На правах рукописи

Бабенко Марина Владимировна

ПОЛУКОЛЬЦА КОСЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург 2022 г.

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики
ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Чермных Василий Владимирович
Официальные оппоненты:	Кожухов Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники» Ильин Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Защита диссертации состоится 00 2022 г. в __:__ часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.05 на базе ИММ УрО РАН по адресу: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте http://www.imm.uran.ru/.

Автореферат разослан «_00_» _мая_ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 004.006.05, к.ф.-м.н. Белоусов Иван Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В работе мы используем термин «полукольцо» в соответствии с определением Дж. Голана. Как указано в его монографии[1], впервые термин полукольцо появился в 1934 г. в статье Г. Вандивера[2] при исследовании идеалов кольца. Однако впервые использование полуколец можно обнаружить у Р. Дедекинда[3] (1884 г.) и Д. Гильберта[4] (1899 г.) при исследовании вопросов аксиоматики числовых систем.

Полукольцо отличается от ассоциативного кольца с единицей возможно необратимостью аддитивной операции. Кроме колец еще один важный подкласс класса полуколец составляют ограниченные дистрибутивные решетки. Имеется также много числовых полуколец, а самое естественное полукольцо образует множество целых неотрицательных чисел с обычными операциями сложения и умножения. Стандартным образом возникают матричные полукольца, полукольца многочленов, формальных степенных рядов, полукольца эндоморфизмов коммутативных моноидов.

Начальным периодом становления теории полуколец можно считать 50–80 гг. 20 века. В это время появилось много работ, посвященных переносу кольцевых и общеалгебраических понятий на полукольца (идеалы и их различные виды, гомоморфизмы, конгруэнции и т. д.). Отметим некоторые интересные результаты, например, полукольцевой аналог теоремы Веддерберна–Артина для полупервичных колец, исследование различных радикалов полуколец. В рамках теории полуколец началось изучение полуполей и полутел[5,6].

С 90-х гг. интерес к полукольцам заметно вырос. Этому способствовало появление большого количества прикладных задач, при решении которых существенно используются полукольца. Укажем в этом контексте развитие теории MV-алгебр и MV-полуколец, имеющих непосредственную связь с многозначными логиками. При изучении нечеткой логики (раздела математики, обобщающего классическую логику и теорию множеств) возникают

[1] Golan J. S. Semirings and their applications. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1999.

[2] Vandiver H. S. Note on a simple type of algebra in which cancelation law of addition does not hold // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. V. 40. P. 914–920.

[3] Dedekind R. Uber die Theorie ganzen algebraischen Zahlen // Supplement XI to P.G. Lejeune Dirichlet: Vorlessungen Uber Zahlentheorie, 4 Anfl., Druck und Verlag, Braunschweig. 1894.

[4] Hilbert D. Uber den Zahlbegriff // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1899. V. 8. P. 180–184.

[5] Weinert H. J. Uber Halbring und Halbkorper. I // Acta math. Acad, scient. hung. 1962. V. 13. no 3–4. P. 365–378.

[6] Полин С. В. Простые полуполя и полутела // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 1. С. 90–101.

многочисленные полукольца при рассмотрении t-норм и t-конорм — ассоциативных операций на единичном отрезке.

Изучение полуколец с идемпотентным сложением привело к развитию тропической математики. И в этом случае предпосылками для развития стали в первую очередь прикладные задачи. Например, некоторые задачи оптимизации удобней формулировать в терминах тропических полуколец. Большой вклад в развитие тропической математики был внесен школой академика В. П. Маслова[7,8]. Созданные в результате идемпотентный анализ и идемпотентный функциональный анализ имеют кроме многочисленных приложений и большое теоретическое значение. Активно развивается в настоящее время матричная и линейная алгебра над идемпотентными полукольцами. Также популярной в настоящее время становится тропическая геометрия[9].

Укажем еще несколько разделов математики, в которых активно используются полукольца: компьютерные науки, теория автоматов, теория оптимального управления, теория графов, комбинаторика, теория кодирования.

