Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»

На правах рукописи

Акопян Роман Размикович

Оптимальное восстановление аналитических функций по приближенно заданным граничным значениям

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д. ф.-м. н., проф.
Арестов Виталий Владимирович

Екатеринбург – 2021

Содержание

Список обозначений **4**

Введение **8**

Глава 1. Оптимальное восстановление аналитической функции по неточно заданным значениям на части границы **49**

§ 1.1. Оптимальное восстановление значения в точке аналитической в односвязной области функции 49

§ 1.2. Явный вид экстремалей в случаях полуплоскости и круга . . 61

§ 1.3. Оптимальное восстановление на множестве ограниченной с весом аналитической функции 69

§ 1.4. Оптимальное восстановление на прямой аналитической в полосе функции 81

§ 1.5. Случай конечносвязной области 92

§ 1.6. Оптимальное восстановление на окружности аналитической в кольце функции 105

Глава 2. Оптимальное восстановление производной по неточно заданным значениям аналитической функции на части границы **119**

§ 2.1. Оптимальное восстановление производной в точке ограниченной аналитической функции 119

§ 2.2. Оптимальное восстановление оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций 142

§ 2.3. Оптимальное восстановление оператора дифференцирования на классе аналитических в кольце функций 152

§ 2.4. Наилучшее приближение производных аналитических функций одного класса Харди другим классом Харди 161

Глава 3. Оптимальное восстановление аналитической в полуплоскости функции по сужению спектральной функции **171**

§ 3.1. Наилучшее приближение класса Харди – Соболева целыми функциями экспоненциального типа; средние поперечники класса 174

§ 3.2. Оптимальное восстановление по сужению спектральной функции 200

Заключение **212**

Список литературы **216**

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — соответственно множества натуральных, целых, целых неотрицательных, вещественных и комплексных чисел.

$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ — вещественная и мнимая части числа $z \in \mathbb{C}$.

G — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$; конкретные области:

$D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ — открытый круг радиуса r с центром в нуле;

$D = D_1$;

$C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ — кольцо с центром в нуле, внутренним и внешним радиусами, соответственно, r и R;

$\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость;

$\Pi_Y = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < Y\}$ — полоса.

$l_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ — окружность радиуса r с центром в нуле.

$g(z, \zeta)$ — классическая функция Грина области G с логарифмической особенностью в точке $z = \zeta$;

$P(z, \zeta) = \dfrac{\partial g}{\partial n}$ — плотность гармонической меры относительно области G в точке z – производная функции Грина по внутренней, для области G, нормали к границе области;

$w(z, \gamma, G)$ — гармоническая мера подмножества γ границы $\Gamma = \partial G$ относительно области G в точке z.

Пусть γ либо измеримое подмножество спрямляемой кривой, либо промежуток прямой на плоскости $\mathbb{C}$; φ — неотрицательная измеримая функция на γ.

$L^p_\varphi(\gamma), p > 0,$ — множество измеримых функций $f : \gamma \to \mathbb{C}$ таких, что $|f|^p \varphi$ суммируема на γ. Функции f и g определяют один и тот же элемент $L^p_\varphi(\gamma)$ (эквивалентны), если $f(z) = g(z)$ для почти всех $z \in \gamma$. При $\varphi \equiv 1$ обозначаем $L^p(\gamma) = L^p_\varphi(\gamma)$.

$\|f\|_{L^p(\gamma)} = \left(\int_\gamma |f(\zeta)|^p \, |d\zeta| \right)^{1/p}$ — L^p-средние функции f на γ.

$L^p(\gamma), 1 \le p < \infty,$ — пространство Лебега с нормой $\| \cdot \|_{L^p(\gamma)}$.

$L^\infty(\gamma)$ — пространство измеримых, существенно ограниченных функций $f : \gamma \to \mathbb{C}$ с нормой $\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup} \{|f(z)| : z \in \gamma\}$. Функции f и g определяют один и тот же элемент $L^\infty(\gamma)$ (эквивалентны), если $f(z) = g(z)$ для почти всех $z \in \gamma$.

Классы аналитических (голоморфных) функций:

$A(G)$ — множество аналитических в области G функций;

$A = A(\mathbb{C})$ — множество целых функций;

$A_\sigma = A_\sigma(\mathbb{C}), \sigma \ge 0,$ — множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ;

$N(G)$ — класс Неванлинны функций $f \in A(G)$, для которых $\ln^+ |f|$ имеет гармоническую мажоранту на области G;

$N_*(G)$ — класс Смирнова (универсальный класс Харди) функций $f \in N(G)$, для которых гармоническая мажоранта $\ln^+ |f|$ представима по формуле Грина;

$H^p(G), p > 0,$ — классы Харди функций $f \in A(G)$, для которых $|f|^p$ имеет гармоническую мажоранту на области G;

$H^\infty(G)$ — класс Харди аналитических и ограниченных в области G функций;

$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ — класс функций $f \in N_*(G)$ таких, что их некасательные (угловые) предельные граничные значения на γ_k, $k = 0, 1$, имеют конечные, соответственно, L^r, L^q-нормы с весом φ_k;

$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ — класс функций $f \in \mathcal{H}$, которые удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)} \le 1$;

$Q = Q^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ — класс функций, определённых почти всюду на γ_1, состоящих из предельных граничных значений на γ_1 функций класса $\mathcal{Q}$;

$\mathcal{H}^p(G;\varphi)$ — класс функций $f \in N_*(G)$ таких, что их некасательные (угловые) предельные граничные значения на Γ имеют конечную L^p-норму с весом φ;

$\mathcal{H}^p(G)$ — класс $\mathcal{H}^p(G;1)$ в случае веса φ, тождественно равного единице;

$Q^p(G,\gamma_1,\varphi)$ — класс функций $f \in \mathcal{H}^p(G;\varphi)$ таких, что $\|f\|_{L^p_\varphi(\gamma_0)} \le 1$;

$Q^p(\Pi_Y) = Q^p(\Pi_Y,\mathbb{R},1)$;

$Q^p(D_R,N)$, $Q^p(C_{r,R},N)$ — классы функций $f \in H^p(D_R)$ или, соответственно, $f \in H^p(C_{r,R})$, которые удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p_{\phi_R}(l_R)} \le N$; $\phi_R \equiv (2\pi R)^1$;

$Q^p(G)$ — класс $Q^p(G,1)$ в случае, когда параметр N равен единице;

$Q^p_n = Q^p_n(\Pi_+)$ — класс Харди–Соболева функций $f \in \mathcal{H}^p(\Pi_+)$, для которых $f^{(n)} \in \mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и для всех $\eta > 0$ справедливо $\|f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} \le 1$;

$\partial^m Q$ — множество производных порядка m функций класса Q;

$A^p_\sigma = A_\sigma \bigcap \mathcal{H}^p(\Pi_+)$ — множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, сужение которых на верхнюю полуплоскость принадлежит $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$.

Пусть X, Y — банаховы пространства; обозначения множеств операторов из X в Y:

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(X,Y)$ — множество всех однозначных отображений;

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,Y)$ — множество линейных операторов;

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X,Y)$ — множество линейных ограниченных операторов;

$\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(N;X,Y), N > 0,$ — множество линейных ограниченных операторов из X в Y, норма которых не превосходит числа N.

Пусть $A : X \to Y$ некоторый оператор с областью определения $D(A) \subset X$; Q — класс элементов из $D(A)$.

$\omega(\delta) = \omega(\delta;A,Q) = \sup\{\|Af\|_Y \,:\, f \in Q,\, \|f\|_X \le \delta\}$, $\delta \ge 0,$ — модуль непрерывности оператора A на классе Q.

$U(T) = \sup\{\|Af - Tf\|_Y \,:\, f \in Q\}$ — приближение оператора A оператором T на классе Q;

$E(N) = E(A, Q; N) = \inf\{U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N)\}$ — наилучшее приближение оператора A множеством $\mathcal{B}(N)$ линейных ограниченных операторов, норма которых не превосходит числа N, на классе Q.

$\mathcal{U}(T, \delta) = \mathcal{U}(T, \delta; A, Q) = \sup\{\|Af - Tg\|_Y \,:\, f \in Q,\ g \in X,\ \|f - g\|_X \le \delta\}$ — погрешность восстановления оператора A на классе Q по элементам, заданным с погрешностью $\delta \ge 0$, с помощью метода T;

$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta; A, Q) = \inf\{\mathcal{U}(T, \delta) \,:\, T \in \mathcal{R}\}$ — величина оптимального восстановления значений оператора A на классе Q по элементам, заданным с известной погрешностью δ, с помощью множества методов восстановления $\mathcal{R}(X, Y)$.

$\mathcal{U}[T, m, \sigma, n]_Y = \sup\left\{\|f^{(m)} - T(I_\sigma f)\|_Y \,:\, f \in Q_n^p\right\}$ — погрешность восстановления методом T оператора дифференцирования порядка m (функции, при $m = 0$) на классе $Q_n^p(\Pi_+)$ по сужению спектральной функции на $(-\varepsilon, \sigma)$;

$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}[m, \sigma, n]_Y = \inf\{\mathcal{U}[T, m, \sigma, n]_Y \,:\, T \in \mathcal{R}\}$ — величина оптимального восстановления оператора дифференцирования порядка m (функции, при $m = 0$) на классе $Q_n^p(\Pi_+)$ по сужению спектральной функции на $(-\varepsilon, \sigma)$ с помощью множества методов восстановления $\mathcal{R}$.

