)h(g)h(x) + h(v)h(f)h(a)$$

для некоторых $f, g, u, v \in R$. Пусть $f = f_0 + f_1 x + \ldots + f_k x^k$; аналогичные обозначение для остальных многочленов. Тогда

$$a \equiv_2 ufa + ugx,\ x \equiv_2 vfa + vgx,$$

откуда

$$a = u_0 f_0 a,\ v_0 f_0 a = 0,\ v_0 f_1 \varphi(a) + v_1 \varphi(f_0)\varphi(a) + v_0 g_0 = 1.$$

Обозначив $b = v_0 f_1 + v_1 \varphi(f_0)$, получаем, $v_0 g_0 + b\varphi(a) = 1$. □

Теорема 6.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$, и все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами. Если R — левое полукольцо Безу, то S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$.*

Доказательство. Пусть R — левое полукольцо Безу. Тогда $S \cong R/\equiv_1$ и $R/\equiv_2$ являются левыми полукольцами Безу. Пусть $a \in S$. По лемме 6.2 найдутся такие $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in S$, что $a = u_0 f_0 a$ и $v_0 \in \mathrm{ann}_l(f_0 a)$ — идеал в S. Тогда $v_0 g_0 u_0 \in \mathrm{ann}_l(f_0 a)$, откуда $0 = v_0 g_0 u_0 f_0 a = v_0 g_0 a$. Из $1 = v_0 g_0 + b\varphi(a)$ следует $a = b\varphi(a)a$.

По лемме 6.1 левые аннуляторы элементов a и $\varphi(a)$ совпадают, поэтому из $v_0 g_0 a = 0$ вытекает $v_0 g_0 \varphi(a) = 0$. Кроме того, по лемме 6.1 эндоморфизм φ — жесткий, а φ-жесткое полукольцо коммутативно в нуле по лемме 2.2, поэтому получаем $v_0 g_0 b\varphi(a) = 0$ и $b\varphi(a) = (b\varphi(a))^2$. Таким образом, $b\varphi(a)$ — дополняемый идемпотент, а $v_0 g_0$ — его дополнение. По лемме 2.2 дополняемые идемпотенты центральны, поэтому $v_0 g_0 \in BS$. Если $u \in \mathrm{ann}_l(a)$, то $u\varphi(a) = 0$, поэтому $u = uv_0 g_0 + ub\varphi(a) = uv_0 g_0$. Следовательно, $\mathrm{ann}_l(a) = Sv_0 g_0$, и S — риккартово слева полукольцо.

По лемме 6.1 $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$.

Пусть d — неделитель нуля в S. Доказано, что $d = b\varphi(d)d$ для некоторого $b \in S$ и $b\varphi(d) \in BS$. Если $b\varphi(d) \neq 1$, то его дополнение e отлично от нуля, и тогда $ed = eb\varphi(d)d = 0$, противоречие с тем, что d — неделитель нуля. Поэтому $b\varphi(d) = 1$. Получили, что $\varphi(d)$ — обратимый слева элемент в S. Обозначим $u = \varphi(d)b$, откуда $bu = b$. Тогда $u = c\varphi(u)u$ для некоторого $c \in S$ и $c\varphi(u) \in BS$. Если $ur = 0$ для некоторого $r \in S$, то $br = bur = 0$, а в силу коммутативности в нуле и $rb = 0$, тогда $rd = rb\varphi(d)d = 0$, откуда следует $r = 0$.

Таким образом, u — неделитель нуля полукольца S. Повторяя рассуждения (как и для d), получаем, что $c\varphi(u) = 1$, откуда $\varphi(c)\varphi^2(u) = 1$. Тогда элемент $\varphi(c)$ обратим справа, но поскольку c — неделитель нуля, то $\varphi(c)$ обратим и слева. Показали, что $\varphi^2(u)$ — обратимый элемент. Из $\varphi^2(u)\varphi(c) = 1$ в силу инъективности φ получаем $1 = \varphi(u)c = \varphi^2(d)\varphi(b)c$ и $\varphi^2(d)$ — обратимый справа элемент. Левым обратным к нему является элемент $\varphi(b)$. Поскольку в полугруппе с единицей левый и правый обратные к произвольному элементу, если они существуют, совпадают, то $\varphi(b)$ является обратным для $\varphi^2(d)$. Из $\varphi^2(d)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi^2(d) = 1$ в силу инъективности φ следует $\varphi(d)b = b\varphi(d) = 1$, поэтому $\varphi(d)$ обратим в S. □

Пример 6.1. Утверждение, обратное к теореме 6.2, верно в классе колец [22, теорема 1], [23, теорема 15.13]. Для полуколец это не так. Действительно, пусть S является двухэлементной цепью, φ — тождественный автоморфизм полукольца S. Тогда S — коммутативное полукольцо Безу, риккартово, $1 = \varphi(1)$ — единственный как неделитель нуля, так и обратимый элемент в S. Однако, $R = S[x]$ не является полукольцом Безу; например, $Rx+R(1+x)$ не является главным идеалом.

Теорема 6.3. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами, $R = S[x, \varphi]$. Тогда равносильны утверждения:*

1) *R — полукольцо без нильпотентных элементов и каждый конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;*

2) *S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$;*

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1). Эндоморфизм φ является жестким, поэтому по лемме 2.2 пункт 1) S — полукольцо без нильпотентных элементов, что влечет отсутствие ненулевых нильпотентных элементов и в полукольце R по предложению 5.3. Доказательство импликации завершается применением предложения 2.2.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $a, b \in S$. Рассмотрим конечно порожденный левый m-идеал $Ra + Rb$, который по условию является главным левым m-идеалом Rf для некоторого многочлена $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$. Поскольку у равных левых идеалов совпадают их соответствующие коэффициентные левые идеалы, получаем $Sa + Sb = Sf_0$. Следовательно, S является левым полукольцом Безу.

Далее, $Ra + Rx = Rh$ для некоторого $h = h_0 + \ldots + h_n x^n \in R$. Тогда $a = uh$, $x = vh$ и $h = fa + gx$ для подходящих $f, g, u, v \in R$. Пусть $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, и аналогичные обозначения используем для других многочленов. Получаем $a = u_0 f_0 a$, $0 = v_0 f_0 a$ и $1 = v_0 g_0 + b\varphi(a)$, где $b = v_0 f_1 + v_1 \varphi(f_0)$. Откуда следует $\mathrm{ann}_l(a) = Sv_0 g_0$, и S — риккартово слева полукольцо (доказывается так же, как в теореме 6.2).

Осталось показать, что $\varphi(d)$ обратим для каждого неделителя нуля полукольца S. Но для этого достаточно повторить рассуждения при обосновании аналогичного факта в теореме 6.2, поскольку в нашей ситуации в полукольце S выполнены все условия, используемые в указанном доказательстве. □

Полукольцо без делителей нуля является риккартовым, и если к тому же φ — инъективный эндоморфизм, то φ — жесткий эндоморфизм. Поэтому получаем:

Следствие 6.1. *Пусть S — полукольцо без делителей нуля, φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$. Тогда равносильны условия:*

1) *любой конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;*

2) *S — левое полукольцо Безу, $\varphi(a)$ обратим для любого ненулевого $a \in S$.*

Следствие 6.2. [23, утверждение 15.12] *Пусть A — кольцо без делителей нуля, φ — инъективный эндоморфизм кольца A, $R = A[x, \varphi]$. Тогда равносильны условия:*

1) *R — левое кольцо Безу;*

2) *R/Rx^2 — левое кольцо Безу;*

3) *A — левое кольцо Безу, $\varphi(a)$ обратим для любого ненулевого $a \in A$.*

Глава 3

Пирсовские слои полуколец косых многочленов

В главе 3 продолжается изучение зависимостей между алгебраическими свойствами полукольца косых многочленов и свойствами полукольца его коэффициентов. Одним из инструментов, позволяющих выявить целый ряд таких свойств, является пирсовский пучок. Ниже будет показано, что использование пирсовских пучков позволяет в некоторых случаях получить характеризацию полукольца S через свойства пирсовских слоев этого полукольца, а также через свойства пирсовских слоев полукольца косых многочленов с коэффициентами из S.

7. Характеризации полуколец косых многочленов через пирсовские слои

В данном параграфе изложены основные понятия, необходимые для применения пирсовских пучков к исследованию полуколец косых многочленов. Получены характеризации полуколец косых многочленов через их пирсовские слои.

Пусть S — произвольное полукольцо, M — максимальный идеал кольца BS. Введем на полукольце S отношение:

$$a \equiv b(\rho_M) \Leftrightarrow ae^{\perp} = be^{\perp} \text{ для некоторого } e \in M.$$

Это отношение является конгруэнцией на полукольце S, которая называется *пирсовской* конгруэнцией.

Определение 7.1. Факторполукольцо S/ρ_M по пирсовской конгруэнции называется *пирсовским слоем* полукольца S.