К 90-м годам теория полуколец оформилась в успешно развивающийся раздел математики. Накопленный материал нашел отражение в монографии Г. Вейнерта и У. Хебиша[10]. Значительный толчок к развитию теории полуколец дала монография Голана[11] и ее дополненный вариант[12]. Скажем также о важной роли обзоров по полукольцам и их приложениям К. Глазека[13,14].

Кроме отмеченных выше, имеются несколько активно работающих в области теории полуколец российских центров и/или математиков. Отметим А. Э. Гутермана и его ученика Я. Н. Шитова, внесших существенный вклад в развитие линейной алгебры над полукольцами[15,16].

---

[7] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Математические заметки. 2001. Т. 69. № 5. С. 758–797.

[8] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1994.

[9] G. Mikhalkin Real algebraic curves, moment map and amoebas // Ann. of Math. 2000. V. 151. P. 309–326.

[10] Hebisch U., Weinert H. J. Semirings: theory and applications in computer science. Series in Algebra. Vol. V. World Scientific. Singapore, 1998. 361 p.

[11] Golan J. S. The theory of semirings with applications in mathemayics and theoretical computer science // Pitman monographs and syrveys in pure and applied mathematics. V. 54. 1992 (1991).

[12] Golan J. S. Semirings and their applications. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1999.

[13] Glazek K. A Short Guide Through the Literature on Semirings // Preprint No. 39. University of Wroclaw, Math. Inst., Wroclaw. 1985.

[14] Glazek K. A Short Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Computer Science. Technical University Press. 2002.

[15] Гутерман А. Э. Фробениусовы эндоморфизмы пространства матриц: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: МГУ, 2009. 321 с.

[16] Шитов Я. Н. Линейная алгебра над полукольцами: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: МГУ, 2015. 302 с.

Вопросами гомологической классификации полуколец и полумодулей над полукольцами занимается С. Н. Ильин[17,18].

Исследования Е. М. Вечтомова и его учеников посвящены в первую очередь решению задач функциональной алгебры — ими активно развивается теория полуколец непрерывных функций и теория пучковых представлений полуколец и полумодулей[19,20]. Кроме этой тематики, исследования посвящены и вопросам общей теории полуколец: укажем развитие теории полутел, теории решеточно упорядоченных полуколец, продолжаются исследования мультипликативно идемпотентных полуколец[21]. В последнее время получены результаты о строении циклических полуколец и полуколец с малым числом элементов[22].

Кратко отметим предпосылки для исследований полуколец косых многочленов. Появление алгебр косых многочленов (и рядов) связывают с именем О. Оре[23], который исследовал в 1930 г. следующую конструкцию. Пусть F — тело, φ — эндоморфизм F, δ — так называемое φ-дифференцирование (т. е. $\delta(a+b)=\delta(a)+\delta(b)$ и $\delta(ab)=\delta(a)b+\varphi(a)\delta(b)$ для всех $a,b\in F$). Тогда правило $x\cdot a=\varphi(a)x+\delta(a)$ для любого $a\in F$ и его следствия позволяют ввести умножение на $F[x]$. Возникает ассоциативное кольцо $F[x,\varphi,\delta]$ — расширение Оре. Используются также альтернативные названия — кольцо косых многочленов или кольцо дифференциальных многочленов. К настоящему времени первый термин чаще употребляется для обозначения кольца $R[x,\varphi]$ (*Ore extension of endomorphism type*), а второй — для кольца $R[x,\delta]$, где R — кольцо, $\delta=0$ и φ — тождественный эндоморфизм в первом и втором случаях соответственно. Подобным образом строятся кольцо косых формальных степенных рядов и кольцо косых рядов Лорана.

Необходимо отметить, что конструкция скрученного умножения использовалась значительно раньше (1899 г.) в книге Д. Гильберта «Основания геометрии»[24]. Говоря современным языком, было построено кольцо косых

[17] Ильин С. Н. О применимости двух теорем теории колец и модулей // Математические заметки. 2008. Т. 83. Вып. 4. С. 563–574.

[18] Ильин С. Н. О гомологической классификации полуколец // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 158. С. 3–22.

[19] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Элементы функциональной алгебры: монография. В 2-х т. — Киров: Радуга-ПРЕСС. 2016. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 316 с.