$\mathrm{E}\,(f, Q)_B = \inf\{\|f - q\|_B : q \in Q\}$ — наилучшее приближение f множеством Q по норме пространства B;

$\mathrm{E}\,(Q_1, Q_2)_B = \sup\{\mathrm{E}\,(q_1, Q_2)_B : q_1 \in Q_1\}$ — наилучшее приближение класса Q_1 классом Q_2 по норме пространства B.

Введение

В работе исследуются задачи оптимального восстановления аналитической (голоморфной) в области функции и производной по некасательным предельным значениям функции на части границы области, заданным с погрешностью, взаимосвязанные точные неравенства, задачи Стечкина наилучшего приближения неограниченных операторов ограниченными, задачи наилучшего приближения одного класса аналитических функций другим. Исследуется задача оптимального восстановления аналитической в полуплоскости функции и производных по сужению её спектральной функции и связанная задача наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа.

Актуальность темы.

Множеством единственности для функций, аналитических в области G с границей – спрямляемой кривой Жордана, является подмножество положительной меры γ границы области. Это утверждение известно как теорема единственности И. И. Привалова (1919), см., например, [23, Гл.X, §2]. Первый результат о методе восстановления аналитической функции по её (точным) значениям на части границы получил Т. Карлеман [82] (1926) для некоторого специального вида областей. Г. М. Голузин и В. И. Крылов [24] (1933) обобщили идею Т. Карлемана. Для функции f, представимой в односвязной области G интегралом Коши, метод восстановления по её (точным) граничным значениям на γ даёт следующая формула Карлемана – Голузина – Крылова [24] (см. также [1, Гл.I, §1], [55, Гл. II, §5, 5.9])

$$f(z) = \lim_{\sigma\to-\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma d\zeta, \quad z \in G, \tag{0.0.1}$$

где ϕ — произвольная аналитическая и ограниченная в G функция, удовлетворяющая условиям

$$|\phi(\zeta)| = 1, \quad \zeta \in \partial G \setminus \gamma; \qquad |\phi(z)| > 1, \quad z \in G.$$

Формулам Карлемана – Голузина – Крылова, восстанавливающим аналитические функции по их значениям на части границы, и их обобщениям посвящено множество работ – см., например, монографию [1], обзоры [72, §3, п.3], [77, §2, п.8-9], статьи [94, 100, 101] и приведённую там библиографию. Об их применениях в различных задачах комплексного анализа, теории функций, теории управления, теоретической и математической физике, обработке сигналов см. [1, 16, 17, 71, 80] и приведённую там библиографию.

Задача восстановления аналитической функции в области по её предельным значениям, заданным с погрешностью, на части границы (аналитического продолжения с части границы области) является неустойчивой (некорректно поставленной). Методы её регуляризации исследовалась М. М. Лаврентьевым [31], [32, Гл.II, §1, п.4-5] (см. также [1, Гл.I, §2]), для решения были предложены регуляризирующие операторы, которые имеют в качестве ядра функции, названные функциями Карлемана, и являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши. В частности, в качестве примера такого регуляризующего оператора (метода восстановления) М. М. Лаврентьев рассмотрел конструкцию, основанную на формуле (0.0.1). Регуляризирующий метод R_σ здесь имеет следующий вид

$$(R_\sigma g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma d\zeta.$$

Целью первой и второй глав диссертации является построение наилучших (оптимальных) методов восстановления, соответственно, функции и её производной для некоторых классов (корректности) аналитических функций. Рассматриваемые задачи являются частными случаями следующей задачи оптимального восстановления оператора на классе элементов банахова пространства по неточной информации.

Пусть X, Y – банаховы пространства; $A : X \to Y$ – некоторый оператор с областью определения $D(A) \subset X$; Q – класс элементов X, принадлежащий $D(A)$. Рассматривают три случая множества методов восстановления. А именно, в качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, рассматривают множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, Y)$ всех возможных, множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ линейных, или множество $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов из X в Y. Для числа $\delta \geq 0$ и метода $T \in \mathcal{R}$ величина погрешности восстановления оператора A на классе Q по элементам, заданным с погрешностью δ, с помощью метода T, определяется равенством

$$\mathcal{U}(T, \delta) = \mathcal{U}(T, \delta; A, Q) = \sup\left\{\|Af - Tg\|_Y \,:\, f \in Q, g \in X, \|f - g\|_X \leq \delta\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta; A, Q) = \inf\left\{\mathcal{U}(T, \delta) \,:\, T \in \mathcal{R}\right\} \qquad (0.0.2)$$

есть величина *оптимального восстановления значений оператора* A на классе Q по элементам, заданным с известной погрешностью δ, с помощью множества методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta), \delta \geq 0$, и построении оптимального метода восстановления – экстремального оператора (последовательности операторов), на котором в (0.0.2) достигается нижняя грань.

Задача (0.0.2) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации об элементах; общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [4, 6–8, 37, 53, 90, 92].

Задачи оптимального восстановления на классах аналитических функций исследовали К. Ю. Осипенко, Ш. Мичелли, Т. Ривлин, С. Д. Фишер, К. Вилдероттер, Б. Боянов, М. И. Стесин, О. Г. Парфенов, М. П. Овчинцев и др., см. монографию [92], статьи [50–52, 83, 85, 93] и приведённую там библиографию. Задачи оптимального восстановления по предельным граничным значениям, заданным с погрешностью, на части границы ранее не изучались.

В первой и второй главах изучаются конкретные варианты задачи оптимального восстановления (0.0.2) на классах аналитических функций. Перейдем к их формулировке.

В дальнейшем G – конечносвязная область комплексной плоскости, ограниченная кривой Γ, которая является жордановой спрямляемой кривой или объединением таких непересекающихся кривых. Пусть γ_1 – измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 – дополнение γ_1 до Γ, т.е. $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$. Пусть $g(z, \zeta)$ – классическая функция Грина области G, а $\partial g/\partial n$ – производная функции Грина по внутренней, для области G, нормали к кривой Γ. Производную функции Грина по нормали также называют плотностью гармонической меры относительно области G в точке z; в дальнейшем для неё будем использовать обозначение $P(z, \zeta)$. Соответственно, гармоническая мера $w(z, \gamma, G)$ измеримого подмножества γ спрямляемой границы Γ относительно области G в точке z представима по формуле

$$w(z, \gamma, G) = \int_\gamma P(z, \zeta)\, |d\zeta|.$$

Подробнее о гармонической мере см., например, [23, гл. VIII, § 4], а также [84]. Понятие гармонической меры, возникшее [91] в связи с оценками модуля аналитической функции внутри области, через оценки модуля на границе области, используется в решении и других экстремальных задач, см., например, [25, 28, 34, 35] и приведённые там ссылки.

Через $N_*(G)$ обозначают класс функций f из класса Неванлинны $N(G)$ – аналитических в G функций ограниченного вида (ограниченной характеристики), для которых гармоническая мажоранта функции $\ln^+ |f|$ представима по формуле Грина. Класс $N_*(G)$ называют классом Смирнова или универсальным классом Харди; класс был введён В. И. Смирновым [57]; для класса $N_*(G)$ используют несколько эквивалентных определений (см. [66, §4, 4.2; 68; 72, §2, 1] и приведённую там библиографию). Функции класса $N(G)$ и, следовательно, класса $N_*(G)$ имеют почти всюду на Γ некасательные (угловые) предельные граничные значения. Удобно обозначать функцию и её граничные значения одинаково. Обозначим через φ_k неотрицательные измеримые функции на γ_k, $k = 0, 1$. Будем предполагать суммируемость функций $\ln \varphi_k$ с плотностью гармонической меры. Эти функции в дальнейшем называем *весовыми функциями* или *весами*. Введем класс $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$, $r, q \geq 1$, аналитических в области G функций из $N_*(G)$ таких, что их некасательные предельные граничные значения на γ_k, $k = 0, 1$, имеют конечные, соответственно, L^r, L^q-нормы с весом φ_k, т.е.

$$\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)} = \left(\int_{\gamma_0} |f(\zeta)|^r \varphi_0(\zeta) \, |d\zeta| \right)^{1/r} < +\infty,$$

$$\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} = \left(\int_{\gamma_1} |f(\zeta)|^q \varphi_1(\zeta) \, |d\zeta| \right)^{1/q} < +\infty.$$

Если показатель нормы равен бесконечности, то конечна соответствующая L^∞-норма

$$\|f\|_{L^\infty(\gamma_k)} = \operatorname{ess\,sup} \{ |f(\zeta)| \, : \, \zeta \in \gamma_k \} \, .$$

Отметим, что частным случаем $\mathcal{H}$ является класс Харди $H^q(G)$ аналитических в области G функций f, обладающих свойством: субгармоническая функция $|f|^q$ имеет в области G гармоническую мажоранту. Точнее, критерием принадлежности функции f классу $H^q(G)$ являются условия, что $f \in N_*(G)$ и предельные граничные значения функции $|f|^q$ на Γ суммируемы с плотностью гармонической меры $P(z_0, \zeta)$ (z_0 – произвольная фиксированная точка области G), т.е.

$$\int_\Gamma |f(\zeta)|^q \, P(z_0, \zeta) \, |d\zeta| < +\infty.$$

Это утверждение является аналогом теоремы Полубариновой – Кочиной о характеризации функций пространства Харди H^q в круге (см. [57], [55, §6, 6.4], [66, §4, 4.3]). Отсюда в случае $r = q$ и весов $\varphi_k(\zeta) = \eta_k P(z_0, \zeta)$, $\zeta \in \gamma_k$, $\eta_k > 0, k = 0, 1$, класс $\mathcal{H}$ является классом Харди $H^q(G)$.