Пусть S — произвольное полукольцо. Множество $\operatorname{Max} BS$ всех максимальных идеалов кольца BS со стоуновской топологией образует пространство, являющееся *нульмерным компактом* (компактным хаусдорфовым пространством с базой открыто-замкнутых множеств); открытыми являются множества $D(A) = \{M \in \operatorname{Max} BS : M \not\supseteq A\}$ для произвольного идеала A кольца BS, а множества вида $D(e) = \{M \in \operatorname{Max} BS : e \notin M\}$, $e \in BS$, образуют базис открыто-замкнутых множеств.

Определение 7.2. Дизъюнктное объединение $P(S) = \dot{\cup} S/\alpha_M$ всех пирсовских слоев является топологическим пространством, называемым *накрывающим*, а пара $(P(S), \operatorname{Max} BS)$ образует *пирсовский пучок.*

Для колец эта конструкция была введена Р. С. Пирсом [48], для полуколец — В. В. Чермных [25]. Непрерывные отображения из $\mathrm{Max}\, BS$ в $P(S)$ (каждая точка $M \in \mathrm{Max}\, BS$ отображается в «свой» пирсовский слой S/α_M) называются *глобальными сечениями*. Глобальные сечения пирсовского пучка исчерпываются сечениями вида $\hat{s}$, $s \in S$, где $\hat{s}(M)$ — класс элемента s в слое S/α_M. Важными для применения пирсовских пучков к исследованию алгебр являются теоремы о представлениях: *каждое кольцо (полукольцо) с единицей изоморфно кольцу (полукольцу) всех глобальных сечений своего пирсовского пучка* [48, Theorem 4.4], [25, теорема 3].

С деталями, связанными с пучковыми представлениями, можно ознакомиться в [27, 50].

Укажем важные свойства пирсовских пучков, которые будут использоваться далее в доказательствах утверждений.

Лемма 7.1. *Для глобальных сечений пирсовского пучка справедливы следующие утверждения:*

1) *глобальное сечение $\hat{e}$ пирсовского пучка, соответствующее элементу $e \in BS$, в каждом пирсовском слое S/α_M принимает либо значение $\hat{0}(M)$, либо значение $\hat{1}(M)$;*

2) *пусть $\hat{a}(M) = \hat{b}(M)$ для $a, b \in S$. Тогда сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$ совпадают и на некоторой открыто-замкнутой (например, базисной) окрестности U точки M;*

3) *если U — открыто-замкнутое подмножество множества $MaxBS$, то существует глобальное сечение, называемое характеристическими, совпадающее с единичным сечением на U и нулевым на его дополнении.*

Доказательства утверждений стандартны, их можно найти, например, в [27].

Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S и $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. По предложению 4.4 выполняется $BS = BR \cong Bh_n(R)$. Пусть M — максимальный идеал кольца BS, α_M, ρ_M, ξ_M — пирсовские конгруэнции на полукольцах S, R и $h_n(R)$ соответственно. Обозначим через $P(A)$ множество всех пирсовских конгруэнций на полукольце A. Тогда отображения

$$s\colon P(S) \to P(R), \quad s(\alpha_M) = \rho_M,$$

$$t\colon P(S) \to P(h_n(R)), \quad t(\alpha_M) = \xi_M$$

задают биекции между множествами пирсовских конгруэнций на полукольцах S, R и $h_n(R)$.

Для максимального идеала M кольца BS множество конечных сумм $SM = \{\sum a_i e_i : a_i \in S, e_i \in M\}$ образует идеал полукольца S, порожденный идемпотентами из M, а также является классом нуля пирсовской конгруэнции α_M.

Пусть $\mathcal{P}$ — класс полуколец, удовлетворяющих условию: полукольцо S принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца S принадлежит $\mathcal{P}$.

Предложение 7.1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, M — максимальный идеал кольца BS. Тогда справедливы утверждения:*

1) $\varphi(SM) \subseteq SM$;

2) *φ индуцирует естественный инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ пирсовского слоя S/α_M;*

3) $R/\rho_M \cong (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$;

4) $h_n(R)/\xi_M \cong (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]/\equiv_n$;

5) $R \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}] \in \mathcal{P}$ *для каждого пирсовского слоя S/α_M;*

6) $h_n(R) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]/\equiv_n \in \mathcal{P}$ *для каждого пирсовского слоя* S/α_M.

Доказательство. 1) Пусть $m = a_1e_1 + \ldots + a_ke_k \in SM$ для $a_i \in S, e_i \in M$. Тогда $\varphi(m) = \varphi(a_1)e_1 + \ldots + \varphi(a_k)e_k \in SM$.

2) Элементы факторполукольца S/α_M обозначим через $\bar{a}$. Стандартно проверяется, что отображение $\bar{\varphi} : S/\alpha_M \to S/\alpha_M$, заданное правилом $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$, корректно и является эндоморфизмом полукольца S/α_M. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in S/\alpha_M$ такие, что $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{\varphi}(\bar{b})$. Тогда $\varphi(a) \equiv \varphi(b)(\alpha_M)$, откуда $\varphi(a)e = \varphi(b)e$ для некоторого $e \in BS \setminus M$. Поскольку $\varphi(e) = e$, то $\varphi(ae) = \varphi(be)$. В силу инъективности φ получаем $ae = be$. Отсюда $a \equiv b(\alpha_M)$, $\bar{a} = \bar{b}$, и $\bar{\varphi}$ — инъективный эндоморфизм.

3) Элементы факторполукольца R/ρ_M обозначим через $[f]$ для многочлена $f = f_0 + f_1x + \ldots + f_kx^k$. Рассмотрим соответствие $\gamma : R/\rho_M \to (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$, при котором $\gamma([f]) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1x + \ldots + \bar{f}_kx^k$. Если $[f] = [g]$ для $f, g \in R$, то $fe^\perp = ge^\perp$ для некоторого $e \in M$. Тогда для соответствующих коэффициентов многочленов f и g получаем $f_ie^\perp = g_ie^\perp$, следовательно, $\bar{f}_i = \bar{g}_i$. Показали, что γ — отображение. Пусть сейчас $\bar{f}_0 + \bar{f}_1x + \ldots + \bar{f}_kx^k = \bar{g}_0 + \bar{g}_1x + \ldots + \bar{g}_kx^k$, где $k = \max\{\deg f, \deg g\}$. Тогда $f_i \equiv g_i(\alpha_M)$, т. е. $f_ie_i^\perp = g_ie_i^\perp$ для некоторых $e_i \in M$, $i = 0, \ldots, k$. Для элемента $e = (e_0^\perp \ldots e_k^\perp)^\perp \in M$ имеем $fe^\perp = ge^\perp$, поэтому $f \equiv g(\rho_M)$ и $[f] = [g]$. Следовательно, γ — инъективное отображение. Очевидно, что γ — сюръективное отображение. Обычным образом проверяется, что γ сохраняет полукольцевые операции.

4) доказывается так же, как и пункт 3).

5) и 6) следуют из пунктов 3), 4) □

Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$ и пусть $R = S[x, \varphi]$ — левое полукольцо Безу. По [16, теорема 5] это равносильно тому, что каждый пирсовский слой R/ρ_M полукольца R является левым полукольцом Безу. Тогда по предложению 7.1 получаем, что R — левое полукольца Безу в точности тогда, когда левым полукольцом Безу является $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ над любым пирсовским слоем S/α_M. Аналогичное рассуждение можно провести для полуколец A, пирсовские слои которых принадлежат тому же классу, что и A.

Определение 7.3. Полукольцо S называется *заменяемым справа*, если для любых $a, b \in S$ таких, что $a + b = 1$, найдется дополняемый не обязательно центральный идемпотент e такой, что $e \in aS, e^{\perp} \in bS$.

Абелевы полукольца, полукольца без нильпотентных элементов и заменяемые справа полукольца принадлежат классу $\mathcal{P}$; это показано соответственно в [15, предложение 4], [17, предложение 3], [16, теорема 4].

Укажем еще одного представителя класса $\mathcal{P}$.

