На правах рукописи

Огородников Юрий Юрьевич

Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задачи маршрутизации транспорта ограниченной грузоподъемности

01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор РАН **Хачай Михаил Юрьевич**
Официальные оппоненты:	**Симанчев Руслан Юрьевич,** доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО Омский государственный университет им. Ф.М.Достоевского, заведующий кафедрой программного обеспечения и защиты информации
	Ульянов Михаил Васильевич, доктор технических наук, профессор, ФГБУН Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теории расписаний и дискретной оптимизации
Ведущая организация:	ФГБУН Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится _______________ 2021 года в _____ часов _____ минут на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 при ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620990, г.Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН https://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.04.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 620990, г.Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16, ученому секретарю диссертационного совета Д 004.006.04.

Автореферат разослан «_____»_____________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 004.006.04,
к. ф.-м. н. К.С.Кобылкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.[1] Предметом исследования данной диссертационной работы является аппроксимация метрических постановок задачи маршрутизации транспортных средств ограниченной грузоподъемности (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) в классе алгоритмов с гарантированными оценками точности. Задача CVRP является одной из наиболее известных задач комбинаторной оптимизации, имеющей огромное число значимых приложений в области исследования операций. По всей видимости, данная задача была впервые введена в знаменитой работе Г.Данцига и Дж.Рамсера[2], посвященной математическому моделированию процесса снабжением топливом сети заправочных станций.

Содержательная постановка задачи может быть сформулирована в виде процедуры выбора экономически эффективного плана удовлетворения пользовательского спроса географически распределенной сети потребителей путем поставок однородной продукции с центрального склада парком (идентичных) транспортных средств ограниченной грузоподъемности.

Как и для большинства современных задач комбинаторной оптимизации, исследования в области алгоритмического анализа CVRP традиционно развиваются в рамках следующих основных направлений. Первое направление основано на редукции исходной задачи к подходящей постановке задачи целочисленного (смешанного) программирования с последующим поиском оптимального решения последней с помощью той или иной модификации метода ветвей и границ (см. обзор в монографии П.Тота и Д.Виго [3]). К сожалению, несмотря на стремительные темпы развития вычислительной техники и очевидные успехи последних лет в области совершенствования алгоритмов (см. наприм. работу А.Пессоа, Р.Садыкова и Э.Учоа[4]) практическая применимость данного подхода по-прежнему ограничена постановками достаточно скромного размера ввиду известной NP-трудности задачи CVRP.

Широкий спектр современных эвристических алгоритмов и метаэвристик составляет основу второго направления. Наибольшего успеха в области эффективной аппроксимируемости задачи удалось достичь в классах методов локального поиска, поиска с запретами, переменных окрестностей (VNS), методов машинного обучения, эволюционных и биоинспирированных алгоритмов,

---

[1]Диссертационная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Уральского математического центра.

[2]Dantzig George B., Ramser John H.: The truck dispatching problem. Management science Vol. 6, no. 1, 80–91 (1959).

[3]Toth, P., Vigo, D.: Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications,Second Edition. MOS-Siam Series on Optimization, SIAM, 2 edn. (2014)

[4]Pessoa, A.A., Sadykov, R., Uchoa, E.: Enhanced branch-cut-and-price algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems. European Journal of Operational Research **270**(2), 530–543 (2018).

а также их комбинаций (см. обзор в работе Е.Демира и коллег[5]). Нередко эвристические алгоритмы демонстрируют потрясающую производительность, эффективно находя близкие к оптимальным или даже оптимальные решения для отдельных постановок CVRP чрезвычайно большого размера. Тем не менее, в отсутствие теоретически обоснованных гарантий применение этих алгоритмов сопряжено с дополнительными трудозатратами, связанными с численным оцениванием их точности и возможной дополнительной настройкой внутренних параметров при переходе к каждому новому классу постановок.

Перечисленные аргументы подтверждают актуальность третьего направления, связанного с аппроксимируемостью задачи в классе эффективных алгоритмов с теоретическими оценками точности и трудоемкости. В 1977 году Х.Пападимитриу показал[6], что задача CVRP NP-трудна в сильном смысле, являясь обобщением классической задачи коммивояжера (TSP), и сохраняет труднорешаемость (при условии, что грузоподъемность q является частью входа) даже на евклидовой плоскости. Из результатов М.Хаймовича и А.Ринной Кана[7] и Т.Асано и коллег[8] также следует, что задача CVRP APX-полна при произвольной метрике и остается APX-трудной при произвольной фиксированной грузоподъемности $q \geq 3$.

Наибольших успехов в области аппроксимируемости задачи CVRP удалось достичь в конечномерных числовых пространствах. Известные результаты в этой области восходят к классическим работам М. Хаймовича, А. Ринной Кана и С. Aроры[9]. На данный момент, наиболее общим результатом для геометрической постановки CVRP является квазиполиномиальная приближенная схема (QPTAS) А.Дас и К.Матье[10]. Вводя ограничение на рост грузоподъемности q, удается обосновать полиномиальные (PTAS) и даже эффективные (EPTAS) полиномиальные приближенные схемы, среди которых рекордным на данный момент является алгоритм А.Адамашек и коллег[11], позволяющий за полиномиальное время найти $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи при условии $q \leq 2^{\log^{\delta(\varepsilon)} n}$, $\delta = O(\varepsilon)$.

[5]Demir, E., Huckle, K., Syntetos, A., Lahy, A., Wilson, M.: Vehicle Routing Problem: Past and Future, pp. 97–117. Springer International Publishing, Cham (2019).

[6]Papadimitriou, C.: Euclidean TSP is NP-complete. Theoret. Comput. Sci. **4**, 237–244 (1977)

[7]Haimovich, M., Rinnooy Kan, A.H.G.: Bounds and heuristics for capacitated routing problems. Mathematics of Operations Research **10**(4),527–542 (1985).

[8]Asano, T., Katoh, N., Tamaki, H., Tokuyama, T.: Covering points in the plane by k-tours: Towards a polynomial time approximation scheme for general k. In: Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. pp. 275–283. STOC '97, ACM, New York, NY, USA (1997).