[20] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец. — Киров: ВятГГУ. 2010. 224 с.

[21] Вечтомов Е. М., Чермных В. В. Основные направления развития теории полуколец // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 4 (41). С. 4-40.

[22] Вечтомов Е. М., Петров А. А. Полукольца с идемпотентным умножением. — Киров: Радуга-ПРЕСС. 2015. 144 с.

[23] O. Ore. Theory of noncommutative polynomials // Ann. of Math. 1930. V. 34. P. 480–508.

[24] Hilbert D. Grundlagen ger Geometrie. Teubner, Leipzig. 1899. (русс. перевод: Гильберт Д. Основания геометрии. ОГИЗ, Государственное изд-во технико-теоретической литературы. Москва–Ленинград, 1948.)

формальных рядов Лорана над полем рациональных функций. В действительности это кольцо является телом, и тела, получаемые подобным путем, носят названия тел Гильберта. Тела Гильберта позволяют привести пример тела, бесконечномерного над своим центром. Кольца косых многочленов входили в сферу интересов многих авторов. Отметим их активное использование в монографиях Д. Макконнела и Д. Робсона[25], А. А. Туганбаева[26], информацию об алгебрах косых многочленов и рядов можно найти в обзорах[27,28].

К основным результатам нашей диссертации относятся исследования пирсовских слоев полуколец многочленов. Конструкция пирсовского пучка колец появилась впервые в статье Р. С. Пирса[29] в 1967 г. и хорошо зарекомендовала себя при изучении различных алгебр. Аналоги пирсовского пучка были получены для решеточно упорядоченных колец[30], дистрибутивных решеток[31], полуколец[32], колец и полуколец с инволюцией[33,34], drl-полуколец[35], полутел[36]. Первые результаты о характеризации колец свойствами пирсовских слоев были уже в пионерской работе Пирса и регулярно появлялись в дальнейшем как для колец, так и для других алгебраических систем. Особо отметим важные работы В. Д. Беджеса и В. Стефенсона[37,38], и результаты А. А. Туганбаева, оформленные в монографии [39]. Подход Туганбаева, на наш взгляд, отличается от аналогичных работ предшественников. Именно, им получены чисто алгебраические характеризации колец свойствами пирсовских

---

[25]McConnell J. C., Robson J. C. Noncommutative Noetherian rings. Graduate studes in mathematics 2000. V. 30. 636 p.

[26]Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009. — 472 с.

[27]Бейдар К. И., Латышев В. Н., Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А. Ассоциативные кольца // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1984. Т. 22, С. 3–115.

[28]Туганбаев А. А. Кольца рядов Лорана, лорановские кольца и кольцо Мальцева–Неймана // Алгебра. Итоги науки и техники. Сер. Совр. мат. и ее прил. Темат. обз. 184, ВИНИТИ РАН. М. 2020. С. 3–111.

[29]Pierce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. V.70. P. 1–112.

[30]Keimel K. The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves. Lect. Notes Math. 248, Springer-Verlag, 1971.

[31]Georgescu G. Pierce representations of distributive lattices // Kobe J. Math. 1993. V. 10, no 1. P. 1-11.

[32]Чермных В. В. Пучковые представления полуколец // Успехи матем. наук. 1993. Т. 48, № 5. С. 185–186.

[33]Салавова К. Кольца с инволюцией: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — М.: МГУ, 1978.

[34]Марков Р. В. Пирсовское представление полуколец с инволюцией // Известия вузов. Математика. 2014. № 4. С. 18–24.

[35]Чермных О. В. Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец. II // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 677–684.

[36]Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Полутела и их свойства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 3–54.

[37]Burgess W.D., Stephenson W. Pierce sheaves of non–commutative rings // Comm. Algebra. 1976. 39. P. 512–526.

[38]Burgess W.D., Stephenson W. Rings all of whose Pierce stalks are local // Canad. Math. Bull. 1979. 22:2. P. 159–164.

[39]Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009. — 472 с.

слоев, т. е. без привлечения топологических свойств накрывающего или базисного пространств пучка.