Определение 7.4. Полукольцо S, в котором для любого элемента a найдется такой элемент $s \in S$, что $a = a^2 s$, называется *строго регулярным.*

Лемма 7.2. *Для полукольца S равносильны условия:*

1) *S — строго регулярное полукольцо;*

2) *каждый пирсовский слой полукольца S является строго регулярным полукольцом.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) справедлива, поскольку факторполукольцо строго регулярного полукольца строго регулярно.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть каждый пирсовский слой S/α_M, $M \in \operatorname{Max} BS$, строго регулярен. Пусть $a \in S$, его класс в слое S/α_M обозначим через $\bar{a}$. Для каждого $M \in \operatorname{Max} BS$ имеем $\bar{a}^2\bar{s}_M = \bar{a}$ для подходящего $s_M \in S$. Тогда $a^2 s_M e_M^{\perp} = a e_M^{\perp}$ для некоторого $e_M \in M$. Сумма всех главных идеалов $(e_M^{\perp})$ в кольце BS (напомним, что операцию сложения в BS мы обозначили через $\oplus$) является идеалом, не лежащим ни в одном максимальном идеале из BS. Поэтому $e_1^{\perp}u_1 \oplus \ldots \oplus e_k^{\perp}u_k = 1$ для некоторых $u_i \in BS$. Переходя к операциям полукольца S, получаем $e_1^{\perp}t_1 + \ldots + e_k^{\perp}t_k = 1$ для подходящих $t_i \in S$. Для соответствующих представителей $s_i \in \{s_M\}$ справедливы равенства $a^2 s_i e_i^{\perp} = a e_i^{\perp}$. Тогда $a^2(s_1 e_1^{\perp} t_1 + \ldots + s_k e_k^{\perp} t_k) = a(e_1^{\perp}t_1 + \ldots + e_k^{\perp}t_k) = a$, и S — строго регулярно. $\square$

Лемма 7.2 и цитированные перед ней результаты позволяют получить следующее предложение, являющееся явным следствием предложения 7.1.

Предложение 7.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$ и $\varphi(e) = e$ для $e \in BS$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *R — левое полукольцо Безу (абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное) тогда и только тогда, когда для каждого пирсовского слоя S/α_M полукольцо $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ — левое полукольцо Безу (абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное);*

2) *$h_n(R)$ — левое полукольцо Безу (абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное) тогда и только тогда, когда для каждого пирсовского слоя S/α_M полукольцо $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]/\equiv_n$ — левое полукольцо Безу*

(*абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное*).

Замечание 7.1. Утверждение о строго регулярном полукольце отличается от остальных утверждений предложения 7.2. Оно лишь является формально верным, но мало что описывает. Дело в том, что для строгой регулярности полукольца R необходима справедливость, допустим, равенства $x^2 f(x) = x$ для некоторого многочлена $f(x)$. По этой причине, утверждение менее полезно, чем предваряющая его лемма 7.2.

Определение 7.5. Полукольцо без ненулевых аддитивно обратимых элементов называется *антикольцом.*

Отметим, что факторполукольцо антикольца не обязательно будет антикольцом. Например, пусть $\mathbb{N}$ — полукольцо целых неотрицательных чисел, $\sim_m$ — отношение сравнимости по модулю m. Тогда $\mathbb{N}/\sim_m$ изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}_m$. Однако, пирсовские слои антикольца будут антикольцами.

Лемма 7.3. *Равносильны следующие условия:*

1) S *— антикольцо:*

2) $S[x, \varphi]$ *— антикольцо;*

3) *каждый пирсовский слой полукольца* S *является антикольцом;*

4) *каждый пирсовский слой полукольца* $S[x, \varphi]$ *является антикольцом.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что $f + g = 0$ для некоторых ненулевых многочленов. Пусть f_i, g_j — их младшие ненулевые коэффициенты. Тогда $i = j$ и из $f_i + g_i = 0$ получаем противоречие.

2) $\Rightarrow$ 1). Полукольцо S будет антикольцом, поскольку является подполукольцом антикольца $S[x, \varphi]$.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in S/\alpha_M$ — пирсовский слой и $\bar{a}+\bar{b} = \bar{0}$. Тогда $(a + b)e = 0$ для некоторого $e \in BS \setminus M$. Из $ae + be = 0$ получаем $ae = be = 0$, откуда $\bar{a} = \bar{b} = \bar{0}$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $a + b = 0$ для $a, b \in S$. Тогда $\hat{a}(M) + \hat{b}(M) = \hat{0}(M)$ в каждом пирсовском слое S/α_M. В силу условия получаем $\hat{a}(M) = \hat{0}(M)$ для каждого $M \in \operatorname{Max} BS$. Но тогда $\hat{a}$ — нулевое сечение, поэтому $a = 0$ по [27, теорема 4.2.13].

2) $\Leftrightarrow$ 4). Очевидно в силу доказанной равносильности 1) $\Leftrightarrow$ 3). Лемма доказана. $\square$

Определение 7.6. Полукольцо называется *слабо симметрическим*, если для любых $a, b, c, d \in S$ выполняется $bc = bd \Leftrightarrow cb = db$

Определение 7.7. Полукольцо S называется *arp-полукольцом*, если оно *регулярно* (для любого $a \in S$ разрешимо уравнение $axa = a$), *положительно* (элемент $a + 1$ обратим в S для любого $a \in S$), и каждый его идемпотент e централен (абелево); *arp*-полукольцо называется *булевым*, если каждый его идемпотент дополняем.

Со структурной теорией *arp*-полуколец можно познакомиться в [5], пучковые представления *arp*-полуколец рассмотрены в [27, §5.3].

Теорема 7.1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$ и $R = S[x, \varphi]$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если S — регулярное слабо симметрическое полукольцо, любой идемпотент которого является центральным дополняемым*

идемпотентом, то каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля, в котором каждый левый m-идеал является главным;

2) *если S — булево полукольцо, то каждый пирсовский слой полукольца R является антикольцом без делителей нуля, в котором каждый левый m-идеал является главным.*

Доказательство. 1) Пусть S — полукольцо, указанное в формулировке. По [15, предложение 9] каждый пирсовский слой S/α_M полукольца S является полукольцом с делением. Покажем, что $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ — полукольцо без делителей нуля. Пусть $f = f_i x^i + \ldots$, $g = g_j x^j + \ldots$ — такие ненулевые многочлены из $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$, что $fg = 0$, и $f_i, g_j \neq 0$ — их младшие коэффициенты. Тогда $f_i \bar{\varphi}^i(g_j) = 0$. Случай $i = 0$ влечет $f_i g_j = 0$, поэтому невозможен. Если $i \neq 0$, то $\bar{\varphi}^i(g_j) = 0$, откуда $\bar{\varphi}(a) = 0$ для некоторого $a \neq 0$. Тогда $\bar{\varphi}(1) = \bar{\varphi}(a^{-1})\bar{\varphi}(a) = 0$, противоречие, поскольку произвольный пирсовский слой является полукольцом с ненулевой единицей, а эндоморфизм $\bar{\varphi}$ сохраняет единицу. Обозначим через F полукольцо с делением S/α_M, и пусть B — произвольный ненулевой левый m-идеал полукольца $F[x, \bar{\varphi}]$. Соответствующая ему $\bar{\varphi}$-цепь коэффициентных левых идеалов имеет вид либо $F, F, \ldots$, либо $0, \ldots, 0, F, F, \ldots$ с первым идеалом F на k-ом месте. В первом случае $B = F[x, \bar{\varphi}]$, во втором $B = (x^{k-1})$, и B — главный левый идеал. Применение предложения 7.1, пункты 2) и 3), завершает доказательство.

2) По [15, предложение 10, лемма 7] все пирсовские слои S/α_M полукольца S являются антикольцами с делением. Далее доказательство аналогично пункту 1), с учетом леммы 7.3. □

8. Пирсовские слои полуколец с условиями на аннуляторы

Рассматриваются строго риккартовы и риккартовы полукольца с некоторыми дополнительными условиями. Даются характеризации полуколец косых многочленов над такими полукольцами, в частности, в терминах пирсовских слоев.

Лемма 8.1. *Пусть S — полукольцо, A — идеал кольца BS. Тогда равносильны условия:*

1) $D(A)$ — *открыто-замкнутое в* $\operatorname{Max} BS$ *множество;*
2) A — *главный идеал кольца* BS.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $D(A)$ — открыто-замкнутое множество в $\operatorname{Max} BS$. Тогда $A \nsubseteq M$ для любого $M \in D(A)$, поэтому найдется элемент $e_M \in A \setminus M$. Семейство $\{D(e_M) \colon M \in D(A)\}$ покрывает $D(A)$. Пространство $\operatorname{Max} BS$ компактно, $D(A)$ замкнуто, поэтому выберем конечное подпокрытие $\{D(e_1), \ldots, D(e_k)\}$. Получаем $D(A) = D(e_1) \cup \ldots \cup D(e_k) = D(e)$ для элемента $e = e_1 \vee \ldots \vee e_k$, и A порождается как идеал в BS элементом e.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A = eBS$ для некоторого $e \in BS$. Тогда $D(e) \cap D(e^{\perp}) = \varnothing$ и $D(e) \cup D(e^{\perp}) = \operatorname{Max} BS$, следовательно, $D(A) = D(e)$ — открыто-замкнуто в $\operatorname{Max} BS$. $\square$

Определение 8.1. Элемент $s \in S$ называется *левым уравнителем* элементов $a, b \in S$, если $sa = sb$.

Множество $\mathrm{eq}_l(a, b) = \{s \in S : sa = sb\}$ всех левых уравнителей элементов $a, b \in S$ является левым идеалом полукольца S.