[9]Arora, S.: Polynomial time approximation schemes for Euclidean Traveling Salesman and other geometric problems. Journal of the ACM **45**, 753–782 (1998)

[10]Das, A., Mathieu, C.: A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing. Algorithmica **73**, 115–142 (2015).

[11]Adamaszek, A., Czumaj, A., Lingas, A.: PTAS for k-tour cover problem on the plane rof moderately large values of k. International Journal of Foundations of Computer Science **21**(06), 893–904 (2010).

Так или иначе до последнего времени полиномиальные и квазиполиномиальные приближенные схемы удавалось обосновать лишь для геометрических постановок задачи CVRP, за исключением, быть может, немногочисленных специальных случаев. Долгое время, до появления пионерских работ К.Талвара [12] и Я.Бартала [13] и коллег, аналогичным образом складывалась ситуация и с аппроксимируемостью близкой к CVRP задачи коммивояжера. Предложенный в этих работах подход позволил распространить классический результат С.Ароры, заключающийся в существовании полиномиальных приближенных схем (PTAS) для TSP в $\mathbb{R}^d$, на существенно более широкий класс постановок задачи коммивояжера, задаваемых в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения. Впоследствии аналогичные результаты были получены для ряда близких комбинаторных задач, в том числе для задачи коммивояжера со сбором призов (Prize Collecting Traveling Salesman Problem, PCTSP), задачи коммивояжера с окрестностями и задачи о k-медианах. Тем не менее, для CVRP до последнего момента подобные результаты получить не удавалось.

Заметим, что абсолютное большинство известных результатов в области эффективной аппроксимируемости геометрической задачи CVRP, было получено лишь для ее базовой постановки, не принимающей в расчет целый ряд дополнительных ограничений, представляющих практический интерес. Среди немногих известных результатов в этой области отметим PTAS и EPTAS для постановок CVRP[14], заданных в $\mathbb{R}^d$, при произвольной фиксированной размерности $d > 1$. Для постановок CVRP, стесненных дополнительными ограничениями, известны PTAS для задачи CVRP с несколькими складами (Multiple-Depot Capacitated Vehicle Routing Problem, MDCVRP), разработанная С.Кардоном и коллегами [15] на основе классического подхода Хаймовича-Ринной Кана, и впоследствии распространенная на случай пространства $\mathbb{R}^d$ в работе М.Ю.Хачая и Р.Д.Дубинина[14]. Также известна QPTAS, предложенная Л.Сонем[16] для постановок задачи CVRP с временными промежутками обслуживания клиентов (Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows, CVRPTW), заданная в конечномерном числовом пространстве. Тем не менее,

[12] Talwar, K.: Bypassing the embedding: Algorithms for low dimensional metrics.In: Proceedings of the Thirty-Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. p. 281–290. STOC '04, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA (2004).

[13] Abraham, I., Bartal, Y., Neiman, O.: Advances in metric embedding theory. Advances in Mathematics **228**(6), 3026 – 3126 (2011).

[14] Khachai, M.Y., Dubinin, R.D.: Approximability of the vehicle routing problem in finite-dimensional euclidean spaces. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **297**(1), 117–128 (2017).

[15] Cardon, S., Dommers, S., Eksin, C., Sitters, R., Stougie, A., Stougie, L.: A PTAS for the multiple depot vehicle routing problem. SPOR-Report: reports in statistics, probability and operations research, Technische Universiteit Eindhoven (2008)

[16] Song, L., Huang, H., Du, H.: Approximation schemes for euclidean vehicle routing problems with time windows. Journal of Combinatorial Optimization **32**(4), 1217–1231 (2016).

до недавнего времени для CVRPTW не удавалось разработать схемы, являющиеся PTAS и EPTAS, даже при дополнительных ограничениях на рост грузоподъемности.

Насколько нам известно, наиболее слабо изученными с точки зрения построения алгоритмов с гарантированными оценками точности до недавнего времени являлись геометрические постановки CVRP с неоднородностью клиентского спроса, который, в свою очередь, может быть как разделяемым (Capacitated Vehicle Routing with Splittable Demand, CVRP-SD) и обслужен несколькими маршрутами, так и неразделяемым (Capacitated Vehicle Routing with Non-Splittable Demand, CVRP-NSD), который должен быть удовлетворен при единократном посещении.

Таким образом, несмотря на очевидные успехи в области аппроксимируемости геометрических постановок CVRP, оставался открытым вопрос о построении PTAS и EPTAS для ряда расширенных постановок CVRP, важных с практической точки зрения. С другой стороны, имеющиеся приближенные схемы справедливы лишь для конечномерных числовых пространств, и оставался открытым вопрос о возможности распространения данных результатов на случай более широких пространств.

Цель работы состоит в построении аппроксимационных схем для существенно более широкого (по сравнению с постановками в конечномерных евклидовых пространствах) класса постановок задачи CVRP, задаваемых в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения, а также разработка PTAS и EPTAS для геометрических постановок CVRP, стесненных дополнительными ограничениями на временные промежутки обслуживания и неоднородность клиентского спроса.

Методы исследования. При обобщении схемы Хаймовича-Ринной Кана использовались современные результаты в области метрических пространств произвольной фиксированной размерности удвоения, в том числе обобщение классической теоремы Ассуада, гарантирующее вложение с константным искажением таких пространств в числовые пространства фиксированной размерности. При построении квазиполиномиальных приближенных схем для CVRP в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения применялись методы рандомизированной иерархической кластеризации, опирающиеся на структурную теорему К.Талвара и развивающие классический подход С. Ароры к эффективной аппроксимируемости геометрической задачи коммивояжера.

Для построения приближенных алгоритмов с гарантированными оценками точности для CVRPTW и CVRPTW-SD использовались методы комбинаторики и теории графов, а также принципы декомпозиции, сводящие исходную задачу к ряду подзадач меньшей размерности.