Исследования пирсовских слоев полуколец впервые появились в работах Р. В. Маркова и В. В. Чермных[40,41]. Можно считать, что связанные с пирсовским слоями результаты нашей диссертации являются продолжением их исследований.

Объектом исследования диссертации являются полукольца косых многочленов.

Целью диссертационной работы является исследование свойств полуколец косых многочленов, нахождение связей между полукольцами косых многочленов и полукольцами их коэффициентов.

Эта цель достигается решением следующих **задач**:

1) Для описания m-идеалов полуколец многочленов и дальнейшего их использования вводится в рассмотрение и исследуется конструкция φ-цепей коэффициентных множеств идеалов полукольца косых многочленов.

2) Нахождение новых алгебраических свойств полуколец косых многочленов.

3) Выделение полуколец (и полуколец многочленов), которые допускают описание в терминах их пирсовских слоев; получение характеризаций таких полуколец.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования:

1) Описаны условия существования главных левых m-идеалов в некоторых видах полуколец косых многочленов, порождаемых неодночленом.

2) С помощью m-идеалов обобщены кольцевые теоремы или получены их аналоги для полуколец косых многочленов:

i) аналог теоремы Гильберта о базисе;

ii) характеризация полукольца косых многочленов над риккартовым слева левым полукольцом Безу с дополнительными условиями.

3) Получены характеризации следующих типов полуколец косых многочленов: без делителей нуля; коммутативных полуколец; без нильпотентных элементов и риккартовых полуколец без нильпотентных элементов.

4) Выделены следующие полукольца (и полукольца косых многочленов), допускающие характеризации в терминах их пирсовских слоев:

[40] Марков Р. В., Чермных В. В. О пирсовских слоях полуколец // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 2. С. 171–186.

[41] Марков Р. В., Чермных В. В. Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 213–221.

i) левое полукольцо Безу, абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное;

ii) строго риккартово полукольцо косых многочленов и риккартово слева или справа полукольцо косых многочленов без нильпотентных элементов;

iii) квазибэровские полукольца и полукольца косых многочленов над ними.

iv) описаны пирсовские слои нётерова полукольца, выявлена структура пирсовских слоев полукольца косых многочленов над нётеровым полукольцом.

Методы исследования. В работе используются алгебраические методы, в частности, методы теории колец, теории полуколец, теории решеток, теории пучковых представлений алгебр.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер и может служить основой для дальнейших исследований полуколец. Полученные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов для магистров и аспирантов и в их научно-исследовательской работе.

Личный вклад. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с научным руководителем В. В. Чермных, причем вклад диссертанта был определяющим. Все результаты, представленные к защите, получены лично автором.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации апробированы на Международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения проф. А. Г. Куроша (Москва, 2018 г.); IV и V Всероссийских научных конференциях с международным участием «Математическое моделирование и информационные технологии» (СГУ им. П. Сорокина, Сыктывкар, 2020, 2021 гг.); Международной (53-ей Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2022 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 — в тезисах докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и предметного указателя. Полный объем диссертации **107** страниц текста. Список литературы содержит **59** наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, дается описание структуры работы и ее краткое содержание.

В **главе 1** вводятся основные понятия и конструкции, которые будут использоваться нами для исследования полуколец косых многочленов.

В параграфе 1 определяются понятия полукольца и полукольца косых многочленов.

Полукольцом называется непустое множество S с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, $0 \neq 1$, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, сохраняющий нуль и единицу, $R = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов от переменной x и с коэффициентами из S, записываемых слева от степеней x. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$. Непосредственно проверяется, что $S[x, \varphi]$ является полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов.*

Пусть B — произвольный левый или правый идеал полукольца $R = S[x, \varphi]$. Будем называть множества

$$B_i = \{a \in S : ax^i \text{ — одночлен в некотором многочлене } f \in B\}$$

коэффициентными множествами идеала B.

Коэффициентные множества левого идеала из R являются левыми идеалами полукольца S.

Л. Дэйл[42] ввел понятие *монического* идеала (monic ideal) полукольца многочленов $S[x]$ над коммутативным полукольцом S — идеала, который вместе с любым многочленом содержит каждый его одночлен; в нашей работе идеал с таким свойством назван m-идеалом.