В $\mathcal{H}$ выделим класс $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ функций f, которые удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)} \leq 1$. В качестве информации о функции $f \in \mathcal{Q}$ будем рассматривать $I_{\gamma_1} f$ – её некасательные предельные граничные значения на γ_1. Класс $Q = Q^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ функций, определённых почти всюду на γ_1, состоит из предельных граничных значений на γ_1 функций класса $\mathcal{Q}$. Ясно, что справедливо вложение $Q \subset L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$. Так как γ_1 является множеством единственности, то информация о функции полная, т.е. отображение I_{γ_1} является биекцией классов $\mathcal{Q}$ и Q . В дальнейшем будем классы $\mathcal{Q}$ и Q обозначать одинаково, через Q. Пусть K – подмножество области G. В качестве Y будет рассматриваться $B = B(K)$ – некоторое банахово пространство функций, определённых на множестве K, с нормой $\|\cdot\|_B$, такое, что имеет место вложение $Q \subset B(K)$. В качестве оператора A рассматривается либо оператор Υ^0_K, который ставит в соответствие значениям на γ_1 функции f её значение на подмножестве K области G, либо оператор Υ^1_K, который сопоставляет граничным значениям на γ_1 функции f её производную f' на K.

Величина (0.0.2) исследуется с помощью и вместе с взаимосвязанными задачами о модуле непрерывности оператора и наилучшего приближения оператора линейными ограниченными операторами.

Функцию переменной $\delta \geq 0$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; A, Q) = \sup \{\|Af\|_Y \,:\, f \in Q,\ \|f\|_X \leq \delta\}, \tag{0.0.3}$$

называют *модулем непрерывности оператора* A на классе Q. Из определения (0.0.3) следует, что для оператора Υ^s_K и функций из $\mathcal{H}$ справедливо точное неравенство

$$\|\Upsilon_K^s f\|_B \le \|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}\, \omega\left(\frac{\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}}{\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}}\right). \tag{0.0.4}$$

Оценки модуля значения аналитической функции (производной) в точке области через её предельные граничные значения исследовали Г. Сегё, Э. Ландау, К. Каратеодори и Л. Фейер, Ф. Рисс, И. Шур, С. Какей, Ф. Неванлинна и Р. Неванлинна, Г. Пик, С. Такенака, Г. М. Голузин, Н. И. Ахиезер, Я. Л. Геронимус, А. И. Макинтайр, В. В. Рогозинский, Г. С. Шапиро, С. Я. Хавинсон, В. П. Кабайла, С. А. Гельфер, Л. В. Креснякова, В. П. Важдаев, В. М. Терпигорева (в случае, когда область есть круг или односвязная область); М. Хейнс и Р. М. Робинсон (круговое кольцо), Г. Грунский, Л. Альфорс, С. Я. Хавинсон, З. Нехари, П. Р. Гарабедян, Х. Уидом, Т. С. Кузина (многосвязная область) и многие др. Об исследованиях задач, близких к (0.0.4), см. в работах [29, 69, 72–74, 87, 89, 98] и приведённую там библиографию. В отличие от классических постановок, в (0.0.4) рассматриваются ограничения на (вообще говоря, различные) $L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)$ и $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ -нормы на произвольных измеримых подмножествах границы области γ_k, $k = 0, 1$.

Задача наилучшего приближения линейного неограниченного оператора множеством $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(N; X, Y)$ линейных ограниченных операторов из X в Y, норма которых не превосходит числа $N > 0$, (задача Стечкина) на классе элементов банахова пространства Q появилась в работе С. Б. Стечкина [60] в 1965 году. В статье [61] 1967 года была дана постановка задачи и получены первые принципиальные результаты. Точная постановка задачи следующая. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|Af - Tf\|_Y \,:\, f \in Q\right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ от оператора A на классе Q.

Соответственно,

$$E(N) = E(N; A, Q) = \inf \{U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N)\} \qquad (0.0.5)$$

есть *наилучшее приближение оператора* A множеством $\mathcal{B}(N)$ линейных ограниченных операторов, норма которых не превосходит числа N, на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$, $N > 0$, и найти экстремальный оператор (последовательность операторов), на котором в (0.0.5) достигается нижняя грань.

Этой задаче к настоящему времени посвящено большое число исследований С. Б. Стечкина, В. В. Арестова, В. И. Бердышева, А. П. Буслаева, В. Н. Габушина, Ю. Н. Субботина, Л. В. Тайкова, О. А. Тимошина, В. Г. Тимофеева, М. А. Филатовой и др. (см. обзорные работы [7,8], а также [27, 13; 78, 10, 14, 79], и приведённую в них библиографию). В частности, известна взаимосвязь задачи Стечкина с задачей оптимального восстановления оператора и модулем непрерывности оператора. Эта взаимосвязь будет существенно использоваться в данном исследовании и выражается следующим образом. Введем обозначения

$$\Delta(N) = \sup \{\omega(\delta) - N\delta \;:\; \delta \geq 0\}, \quad N > 0; \qquad (0.0.6)$$

$$\ell(\delta) = \inf \{E(N) + N\delta \;:\; N > 0\}, \quad \delta \geq 0. \qquad (0.0.7)$$

Следующее утверждение, оценивающее наилучшее приближение оператора (0.0.5) через его модуль непрерывности (0.0.3) содержится в статье С. Б. Стечкина [61].

Теорема A. *Если A – однородный оператор, Q – выпуклый уравновешенный класс, то имеют место неравенства*

$$E(N) \geq \Delta(N), \qquad N > 0; \qquad (0.0.8)$$

$$\omega(\delta) \leq \ell(\delta), \qquad \delta \geq 0. \qquad (0.0.9)$$

В следующей теореме приведено уточнение неравенства (0.0.9), связывающее задачу о модуле непрерывности оператора и задачу Стечкина с задачами оптимального восстановления (см. [8]).

Теорема B. *Если* A *– однородный оператор,* Q *– выпуклый уравновешенный класс, то имеют место неравенства*

$$\omega(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \le \ell(\delta), \qquad \delta \ge 0. \tag{0.0.10}$$

Известно (см. [58, 18, 21, 6, 37; 8,92] и приведённую там библиографию), что в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом уравновешенном классе с помощью множества $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный ограниченный функционал и сама величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала, и, следовательно, справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \omega(\delta). \tag{0.0.11}$$

Кроме того, для задач (0.0.2) и (0.0.5) взаимосвязь (см. [48, 49, 21; 7,8; 92] и приведённую там библиографию) выражается в следующих соотношениях

$$E(N) = \Delta(N); \quad \omega(\delta) = \ell(\delta). \tag{0.0.12}$$

В настоящее время в задаче Стечкина (0.0.5) о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства, кроме общих результатов, получены точные решения ряда задач для конкретных операторов в классических функциональных пространствах. Наиболее полно исследовано наилучшее приближение операторов дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций $(0 \le k < n)$ в пространствах L^p на числовой оси и полуоси. Для функций многих переменных перечисленные задачи исследованы заметно меньше. Однако, и здесь имеется ряд точных, интересных результатов (см. [7,8] и приведённую там библиографию).

Задача Стечкина о наилучшем приближении неограниченных операторов ограниченными операторами на классах аналитических функций решена лишь в некоторых частных случаях. В первых двух главах рассматриваются задачи наилучшего приближения операторов Υ_K^s, $s = 0, 1$, множеством линейных ограниченных операторов на классе $Q = Q^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$.

Задача приближения одного класса функций другим является классической для теории приближения. Пусть в линейном пространстве два класса Q_j, $j = 1, 2$, и банахово пространство B удовлетворяют условию: для любого $f_1 \in Q_1$ существует такое $f_2 \in Q_2$, что $f_1 - f_2 \in B$. *Наилучшим приближением класса* Q_1 *классом* Q_2 *по норме пространства* B называется величина

$$\mathrm{E}\left(Q_1, Q_2\right)_B = \sup\left\{\mathrm{E}\left(f_1, Q_2\right)_B \,:\, f_1 \in Q_1\right\}, \tag{0.0.13}$$

где $\mathrm{E}\left(f_1, Q_2\right)_B$ – наилучшее приближение f_1 классом Q_2 – задаётся равенством

$$\mathrm{E}\left(f_1, Q_2\right)_B = \inf\left\{\|f_1 - f_2\|_B : f_2 \in Q_2\right\}.$$

Известны двойственная взаимосвязь задачи о модуле непрерывности неограниченного оператора на классе с соответствующей задачей наилучшего приближения одного класса другим в сопряжённых пространствах и взаимосвязь задачи Стечкина приближения неограниченного оператора ограниченными операторами на классе с соответствующей задачей наилучшего линейного приближения одного класса другим (см. [2]). Наиболее обстоятельно исследована взаимосвязь задачи Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными операторами с задачей наилучшего приближения одного класса дифференцируемых функций вещественной переменной другим классом более гладких функций (подробнее см. [3; 9; 8, §7; 13, §7.5-7.6]).

Обозначим через $Q^p(D_R, N)$ класс функций f из класса Харди $H^p(D_R)$, аналитических в круге $D_R = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R\}$, чьи предельные граничные значения на окружности $l_R = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = R\}$ удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p_{\phi_R}(l_R)} \le N$, $\phi_R \equiv (2\pi R)^{-1}$; через $\partial Q^p(D_R)$ – класс, состоящий из производных функций класса $Q^p(D_R,1)$, т.е. $\partial Q^p(D_R) = \{g' \colon g \in Q^p(D_R,1)\}$. Рассматриваются также аналогичные классы функций, аналитических в кольце $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z| < R\}$, $0 < r < R$.