Научная новизна и значимость работы. В данной работе, носящей теоретический характер, впервые обоснована аппроксимируемость в классах квазиполиномиальных и полиномиальных приближенных схем постановок

CVRP, заданных в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения. В частности, установлено, что классический подход Хаймовича-Ринной Кана реализует PTAS при тех же дополнительных ограничениях (на рост грузоподъемности), что и на евклидовой плоскости (для которой он был первоначально предложен), то есть при $q = o(\log\log n)$. Развитие подхода для постановок задачи коммивояжера в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения, рассмотренного в работах К. Талвара и Я. Бартала и коллег, и идей А.Дас и К.Матье для CVRP в конечномерных числовых пространствах позволило обосновать существование квазиполиномиальных приближенных схем для $q = O(\mathrm{polylog}\,(n))$ и $q = \Omega\,(n/\mathrm{polylog}\,(n))$, соответственно.

Впервые обоснованы полиномиальные приближенные схемы для нескольких геометрических постановок CVRP с дополнительными ограничениями на временные промежутки обслуживания клиентов и неоднородным потребительским спросом.

На защиту выносится совокупность результатов в сфере эффективной аппроксимируемости задачи маршрутизации транспортных средств ограниченной грузоподъемности (CVRP) в области проектирования и обоснования квазиполиномиальных и полиномиальных приближенных схем для новых неисследованных ранее классов постановок, в том числе, заданных в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения и отягощенных дополнительными ограничениями на промежутки обслуживания и неоднородность потребительского спроса.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: 7 и 8 Международной конференции по анализу изображений, сетей и текстов AIST (Москва, 2018; Казань, 2019); 9 и 10 Международной конференции ‘Optimization and Applications’ OPTIMA (Черногория, Петровац, 2018, 2019); 9 Международной конференции ‘IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control’ MIM (Германия, Берлин, 2019); 18 и 19 Международной конференции по математической теории оптимизации и исследованию операций MOTOR (Екатеринбург, 2019; Новосибирск, 2020); 13 и 14 Международной конференции ‘Conference on Learning and Intelligent Optimization’ LION (Греция, Ханья, 2019; Греция, Афины, 2020); 19 Всероссийской конференции с международным участием «Математические методы распознавания образов» ММРО (Москва, 2019), 12 международной конференции «Интеллектуализация обработки информации» IDP (Италия, Гаэта, 2018), 51 Международной молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» SOPROMAT (Екатеринбург, 2020), Общероссийском семинаре «Информатика, управление и системный анализ» (МГУ, Москва, 2020), а также семинарах отдела математического программирования Института математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 статьях, 5 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Все публикации индексируются в базах данных Web Of Science и/или Scopus.

Личный вклад. Личный вклад состоит в непосредственном получении результатов и подготовке публикаций по теме диссертации. В работах [1, 2, 6, 9] соискателю принадлежит доказательство корректности аппроксимационной схемы, а также построение алгоритма динамического программирования. В работах [1, 6] соавтору Д.М.Хачаю принадлежит идея реализации структуры данных, используемой в алгоритме. В работе [3] диссертантом была обоснована оценка относительной погрешности схемы Хаймовича-Ринной Кана для постановок CVRP, заданных в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения.

Для полиномиальных и эффективных полиномиальных приближенных схем, разработанных для геометрических постановок задачи CVRPTW [4, 5, 8, 10, 12], диссертантом были получены оценки точности и трудоемкости, а также была предложена идея алгоритма по выбору «промежуточных» клиентов. Для геометрических постановок задачи CVRP, стесненных как ограничениями на временные промежутки обслуживания, так и на неоднородность клиентского спроса [7, 11, 13] соискателем были выдвинуты идея «слотов», соответствующих одинаковым временным окнам, и предложение обслуживать часть единиц клиентского спроса тривиальными маршрутами. Помимо этого, диссертанту принадлежат доказательства всех утверждений и теорем, предложенных научным руководителем, а также обоснование точности и трудоемкости совместно построенных алгоритмов.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 140 страницах, содержит введение, три главы, заключение, список публикаций автора по теме диссертации, благодарности и список литературы из 147 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** диссертации содержится описание постановки исследуемой задачи и сведения о ее современном состоянии с точки зрения алгоритмической сложности и возможных подходов к решению.

В разделе 1.1 приведены сведения из комбинаторной оптимизации, необходимые для дальнейшего изложения полученных результатов. Одним из основных понятий, широко используемых в дальнейших рассуждениях, является понятие полиномиальной приближенной схемы (PTAS). Говорят, что задача комбинаторной оптимизации обладает PTAS, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $(1+\varepsilon)$-приближенный алгоритм, трудоемкость которого ограничена сверху некоторым полиномом $\mathrm{poly}_\varepsilon(n)$. В том случае, если $\mathrm{poly}_\varepsilon(n) = f(1/\varepsilon)\cdot n^c$

для некоторой константы $c \geq 1$ и произвольной вычислимой функции f, то PTAS называется эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS).

Трудоемкость $T(n)$ приближенной схемы не всегда удается оценить сверху полиномом от размера входных данных. В частности, если $T(n) = n^{\mathrm{poly}_\varepsilon(\log n)}$, то приближенная схема называется квазиполиномиальной (QPTAS).

Основные результаты диссертационной работы представлены в терминах квазиполиномиальных, полиномиальных и эффективных полиномиальных приближенных схем.

Раздел 1.2 содержит описание как классической постановки CVRP, так и более общей задачи маршрутизации транспорта ограниченной грузоподъемности делимого спроса (CVRP-SD), необходимой для дальнейших построений. Произвольная постановка CVRP-SD может быть задана следующим образом.

Пусть заданы полный взвешенный граф $G = (X \cup \{y\}, E, D, w)$ и натуральное число q. Здесь $X = \{x_1 \ldots, x_n\}$ — множество потребителей, y — склад, неотрицательная весовая функция $D\colon X \to \mathbb{Z}_+$ задает объем спроса каждого из потребителей, симметричная весовая функция $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ сопоставляет произвольной паре вершин $\{u,v\} \subset X \cup \{y\}$ транспортные издержки $w(u,v)$, связанные с непосредственной перевозкой по ребру $\{u,v\} \in E$, а q — верхняя оценка грузоподъемности используемых транспортных средств.