[42]Dale L. Monic and monic free ideals in polynomial semirings // Proc Amer. Math. Soc. 1976. V.56. P. 45–50.

Левый идеал L полукольца R назовем *левым m-идеалом*, если из того, что многочлен $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ принадлежит L следует, что $a_k x^k \in L$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n$. Аналогично определяется правый m-идеал.

Следующая конструкция позволяет получить описание левых m-идеалов. Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Будем называть последовательность левых идеалов $L_0, L_1, \ldots$ из S *левой φ-цепью*, если для произвольного целого неотрицательного i выполняется $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$. Каждая φ-цепь $\{L_i\}$ задает левый m-идеал $L^* = \{f = a_0 + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_n \in R : a_i \in L_i\}$.

Важным оказывается вопрос о строении главных левых m-идеалов и особенностях порождающих их многочленов. Этому посвящен параграф 2 настоящей работы. Полукольцо S называется *риккартовым слева*, если для любого $a \in S$ левый аннулятор $\mathrm{ann}_l(a)$ равен Se для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$. Напомним, что полукольцо называется *левым полукольцом Безу*, если каждый его конечно порожденный левый идеал является главным левым идеалом. Эндоморфизм φ полукольца S называется *жестким*, если $a\varphi(a) = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in S$. Основным результатом параграфа является теорема 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$, $R = S[x, \varphi]$.*

1) *Если для любого $i = 0, \ldots, k-1$ выполнено*

$$f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i),$$

то $R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ — главный левый m-идеал полукольца R.

2) *Если L — главный левый m-идеал в R, то найдется такой многочлен $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, что $L = Rf$ и*

$$f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i)$$

для всех $i = 0, \ldots, k-1$.

В доказательстве этой теоремы строится конструкция, позволяющая получить коэффициенты образующего многочлена. На ее основе описан один способ построения образующего многочлена главного левого m-идеала произвольного полукольца $S[x, \varphi]$, если $\varphi(e) = e$ для любого центрального дополняемого идемпотента (замечание 2.2).

В параграфе 3 рассматриваются полукольца косых многочленов над полукольцами с делением и над нётеровыми полукольцами.

Известно, что левое кольцо косых многочленов над телом является кольцом главных левых идеалов. В примере 3.1 показано, что полукольцо многочленов с неотрицательными рациональными коэффициентами $\mathbb{Q}^+[x]$ не является кольцом главных идеалов. Использование m-идеалов полукольца косых многочленов над полутелом позволяет получить

Предложение 3.1. *Если F — полукольцо с делением, φ — эндоморфизм F, то $R = F[x, \varphi]$ — полукольцо без делителей нуля, каждый левый m-идеал которого является главным. Если φ — автоморфизм, то каждый правый m-идеал полукольца $R = F[x, \varphi]$ является главным.*

Приведен пример полукольца $F[x, \varphi]$ над полуполем с инъективным эндоморфизмом φ, содержащий бесконечно порожденный правый m-идеал.

Несложно показать, что полукольцо многочленов над нётеровым полукольцом S будет нётеровым в точности тогда, когда S — нётерово кольцо. Привлечение m-идеалов позволило получить следующий аналог теоремы Гильберта о базисе (для полукольца косых многочленов).

Теорема 3.1 *Пусть φ — автоморфизм полукольца S. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *S — нётерово слева (справа) полукольцо;*

2) *$S[x, \varphi]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых (правых) m-идеалов.*

Во второй главе изучаются алгебраические свойства полуколец косых многочленов.

Параграф 4 посвящен идемпотентам полуколец косых многочленов.

В предложениях 4.2.и 4.4 получена важная информация об идемпотентах полуколец S и $R = S[x, \varphi]$. Выясняется, когда идемпотенты этих полуколец центральны, дополняемы, найдены условия, при которых совпадают множества BS и BR всех центральных дополняемых идемпотентов полуколец S и R.

В параграфе 5 исследуются следующие условия полукольца косых многочленов: коммутативность, отсутствие делителей нуля и ненулевых нильпотентных элементов, риккартовость.