Определение 8.2. Полукольцо S называется полукольцом *без левых уравнителей*, если $\mathrm{eq}_l(a,b) = 0$ для любых различных $a, b \in S$.

Правосторонние понятия определяются симметричным образом, правый уравнитель обозначается $\mathrm{eq}_r(a,b)$.

Определение 8.3. Полукольцо S называется *строго риккартовым слева*, если любых элементов $a, b \in S$ их левый уравнитель $\mathrm{eq}_l(a,b)$ порождается как левый идеал центральным дополняемым идемпотентом из S. *Строго риккартово справа* полукольцо определяется симметричным образом.

Лемма 8.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *полукольцо строго риккартово слева в точности тогда, когда оно строго риккартово справа;*

2) *строго риккартово слева полукольцо является слабо симметрическим.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathrm{eq}_l(a,b) = Se$, $e \in BS$, и $r \in \mathrm{eq}_l(a,b)$. Тогда $r = se$ для некоторого $s \in S$. Из $ea = eb$ следует $ae = be$, $aes = bes$ и $ar = br$ в силу центральности e. Показали включение $\mathrm{eq}_l(a,b) \subseteq \mathrm{eq}_r(a,b)$. Аналогичными рассуждениями доказывается обратное включение, поэтому $\mathrm{eq}_r(a,b) = eS$.

2) В силу пункта 1) получаем слабую симметричность:

$$ac = bc \Leftrightarrow c \in \mathrm{eq}_r(a,b) \Leftrightarrow c \in \mathrm{eq}_l(a,b) \Leftrightarrow ca = cb.$$

Лемма доказана. □

Учитывая лемму 8.2, договоримся в дальнейшем употреблять термин *строго риккартово полукольцо*.

В [17, теорема 1] получено описание строго риккартовых полуколец с использованием слабой симметричности и топологических свойств пирсовского пучка. Сейчас мы дадим новую характеризацию строго риккартовых полуколец.

Предложение 8.1. *Полукольцо S строго риккартово тогда и только тогда, когда каждый пирсовский слой S/α_M — полукольцо без левых (равносильно, правых) уравнителей и $eq_l(a,b) \cap BS$ — главный идеал кольца BS для любых $a, b \in S$.*

Доказательство. Пусть S — строго риккартово полукольцо, S/α_M — его произвольный пирсовский слой. Пусть $\hat{d}(M)\hat{a}(M) = \hat{d}(M)\hat{b}(M)$ для $d, a, b \in S$. Допустим, $\hat{d}(M) \neq \hat{0}(M)$. По свойствам пучков сечения $\widehat{da}$ и $\widehat{db}$ совпадают на некоторой открытой окрестности точки M. Тогда эти сечения совпадают и на некоторой открыто-замкнутой (например, базисной) окрестности U точки M. Пусть $\hat{u}$ — характеристическое сечение множества U, совпадающее с единичным сечением на U и с нулевым на $\operatorname{Max} BS \setminus U$. По условию $\mathrm{eq}_l(ua, ub) = Se$ для некоторого $e \in BS$. Заметим, что $uda = udb$, поскольку на U равны сечения $\widehat{da}$ и $\widehat{db}$, а на $\operatorname{Max} BS \setminus U$ выполняется $\hat{u} = \hat{0}$. Элемент u — центральный в S, поэтому $d \in \mathrm{eq}_l(ua, ub)$, откуда получаем $d = de$. Сечение $\hat{e}$ в каждом пирсовском слое принимает либо нулевое, либо единичное значение, и так как $\hat{0}(M) \neq \hat{d}(M) = \hat{d}(M)\hat{e}(M)$, то $\hat{e}(M) = \hat{1}(M)$. Имеем $\hat{a}(M) = \hat{e}(M)\hat{u}(M)\hat{a}(M) = \hat{e}(M)\hat{u}(M)\hat{b}(M) = \hat{b}(M)$, следовательно, пирсовский слой S/α_M — полукольцо без левых уравнителей. Далее, если $f \in \mathrm{eq}_l(a,b) \cap BS$, то для некоторого $s \in S$ выполняется $f = se$, откуда $fe = f$. Значит, $\mathrm{eq}_l(a,b) \cap BS$ — главный идеал в BS. Необходимость доказана.

Обратно. Пусть a, b — произвольные элементы из S. Обозначим через $A = \mathrm{eq}_l(a,b) \cap BS$ — идеал кольца BS, а через U — множество всех точек пространства $\operatorname{Max} BS$, в которых совпадают сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$. Справедливы импликации:

$$M \in U \Leftrightarrow \hat{a}(M) = \hat{b}(M) \Leftrightarrow ea = eb \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M$$
$$\Leftrightarrow A \nsubseteq M \Leftrightarrow M \in D(A),$$

поэтому $U = D(A)$. По условию A — главный идеал в BS, поэтому по лемме 8.1 U — открыто-замкнутое множество в $\operatorname{Max} BS$. Рассмотрим характеристическое сечение множества U, равное $\hat{1}$ на U и $\hat{0}$ на $\operatorname{Max} BS \setminus U$. Ясно, что оно имеет вид $\hat{e}$ для некоторого $e \in BS$. Поскольку $\hat{e}\hat{a} = \hat{e}\hat{b}$, то $e \in \mathrm{eq}_l(a, b)$. Пусть $s \in \mathrm{eq}_l(a, b)$, тогда $\hat{s}\hat{a} = \hat{s}\hat{b}$. По условию пирсовские слои — полукольца без левых уравнителей, следовательно, $\hat{s}(N) = \hat{0}(N)$ для каждого $N \notin U$. Отсюда получаем $\hat{s}\hat{e} = \hat{s}$, $se = s$, и $\mathrm{eq}_l(a, b) = Se$. Показали, что S — строго риккартово полукольцо. □

Замечание 8.1. Достаточное условие в предложении 8.1 симметрично, поскольку $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS = \mathrm{eq}_r(a, b) \cap BS$.

Определение 8.4. Пусть $R = S[x, \varphi]$, $f = f_0 + f_1x + \ldots, g = g_0+g_1x+\ldots \in R$ и $f_i \neq g_i$ — первая пара различных коэффициентов у f, g. Многочлены $\tilde{f} = f_ix^i + f_{i+1}x^{i+1} + \ldots, \tilde{g} = g_ix^i + g_{i+1}x^{i+1} + \ldots$ назовем *подходящей парой для* f и g. Если $\deg f < \deg g$ и $f_i = g_i$ для всех $i \le \deg f$, то $\tilde{f} = 0, g = f + \tilde{g}$.

Определение 8.5. Полукольцо $R = S[x, \varphi]$ назовем *полукольцом многочленов без левых (правых) слабых уравнителей*, если нулевой многочлен, и только он, является левым (правым) уравнителем подходящей пары многочленов $\tilde{f}, \tilde{g}$ для любых различных $f, g \in R$.

Предложение 8.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *S — полукольцо без левых (правых) уравнителей тогда и только тогда, когда R — полукольцо без левых (правых) слабых уравнителей;*

2) *если S — аддитивно сократимое полукольцо и R — полукольцо без левых (правых) слабых уравнителей, то R — полукольцо без левых (правых) уравнителей.*

Доказательство. 1) Пусть S — полукольцо без левых уравнителей, $f = f_0 + \ldots + f_i x^i + \ldots$, $g = g_0 + \ldots + g_i x^i + \ldots$ — неравные многочлены из R. Предположим, $h \neq 0$, h_j — первый отличный от нуля его коэффициент, f_i, g_i — первая пара различных коэффициентов многочленов f и g соответственно, и $h\tilde{f} = h\tilde{g}$. Сравнивая младшие коэффициенты многочленов $h\tilde{f}$ и $h\tilde{g}$, получаем $h_j\varphi^j(f_i) = h_j\varphi^j(g_i)$. Поскольку $f_i \neq g_i$ влечет $\varphi^j(f_i) \neq \varphi^j(g_i)$ в силу инъективности φ, то $h_j = 0$. Противоречие показывает, что R — полукольцо без левых слабых уравнителей. Обратная импликация доказывается, если различные элементы из S рассмотреть как подходящую пару многочленов нулевой степени.

2) Пусть S — аддитивно сократимое полукольцо, многочлены h, f, g как и в доказательстве пункта 1), и для них выполняется $hf = hg$. Рассмотрим члены многочленов hf и hg степени $j + i$. Имеем

$$h_j\varphi^j(f_i) + \ldots + h_{j+i}\varphi^{j+i}(f_0) = h_j\varphi^j(g_i) + \ldots + h_{j+i}\varphi^{j+i}(g_0).$$

Учитывая равенство начальных коэффициентов многочленов f и g и пользуясь аддитивной сократимостью, получаем $h_j\varphi^j(f_i) = h_j\varphi^j(g_i)$, противоречие как и в пункте 1), следовательно, R — полукольцо без левых уравнителей.