Маршрутом называется упорядоченная пара $\mathcal{R} = (\pi, S_{\mathcal{R}})$, в которой $\pi = y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, y$ — (не обязательно простой) цикл в графе G, а функция $S_{\mathcal{R}}\colon X \to \mathbb{Z}_+$ задает распределение спроса потребителей, удовлетворяемого данным маршрутом.

Стоимость (вес) маршрута $\mathcal{R}$ определяется выражением

$$w(\mathcal{R}) = w(y, x_{i_1}) + w(x_{i_1}, x_{i_2}) + \cdots + w(x_{i_{t-1}}, x_{i_t}) + w(x_{i_t}, y).$$

Маршрут $\mathcal{R} = (\pi, S_{\mathcal{R}})$ называется *допустимым*, если

$$S_{\mathcal{R}}(x) \begin{cases} \leq & D(x), \quad x \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \\ = & 0, \quad \text{в противном случае} \end{cases} \qquad \text{и} \quad \sum_{x \in X} S_{\mathcal{R}}(x) \leq q.$$

Задача CVRP-SD заключается в построении семейства $\mathfrak{S}$ допустимых маршрутов минимальной суммарной стоимости, удовлетворяющего совокупный потребительский спрос:

$$\begin{aligned} w(\mathfrak{S}) \quad \equiv \quad & \sum_{\mathcal{R} \in \mathfrak{S}} w(\mathcal{R}) \to \min \\ & \sum_{\mathcal{R} \in \mathfrak{S}} S_{\mathcal{R}}(x) = D(x) \quad (x \in X). \end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что постановка классической задачи CVRP легко может быть получена из постановки (1) задачи CVRP-SD введением дополнительного ограничения $D(x) \equiv 1$.

Если функция w удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. для произвольного подмножества $\{v_1,v_2,v_3\} \subset X \cup \{y\}$ справедливо соотношение $w(v_1,v_2) \le w(v_1,v_3)+w(v_3,v_2)$, то вершины графа G принято называть точками, величину $w(u,v)$ — расстоянием между точками u и v, стоимость $w(\mathcal{R})$ произвольного маршрута $\mathcal{R}$ – его длиной, а соответствующую постановку задачи – метрической. В данной диссертационной работе мы рассматриваем исключительно метрические постановки задач.

В разделе 1.3 приводится описание постановок родственных CVRP комбинаторных задач и современные подходы к их решению. В частности, рассматриваются задача коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) и ее асимметричная версия (Asymmetric Traveling Salesman Problem, ATSP), задача о m коммивояжерах (m-Peripatetic Salesman Problem, m-PSP), задача о цикловом покрытии (Cycles Cover Problem, CCP), а также задача о размещении производств (Facility Location Problem, FLP). Существенное внимание уделено схемам К.Талвара и Я.Бартала и коллег[17], иллюстрирующим возможность аппроксимации задачи TSP в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения.

Раздел 1.4 посвящен описанию вопроса вычислительного статуса непосредственно задачи CVRP и описанию наиболее значимых результатов в области ее аппроксимации. В секции описываются такие приближенные схемы, как классическая PTAS М.Хаймовича и А.Ринной Кана, использующая, в частности, 2-приближенный алгоритм итерированного разбиения маршрута (ITP), PTAS коллектива Т.Асано, результаты А.Адамашек и квазиполиномиальная приближенная схема А.Дас и К.Матье. Помимо этого, рассматривается схема динамического программирования[18], широко используемая в дальнейших построениях.

В разделе 1.5 приведены методы решения некоторых расширенных постановок CVRP, полученных введением дополнительных ограничений. В частности, рассматриваются непересекающиеся временные промежутки обслуживания клиентов (CVRPTW) и неоднородный делимый спрос (CVRP-SD). Данные классы задач весьма распространены и являются важными с практической точки зрения, однако для них до недавнего времени ничего не было известно с точки зрения их аппроксимируемости.

Глава 2 открывает результативную часть работы и целиком посвящена исследованию аппроксимируемости CVRP в метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения, определение которых приведено ниже.

Определение 1. *Говорят, что метрическое пространство* (Z,ρ) *обладает размерностью удвоения* d*, если для произвольных* $z_0 \in Z$ *и* $R > 0$ *найдутся*

[17] Abraham, I., Bartal, Y., Neiman, O.: Advances in metric embedding theory. Advances in Mathematics **228**(6), 3026 – 3126 (2011).

[18] Van Hoorn, J.: A note on the worst case complexity for the capacitated vehicle routing problem (12 2020)

числа $M \le 2^d$ и точки $z_1,\dots,z_M \in Z$ такие, что метрический шар $B(z_0,R)$ с центром в z_0 и радиуса R может быть покрыт не более чем M шарами половинного радиуса с центрами в точках z_j, т.е. $B(z_0,R) \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} B(z_j,R/2)$.

Раздел 2.1 содержит обзор необходимых результатов о метрических пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения.

В разделе 2.2 показывается, что классический подход М.Хаймовича и А.Ринной Кана сохраняет свои аппроксимативные свойства в рассматриваемых в данной главе пространствах. Показывается, что описываемый подход приводит к PTAS при следующих условиях:

- *Свойство 1.* Пара (Z,ρ), в которой $Z = X \cup \{y\}$ и $\rho|_E \equiv w$, задает метрическое пространство фиксированной размерности удвоения $d > 2$.
- *Свойство 2.* Расстояние $\rho(x,y)$ от произвольного потребителя $x \in X$ до склада y удовлетворяет двустороннему ограничению $a \le \rho(x,y) \le b$ для наперед заданных вещественных чисел $0 < a < b$.