Рассматриваемые в §4 и §5 полукольца допускают похожие характеризации. Именно, при некоторых дополнительных ограничениях на эндоморфизм φ (инъективность или жесткость) полукольцо косых многочленов $S[x, \varphi]$ удовлетворяет одному из указанных свойств в точности тогда, когда ему удовлетворяет полукольцо S (предложения 4.3, 5.1–5.4). Для иллюстрации сказанного укажем формулировку следующего результата.

Предложение 5.4. *Если φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$, то равносильны условия:*

1) *R — риккартово справа полукольцо без нильпотентных элементов;*

2) *R — риккартово слева полукольцо без нильпотентных элементов;*

3) каждый многочлен из R является произведением центрального дополняемого идемпотента, лежащего в S, и неделителя нуля;

4) S — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов и φ — жесткий эндоморфизм.

Параграф 6 посвящен исследованию полукольца косых многочленов над полукольцом Безу.

Обобщается следующий результат[43]: если A — кольцо, в котором каждый левый аннуляторный идеал является идеалом, то кольцо многочленов $A[x]$ является левым кольцом Безу тогда и только тогда, когда A — риккартово слева левое кольцо Безу, каждый неделитель нуля которого обратим в A. Для полуколец обычных (некосых) многочленов этот результат уже не является верным, хотя справедливо следующее утверждение:

Теорема 6.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $R = S[x,\varphi]$, и все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами. Если R — левое полукольцо Безу, то S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$.*

Пример 6.1 показывает, что обратное утверждение к теореме 6.2 не верно. Для получения характеризации мы вновь используем свойства m-идеалов.

Теорема 6.3. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, все левые аннуляторы полукольца S являются идеалами, $R = S[x,\varphi]$. Тогда равносильны утверждения:*

1) R — полукольцо без нильпотентных элементов и каждый конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;

2) S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — жесткий эндоморфизм, элемент $\varphi(d)$ обратим в S для любого неделителя нуля $d \in S$;

Третья глава диссертации посвящена изучению зависимостей между алгебраическими свойствами полукольца косых многочленов и свойствами полукольца его коэффициентов в терминах пирсовских пучков. Использование пирсовских пучков позволяет в некоторых случаях получить характеризацию полукольца S через свойства пирсовских слоев этого полукольца, а также через свойства пирсовских слоев полукольца косых многочленов с коэффициентами из S. Отметим, что пучковые конструкции в наших исследованиях выступают также тополого-алгебраическим аппаратом, помогающим в доказательстве утверждений.

В параграфе 7 изложены основные понятия, необходимые для применения пирсовских пучков к исследованию полуколец косых многочленов.

[43] Туганбаев А. А. Кольца Безу, многочлены и дистрибутивность // Математические заметки. 2001. 70:2. С. 270–288.

Вводятся определения пирсовского пучка, пирсовского слоя, глобального сечения пучка. Приводятся необходимые начальные сведения о свойствах пучков и представлений.

Пусть M — максимальный идеал булева кольца BS центральных дополняемых идемпотентов полукольца S. Отношение

$$a \equiv b(\alpha_M) \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M$$

является конгруэнцией на S, и факторполукольцо S/α_M называется *пирсовским слоем.*

Далее в параграфе рассматривается класс $\mathcal{P}$ полуколец, удовлетворяющих условию: полукольцо S принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца S принадлежит $\mathcal{P}$. Вводится в рассмотрение естественный инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ пирсовского слоя S/α_M, на основе которого строится полукольцо косых многочленов $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$. Доказанное в предложении 7.1 утверждение

$$R \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}] \in \mathcal{P} \text{ для каждого пирсовского слоя } S/\alpha_M$$

позволяет выделить целый ряд полуколец, принадлежащих $\mathcal{P}$ (предложение 7.2).