Доказательства правосторонних случаев принципиально не отличается от левосторонних. После умножения на многочлен h справа, мы в обоих пунктах приходим к равенству $f_i\varphi^i(h_j) = g_i\varphi^i(h_j)$, все остальные рассуждения повторяются. $\square$

Теорема 8.1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Рассмотрим следующие условия:*

1) *$R = S[x, \varphi]$ — строго риккартово полукольцо;*

2) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без левых (равносильно, правых) уравнителей и $\mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любых $f, g \in R$;*

3) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без левых (равносильно, правых) слабых уравнителей и $\mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любых $f, g \in R$;*

4) *каждый пирсовский слой полукольца S является полукольцом без левых (равносильно, правых) уравнителей и $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS$ является главным идеалом кольца BS для любых $a, b \in S$;*

5) *S — строго риккартово полукольцо.*

Тогда 1) $\Leftrightarrow$ 2), 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5), 2) $\Rightarrow$ 3). *Если S — аддитивно сократимое полукольцо (в частности, кольцо), то все пять условий равносильны.*

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) и 4) $\Leftrightarrow$ 5) доказываются прямым применением предложения 8.1, импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

3) $\Leftrightarrow$ 4). Пусть каждый пирсовский слой R/ρ_M — полукольцо без левых слабых уравнителей. По предложению 7.1 это равносильно тому, что для любого пирсовского слоя S/α_M полукольцо косых многочленов $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ является полукольцом без левых слабых уравнителей, а это равносильно по предложению 8.2 условию, что

каждый пирсовский слой полукольца S/α_M является полукольцом без левых уравнителей.

Покажем сейчас равносильность условий с уравнителями. Если $a, b \in S$, то, рассматривая их как многочлены из R, получаем $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BR = eBR$ для некоторого $e \in BR$, а с учетом предложения 4.4 $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS = eBS$. Обратно, пусть каждый пирсовский слой S/α_M — полукольцо без левых уравнителей и $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS$ — главный идеал в BS для любых $a, b \in S$. Пусть $f = a_0 + \ldots + a_k x^k$ и $g = b_0 + \ldots + b_k x^k$, $k = \max(\deg f, \deg g)$, — произвольные многочлены из R. По условию $\mathrm{eq}_l(a_i, b_i) \cap BS = e_i BS$ для подходящих $e_i \in BS$, $i = 0 \ldots, k$. Положим $e = e_0 \cdot \ldots \cdot e_k$. Очевидно, $e \in \mathrm{eq}_l(f, g) \cap BS = \mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$. Если $u \in \mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$, то $ua_i = ub_i$, поэтому $u = e_i u$ для всех $i = 0, \ldots, k$. Получаем $u = e_0 \cdot \ldots \cdot e_k u = eu$, и $\mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR = eBR$.

Наконец, в силу предложения 8.2 для аддитивно сократимого полукольца S справедлива импликация 3) $\Rightarrow$ 2). □

Похожая схема применяется при доказательства утверждения для риккартовых полуколец без нильпотентных элементов.

Теорема 8.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *$R = S[x, \varphi]$ — риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов;*

2) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(f) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любого $f \in R$;*

3) *каждый пирсовский слой полукольца S является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(a) \cap BS$ является главным идеалом кольца BS для любого $a \in S$;*

4) S — *риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов.*

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2). Из [17, предложения 4] условие 1) равносильно тому, что все пирсовские слои R/ρ_M — полукольца без делителей нуля и $D(\mathrm{ann}_l(f) \cap BR)$ — открыто-замкнуто в $\mathrm{Max}\, BR$. Стандартно проверяется, что $\mathrm{ann}_l(f) \cap BR$ является идеалом кольца BR, причем, главным по лемме 8.1.

2) $\Rightarrow$ 3). По предложению 7.1 $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ является полукольцом без делителей нуля для каждого пирсовского слоя S/α_M. Очевидно, что S/α_M — полукольцо без делителей нуля. По предложению 4.4 $BR = BS$, поэтому $\mathrm{ann}_l(a) \cap BS$ является главным идеалом кольца BS для любого $a \in S$.

3) $\Rightarrow$ 2). Непосредственно проверяется, что полукольцо косых многочленов с инъективным эндоморфизмом над полукольцом без делителей нуля является полукольцом без делителей нуля. Поэтому каждый пирсовский слой $R/\rho_M \cong (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ — полукольцо без делителей нуля. Условие на аннуляторы доказывается также, как и аналогичное утверждение об уравнителях в теореме 8.1, поскольку $\mathrm{ann}_l(a) = \mathrm{eq}_l(a, 0)$.

3) $\Leftrightarrow$ 4) по [17, предложение 4]. $\square$

Лемма 8.3. *Пусть S — риккартово слева полукольцо, в котором каждый дополняемый идемпотент централен, φ — такой инъективный эндоморфизм полукольца S, что $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$ и $\varphi(d)$ — обратимый элемент для любого неделителя нуля $d \in S$. Тогда для каждого $M \in Max\, BS$ эндоморфизм φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ пирсовского слоя S/α_M, S/α_M — $\bar{\varphi}$-жесткое полукольцо и $\bar{\varphi}(\bar{a})$ обратим в S/α_M для любого ненулевого $\bar{a} \in S/\alpha_M$.*

Доказательство. Для произвольного $a \in S$ положим $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$ — образ элемента $\varphi(a)$ при естественном эпиморфизме $h : S \to S/\alpha_M$. Стандартно проверяется, что $\bar{\varphi}$ является эндоморфизмом слоя S/α_M. Если $a, b \in S$, то получаем цепочку импликаций

$$\begin{aligned}&\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{\varphi}(\bar{b}) \Rightarrow \overline{\varphi(a)} = \overline{\varphi(b)}\\ &\Rightarrow \varphi(a)e = \varphi(b)e \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M\\ &\Rightarrow \varphi(ae) = \varphi(be) \Rightarrow ae = be \Rightarrow \bar{a} = \bar{b},\end{aligned}$$

поэтому $\bar{\varphi}$ инъективен. Пусть $\bar{a} \in S/\alpha_M$ и $\bar{a} \neq \bar{0}$. По лемме 2.3 $a = ed$ для некоторых $e \in BS$ и неделителя нуля $d \in S$. Образ центрального дополняемого идемпотента при естественном эпиморфизме h — либо нуль, либо единица слоя S/α_M, и ясно, что в нашем случае $h(e) = \bar{1}$. Поэтому $\bar{a} = h(a) = h(ed) = \bar{d}$. По условию $\varphi(d)$ обратим в S, поэтому $\overline{\varphi(d)} = \bar{\varphi}(\bar{d})$ обратим в слое S/α_M. Следовательно, $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{\varphi}(\bar{d})$ обратим в S/α_M. Наконец, покажем, что эндоморфизм $\bar{\varphi}$ жесткий. Пусть $\bar{a}\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{0}$, и $a = ed$ для $e \in BS$ и неделителя нуля $d \in S$. Если $\bar{e} = \bar{0}$, то $\bar{a} = \bar{0}$, и все доказано. Если $\bar{e} = \bar{1}$, то $\bar{d}\bar{\varphi}(\bar{d}) = \bar{0}$, откуда $\bar{d} = \bar{0}$, $\bar{a} = \bar{0}$, и S/α_M — $\bar{\varphi}$-жесткое полукольцо. □

В предыдущей главе была доказана теорема о характеризации риккартова слева левого полукольца Безу (теорема 6.3). Дополним эту теорему утверждением о структуре пирсовских слоев такого полукольца.

Теорема 8.3. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами, $R = S[x, \varphi]$. Тогда равносильны утверждения:*

1) *R — полукольцо без нильпотентных элементов и каждый конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;*

2) *S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$;*

3) *каждый пирсовский слой S/α_M является $\bar{\varphi}$-жестким левым полукольцом Безу без делителей нуля, для любого ненулевого $\bar{a} \in S/\alpha_M$ элемент $\bar{\varphi}(\bar{a})$ обратим в S/α_M и для любого $b \in S$ $ann_l(b) \cap BS$ — главный идеал в BS.*

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2). Доказано в теореме 6.3.

2) $\Leftrightarrow$ 3). Полукольцо S является левым полукольцом Безу в точности тогда, когда каждый пирсовский слой S/α_M является левым полукольцом Безу [16, теорема 5]. Полукольцо S риккартово слева тогда и только тогда, когда каждый пирсовский слой является полукольцом без делителей нуля и для любого $b \in S$ $\mathrm{ann}_l(b) \cap BS$ — главный идеал в BS [17, предл. 4]. Если выполнен пункт 2), то произвольный пирсовский слой S/α_M является $\bar{\varphi}$-жестким по лемме 8.3. Если выполнен пункт 3) и $a\varphi(a) = 0$, то $\bar{a}\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{0}$ в каждом пирсовском слое. Тогда получаем $\bar{a} = \bar{0}$ в каждом пирсовском слое. В силу изоморфности пирсовского представления произвольного полукольца отсюда следует $a = 0$, и S — φ-жесткое полукольцо. □

9. Характеризация квазибэровских полуколец

В параграфе вводится квазибэровское полукольцо, находятся его характеризации и характеризации полукольца многочленов над ним.