Доказательство корректности схемы состоит из обоснования относительной погрешности с помощью вспомогательных лемм, большинство из которых справедливо и для исследованных ранее геометрических постановок. Главное отличие состоит в использовании специальной оценки для веса оптимального решения вспомогательной постановки TSP, полученной с помощью известной теоремы П.Ассуада о вложении пространств с константным искажением. Учитывая, что трудоемкость динамического программирования и эвристики итерированного разбиения маршрутов (ITP) остаются теми же самыми, что и в случае геометрических постановок, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.1. $(1+\varepsilon)$*-приближенное решение произвольной метрической постановки задачи CVRP, обладающей свойствами 1 и 2, может быть получено для произвольного $\varepsilon > 0$ за время*

$$O\left(qk^3 2^k\right) + \mathrm{TIME}(\mathrm{TSP},\beta,n) + O(n^2),$$

где

$$k = k(\varepsilon,q,\beta,D,a) = O\left(\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^D \left(\frac{4\sqrt{2}\beta D^{(1+3/D)/2}\cdot L}{\sqrt{a}}\right)^D + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\exp\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)^2,$$

$\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP},\beta,n)$ *– время решения вспомогательной задачи коммивояжера с точностью β, $D = O(d\cdot\log\log d)$ и $L = \mathrm{poly}(d)$.*

Следствие 2.1. *Алгоритм Хаймовича — Ринной Кана в классе метрических постановок CVRP, обладающих свойствами 1 и 2, реализует PTAS при $q = o(\log\log n)$ и EPTAS для произвольного фиксированного значения q.*

В разделе 2.3 рассматривается квазиполиномиальная приближенная схема, развивающая как идеи С.Ароры по построению PTAS для евклидовой задачи коммивояжера, так и К.Талвара по их обобщению на случай метрических пространств произвольной фиксированной размерности удвоения. Структура предлагаемой аппроксимационной схемы состоит из четырех стадий: предварительной обработки и округления, рандомизированной иерархической кластеризации, динамического программирования и дерандомизации.

На первой стадии для заданного $\varepsilon > 0$ исходной задаче сопоставляется вспомогательная постановка более простой структуры так, что произвольное $(1+\varepsilon)$-приближенное решение полученной округленной задачи может быть эффективно преобразовано в подходящее $(1+O(\varepsilon))$-приближенное решение исходной постановки. Постановка искомой округленной задачи описывается в терминах метрических сетей.

Определение 2.4. *Пусть Z' — произвольное непустое подпространство метрического пространства (Z,ρ). Для заданного $\delta > 0$ подмножество $N \subseteq Z'$ называется δ-сетью подпространства Z', если для произвольного $u \in Z'$ найдется такой элемент $v = v(u) \in N$, что $\rho(u,v) \leq \delta$, либо для произвольного подмножества $\{v_1,v_2\} \subset N$ расстояние $\rho(v_1,v_2) > \delta$.*

Пользуясь определением 2.4, исходной постановке CVRP сопоставляется округленная, определенная на множестве узлов произвольной 1-сети $N_1 = \{\xi_1,\ldots,\xi_J\}$, заданной на множестве $X \cup \{y\}$.

На второй стадии для заданных случайных значений параметров строится совокупность вложенных друг в друга разбиений (иерархическая кластеризация) множества $X \cup \{y\}$. Общее количество уровней кластеризации равняется $L+1$, $L = O(\log n - \log \varepsilon)$. В кластере произвольного уровня выбирается подмножество специальных точек-порталов. Далее, следуя подходу Я.Бартала и коллег, показывается, что для поиска искомого приближенного решения округленной задачи достаточно ограничиться семействами т.н. сетевых маршрутов, пересекающих границу произвольного кластера ограниченное число раз, причем исключительно в порталах. Маршрут, пересекающий границу произвольного кластера C_j^l не более r раз, называется r-легким. Приведенная ниже структурная теорема позволяет оценить среднее (относительно случайной иерархической кластеризации) значение стоимости решения, состоящего из сетевых и r-легких маршрутов.

Теорема 2.2. [структурная] *Пусть $r = O\left(\left(\frac{d\cdot(\log n - \log\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^d\right)$ и $d > 1$. Для любого фиксированного $\varepsilon \in (0,1/8)$ и произвольного допустимого решения $\mathfrak{S}$ задачи CVRP$(X \cup \{y\},E,w)$ найдется допустимое решение $\tilde{\mathfrak{S}}$, состоящее из сетевых и r-легких маршрутов такое, что*

$$E(w(\tilde{\mathfrak{S}})) = (1+O(\varepsilon))w(\mathfrak{S}).$$

На третьей стадии методом динамического программирования построенной случайной реализации иерархической кластеризации сопоставляется допустимое решение, состоящее из сетевых маршрутов минимальной суммарной стоимости.

Произвольная ячейка таблицы динамического программирования индексируется парой $(C,\mathfrak{C})$, где C кластер произвольного уровня l, а $\mathfrak{C}$ — конечная последовательность $((p_i^{in},p_i^{out},Sup_i,Dep_i),\ i = 1,\ldots,T_{\mathfrak{C}})$, называемая конфигурацией, каждый элемент которой определяет сегмент сетевого r-легкого маршрута, пересекающего кластер C через порталы p_i^{in}, p_i^{out}, удовлетворяющий Sup_i единиц клиентского спроса и посещающего депо в зависимости от индикатора Dep_i. Значение $T_{\mathfrak{C}}$ задает длину конфигурации, не превышающую количества маршрутов произвольного оптимального решения задачи, помноженное на r. Значением ячейки $(C,\mathfrak{C})$ является минимальный суммарный вес сегментов, пересекающих границы кластера C и совместимых с конфигурацией $\mathfrak{C}$, дополненных весом маршрутов, внутренних относительно C.

Заполнение таблицы динамического программирования проводится снизу вверх. Ячейки базового $L+1$-м уровня заполняются очевидным образом. Для того, чтобы заполнить ячейку $(C_j^l,\mathfrak{C})$ произвольного уровня l, $l \in [0,L]$, рассматриваются всевозможные комбинации ячеек $(C_{j1}^{l+1},\mathfrak{C}_1),\ldots,(C_{jk}^{l+1},\mathfrak{C}_k)$, вычисленных на предыдущей стадии. Сегменты, построенные каждой такой комбинацией, склеиваются между собой с помощью профиля конкатенации, представляющего собой конечную последовательность φ, задающую порядок склейки. В ячейку $(C,\mathfrak{C})$ будет записана стоимость построенных таким образом сегментов минимального веса, согласованных с конфигурацией $\mathfrak{C}$. Минимизация по всем допустимым конфигурациям единственного кластера C_1^0, расположенного на верхнем уровне рекурсии, и последующее восстановление маршрутов методом обратной прогонки завершают поиск искомого сетевого r-легкого решения исходной задачи, соответствующего заданной случайной реализации иерархической кластеризации.