Описаны пирсовские слои полукольца косых многочленов над булевым полукольцом и регулярным слабо симметрическим полукольцом. Полукольцо называется *слабо симметрическим*, если для любых $a, b, c, d \in S$ выполняется $bc = bd \Leftrightarrow cb = db$. Полукольцо S называется *arp-полукольцом*, если оно *регулярно* (для любого $a \in S$ разрешимо уравнение $axa = a$), *положительно* (элемент $a + 1$ обратим в S для любого $a \in S$), и *абелево* (каждый его идемпотент e централен); *arp*-полукольцо называется *булевым*, если каждый его идемпотент дополняем. Полукольцо, не содержащее ненулевых аддитивно обратимых элементов, называется *антикольцом.*

Теорема 7.1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$ и $R = S[x, \varphi]$. Тогда справедливы утверждения:*

1) если S — регулярное слабо симметрическое полукольцо, любой идемпотент которого является центральным дополняемым идемпотентом, то каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля, в котором каждый левый m-идеал является главным;

2) если S — булево полукольцо, то каждый пирсовский слой полукольца R является антикольцом без делителей нуля, в котором каждый левый m-идеал является главным.

В параграфе 8 продолжаются исследования риккартовых полуколец с некоторыми дополнительными условиями. Сначала была получена характеризация строго риккартова полукольца через пирсовские слои этого полукольца (предложение 8.1). В предложении 8.2 доказаны необходимые и достаточные условия отсутствия в полукольце косых многочленов левых (правых) уравнителей и левых (правых) слабых уравнителей. Эти утверждения понадобятся нам в доказательствах двух центральных теорем этой главы, в которых получены характеризации строго риккартова полукольца (теорема 8.1) и риккартова слева или справа полукольца без нильпотентных элементов (теорема 8.2), и описаны пирсовские слои таких полуколец, а также пирсовские слои полуколец косых многочленов над ними.

Левый идеал $\mathrm{eq}_l(a,b) = \{s \in S : sa = sb\}$ всех левых уравнителей элементов $a, b \in S$ является полукольцевым аналогом понятия аннулятора элемента. Полукольцо S называется *строго риккартовым*, если любых элементов $a, b \in S$ их левый уравнитель $\mathrm{eq}_l(a,b)$ порождается как левый идеал центральным дополняемым идемпотентом из S.

Теорема 8.1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Рассмотрим следующие условия:*

1) *$R = S[x,\varphi]$ — строго риккартово полукольцо;*

2) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без левых (равносильно, правых) уравнителей и $\mathrm{eq}_l(f,g) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любых $f, g \in R$;*

3) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без левых (равносильно, правых) слабых уравнителей и $\mathrm{eq}_l(f,g) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любых $f, g \in R$;*

4) *каждый пирсовский слой полукольца S является полукольцом без левых (равносильно, правых) уравнителей и $\mathrm{eq}_l(a,b) \cap BS$ является главным идеалом кольца BS для любых $a, b \in S$;*

5) *S — строго риккартово полукольцо.*

Тогда 1) $\Leftrightarrow$ 2), 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5), 2) $\Rightarrow$ 3). *Если S — аддитивно сократимое полукольцо (в частности, кольцо), то все пять условий равносильны.*

Теорема 8.2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *$R = S[x,\varphi]$ — риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов;*

2) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(f) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любого $f \in R$;*

3) *каждый пирсовский слой полукольца S является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(a) \cap BS$ является главным идеалом кольца BS для любого $a \in S$;*

4) S — *риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов.*

Завершает параграф теорема 8.3, которая дополняет теорему 6.3 о характеризации риккартова слева левого полукольца Безу и содержит описание пирсовских слоев такого полукольца.

В параграфе 9 вводится квазибэровское полукольцо, находятся его характеризации (лемма 9.1, предложение 9.2) и характеризации полукольца косых многочленов над ним (предложение 9.1, теорема 9.1). Полукольцо S назовем *квазибэровским*, если для любого идеала A из S $\mathrm{ann}_l(A) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$.