Определение 9.1. Полукольцо S назовем *квазибэровским*, если для любого идеала A из S $\mathrm{ann}_l(A) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$.

Квазибэровские кольца были определены в [33].

Лемма 9.1. *Для полукольца S равносильны утверждения:*

1) *S — квазибэровское полукольцо;*

2) *для любого левого идеала L $\mathrm{ann}_l(L) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$;*

3) *для любого правого идеала R $\mathrm{ann}_r(R) = eS$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$;*

4) *для любого идеала A $\mathrm{ann}_r(A) = eS$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть L — левый идеал в S, тогда LS — идеал, и тогда $\mathrm{ann}_l(L) = \mathrm{ann}_l(LS) = Se$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна.

Такими же рассуждениями доказывается 3) $\Leftrightarrow$ 4).

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть R — правый идеал, тогда $\mathrm{ann}_r(R)$ — идеал, поэтому $\mathrm{ann}_l(\mathrm{ann}_r(R)) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$. Следовательно,

$$\mathrm{ann}_r(R) = \mathrm{ann}_r(\mathrm{ann}_l(\mathrm{ann}_r(R))) = \mathrm{ann}_r(Se) = e^{\perp}S.$$

Импликация 4) $\Rightarrow$ 2) доказывается симметрично предыдущей импликации. □

Предложение 9.1. *Пусть S — φ-жесткое полукольцо. Равносильны утверждения:*

1) *S — квазибэровское полукольцо;*

2) *$S[x, \varphi]$ — квазибэровское полукольцо.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть S — квазибэровское полукольцо, φ — жесткий эндоморфизм. Пусть A — идеал из $R = S[x, \varphi]$. Рассмотрим левый идеал C всех коэффициентов многочленов из A. По лемме 9.1 $\mathrm{ann}_{l,S}(C) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$. Пусть $f \in \mathrm{ann}_{l,R}(A)$, $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, и пусть c — произвольный элемент из C. Тогда c является коэффициентом некоторого многочлена $g = g_0 + \ldots + g_n x^n \in A$. Покажем, что $f_i g_j = 0$ для всех коэффициентов многочленов f, g. Из $f_0 g_0 = 0$ и $f_0 g_1 + f_1 \varphi(g_0) = 0$ получаем $f_0 g_1 \varphi(f_0 g_1) + f_1 \varphi(g_0) \varphi(f_0) \varphi(g_1) = 0$. В силу жесткости φ условие $ab = 0$ равносильно условию $\varphi^i(a)\varphi^j(b) = \varphi^j(b)\varphi^i(a) = 0$ для любых целых $i, j \geq 0$ [13, лемма 3], поэтому $\varphi(g_0)\varphi(f_0) = 0$, откуда $f_0 g_1 \varphi(f_0 g_1) = 0$ и $f_0 g_1 = 0$. Пусть $f_0 g_j = 0$ для всех $j < r$. Имеем $f_0 g_r + f_1 \varphi(g_{r-1}) + \ldots + f_r \varphi^r(g_0) = 0$. Рассуждая как и выше, замечаем, что каждое слагаемое, начиная со второго, обнуляется при умножении справа на $\varphi(f_0 g_r)$. Следовательно, $f_0 g_r = 0$, и по индукции $f_0 g_j = 0$ для любого коэффициента многочлена g. Вновь индукцией получаем, что $f_i g_j = 0$ для всех коэффициентов многочленов f, g. Тогда каждый коэффициент многочлена f обнуляет при умножении слева произвольно выбранный элемент $c \in C$, поэтому $f_i \in \mathrm{ann}_{l,S}(C)$, что дает нам $f_i = f_i e$. Далее, $f_i e^{\perp} = 0$ влечет $f_i \varphi^i(e^{\perp}) = 0$. Отсюда $f e^{\perp} = 0$, следовательно, $fe = f$, и $\mathrm{ann}_{l,R}(A) \subseteq Re$. Для любого $h \in R$ очевидно выполняется $he \in \mathrm{ann}_{l,R}(A)$. Таким образом, R — квазибэровское полукольцо.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть R — квазибэровское полукольцо и A — идеал полукольца S. Рассмотрим правый идеал $B = A[x, \varphi]$ полукольца R. По условию $\mathrm{ann}_{r,R}(B) = eR$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in R$. Предположим, что $e = e_0 + \ldots + e_n x^n$, причем, $n > 0$, $e_n \neq 0$. Тогда $e_n \varphi^n(e_n) = 0$, откуда следует $e_n = 0$, противоречие. Значит, $e \in S$, и по лемме 2.2 $e \in BS$. В силу пункта 3)

леммы 2.2 выполняется включение $eS \subseteq \mathrm{ann}_{r,S}(A)$. Пусть $Ad = 0$ для некоторого $d \in S$. Если $f = f_0 + \ldots + f_k x^k \in B$, то для любого i имеем $f_i d = 0$, следовательно, $f_i \varphi^i(d) = 0$ по [13, лемма 1], поэтому $fd = 0$. Получаем $d = eh$ для некоторого $h \in R$, откуда $ed = e^2 h = d$. Доказали обратное включение, поэтому $\mathrm{ann}_{r,S}(A) = eS$. По лемме 9.1 S — квазибэровское полукольцо. $\square$

Напомним [19, гл. V, § 4], что идеал булевой алгебры называется *полным*, если он содержит точные верхние грани всех своих подмножеств. Полный идеал булевой алгебры является главным.

Определение 9.2. Полукольцо называется *бирегулярным*, если каждый главный идеал порождается центральным дополняемым идемпотентом.

Предложение 9.2. *Пусть S — коммутативное в нуле полукольцо. Тогда равносильны утверждения:*

1) *S — квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала A из S $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$;*

2) *S — бирегулярное полукольцо без нильпотентных элементов и любой максимальный идеал M булевой алгебры BS является полным;*

3) *каждый пирсовский слой S/α_M, $M \in \mathrm{Max}\, BS$, — простое полукольцо без делителей нуля и M — полный идеал в BS.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $(P(S), \mathrm{Max}\, BS)$ — пирсовский пучок полукольца S. Пучок $P(S)$ является компактным (терминологию и основные результаты о компактных пучках полуколец см. в [27, § 4.1]). Пусть A_M — произвольный максимальный идеал пирсовского слоя S/α_M. Полный прообраз $h_M^{-1}(A_M)$, где $h_M : S \to S/\alpha_M$ — канонический эпиморфизм, есть максимальный идеал A

полукольца S [27, предложение 4.1.6]. По условию $\mathrm{ann}_l(A) = Se$ для некоторого ненулевого дополняемого идемпотента, а поскольку S коммутативно в нуле, то $e \in BS$. Ясно, что $e \notin A$, поэтому $\hat{e}(M) = \hat{1}(M)$. Из $\hat{e}(M)A_M = \hat{0}(M)$ получаем, что A_M — нулевой идеал слоя S/α_M, поэтому произвольный пирсовский слой полукольца S — простое полукольцо. Предположим сейчас, что пирсовский слой S/α_M содержит делители нуля: $\hat{b}(M)\hat{a}(M) = \hat{0}(M)$ для ненулевых $\hat{b}(M), \hat{a}(M)$. Тогда $baf = 0$ для некоторого $f \in BS \setminus M$. Заметим, что $\hat{f}(M) = \hat{1}(M)$, поэтому $\hat{f}(M)\hat{b}(M) \neq \hat{0}(M)$ и $fb \neq 0$. В силу коммутативности в нуле $fb \in \mathrm{ann}_l(Sa) = Se$ для некоторого ненулевого $e \in BS$, следовательно, $fb = se$. Если $\hat{e}(M) = \hat{0}(M)$, то $\hat{b}(M) = \hat{f}(M)\hat{b}(M) = \hat{0}(M)$, противоречие, поэтому $\hat{e}(M) = \hat{1}(M)$. Из $ea = 0$ получаем $\hat{0}(M) = \hat{e}(M)\hat{a}(M) = \hat{1}(M)\hat{a}(M) = \hat{a}(M)$, противоречие. Следовательно, любой пирсовский слой полукольца S — полукольцо без делителей нуля. Пусть $M \in \mathrm{Max}\, BS$. Рассмотрим сначала случай, когда $\{e_i\}$ — множество всех ненулевых элементов из M. Тогда $\mathrm{ann}_l(SM) = Se$ для некоторого $e \in BS$. В силу простоты идеала M либо $e \in M$, либо $e^\perp \in M$. Но в первом случае $e = ee = 0$, противоречие. Поэтому $e^\perp \in M$, и стандартно проверяется, что $e^\perp$ является точной верхней гранью множества $\{e_i\}$. Пусть сейчас $\{e_j\}$ — произвольное подмножество идемпотентов из M, и A — идеал в S, порождаемый множеством $\{e_j\}$. Получаем $\mathrm{ann}_l(A) = Sf$ для некоторого $f \in BS$, откуда $A \subseteq Sf^\perp$, и $f^\perp$ — верхняя грань множества $\{e_j\}$. Пусть $g \in BS$ и g — верхняя грань множества $\{e_j\}$. Тогда для любого j получаем $g^\perp e_j \leq g^\perp g = 0$, откуда $g^\perp \in \mathrm{ann}_l(A) = Sf$ и $g^\perp = sf$ для некоторого $s \in S$. Далее, $g^\perp f = sf^2 = g^\perp$, потому $g^\perp \leq f$, откуда $f^\perp \leq g$. Показали, что $f^\perp$ — точная верхняя грань множества $\{e_j\}$. Кроме того, из $f^\perp \leq e^\perp$ получаем $f^\perp \in M$, следовательно, M — полный идеал булевой алгебры BS.