Наконец, на четвертой стадии происходит дерандомизация предложенного алгоритма (по аналогии со схемой К.Талвара).

Приведенная ниже теорема устанавливает устанавливает факт существования QPTAS для постановок CVRP, заданных в метрических пространствах размерности удвоения и при условии, что число маршрутов в оптимальном решении не превышает $\operatorname{polylog} n$.

Теорема 2.3. $(1+O(\varepsilon))$*-приближенное решение задачи CVRP, сформулированной в метрическом пространстве произвольной размерности удвоения* $d > 1$ *и обладающей оптимальным решением с числом маршрутов не превосходящим* $\operatorname{polylog} n$*, может быть найдено рандомизированным алгоритмом за время* $\operatorname{poly}(n)\cdot\left(m^2 n\right)^{\operatorname{polylog} n\cdot m^2\cdot 2^{O(d)}}$*, где* $m = O\left(\left(\frac{d\cdot(\log n-\log\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^d\right)$*. Алгоритм допускает полиномиальную дерандомизацию.*

В разделе 2.4 описывается квазиполиномиальная приближенная схема, полученная в развитие подхода Дас-Матье и идей, изложенных в разделе 2.3. Как и оба упомянутых метода, данная QPTAS состоит из четырех этапов, описанных выше. Отличие данной схемы от рассмотренной в секции 2.3 заключается в существенно более сложной процедуре поиска оптимального решения исходной задачи. Так, для заданной иерархической кластеризации поиск решения $\mathfrak{S}$, состоящего из сетевых r-легких маршрутов, проводится минимизацией штрафной функции F, определяемой следующим образом:

$$F(\mathfrak{S}) = \sum_{\mathcal{R}\in\mathfrak{S}} w(\mathcal{R}) + \frac{\varepsilon}{L+1} \sum_{\mathcal{R}\in\mathfrak{S}} \sum_{l=1}^{L+1} c(\mathcal{R},l) \cdot s^{L-l}, \qquad (2)$$

где $c(\mathcal{R},l)$ обозначает число пересечений границ кластеров на уровне l произвольным маршрутом $R \in \mathfrak{S}$.

На стадии поиска оптимального решения методом динамического программирования в ячейки таблицы просмотра записывается стоимость построенных сегментов, вычисленная с точки зрения введенной штрафной функции (2). Помимо этого, процедура склейки сегментов, заключающаяся в полном переборе всевозможных наборов профилей конкатенации, заменяется на процедуру внутреннего динамического программирования, суть которой состоит в следующем. Пусть C_j^l, $l \in [0,L]$ — произвольный кластер, и $C_{j1}^{l+1}, \ldots, C_{jK}^{l+1}$ его подкластеры, $K = 2^{O(d)}$. Введем множество

$$\bar{S} = \{\sigma_0\} \cup \bigcup_{u=1}^{K} \{s_1^u, \ldots, s_{k_u}^u\} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\mathcal{K}}\},\ \mathcal{K} = \sum_{u=1}^{K} k_u$$

содержащее все кортежи s_v^u дочерних конфигураций, дополненное пустым сегментом σ_0.

Следующим шагом введем трехмерную неотрицательную целочисленную ресурсную матрицу A в каждой ячейке $a_{i,\nu}^p$ которой хранится число использований кортежа σ_ν в семействе профилей конкатенации Φ_i на p-й позиции. Каждое такое семейство Φ_iописывает порядок склейки m_i сегментов, идентичных с точки зрения вышестоящего кластера.

Произвольную подматрицу $A_i = \|a_{i,\nu}^p\|$, являющуюся срезом матрицы A при произвольном i, будем называть i-й ресурсным слоем, индексы которого изменяются как $p = \overline{1,\bar{r}}$ и $\nu = \overline{0,\mathcal{K}}$, где $\bar{r} = K \cdot r$. В таблице 1 приведен пример ресурсного среза, совместимого с заданным семейством профилей конкатенации.

Дальнейший ход динамического программирования связан с перебором всех ресурсных матриц, и определении для каждой из них оптимального способа склейки сегментов в соответствии с семейством профилей конкатенации, совместимом с данной ресурсной матрицей. Наконец, оптимальный способ склейки всех сегментов получается путем вывода оптимального значения по всем таким матрицам.

Основной результат раздела 2.4 сформулирован в следующей теореме, обуславливающей возможность получения результата, родственного подходу Дас-Матье, в метрических пространств произвольной фиксированной размерности удвоения.

Таблица 1 — Образец ресурсного слоя A_i и соответствующей последовательности профилей конкатенации при $\mathcal{K} = 3$, $\bar{S} = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_3\}$

A_i: σ \ p	1	2	$\ldots$
0	0	1	
1	2	1	
2	3	1	
3	0	2	

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} (\sigma_1,\sigma_2,\ldots) \\ (\sigma_1,\sigma_3,\ldots) \\ (\sigma_2,\sigma_1,\ldots) \\ (\sigma_2,\sigma_3,\ldots) \\ (\sigma_2,\sigma_0) \end{bmatrix}$$

Теорема 2.6. *Для постановки задачи CVRP, заданной в метрическом пространстве произвольной фиксированной размерности удвоения $d > 1$ $(1+O(\varepsilon))$-приближенное решение может быть найдено рандомизированным алгоритмом за время, не превышающее $\mathrm{poly}(n) \cdot n^{O(m^5 L^2 q \log^2 q)}$, где $m = O\left(\left(\frac{d(\log n - \log\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^d\right)$ и $L = O(\log n - \log\varepsilon)$. Алгоритм может быть эффективно дерандомизирован.*

Следствие 2.3. *Предложенная схема является квазиполиномиальной при условии, что значение параметр грузоподъемности q растет не быстрее $\mathrm{polylog}\, n$, то есть $q = O(\mathrm{polylog}\, n)$.*

В **главе 3** данной диссертационной работы рассматриваются некоторые обобщенные постановки CVRP, заданной на евклидовой плоскости. Секция 3.1 содержит описание двух полиномиальных приближенных схем для задачи CVRP с p временными промежутками обслуживания клиентов. В частности, подсекция 3.1.1 описывает PTAS, полученную путем обобщения классического подхода Хаймовича-Ринной Кана. Идея построения данной схемы основана на модификации эвристики ITP с учетом временных окон, а также на доказательстве корректности принципа декомпозиции для постановок CVRPTW.