В параграфе 1.6 обобщаются результаты Л. В. Тайкова [63] – исследуется задача наилучшего приближения класса $Q^p(D_\rho) = Q^p(D_\rho,1)$ классом $Q^p(D_R,N)$, $N > 0$, по норме пространства $L^p(l_r)$, $0 < r < \rho < R$, $1 \le p \le \infty$. Аналогичная задача исследуется для функций, аналитических в кольцах. В параграфе 2.4 рассматривается задача наилучшего приближения класса $\partial Q^p(D_\rho)$ классом $Q^p(D_R,N)$, $N > 0$, по норме пространства $L^p(l_r)$, $0 < r < \rho < R$, $1 \le p \le \infty$, и аналогичная задача для функций, аналитических в кольцах. Двойственная связь задач явно не используется. Однако для построения линейного метода, доставляющего наилучшее приближение класса классом, и исследования его свойств существенно используются идеи построения экстремального оператора в соответствующей задаче Стечкина.

Третья глава посвящена исследованию экстремальных задач на классах функций, аналитических в полуплоскости. Изучается конкретная задача оптимального восстановления, отличная от задачи (0.0.2). А именно, задача оптимального восстановления функции и её производных на классе Харди – Соболева по точной (но не полной) информации о функции – сужению её спектральной функции на интервал.

Пусть $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$, $1 \le p \le \infty$, – пространство аналитических в верхней полуплоскости Π_+ функций f, для которых ограничена величина $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}$, $y > 0$. Пространство $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ наделено нормой

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(\Pi_+)} = \sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, y > 0\right\},$$

которая, как известно (см., например, [30, Гл. VI]), совпадает с L^p-нормой предельных граничных значений на вещественной прямой. Для целого неотрицательного n введем класс $Q_n^p = Q_n^p(\Pi_+)$ функций из $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$, для которых производная порядка n (сама функция, при $n = 0$) также принадлежит $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и её норма ограничена единицей, т.е. $Q_n^p = \left\{ f \in \mathcal{H}^p(\Pi_+) \, : \, f^{(n)} \in \mathcal{H}^p(\Pi_+), \, \|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p(\Pi_+)} \le 1 \right\}$.

Обозначим через I_σ, $\sigma > 0$, информационный оператор, который сопоставляет функции f из $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ сужение (локальный элемент) её спектральной (вообще говоря, обобщённой) функции на интервал $(-\varepsilon, \sigma)$, $\sigma > 0, \varepsilon > 0$. Спектральная функция имеет носитель в $[0, +\infty)$ и, следовательно, её сужение не зависит от ε. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$ рассматриваем либо множество $\mathcal{F}$ всех возможных, либо $\mathcal{L}$ – линейных отображений, определённых на $\mathrm{I}_\sigma Q_n^p$, в пространство Y. В качестве пространства Y будет рассматриваться $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и $L^p(\mathbb{R} + iy)$, $y > 0$. Для $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$ и метода $T \in \mathcal{R}$ величина погрешности восстановления значений оператора дифференцирования порядка m (функции, при $m = 0$) на классе Q_n^p по информации I_σ с помощью метода T определяется равенством

$$\mathcal{U}[T, m, \sigma, n]_Y = \sup \left\{ \|f^{(m)} - T(\mathrm{I}_\sigma f)\|_Y \, : \, f \in Q_n^p \right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}[m, \sigma, n]_Y = \inf \left\{ \mathcal{U}[T, m, \sigma, n]_Y \, : \, T \in \mathcal{R} \right\} \tag{0.0.14}$$

есть величина *оптимального восстановления значений оператора* дифференцирования порядка m (функции, при $m = 0$) на классе Q_n^p по информации I_σ с помощью множества методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины (0.0.14) и построении оптимального метода восстановления — экстремального оператора (последовательности операторов), на котором в (0.0.14) достигается нижняя грань.

Восстановление функции (сигнала, передаточной функции системы) по информации о её частотных характеристиках – одна из основных проблем во многих прикладных задачах. Задачи оптимального восстановления функции и производных по информации о её спектре изучались в цикле работ Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко, см. [38–45].

Близкой к задаче (0.0.14) является задача оптимального восстановления функции f и её производных на классе Харди – Соболева функций, аналитических в единичном круге, по информации $\mathrm{I}f = (f(0), f'(0), \dots, f^{(\mathrm{N}-1)}(0))$ (или, что тоже самое, по коэффициентам Тейлора функции f), см. [90, пример 4.6; 92] и приведённую там библиографию.

В третьей главе также рассматривается связанная с (0.0.14) задача наилучшего приближения класса Харди – Соболева Q^p_n и класса $\partial^m Q^p_n$, состоящего из производных порядка m функций из Q^p_n, пространством A^p_σ целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, и принадлежащих пространству $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$. Приближения рассматриваются по норме пространств $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и $L^p(\mathbb{R} + iy)$, $y > 0$.

Целые функции экспоненциального типа являются классическим аппаратом приближения функций как вещественной, так и комплексной переменной. Таким приближениям посвящена обширная литература (см., например, монографии [11, 26] и приведённую там библиографию). Хорошо известно (см., например, [11, гл. V]), что для наилучшего приближения на числовой оси класса Соболева $W^p_n = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f^{(n)} \in L^p(\mathbb{R}),\ \|f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R})} \le 1\}$ целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, справедливо неравенство

$$\mathrm{E}(W^p_n, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R})} \le \mathcal{C}_n\, \sigma^{-n}, \quad \mathcal{C}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(n+1)}}{(2k+1)^{n+1}}.$$

В случаях $p = \infty$ и $p = 1$ в последнем неравенстве имеет место равенство. Более того, в работе Г. Г. Магарил-Ильяева [36], в которой введены и исследованы средние поперечники, в частности, показано, что средние ν-поперечники по Колмогорову классов Соболева W^p_n в случаях $p = \infty$, $p = 2$ и $p = 1$ реализуются на пространстве $A_\sigma \bigcap L^p(\mathbb{R})$, $\sigma = \pi\nu$.

Близкая к исследуемой, задача для функций, аналитических в круге, хорошо изучена. Пусть $Q^p_n(D)$ – класс Харди – Соболева функций из пространства Харди $H^p(D)$, аналитических в единичном круге D, у которых производная порядка n также принадлежит $H^p(D)$ и ее норма ограничена единицей. Для наилучшего приближения по норме пространства $H^p(D)$ класса $Q^p_n(D)$ пространством $\mathcal{P}_{\mathrm{N}-1}$ алгебраических многочленов степени не более $\mathrm{N}-1$ справедливо равенство

$$\mathrm{E}(Q^p_n(D), \mathcal{P}_{\mathrm{N}-1})_{H^p(D)} = \frac{(\mathrm{N}-n)!}{\mathrm{N}!}, \quad n < \mathrm{N},\, 1 \le p \le \infty. \tag{0.0.15}$$

В случае $p = \infty$ это доказано в работе К. И. Бабенко [15]; в случае $1 \le p < \infty$ – в работе Л. В. Тайкова [62]. Более того, в статьях В. М. Тихомирова [64] ($p = \infty$) и Л. В. Тайкова [62] ($1 \le p < \infty$) показано, что величина (0.0.15) является N-мерным поперечником класса $Q^p_n(D)$ в пространстве $H^p(D)$, $1 \le p \le \infty$. Результаты, относящиеся к поперечникам классов аналитических функций, см. [92, Гл. 4; 70; 19], и ссылки там.

В работе для класса Харди – Соболева $Q^p_n(\Pi_+)$, $1 \le p \le \infty$, аналитических в полуплоскости Π_+ функций получены аналоги описанных выше результатов для класса Харди – Соболева $Q^p_n(D)$ функций, аналитических в круге D. Точнее, найдено наилучшее приближение класса $Q^p_n(\Pi_+)$ пространством A^p_σ, построен линейный метод наилучшего приближения; вычислены средние поперечники по Колмогорову и Бернштейну, средний линейный поперечник класса.

Цель работы.

Исследование задач оптимального восстановления аналитической функции и её производной по приближённо заданным предельным значениям функции на части границы. Решение родственных задач Стечкина наилучшего приближения неограниченных операторов линейными ограниченными операторами. Решение задачи оптимального восстановления аналитической в полуплоскости функции и производных класса Харди – Соболева по сужению её спектральной функции и связанной с ней задачи наилучшего приближения класса целыми функциями экспоненциального типа.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа и теории функций, в частности – теории функций комплексного переменного, теории приближений.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и основные из них состоят в следующем.

1. Исследована задача оптимального восстановления аналитической в области функции по её предельным значениям на измеримой части границы области, заданным с весовой L^q-погрешностью, на классе функций с ограниченной весовой L^r-нормой предельных значений на дополнительной части границы; исследована взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения оператора аналитического продолжения функции с части границы линейными ограниченными операторами. Точные решения задач получены в случаях: (а) восстановление значения функции в точке односвязной области при $1 \le q, r \le \infty$ для естественного широкого класса весов; (б) аналогичная задача для двусвязной области с погрешностью δ_n, где δ_n – геометрическая прогрессия с целым показателем; (в) восстановление аналитической в односвязной области функции на подмножестве линии уровня гармонической меры, при $q = r = \infty$; (г) восстановление аналитической в полосе функции на внутренней прямой по её значениям на одной граничной прямой на классе функций с ограниченной нормой на другой граничной прямой, для L^q-норм на трёх прямых, $1 \le q \le \infty$; (д) восстановления аналитической в кольце функции на внутренней окружности по её значениям, заданным с погрешностью δ_n, где δ_n – целые степени отношения радиусов граничных окружностей, на одной граничной окружности, на классе функций с ограниченной нормой на другой граничной окружности, для L^q-норм на трёх окружностях, $1 \le q \le \infty$. Получено

неравенство между значением аналитической функции в конечносвязной области и её весовыми нормами граничных значений на двух измеримых подмножествах границы области, являющееся аналогом теоремы братьев Неванлинна о двух константах при $0 < q, r \leq \infty$.