Теорема 9.1. *Пусть S — φ-жесткое полукольцо и M — полный идеал для любого $M \in Max BS$. Тогда равносильны условия:*

1) $R = S[x, \varphi]$ — *квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала A из S $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$;*

2) S — *квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала A из S $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$;*

3) S — *бирегулярное полукольцо без нильпотентных элементов;*

4) *каждый пирсовский слой полукольца S является простым полукольцом без делителей нуля.*

В параграфе 10 исследуются пирсовские слои нётерова слева полукольца. Легко проверить, что пирсовские слои нётерова слева полукольца являются нётеровыми слева. Пример 10.1 демонстрирует, что обратное утверждение неверно. Но если добавить к нётеровости пирсовских слоёв дополнительное требование — конечность множества центральных дополняемых идемпотентов полукольца S, то в этом случае полукольцо S будет нётеровым (предложение 10.1). На основе этого предложения доказывается характеризация нётерова полукольца S через свойства пирсовских слоев полукольца косых многочленов с коэффициентами из S.

Теорема 10.1. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, множество BS конечно. Тогда полукольцо S нётерово слева (справа) в точности тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца $R = S[x, \varphi]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых (правых) m-идеалов и множество центральных дополняемых идемпотентов каждого пирсовского слоя полукольца R конечно.*

Основные результаты диссертации

По мнению автора, основными результатами диссертации являются следующие:

1) Описаны условия существования главных m-идеалов, порождаемых неодночленом, в некоторых видах полуколец косых многочленов (теорема 2.1).

2) С помощью m-идеалов обобщены кольцевые теоремы или получены их аналоги для полуколец косых многочленов:

i) аналог теоремы Гильберта о базисе (теорема 3.1);

ii) теорема о полукольце косых многочленов над риккартовым слева левым полукольцом Безу с дополнительными условиями (теорема 6.3).

3) Получены характеризации следующих типов полуколец косых многочленов: без делителей нуля; коммутативных полуколец; без нильпотентных элементов и риккартовых полуколец без нильпотентных элементов (предложения 5.1 — 5.4).

4) Выделены следующие полукольца (и полукольца косых многочленов), допускающие характеризации в терминах их пирсовских слоев:

i) левое полукольцо Безу, абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное (предложение 7.2);

ii) строго риккартово полукольцо косых многочленов (теорема 8.1) и риккартово слева или справа полукольцо косых многочленов без нильпотентных элементов (теорема 8.2);

iii) квазибэровские полукольца (предложения 9.1 и 9.2) и полукольца косых многочленов над ними (теорема 9.1);

iv) описаны пирсовские слои нётерова полукольца (предложение 10.1), выявлена структура пирсовских слоев полукольца косых многочленов над нётеровым полукольцом (теорема 10.1).

Статьи автора по теме диссертации

В журналах из перечня ВАК:

1. Бабенко М. В. О полукольце многочленов над полукольцом Безу // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 5–15.

2. Бабенко М. В. Пирсовские слои полуколец с некоторыми условиями конечности // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(40). С. 4–20.

3. Бабенко М. В., Чермных В. В. Пирсовские слои полуколец косых многочленов // Труды ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 48–60.

4. Бабенко М. В., Чермных В. В. О полукольце косых многочленов над полукольцом Безу // Математические заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 323–338.

В других изданиях:

5. Бабенко М. В., Чермных В. В. О полукольцах косых многочленов // Фундамент. и прикл. матем. 2020. Т. 23, № 3. С. 13–21.

Тезисы докладов на конференциях:

6. Бабенко М. В. Главные m-идеалы полукольца косых многочленов над полукольцом Безу // Математическое моделирование и информационные технологии, V Всероссийская науч. конф. с межд. участием. Сб. материалов. Сыктывкар, 09–11 декабря 2021 года. — Сыктывкар: Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, 2021. С. 17–18.

7. Бабенко М. В., Чермных В. В. О полукольце косых многочленов // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 23–25 мая 2018 г.): тез. докл. М. : изд. МГУ, 2018. С. 33–34.

8. Чермных В. В., Бабенко М. В. Полукольца многочленов над полукольцом Безу // Математическое моделирование и информационные технологии, IV Всероссийская науч. конф. с межд. участием. Сб. материалов. Сыктывкар, 12–14 ноября 2020 года. — Сыктывкар: Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, 2020. С. 55–56.

Подписано в печать ??.??.2022 г.
Формат 60 × 84/16.
Бумага офсетная.
Усл. печ. л. xx.
Тираж 100 экз.
Заказ № 0

Типография ФГБОУ ВО
«Вятский государственный университет»