В формулировке следующей теоремы показана корректность данной PTAS, а также ее трудоемкость.

Теорема 3.1. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $(1 + O(\varepsilon))$-приближенное решение для евклидовой постановки CVRPTW, которое может быть найдено за время $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP},\rho,n) + O(n^2) + O(qk^3 2^k)$, где $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP},\rho,n)$ трудоемкость решения вспомогательной задачи коммивояжера с точностью ρ, и $k = k(\varepsilon,p,q,\rho) = O\left(p(\rho+1)\exp\left(O(q/\varepsilon)\right)\exp\left(O(\sqrt{pq/\varepsilon})\right)\right)$.*

Следствие 3.1. *Как следует из теоремы 3.1, предложенная схема является EPTAS при произвольных фиксированных параметрах p и q и остается PTAS при $q = O(\log\log n)$ и $p = O(\log\log n)$.*

Следует отметить, что данная схема допускает очевидное распараллеливание.

Подсекция 3.1.2 описывает PTAS для CVRPTW с существенно более широким диапазоном параметров p и q. Основная ее идея базируется на улучшенном способе декомпозиции постановки исходной задачи, заключающемся в введении промежуточного множества клиентов $\mathrm{X_{mid}}$, для некоторых из которых можно решать задачу точно, в то время как для оставшейся части будет применяться эвристика ITP.

Условия предлагаемой схемы сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $(1+\varepsilon)$-приближенное решение евклидовой постановки задачи* CVRPTW *на плоскости за время*

$$TIME(\mathrm{TSP},\rho,n) + O(n^2) + O\Big(e^{O(q\,(\frac{q}{\varepsilon})^3(p\rho)^2\log(p\rho))}\Big).$$

Следствие 3.2. *Описанная в теореме 3.2 схема является PTAS при условии $p^3q^4 = O(\log n)$. Для произвольных фиксированных значений параметров $p \geq 1$ и $q \geq 1$ схема является также EPTAS с трудоемкостью $O(n^3 + e^{O(1/\varepsilon^3)})$ при условии, что для решения вспомогательной задачи коммивояжера применяется алгоритм Кристофидеса — Сердюкова.*

В разделе 3.2 содержится описание полиномиальной приближенной схемы для задачи CVRPTW с неоднородным делимым спросом. Данная PTAS состоит из следующих стадий.

1. **Стадия предобработки,** в рамках которой происходит переупорядочение клиентов x_i, обладающих спросом d_i, по убыванию их расстояний $r_i = w(y,x_i)$, а также задание пороговой величины $\rho = \frac{r_1\varepsilon}{N}$, $N = \sum_{i=1}^{n}\lceil\frac{d_i}{q}\rceil$, которая используется для исключения из дальнейшего рассмотрения всех клиентов x_i, для которых $r_i \leq \rho$.
2. **Стадия округления.** Исходной CVRPTW-SD сопоставляется вспомогательная постановка специального вида, $(1+\varepsilon)$-приближенное решение которой может быть эффективно преобразовано в приближенное решение исходной постановки.
3. **Стадия декомпозиции.** На данном этапе проводится декомпозиция округленной постановки CVRPTW-SD на несколько независимых подзадач двух типов, называемых белыми и серымис, которые могут быть решены независимо друг от друга.
4. **Применение «черного ящика».** Последним шагом применим QPTAS, разработанную Л.Сонем для задачи CVRPTW, и модифицированную эвристику ITP для поиска приближенных решений для всех белых и серых подзадач соответственно.

Ниже приведена теорема, в которой сформулированы основные результаты раздела 3.2.

Теорема 3.4. *Для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ алгоритм, описанный в разделе 3.2, находит $(1+O(\varepsilon))$-приближенное решение исходной постановки CVRPTW-SD с трудоемкостью*

$$O\left(I \cdot \mathcal{K}(p,q,\varepsilon) + n\log n\right),$$

где

$$I = O\left(\frac{\log\frac{N}{\varepsilon}}{a\log\frac{1}{\varepsilon}}\right) = O\left(\frac{\varepsilon}{p}\frac{\log\frac{N}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\right),$$

$$\mathcal{K}(p,q,\varepsilon) = \left(\sigma_w^2 q\right)^{\left(\log(\sigma_w^2 q)\right)^{O(1/\varepsilon)}} + (\sigma_g^2 q)^3,$$

$$\sigma_w = O\left(\frac{(pq)^2}{\varepsilon^3}\cdot\log\frac{1}{\varepsilon}\right),\ \sigma_g = O\left(\frac{pq^2}{\varepsilon^2}\cdot\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Следствие 3.3. *Для произвольного фиксированного* $\varepsilon \in (0,1)$ *трудоемкость предложенной схемы не превосходит* $O(n\log N)$*, если* $p = \Omega(1)$*,* $q = \Omega(1)$*, и если выполнено неравенство* $\max\{p,q\} \leq 2^{\log^\delta n}$ *для некоторого* $\delta = O(\varepsilon)$*.*

Следствие 3.4. *Для произвольных фиксированных* p *и* q *предложенная схема является EPTAS с трудоемкостью* $O\left(\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right)^{\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(1/\varepsilon)}}\cdot\log N + n\log n\right)$.

В заключении приведены основные результаты диссертации и перечисляются вопросы, оставшиеся открытыми.