2. Исследована задача оптимального восстановления производной аналитической в области функции по предельным значениям функции, заданным с L^p-погрешностью на измеримой части границы, на классе функций с ограниченной L^p-нормой предельных значений на дополнительной части границы; исследована взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами. Точные решения задач получены в случаях: (а) восстановление производной в точке односвязной области при $p = \infty$; (б) восстановление производной аналитической в полосе функции на внутренней прямой по заданным с погрешностью δ значениям функции на одной граничной прямой, на классе функций с ограниченной нормой на другой граничной прямой, для L^p-норм на трёх прямых, $1 \leq p \leq \infty$, и достаточно большого $|\ln \delta|$; (в) восстановление производной аналитической в кольце функции на внутренней окружности по значениям функции на одной граничной окружности, заданным с погрешностью δ_n, где δ_n – целые степени отношения радиусов граничных окружностей и $|\ln \delta_n|$ достаточно большой, на классе функций с ограниченной нормой на другой граничной окружности, для L^p-норм на трёх окружностях, $1 \leq p \leq \infty$.

3. На классах Харди – Соболева функций, аналитических в полуплоскости, с ограниченной $\mathcal{H}^p$-нормой, $1 \leq p \leq \infty$, производной порядка n решена задача оптимального восстановления производной порядка $k, 0 \leq k \leq n$, по сужению спектральной функции на интервал. Решена связанная задача наилучшего приближения класса Харди – Соболева пространством целых функций конечного экспоненциального типа. Вычислены средние поперечники класса.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при проведении исследований задач оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации об элементах, экстремальных задач на классах аналитических функций и приложений.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [102]–[116] (без соавторов); в том числе 14 в изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на Международных летних Школах по теории функций С .Б. Стечкина, Миасс, 2006, 2008, 2010 – 2015, 2017; Алексин, 2007; Пекин (Китай), 2009; Душанбе (Таджикистан), 2016; Кыштым, 2018, 2019; Екатеринбург, 2020; Международных Саратовских зимних школах «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018; Международных Казанских летних научных школах-конференциях «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», Казань, 2007, 2013, 2015; Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функции и смежные проблемы», Воронеж, 2017; Международных симпозиумах «Ряды Фурье и их приложения», Абрау-Дюрсо, 2006, 2012, 2014, 2016, 2018; Международных конференциях «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», Екатеринбург, 2008, 2011; Челябинск, 2014; Международных конференциях «Современные проблемы математики, механики, информатики», Тула, 2006, 2007, 2008, 2011, 2012; Семинарах по анализу Фурье и смежным областям, Будапешт (Венгрия), 2015; Печ (Венгрия), 2017; Международной конференции «Теория приближений», посвященной 90-летию со дня рождения С. Б. Стечкина, Москва, 2010; Международной конференции «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания», Обнинск, 2011; Крымской международной математической конференции, Судак, 2013; Международной конференции «Комплексный анализ и теория приближения», посвящённой 80-летию профессора Е. П. Долженко, Москва, 2014; Международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвящённая 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского, Москва, 2015; Международной школе-конференции: Соболевские чтения, Новосибирск, 2016; Первой международной конференции «Analysis Mathematica», Будапешт (Венгрия), 2019; на научном семинаре «Геометрическая теория функций комплексного переменного» под руководством профессора Д. В. Прохорова, Саратов, 2019; на научном семинаре «Вопросы оптимального восстановления линейных операторов» под руководством профессора Г. Г. Магарил-Ильяева, профессора К. Ю. Осипенко, профессора В. М. Тихомирова, МГУ, Москва, 2021; на научном семинаре отдела некорректных задач анализа и приложений ИММ УрО РАН под руководством члена-корреспондента РАН В. В. Васина, Екатеринбург, 2021; на совместных семинарах отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений ИММ УрО РАН под руководством д.ф.-м.н. Н. Ю. Антонова, д.ф.-м.н. А. Г. Бабенко, Екатеринбург, многократно; на научных семинарах кафедры математического анализа УрФУ под руководством профессора В. В. Арестова, Екатеринбург, многократно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Общий объём работы – 229 страниц. Список литературы содержит 116 наименований.

Обзор основных результатов диссертации.

В **главе 1** исследуется задача оптимального восстановления (0.0.2) аналитической в области G функции по некасательным предельным значениям функции, заданным с погрешностью на части границы γ_1, на классе $Q = Q^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$. Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta > 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T, \delta) = \sup \left\{ \|f - Tg\|_{B(K)} \, : \, f \in Q, \, g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1), \, \|f - g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta \right\}$$

является погрешностью восстановления на множестве K функции класса Q по её граничным значениям на γ_1, заданным с погрешностью δ по норме $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$, методом T. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf \left\{ \mathcal{U}(T, \delta) \, : \, T \in \mathcal{R} \right\} \tag{0.0.16}$$

есть *величина оптимального восстановления* на множестве K функции (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ^0_K) класса Q по её δ-приближённым граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (0.0.16) достигается нижняя грань.

Задача оптимального восстановления исследуется с помощью взаимосвязанных задач (0.0.3) о модуле непрерывности оператора Υ^0_K на классе Q и наилучшего приближения (0.0.5) оператора Υ^0_K множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(N; L^q_{\varphi_1}(\gamma_1), B(K))$ на классе Q.

Функцию переменной $\delta > 0$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \sup \left\{ \|f\|_{B(K)} \, : \, f \in Q, \, \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta \right\}, \tag{0.0.17}$$

называют *модулем непрерывности оператора* Υ^0_K на классе Q.

Величина

$$U(T) = \sup \left\{ \|f - Tf\|_{B(K)} \, : \, f \in Q \right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ от оператора Υ_K^0 на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf \{U(T) \, : \, T \in \mathcal{B}(N)\} \tag{0.0.18}$$

есть *наилучшее приближение оператора* Υ_K^0 множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и построении экстремального оператора, на котором в (0.0.18) достигается нижняя грань.

В параграфе **1.1** получено решение задач для функционала $\Upsilon_{z_0}^0$, сопоставляющего предельным граничным значениям функции на γ_1 её значение в точке z_0 односвязной области G.

Класс Q является выпуклым и уравновешенным. Следовательно, как обсуждалось выше, в задаче оптимального восстановления линейного функционала $\Upsilon_{z_0}^0$ на классе Q с помощью множества $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный ограниченный функционал и величина уклонения равна модулю непрерывности функционала $\Upsilon_{z_0}^0$, т.е. справедливы равенства (0.0.11).

По весовым функциям φ_k, $k = 0, 1$, для $\delta > 0$ определим на границе Γ области G функцию ψ_δ по формуле

$$\psi_\delta(\zeta) = \begin{cases} \left(\dfrac{P(z_0, \zeta)}{\beta\varphi_0(\zeta)}\right)^{1/r}, & \zeta \in \gamma_0; \\ \delta \left(\dfrac{P(z_0, \zeta)}{\alpha\varphi_1(\zeta)}\right)^{1/q}, & \zeta \in \gamma_1, \end{cases}$$

в которой $P(z_0, \zeta)$ – плотность гармонической меры относительно области G в точке z_0 – производная функции Грина по внутренней, для области G, нормали к границе области; величины α и β, соответственно, равны гармонической мере γ_1 и γ_0 относительно области G в точке z_0. Здесь и в дальнейшем, если r и/или q равны бесконечности, то считаем, что величины $1/r$ и/или $1/q$, соответственно, равны нулю.

Определим функцию $s_\delta \in N_*(G)$ по функции ψ_δ равенством

$$s_\delta(z) = \exp\left(u_\delta(z) + iv_\delta(z)\right), \quad z \in G, \tag{0.0.19}$$

где функция

$$u_\delta(z) = \int_\Gamma P(z,\zeta)\,\ln\psi_\delta(\zeta)\,|d\zeta|, \quad z \in G,$$

является гармонической в области G, а v_δ – функция, гармонически сопряжённая к u_δ. Функция v_δ однозначная, в силу односвязности области G, и единственная с точностью до вещественной аддитивной константы, выбор значения которой нам не важен.

На пространстве $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ определим функционал T_δ формулой

$$T_\delta g = \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\,g(\zeta)\,|d\zeta|, \quad g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1).$$

Далее будет использоваться величина $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{q,r}(z_0;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, определяемая равенствами

$$\begin{gathered}\mathcal{C} = \varepsilon^{1/q}(\gamma_1,\varphi_1)\,\varepsilon^{1/r}(\gamma_0,\varphi_0)\,\alpha^{-\alpha/q}\beta^{-\beta/r},\\ \varepsilon(\gamma_k,\varphi_k) = \exp\int_{\gamma_k} P(z_0,\zeta)\ln\frac{P(z_0,\zeta)}{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta|, \quad k=0,1.\end{gathered} \tag{0.0.20}$$

Основными результатами параграфа 1.1 являются следующие утверждения.