3) $\Rightarrow$ 2). Следует из [17, теорема 3].

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A — произвольный идеал бирегулярного полукольца S. В бирегулярном полукольце каждый идеал порождается некоторым множеством центральных дополняемых идемпотентов [27, предложение 3.2.10]. Пусть $K = \{e_i\} \subseteq BS$ — множество всех центральных дополняемых идемпотентов, лежащих в A. Непосредственно проверяется, что K является идеалом булевой алгебры BS. Поскольку K есть пересечение всех максимальных идеалов из BS, содержащих K, и каждый из них полон, то K содержит центральный дополняемый идемпотент $e = \sup\{e_i\}$. Ясно, что $A = Se$, и поэтому $\mathrm{ann}_l(A) = Se^{\perp}$. Показали, что S — квазибэровское полукольцо. Если дополнительно A — максимальный идеал в S, то $e \neq 1$ и $\mathrm{ann}_l(A) = Se^{\perp}$ для ненулевого дополняемого идемпотента $e^{\perp}$. □

Теорема 9.1. *Пусть S — φ-жесткое полукольцо и M — полный идеал для любого $M \in Max\,BS$. Тогда равносильны условия:*

1) $R = S[x, \varphi]$ *— квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала A из S $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$;*

2) S *— квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала A из S $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$;*

3) S *— бирегулярное полукольцо без нильпотентных элементов;*

4) *каждый пирсовский слой полукольца S является простым полукольцом без делителей нуля.*

Доказательство. По лемме 2.2 φ-жесткое полукольцо является коммутативным в нуле.

1) $\Leftrightarrow$ 2) по предложению 9.1.

2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) по предложению 9.2. □

10. Пирсовские слои нётеровых полуколец

В данном параграфе исследуются пирсовские слои нётерова слева полукольца. Получена характеризация полукольца S через свойства пирсовских слоев этого полукольца, а также через свойства пирсовских слоев полукольца косых многочленов с коэффициентами из S.

Легко проверить, что пирсовские слои нётерова слева полукольца являются нётеровыми слева. Обратное не верно.

Пример 10.1. Рассмотрим булеан бесконечного множества. В зависимости от задания аддитивной операции его можно представить либо как булеву решетку, либо как булево кольцо. В обоих случаях пирсовские слои будут состоять из двух элементов. Поскольку множество всех конечных подмножеств из этого полукольца образует идеал, не являющийся конечно порожденным, то получаем, что нётеровость (и даже конечность) пирсовских слоев полукольца S не влечет нётеровости S.

Предложение 10.1. *Полукольцо S нётерово слева (справа) в точности тогда, когда все пирсовские слои полукольца S нётеровы слева (справа) и S — полукольцо с конечным множеством центральных дополняемых идемпотентов.*

Доказательство. Пусть BS — бесконечная булева алгебра центральных дополняемых идемпотентов. Известно, см., например, [19, §4, с. 238], что условие обрыва возрастающих цепей в булевой алгебре влечет ее конечность. Поэтому в BS существует бесконечная возрастающая цепь $e_1 < e_2 < \ldots$, и тогда $e_1S \subset e_2S \subset \ldots$ — бесконечная возрастающая цепь идеалов в полукольце S. Показали, что нётеровость S влечет конечность BS. Очевидно, что факторполукольцо нётерового полукольца нётерово.

Обратно, пусть множество BS конечно, $\operatorname{Max} BS = \{M_1, \ldots, M_k\}$ и каждый пирсовский слой S/α_i, $i = 1, \ldots, k$, — нётерово слева полукольцо. Пусть A — произвольный левый идеал полукольца S. Образ A при естественном эпиморфизме на слой S/α_i является левым идеалом A_i с образующими $\hat{a}_{i1}(M_i), \ldots, \hat{a}_{in}(M_i)$ для некоторых элементов $a_{ij} \in S$. Для удобства записи будем считать, что системы образующих $\hat{a}_{ij}(M_i)$ левых идеалов A_i состоят из одинакового числа элементов, независимо от слоя S/α_i; этого можно добиться, добавив при необходимости в системы образующих нулевые элементы. Покажем, что множество $T = \{a_{ij} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$ порождает левый идеал A. Пусть $a \in A$. Тогда $\hat{a}(M_i) = (\hat{s}_{i1}\hat{a}_{i1} + \ldots + \hat{s}_{in}\hat{a}_{in})(M_i) = \hat{a}_i(M_i)$. По свойствам пучков сечения $\hat{a}$ и $\hat{a}_i$ совпадают на некоторой открытой окрестности U_i точки M_i. Нульмерность базисного пространства $\operatorname{Max} BS$ позволяет выбрать окрестности открыто-замкнутыми, а конечность — считать их попарно не пересекающимися. Итак, пусть имеется разбиение $\operatorname{Max} BS$ на $V_1, \ldots, V_m$ и соответствующее им множество элементов: $T_a = \{a'_{11}, \ldots, a'_{1n}, \ldots, a'_{m1}, \ldots, a'_{mn}\} \subseteq T$. Пусть

$$\chi_i = \begin{cases} \hat{1} \text{ на } V_i \\ \hat{0} \text{ на } \operatorname{Max} BS \setminus V_i \end{cases}$$

— характеристическое сечение открыто-замкнутого множества V_i, и пусть $t_i \in S$ — такой элемент, что глобальные сечения $\hat{t}_i$ и χ_i совпадают. Непосредственно проверяется, что глобальное сечение $\hat{a}$ совпадает с глобальным сечением элемента $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_i s'_{ij} a'_{ij}$. Пирсовское представление произвольного полукольца изоморфно [27, теорема 4.2.13], поэтому $a = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_i s'_{ij} a'_{ij}$. Получили, что произвольный элемент выражается через представителей конечного множества T, поэтому полукольцо S — нётерово слева.

Случай правой нётеровости доказывается точно так же. □

Теорема 10.1. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, множество BS конечно. Тогда полукольцо S нётерово слева (справа) в точности тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца $R = S[x, \varphi]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых (правых) m-идеалов и множество центральных дополняемых идемпотентов каждого пирсовского слоя полукольца R конечно.*

Доказательство. Рассмотрим левосторонний случай, для правых идеалов рассуждения не изменятся.

В классе полуколец с конечными множествами центральных дополняемых идемпотентов левая нётеровость полукольца S равносильна левой нётеровости всех пирсовских слоев S/α_M по предложению 10.1.

Далее, полукольцо S/α_M нётерово слева тогда и только тогда, когда полукольцо $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых m-идеалов по теореме 3.1, а по предложению 7.1, пункты 2) и 3), этому же условию удовлетворяет и соответствующий пирсовский слой R/ρ_M. Из нётеровости полукольца S/α_M следует конечность множества $B(S/\alpha_M)$, и тогда по предложению 4.4, пункты 2) и 3) — конечность множества $B((S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}])$. По предложению 7.1, пункт 3) получаем, что множество центральных дополняемых идемпотентов слоя R/ρ_M также является конечным. Верно и обратное, конечность $B(R/\rho_M)$ влечет конечность $B(S/\alpha_M[x, \bar{\varphi}])$, а это — конечность $B(S/\alpha_M)$. □

Заключение

Основными в диссертации являются следующие результаты.

1) Описаны условия существования в некоторых видах полуколец косых многочленов главных левых m-идеалов, порождаемых неодночленом (теорема 2.1).

2) С помощью m-идеалов обобщены кольцевые теоремы или получены их аналоги для полуколец косых многочленов:

i) аналог теоремы Гильберта о базисе (теорема 3.1);

ii) теорема о полукольце косых многочленов над риккартовым слева левым полукольцом Безу с дополнительными условиями (теорема 6.3).