Основные результаты диссертации

1. Обоснована аппроксимируемость постановок NP-трудной задачи CVRP в классах QPTAS и PTAS, заданных в метрических пространствах произвольной размерности удвоения. В частности:

   (a) показано, что схема Хаймовича-Ринной Кана сохраняет свои аппроксимативные свойства при тех же ограничениях на рост параметров, для которых она была сформулирована на евклидовой плоскости;

   (b) установлена аппроксимируемость в классе QPTAS для постановок CVRP, оптимальное решение которых состоит из не более, чем $\operatorname{polylog} n$ маршрутов;

   (c) наиболее общий для конечномерных пространств результат Дас-Матье распространен на случай упоминаемых выше пространств при дополнительном условии $q = \operatorname{polylog} n$.

2. Для геометрических постановок CVRP:

   (a) впервые обоснована аппроксимируемость задачи CVRP с дополнительным ограничением на временные промежутки обслуживания (CVRPTW) в классах PTAS при $q = o(\log\log n)$ и $p = o(\log\log n)$, и EPTAS при произвольных фиксированных q и p;

   (b) для постановок CVRP, стесненных ограничениями на временные промежутки обслуживания и неоднородность клиентского спроса, построена PTAS с рекордной верхней оценкой грузоподъемности $q \leq 2^{\log^\delta n}$, $\delta = O(\varepsilon)$.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из списка ВАК

1. Khachay, M., Ogorodnikov, Y., Khachay, D. Efficient approximation of the metric CVRP in spaces of fixed doubling dimension. // Journal of Global Optimization. – 2021. DOI:10.1007/s10898-020-00990-0. (Web of Science, Scopus)
2. Хачай, М.Ю., Огородников, Ю.Ю. Эффективная аппроксимируемость задачи об оптимальной маршрутизации в метрических пространствах фиксированной размерности удвоения // Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2020. – Т.493. - С. 74–80. DOI: 10.31857/S2686954320040086.
   Khachay, M.Y., Ogorodnikov, Y.Y.: Efficient approximation of the capacitated vehicle routing problem in a metric space of an arbitrary fixed doubling dimension // Doklady Mathematics . – 2020. - V.102, – №1. – P. 324–329 DOI:10.1134/S1064562420040080 (Web of Science, Scopus)
3. Хачай, М.Ю., Огородников Ю.Ю. Аппроксимационная схема Хаймовича-Ринноя Кана для CVRP в метрических пространствах фиксированной размерности удвоения // Труды института математики и механики Уро РАН. – 2019. – Т. 25. – №4. – С.235–248. DOI:10.21538/0134-4889-2019-25-4-235-248 (Web of Science, Scopus)
4. Хачай, М.Ю., Огородников Ю.Ю. Полиномиальная приближенная схема для задачи маршрутизации транспортных средств с ограничениями на грузоподъемность и временные промежутки обслуживания. Труды института математики и механики УрО РАН. - 2018. - Т.24. - № 3, - С.233-246. DOI:10.21538/0134-4889-2018-24-3-233-246.
   Khachai, M., Ogorodnikov, Y.: Polynomial-Time Approximation Scheme for the Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2019. – V.307. – №1. – P.51–63. DOI:10.1134/S0081543819070058 (Web of Science, Scopus)
5. Khachay, M., Ogorodnikov, Y.: Towards an efficient approximability for the euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem with time windows and multiple depots // IFAC-PapersOnLine. – 2019. – Vol. 52. – №13. – P. 2644–2649. DOI:10.1016/j.ifacol.2019.11.606 (Web of Science, Scopus)

Статьи, индексированные в Web of science и (или) Scopus

6. Khachay, M., Ogorodnikov, Y., Khachay, D.: An extension of the Das and Mathieu QPTAS to the case of polylog capacity constrained CVRP in metric spaces of a fixed doubling dimension // Lecture Notes of Computer Science (LNCS). – 2020. – Vol. 12095. – P.49-68. DOI:10.1007/978-3-030-49988-4_4 (Scopus)
7. Khachay, M., Ogorodnikov, Y.: Approximation scheme for the Capacitated Vehicle Routing Problem with time windows and non-uniform demand. // Lecture Notes of Computer Science (LNCS). – 2019. – Vol. 11548. – P. 309–327. DOI:10.1007/978-3-030-22629-9_22 (Web of Science, Scopus)
8. Khachay, M., Ogorodnikov, Y.: PTAS for the Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem with time windows // Lecture Notes of Computer Science (LNCS). – 2019. – Vol. 11968. – P. 224–230. DOI:10.1007/978-3-030-38629-0_18 (Scopus)
9. Khachay, M., Ogorodnikov, Y.: QPTAS for the CVRP with a moderate number of routes in a metric space of any fixed doubling dimension // Lecture Notes of Computer Science (LNCS). – 2020. – Vol. 12096. – P. 27–32. DOI:10.1007/978-3-030-53552-0_4 (Scopus)
10. Khachay, M., Ogorodnikov, Y.: Improved polynomial time approximation scheme for Capacitated Vehicle Routing Problem with time windows // Communications in Computer and Information (CCIS). – 2019.– Vol. 974. – P. 155–169. DOI:10.1007/978-3-030-10934-9_12 (Scopus)
11. Khachay, M., Ogorodnikov, Y.: Polynomial capacity guarantees PTAS for the Euclidean Capacitated Vehicle Routing problem even for non-uniform non-splittable demand // Communications in Computer and Information (CCIS). – 2020. – Vol. 1145. – P. 415–426. DOI:10.1007/978-3-030-38603-0_30 (Scopus)
12. Khachay, M., Ogorodnikov, Y.: Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with Time Windows // Lecture Notes of Computer Science (LNCS). – 2018. – Vol. 11179. – P. 318–328. DOI:10.1007/978-3-030-11027-7_30 (Web of Science, Scopus)
13. Khachay, M., Ogorodnikov, Y.: Efficient PTAS for the Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem with non-uniform non-splittable demand // Lecture Notes of Computer Science (LNCS). – 2019. – Vol. 11832. – P. 388–398. DOI:10.1007/978-3-030-37334-4_35 (Web of Science, Scopus)

Огородников Юрий Юрьевич

Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задачи маршрутизации транспорта ограниченной грузоподъемности

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 150 экз.
Типография ____