Теорема 1.1.1. *При произвольных* $q,r,\ 1 \le q,r \le \infty,$ *весовых функций* $\varphi_k,\ k=0,1,$ *и* $\delta > 0$ *для величины оптимального восстановления* (0.0.16) *функционала* $\Upsilon^0_{z_0}$ *на классе* Q *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_\mathcal{F}(\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha.$$

При этом экстремальными в (0.0.17) *являются функции вида* $cs_\delta,\ |c| = 1$; *в задаче* (0.0.16) *оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал* T_δ.

В частности, для функций пространства $\mathcal{H}$ справедливо точное неравенство

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C}\, \|f\|^{\alpha}_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\, \|f\|^{\beta}_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}. \qquad (0.0.21)$$

Неравенство обращается в равенство на функциях cs_δ, $\delta > 0$, $c \in \mathbb{C}$.

В случае $q = r = \infty$ величина (0.0.17) и, соответственно, неравенство (0.0.21) следуют из хорошо известной теоремы братьев Неванлинна о двух константах (см. [91; 23, Гл. VIII, §4, Теорема 1]). В этом случае $\mathcal{C} = 1$.

Теорема 1.1.2. *При произвольных q, r, $1 \le q, r \le \infty$, весовых функций φ_k, $k = 0, 1$, и $N > 0$ для величины наилучшего приближения* (0.0.18) *функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ на классе Q справедливо равенство*

$$E(N) = \mathcal{C}^{1/\beta} \beta \alpha^{\alpha/\beta} N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом в задаче (0.0.18) *функционалом наилучшего приближения является функционал T_δ, у которого параметр δ определён равенством*

$$\delta = \mathcal{C}^{1/\beta} \alpha^{1/\beta} N^{-1/\beta}.$$

Обозначим через $\mathcal{H} = \mathcal{H}^p(G, \varphi)$, $1 \le p \le \infty$, класс функций $f \in N_*(G)$ с граничными значениями из $L^p_\varphi(\Gamma)$ с весом φ. Таким образом, класс $\mathcal{H}^p(G, \varphi)$ совпадает с классом $\mathcal{H}^{p,p}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$, в котором показатели совпадают и равны p, а весовые функции φ_k являются сужениями функции φ на γ_k, $k = 0, 1$. Пусть $Q = Q^p(G, \gamma_1, \varphi)$ – подкласс функций $f \in \mathcal{H}$ таких, что $\|f\|_{L^p_\varphi(\gamma_0)} \le 1$.

В параграфе **1.2** рассмотрены два случая: (1) область G есть Π_+ – верхняя полуплоскость, множество γ_1 – промежуток (интервал или полупрямая) граничной прямой; (2) область G является кругом, а γ_1 – дуга граничной окружности. На классе $Q^p(G, \gamma_1, \varphi)$ в задаче оптимального восстановления (0.0.16) значения функции в точке $z_0 \in G$ по её приближённо заданным предельным граничным значениям на γ_1 по норме $L^p_\varphi(\gamma_1)$ и во взаимосвязанной задаче (0.0.18) наилучшего приближения функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ линейными ограниченными функционалами явно выписаны решения: экстремальная функция, оптимальный метод восстановления – функционал наилучшего приближения. В частности, вычислена константа $\mathcal{C}$ неравенства (0.0.21). В теоремах 1.1.1 и 1.1.2 получено решение этих задач в более общей постановке. Однако нахождение явного аналитического вида решений (экстремальной функции и функционала, константы точного неравенства), вообще говоря, затруднителен. Рассмотренные случаи является такими, когда это возможно сделать. С помощью полученных формул можно получить явный вид решений в аналогичных задачах для односвязных жордановых областей G, если явно записана функция, задающая конформное отображение области G на полуплоскость или круг.

Пусть $\widetilde{\mathcal{H}}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ – множество функций $f \in N_*(G)$, для которых нормы

$$\|f\|_{L^\infty_{\varphi_k}(\gamma_k)} = \operatorname{ess\,sup}\left\{|f(\zeta)|\varphi_k(\zeta) \,:\, \zeta \in \gamma_k\right\}, \quad k = 0, 1,$$

предельных граничных значений конечны. Класс $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ состоит из функций $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, для которых справедливо неравенство $\|f\|_{L^\infty_{\varphi_0}} \le 1$. В параграфе **1.3** в случае односвязной области G на классе $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ для произвольной функциональной банаховой решётки $B = B(K), K \subset G, Q \subset B(K)$, изучаются: задача оптимального восстановления (0.0.16) оператора Υ^0_K по заданным с $L^\infty_{\varphi_1}$-погрешностью значениям функции на γ_1, задача Стечкина (0.0.18) наилучшего приближения оператора Υ^0_K множеством $\mathcal{B}(N; L^\infty_{\varphi_1}(\gamma_1), B(K))$ и задача о модуле непрерывности оператора Υ^0_K.

По функциям $\varphi_k,\, k = 0, 1,$ для $\delta > 0$ определим на границе Γ односвязной области G функцию ψ_δ по формуле $\psi_\delta(\zeta) = \delta^k/\varphi_k(\zeta),\, \zeta \in$

γ_k, $k = 0,1$. Функция s_δ задаётся формулой (0.0.19) по функции ψ_δ. Для числа $\alpha \in (0,1)$ через γ_α обозначим подмножество точек z области G, в которых гармоническая мера $w(z) = w(z,\gamma_1,G)$ множества γ_1 относительно области G в точке z принимает постоянное значение α: $\gamma_\alpha = \{z \in G \,:\, w(z,\gamma_1,G) = \alpha\}$.

Определим оператор T_δ на пространстве $L^\infty_{\varphi_1}(\gamma_1)$ формулой

$$(\mathrm{T}_\delta g)(z) = \int\limits_{\gamma_1} P(z,\zeta)\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(\zeta)}\, g(\zeta)\,|d\zeta|, \quad z \in K.$$

Результатами параграфа 1.3 являются следующие утверждения.

Теорема 1.3.3. *При произвольных $K \subset G$, весовых функций φ_k, $k = 0,1$, и $\delta > 0$ для величин оптимального восстановления* (0.0.16) *и модуля непрерывности* (0.0.17) *оператора Υ^0_K на классе $\widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \|s_1\delta^w\|_B.$$

При этом оптимальным методом восстановления является метод T_δ.

В случае $K \subset \gamma_\alpha$ равенства примут вид

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathrm{C}\delta^\alpha,$$

где коэффициент определяется равенством $\mathrm{C} = \|s_1\|_B$.

Теорема 1.3.4. *При произвольных $K \subset \gamma_\alpha$, весовых функций φ_k, $k = 0,1$, и $N > 0$ для величины наилучшего приближения* (0.0.18) *оператора Υ^0_K на классе $\widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ справедливо равенство*

$$E(N) = \mathrm{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta},$$

где коэффициент определяется равенством $\mathrm{C} = \|s_1\|_B$. При этом оператором наилучшего приближения является оператор T_δ с параметром

δ, *задаваемым равенством*

$$\delta = \mathrm{C}^{1/\beta} \alpha^{1/\beta} N^{-1/\beta}.$$

Пусть $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$, $1 \le p \le \infty$, – класс функций f, аналитических в полосе $\Pi_Y = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < Y\}$, след которых на каждой прямой $\mathbb{R} + i\eta$, $0 < \eta < Y$, принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R} + i\eta)$ и для которых

$$\sup \left\{ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} : 0 < \eta < Y \right\} < +\infty.$$

В $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ выделим класс $Q = Q^p(\Pi_Y)$ функций f, чьи граничные значения на прямой $\mathbb{R} + iY$ удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)} \le 1$.

В параграфе **1.4** изучается конкретный вариант задачи (0.0.16) – задача оптимального восстановления на прямой $\mathbb{R} + iy$, $0 < y < Y$, аналитической в полосе Π_Y функции (оптимального восстановления оператора $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$) относительно $L^p(\mathbb{R} + iy)$ нормы на классе $Q = Q^p(\Pi_Y)$ по граничным значениям функции на вещественной оси $\mathbb{R}$, заданным с δ-погрешностью относительно $L^p(\mathbb{R})$ нормы. То есть вариант задачи (0.0.16), в котором областью G является полоса Π_Y, множество K – прямая $\mathbb{R}+iy$ и $B(K) = L^p(\mathbb{R}+iy)$, подмножества границы γ_k – прямые $\mathbb{R} + i(1-k)Y$, $k = 0, 1$; показатели совпадают и равны p, $1 \le p \le \infty$, а весовые функции тождественно равны единице. Исследуются соответствующие задачи (0.0.17) о модуле непрерывности и (0.0.18) наилучшего приближения оператора $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$ линейными ограниченными операторами из $\mathcal{B}(N; L^p(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}+iy))$ на классе $Q^p(\Pi_Y)$. Прямая $\mathbb{R}+iy$ является линией уровня γ_α гармонической меры $\mathbb{R}$ относительно Π_Y при $\alpha = (Y-y)/Y$; соответственно, $\beta = y/Y$.

На пространстве $L^p(\mathbb{R})$ определим оператор $\mathrm{T}_\delta = \mathrm{T}_\delta[y, Y]$ формулой

$$(\mathrm{T}_\delta f)(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_\delta\left((x+iy) - t\right) f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{0.0.22}$$

с ядром

$$\mathrm{T}_\delta(z) = \frac{1}{2Y}\frac{e^{i\sigma z}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}(z/Y - i\beta)\,\pi + \cos\alpha\pi}, \quad \sigma = Y^{-1}\ln\delta.$$

Основными результатами параграфа являются следующие две теоремы.