3) Получены характеризации следующих типов полуколец косых многочленов: без делителей нуля; коммутативных полуколец; без нильпотентных элементов и риккартовых полуколец без нильпотентных элементов (предложения 5.1 — 5.4).

4) Выделены следующие полукольца (и полукольца косых многочленов), допускающие характеризации в терминах их пирсовских слоев:

i) левое полукольцо Безу, абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное (предложение 7.2);

ii) строго риккартово полукольцо косых многочленов (теорема 8.1) и риккартово слева или справа полукольцо косых многочленов без нильпотентных элементов (теорема 8.2);

iii) квазибэровские полукольца (предложения 9.1 и 9.2) и полукольца косых многочленов над ним (теорема 9.1).

5) Описаны пирсовские слои нётерова полукольца (предложение 10.1), выявлена структура пирсовских слоев полукольца косых многочленов над нётеровым полукольцом (теорема 10.1).

Предметный указатель

Литература

[1] Бейдар К. И., Латышев В. Н., Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А. Ассоциативные кольца // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1984. Т. 22, С. 3–115.

[2] Вечтомов Е. М. О булевых кольцах // Математические заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 182–185.

[3] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Элементы функциональной алгебры: монография. В 2-х т. — Киров: Радуга-ПРЕСС. 2016. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 316 с.

[4] Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н., Чермных В.В. Элементы теории полуколец. — Киров : Радуга-ПРЕСС. 2012. 228 с.

[5] Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Чермных В. В. Абелево регулярные положительные полукольца // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 1997. Т. 20. С. 282–309.

[6] Вечтомов Е. М., Петров А. А. Полукольца с идемпотентным умножением. — Киров: Радуга-ПРЕСС. 2015. 144 с.

[7] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Полутела и их свойства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 3–54.

[8] Вечтомов Е. М., Чермных В. В. Основные направления развития теории полуколец // Вестник Сыктывкарского универси-

тета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 4 (41). С. 4–40.

[9] Гутерман А. Э. Фробениусовы эндоморфизмы пространства матриц: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: МГУ, 2009. 321 с.

[10] Ильин С. Н. О применимости двух теорем теории колец и модулей // Математические заметки. 2008. Т. 83. Вып. 4. С. 563–574.

[11] Ильин С. Н. О гомологической классификации полуколец // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 158. С. 3–22.

[12] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Математические заметки. 2001. Т. 69. № 5. С. 758–797.

[13] Масляев Д. А., Чермных В. В. Полукольца косых многочленов Лорана // Сибирские электронные матем. известия. 2020. Т. 17. С. 512–533.

[14] Марков Р. В. Пирсовское представление полуколец с инволюцией // Известия вузов. Математика. 2014. № 4. С. 18–24.

[15] Марков Р. В., Чермных В. В. О пирсовских слоях полуколец // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 2. С. 171–186.

[16] Марков Р. В., Чермных В. В. Пирсовские цепи полуколец // Вестник Сыктывкарского университета. 2012. Вып. 16. С. 88–103.

[17] Марков Р. В., Чермных В. В. Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 213–221.

[18] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1994.

[19] Общая алгебра. Т. 2. (под общей ред. Л. А. Скорнякова). М.: Наука. 1991. 480 с.

[20] Полин С. В. Простые полуполя и полутела // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 1. С. 90–101.

[21] Салавова К. Кольца с инволюцией: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — М.: МГУ, 1978.

[22] Туганбаев А. А. Кольца Безу, многочлены и дистрибутивность // Математические заметки. 2001. 70:2. С. 270–288.

[23] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009. — 472 с.

[24] Туганбаев А. А. Кольца рядов Лорана, лорановские кольца и кольца Мальцева–Неймана // Алгебра. Итоги науки и техники. Сер. Совр. мат. и ее прил. Темат. обз. 184, ВИНИТИ РАН. М. 2020. С. 3–111.

[25] Чермных В. В. Пучковые представления полуколец // Успехи матем. наук. 1993. Т. 48, № 5. С. 185–186.

[26] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец. — Киров: ВятГГУ. 2010. 224 с.

[27] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, № 3. С. 111–227.

[28] Чермных О. В. Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец. II // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 677–684.

[29] Шитов Я. Н. Линейная алгебра над полукольцами: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: МГУ, 2015. 302 с.

[30] Allen P. J., Dale L. Ideal theory in the semiring Z^+ // Publ. Math. Debrecen. 1975, 22(3–4), P. 219–224.

[31] Burgess W.D., Stephenson W. Pierce sheaves of non-commutative rings // Comm. Algebra. 1976. 39. P. 512–526.

[32] Burgess W.D., Stephenson W. Rings all of whose Pierce stalks are local // Canad. Math. Bull. 1979. 22:2. P. 159–164.

[33] Clark W. E. Twisted matrix units semigroup algebras // Duke Math. J. 1967. V.34. P. 417–424.

[34] Dale L. Monic and monic free ideals in polynomial semirings // Proc Amer. Math. Soc. 1976. V.56. P. 45–50.

[35] Dedekind R. Uber die Theorie ganzen algebraischen Zahlen // Supplement XI to P.G. Lejeune Dirichlet: Vorlessungen Uber Zahlentheorie, 4 Anfl., Druck und Verlag, Braunschweig. 1894.

[36] Georgescu G. Pierce representations of distributive lattices // Kobe J. Math. 1993. V. 10, no 1. P. 1–11.

[37] Glazek K. A Short Guide Through the Literature on Semirings // Preprint No. 39. University of Wroclaw, Math. Inst., Wroclaw. 1985.

[38] Glazek K. A Short Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Computer Science. Technical University Press. 2002.

[39] Golan J. S. The theory of semirings with applications in mathemayics and theoretical computer science // Pitman monographs and syrveys in pure and applied mathematics. V. 54. 1992 (1991).

[40] Golan J. S. Semirings and their applications. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1999.

[41] Hebisch U., Weinert H. J. Semirings: theory and applications in computer science. Series in Algebra. Vol. V. World Scientific. Singapore, 1998. 361 p.

[42] Hilbert D. Uber den Zahlbegriff // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1899. V. 8. P. 180–184.

[43] Hilbert D. Grundlagen ger Geometrie. Teubner, Leipzig. 1899. (русс. перевод: Гильберт Д. Основания геометрии. ОГИЗ, Государственное изд-во технико-теоретической литературы. Москва–Ленинград, 1948.)

[44] Keimel K. The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves. Lect. Notes Math. 248, Springer–Verlag, 1971.

[45] McConnell J. C., Robson J. C. Noncommutative Noetherian rings. Graduate studes in mathematics 2000. V. 30. 636 p.

[46] G. Mikhalkin Real algebraic curves, moment map and amoebas // Ann. of Math. 2000. V. 151. P. 309–326.

[47] O. Ore. Theory of noncommutative polynomials // Ann. of Math. 1930. V. 34. P. 480–508.

[48] Pierce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. V.70. P. 1–112.

[49] Vandiver H. S. Note on a simple type of algebra in which cancelation law of addition does not hold // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. V. 40. P. 914–920.

[50] Vechtomov E. M. Rings and sheaves // J. Math. Sciences. 1995. (74:1). P. 749–798.

[51] Weinert H. J. Uber Halbring und Halbkorper. I // Acta math. Acad, scient. hung. 1962. V. 13. no 3–4. P. 365–378.

Публикации автора по теме диссертации

[52] Бабенко М. В. О полукольце многочленов над полукольцом Безу // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 5–15.

[53] Бабенко М. В. Главные m-идеалы полукольца косых многочленов над полукольцом Безу // Математическое моделирование и информационные технологии, V Всероссийская науч. конф. с межд. участием. Сб. материалов. Сыктывкар, 09–11 декабря 2021 года. — Сыктывкар: Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, 2021. С. 17–18.

[54] Бабенко М. В. Пирсовские слои полуколец с некоторыми условиями конечности // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(40). С. 4–20.

[55] Бабенко М. В., Чермных В. В. О полукольце косых многочленов // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 23–25 мая 2018 г.): тез. докл. М. : изд. МГУ, 2018. С. 33–34.

[56] Бабенко М. В., Чермных В. В. О полукольцах косых многочленов // Фундамент. и прикл. матем. 2020. Т. 23, № 3. С. 13–21.

[57] Бабенко М. В., Чермных В. В. Пирсовские слои полуколец косых многочленов // Труды ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 48–60.

[58] Бабенко М. В., Чермных В. В. О полукольце косых многочленов над полукольцом Безу // Математические заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 323–338.

[59] Чермных В. В., Бабенко М. В. Полукольца многочленов над полукольцом Безу // Математическое моделирование и информационные технологии, IV Всероссийская науч. конф. с межд. участием. Сб. материалов. Сыктывкар, 12–14 ноября 2020 года. — Сыктывкар: Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, 2020. С. 55–56.