Теорема 1.4.1. *При произвольных* $p,\ 1 \le p \le \infty,$ *и* $\delta > 0$ *для величин оптимального восстановления* (0.0.16) *и модуля непрерывности* (0.0.17) *оператора* $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$ *на классе* $Q^p(\Pi_Y)$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \delta^\alpha,$$

Оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный оператор $\mathrm{T}_\delta,$ *определённый равенством* (0.0.22).

Теорема 1.4.2. *При произвольных* $p,\ 1 \le p \le \infty,$ *и* $N > 0$ *для величины наилучшего приближения* (0.0.18) *оператора* $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$ *на классе* $Q^p(\Pi_Y)$ *справедливо равенство*

$$E(N) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Оператором наилучшего приближения является оператор $\mathrm{T}_\delta,$ *определённый равенством* (0.0.22), *в котором параметр* δ *задаётся соотношением*

$$\delta = \alpha^{1/\beta}\,N^{-1/\beta}.$$

В параграфе **1.5** рассматривается случай конечносвязной области. Показано, что неравенство (0.0.21) справедливо для функций класса $\mathcal{H}^{r,q}(G;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ в случае произвольной конечносвязной области G комплексной плоскости, ограниченной кривой $\Gamma,$ которая является объединением спрямляемых жордановых непересекающихся кривых, и для произвольных $r,q,\ 0 < r,q \le \infty.$ Обсуждаются случаи, когда для двусвязной области G справедливы аналоги теорем 1.1.1 и 1.1.2. А именно, показано, что утверждение теоремы 1.1.1 справедливо, если параметр δ является элементом последовательности $\delta_\nu = \delta_0\, \mathfrak{r}^{2\pi\nu/\mu}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, а утверждение теоремы 1.1.2 справедливо, если параметр N является элементом последовательности $N_\nu = \alpha\, \delta_\nu^{-\beta}$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Элемент δ_0 определяется равенством

$$\delta_0 = \exp\left\{ \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\psi_1(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it}))}{\psi_1(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it}))}\, dt \right\},$$

в котором $\mathfrak{g}$ – функция, реализующая однолистное конформное отображение двусвязной области G на кольцо $C_{\mathfrak{r},1} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{r} < |z| < 1\}$, $\mathfrak{r}$ – модуль двусвязной области G; $\mu = \mu(e_{\mathfrak{r}}) - \mu(e_1)$, где $\mu(e_\rho)$ – мера Лебега измеримого множества $e_\rho = \left\{ t \in [0, 2\pi] : \rho e^{it} = \mathfrak{g}(\zeta), \zeta \in \gamma_1 \right\}$, $\rho = \mathfrak{r}, 1$.

В пространстве Харди $H^p(C_{r,R})$, $1 \le p \le \infty$, аналитических в кольце $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ функций выделим класс $Q = Q^p(C_{r,R})$ функций f, чьи граничные значения на окружности l_R удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p_{\phi_R}(l_R)} \le 1$, $\phi_R \equiv (2\pi R)^{-1}$. В параграфе **1.6** исследуется вариант задач (0.0.16) и (0.0.18) для оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$, сопоставляющего предельным значениям функции на граничной окружности l_r её сужение на окружность l_ρ, $0 < r < \rho < R$, на классе $Q^p(C_{r,R})$. Точнее, вариант задач, в котором областью G является кольцо $C_{r,R}$, множество K – окружность l_ρ, $B(K) = L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$, $\phi_\rho \equiv (2\pi\rho)^{-1}$, подмножества границы – граничные окружности: $\gamma_0 = l_R$, $\gamma_1 = l_r$; показатели совпадают и равны p, $1 \le p \le \infty$, а весовые функции тождественно равны величинам, обратным к длинам окружностей. Окружность l_ρ является линией уровня γ_α гармонической меры: $w(z, l_r, C_{r,R}) = \alpha$, $z \in \gamma_\alpha$, её радиус ρ и меры α и β связаны равенствами

$$\alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}.$$

Из хорошо известной теоремы Адамара о трёх кругах (см., например, [54, Отд.3, Гл.6, §3]) для модуля непрерывности для оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ на классе $Q^p(C_{r,R})$ следует оценка сверху: $\omega(\delta) \le \delta^\alpha$. В случае, когда параметр δ является элементом последовательности $\delta_\nu = (r/R)^\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, функции $R^{-\nu} z^\nu$ дают оценку снизу, совпадающую с оценкой сверху. Именно в этих случаях получено решение задач оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ на классе $Q^p(C_{r,R})$.

Для произвольных $\nu \in \mathbb{Z}$ и $\eta \in \mathbb{R}$ определим оператор $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} = \mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}[r,\rho,R]$ формулой

$$(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} f)(\rho e^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{T}_{\nu,\eta}(x-t)\, f(re^{it})\, dt, \tag{0.0.23}$$

в которой ядро определено равенствами

$$\mathrm{T}_{\nu,\eta}(x) = \rho^\nu r^{-\nu}\, e^{i\nu x}\, [\eta + \Lambda_1(x)], \quad \Lambda_1(x) = \lambda_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \cos kx,$$

$$\lambda_0 = \alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}, \quad \lambda_k = \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \frac{1 - \rho^{2k} R^{-2k}}{1 - r^{2k} R^{-2k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для функций f из пространства Харди $H^p(C_{r,R})$ с представлением в виде ряда Лорана оператор $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$ можно выписать следующим образом

$$(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} f)(\rho e^{ix}) = \eta\, \rho^\nu r^{-\nu}\, f_\nu\, e^{i\nu x} + \rho^\nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_{k-\nu} f_k\, r^{k-\nu}\, e^{ikx},$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k\, z^k, \quad \lambda_{-k} = \lambda_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Определим на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию $\mathrm{U}_{\nu,\eta}$ формулами

$$\mathrm{U}_{\nu,\eta}(x) = \rho^\nu R^{-\nu}\, e^{i\nu x}\, [-\eta + \Lambda_0(x)], \quad \Lambda_0(x) = \mu_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \cos kx,$$

где коэффициенты μ_k заданы равенствами

$$\mu_0 = \beta = \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}, \quad \mu_k = \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \frac{1 - r^{2k}\rho^{-2k}}{1 - r^{2k} R^{-2k}}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Введём обозначение $\eta_k = \min\{\Lambda_k(x) \,:\, x \in [0, 2\pi]\}$, $k = 0, 1$.

Следующая теорема содержит решение задачи оптимального восстановления функции на окружности l_ρ с центром в нуле и радиусом ρ, когда параметр δ является элементом последовательности $\delta_\nu = (r/R)^\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$. При этом для каждого δ_ν приводится семейство оптимальных методов восстановления.

Теорема 1.6.1. *При произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *и целых* ν *для величин оптимального восстановления* (0.0.16) *и модуля непрерывности* (0.0.17) *оператора* $\Upsilon^0_{l_\rho}$ *на классе* $Q^p(C_{r,R})$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) = \delta_\nu^\alpha.$$

При этом оптимальными методами восстановления являются линейные ограниченные операторы $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$, *определённые равенством* (0.0.23) *при любом* $\eta \in [-\eta_1, \eta_0]$, *и экстремальные функции имеют вид* $cR^{-\nu}z^\nu$, $|c| = 1$.

В следующей теореме сформулированы связанные результаты в задаче наилучшего приближения оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ аналитического продолжения с граничной окружности l_r на окружность l_ρ множеством $\mathcal{B}(N; L^p_{\phi_r}(l_r), L^p_{\phi_\rho}(l_\rho))$ – линейных ограниченных операторов, на классе $Q^p(C_{r,R})$. При этом семейство экстремальных операторов $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$, соответствующих в задаче оптимального восстановления одному значению параметра δ_ν, в задаче наилучшего приближения $\Upsilon^0_{l_\rho}$ дают решение для некоторого отрезка значений параметра N. На каждом из этих отрезков зависимость наилучшего приближения $E(N)$ от N является линейной.

Теорема 1.6.2. *При произвольном* p, $1 \le p \le \infty$, *для положительного числа*

$$N_{\nu,\eta} = \rho^\nu r^{-\nu}(\alpha + \eta),$$

где ν *– целое число и* $\eta \in [-\eta_1, \eta_0]$, *для величины наилучшего приближения* (0.0.18) *оператора* $\Upsilon^0_{l_\rho}$ *на классе* $Q^p(C_{r,R})$ *справедливо равенство*

$$E(N_{\nu,\eta}) = (\beta - \eta)\,(\alpha + \eta)^{\alpha/\beta}\, N_{\nu,\eta}^{-\alpha/\beta} = (\rho/R)^\nu - (r/R)^\nu\, N_{\nu,\eta}.$$

При этом оператором наилучшего приближения является $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$, *определённый равенством* (0.0.23).

Для $0 < r < \varrho$ и $N > 0$ введем класс функций из $H^p(C_{r,\varrho})$ равенством

$$Q^p(C_{r,\varrho}, N) = \Big\{ f\colon f \in \mathcal{H}^p(C_{r,\varrho}), \|f\|_{L^p_{\phi_\varrho}(l_\varrho)} \le N \Big\};$$

$Q^p(C_{r,\varrho}, 1) = Q^p(C_{r,\varrho})$ при $N = 1$. В последней части параграфа рассматривается задача (0.0.13) наилучшего приближения класса $Q^p(C_{r,\rho})$ классом $Q^p(C_{r,R}, N)$, $N > 0$.

Определим оператор $\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta} = \widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}[r, \rho, R]$ формулой

$$(\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta} f)(Re^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{U}_{-\nu,\eta}(t - x)\ f(\rho e^{it})\, dt. \tag{0.0.24}$$

Теорема 1.6.3. *При произвольном* p, $1 \le p \le \infty$, *для положительного числа*

$$N = \rho^{-\nu} R^{\nu} (\beta - \eta),$$

где ν *– целое число и* $\eta \in [-\eta_1, \eta_0]$, *справедливо равенство*

$$\mathrm{E}(Q^p(C_{r,\rho}), Q^p(C_{r,R}, N))_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = (\alpha + \eta)\, (\beta - \eta)^{\beta/\alpha}\, N^{-\beta/\alpha}.$$

При этом линейный метод $\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}$, *определённый равенством* (0.0.24), *доставляет наилучшее приближение класса классом.*

В **главе 2** исследуется задача оптимального восстановления (0.0.2) производной аналитической в области G функции (оператора Υ^1_K) по некасательным предельным значениям функции, заданным с погрешностью на части границы γ_1, на классе $Q = Q^p(G; \gamma_1, \varphi)$. Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta > 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T, \delta) = \sup \Big\{ \|f' - Tg\|_{B(K)}\ : f \in Q,\ g \in L^p_{\varphi_1}(\gamma_1),\ \|f - g\|_{L^p_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta \Big\}$$

является погрешностью восстановления на множестве K производной функции класса Q по граничным значениям функции на γ_1, заданным с погрешностью δ по норме $L^p_{\varphi_1}(\gamma_1)$, методом T. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf \{\mathcal{U}(T, \delta) \,:\, T \in \mathcal{R}\} \tag{0.0.25}$$

есть *величина оптимального восстановления* на множестве K производной функции класса Q (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ^1_K) по δ-приближённым граничным значениям функции на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (0.0.25) достигается нижняя грань.

Задача оптимального восстановления исследуется с помощью и вместе с взаимосвязанной задачей (0.0.3) о модуле непрерывности оператора Υ^1_K на классе Q, и с задачей Стечкина (0.0.5) наилучшего приближения оператора Υ^1_K множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(N; L^p_{\varphi_1}(\gamma_1), B(K))$ на классе Q.

Функция переменной $\delta > 0$, определяемая равенством

$$\omega(\delta) = \sup \left\{ \|f'\|_{B(K)} \,:\, f \in Q,\, \|f\|_{L^p_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta \right\}, \tag{0.0.26}$$

является *модулем непрерывности оператора* Υ^1_K на классе Q.

Величина

$$U(T) = \sup \left\{ \|f' - Tf\|_{B(K)} \,:\, f \in Q \right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ от оператора Υ^1_K на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf \{U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N)\} \tag{0.0.27}$$

есть *наилучшее приближение оператора* Υ^1_K множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и построении экстремального оператора, на котором в

(0.0.27) достигается нижняя грань.

В параграфе **2.1** рассматривается класс Харди $H^\infty(G)$ аналитических и ограниченных функций в односвязной области G. На классе $Q = Q^\infty(G; \gamma_1, 1)$ получено решение трёх взаимосвязанных экстремальных задач (0.0.25), (0.0.26), (0.0.27) для функционала $\Upsilon^1_{z_0}$, который ставит в соответствие граничным значениям на γ_1 функции f значение её производной $f'(z_0)$ в точке z_0 односвязной области G. В этом случае, как и в параграфе 1.1, имеют место равенства (0.0.11).

Рассматривая w – гармоническую меру γ_1 относительно области G в точке $z = x + iy$ – как гармоническую в области G функцию переменных x и y, введём обозначения: $\alpha = w(z_0)$ и $\beta = 1 - w(z_0)$ для величин гармонической меры γ_1 и γ_0 относительно области G в точке z_0; $\kappa = \kappa(z_0)$, $\overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0)$ и $t = t(z_0)$, соответственно, – для длины, направления и аргумента градиента функции w в точке z_0, т.е. определённых равенствами

$$\kappa = \kappa(z_0) = |\nabla w(z_0)|\,, \quad \overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0) = \frac{\nabla w(z_0)}{|\nabla w(z_0)|}, \quad \overline{\nu} = (\cos t, \sin t).$$

Пусть g – функция, задающая однолистное отображение области G на единичный круг, удовлетворяющая условиям: $g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) > 0$. Обозначим через $\eta(z_0)$ положительную величину

$$\eta(z_0) = \frac{2g'(z_0)}{\kappa(z_0)},$$

если $\kappa(z_0) \neq 0$, и равную $+\infty$, если длина градиента есть нуль.

Пусть s_δ – функция, определяемая равенством (0.0.19) по функции ψ_δ, определённой на границе Γ формулой $\psi_\delta(\zeta) = \delta^k,\, \zeta \in \gamma_k,\, k = 0, 1$, т.е. аналитическая в области G функция

$$s_\delta(z) = h^\sigma(z),\, \sigma = \ln \delta, \quad h(z) = \exp\{w(z) + iv(z)\}.$$

Для $\delta > 0$ и точки $z_0 \in G$, удовлетворяющих неравенству

$$|\ln\delta| \ge \eta(z_0), \tag{0.0.28}$$

определим функционал T_δ^1 на пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ равенством

$$\begin{aligned} T_\delta^1 f = e^{-it} \int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\, \frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta| = \\ = e^{-it} \int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta) \left(\frac{h(z_0)}{h(\zeta)}\right)^\sigma f(\zeta)\, |d\zeta|, \end{aligned} \tag{0.0.29}$$

где

$$J_{z_0}(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0, \zeta) + \ln\delta\, \kappa(z_0)\, P(z_0, \zeta).$$

Для $\delta > 0$ и точки $z_0 \in G$, удовлетворяющих неравенству

$$|\ln\delta| < \eta(z_0), \tag{0.0.30}$$

обратному к неравенству (0.0.28), определим в области G функцию F_δ формулой

$$F_\delta(z) = \frac{g(z) - g_0}{1 - g(z)\, \overline{g_0}}\, s_\delta(z), \quad g_0 = -e^{it} \frac{\kappa(z_0)\, \ln\delta}{2g'(z_0)} = -e^{it} \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}.$$

В случае (0.0.30) определим функционал T_δ^1 равенством

$$\begin{aligned} T_\delta^1 f = e^{-it} \int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\, \frac{s_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta| = \\ = e^{-it} \int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\, \frac{1 - \overline{g_0} g(\zeta)}{g(\zeta) - g_0} \left(\frac{h(z_0)}{h(\zeta)}\right)^\sigma f(\zeta)\, |d\zeta|, \end{aligned} \tag{0.0.31}$$

в котором

$$I_{z_0}(\zeta) = \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)} \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0, \zeta) + \kappa(z_0)\, \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) P(z_0, \zeta).$$

Основными результатами параграфа являются две теоремы.

Теорема 2.1.1. *Для величины* (0.0.25) *справедливы следующие утверждения.*

(I) *В случае* $|\ln\delta| \ge \eta(z_0)$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|.$$

Экстремальными являются функции вида cs_δ, $|c| = 1$, *а оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал* T^1_δ, *определённый равенством* (0.0.29).

(II) *В случае* $|\ln\delta| < \eta(z_0)$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,\frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right).$$

Экстремальными являются функции вида cF_δ, $|c| = 1$, *а оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал* T^1_δ, *определённый равенством* (0.0.31).

Теорема 2.1.2. *Для величины* (0.0.27) *наилучшего приближения функционала* $\Upsilon^1_{z_0}$ *справедливы следующие утверждения.*

(I *) *Если* $N > 0$ *представимо в виде*

$$N = \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,|\alpha\ln\delta + 1|, \quad |\ln\delta| \ge \eta(z_0),$$

то справедливо равенство

$$E(N) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,|\beta\ln\delta - 1|.$$

Функционал T^1_δ, *определённый формулой* (0.0.29), *является функционалом наилучшего приближения.*

(II *) *Если* $N > 0$ *представимо в виде*

$$N = \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,\left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) + \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right], \quad |\ln\delta| < \eta(z_0),$$

то справедливо равенство

$$E(N) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,\left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right].$$

Функционал T_δ^1, *определённый формулой* (0.0.31), *является функционалом наилучшего приближения.*
Случаи (I*) и (II*) исчерпывают все возможные значения $N > 0$.

В параграфе **2.2** рассматривается случай, аналогичный изучаемому в параграфе 1.4, но для оператора $\Upsilon^1_{\mathbb{R}+iy}$, сопоставляющего предельным граничным значениям на $\mathbb{R}$ функции, аналитической в полосе Π_Y, её производную на прямой $\mathbb{R}+iy$, $0<y<Y$. Точнее, исследуются задачи (0.0.25), (0.0.26) и (0.0.27) для оператора $\Upsilon^1_{\mathbb{R}+iy}$ на классе $Q = Q^p(\Pi_Y)$, в которых область G – полоса Π_Y, $\gamma_k = \mathbb{R} + iY(1-k)$, $k = 0,1$, весовые функции тождественно равны единице, $K = \mathbb{R} + iy$ и $B(K) = L^p(\mathbb{R}+iy)$, $1 \le p \le \infty$.

Определим оператор $\mathrm{T}^1_\delta = \mathrm{T}^1_\delta[y,Y]$, $\delta > 0$, из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$ формулой

$$\left(\mathrm{T}^1_\delta f\right)(x+iy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{T}^1_\delta\,(x-t)\; f(t)\,dt, \qquad (0.0.32)$$

с ядром

$$\mathrm{T}^1_\delta(z) = \frac{1}{2Yi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{\sigma(ix-y)}\sin\alpha\pi}{\mathrm{ch}(x\pi/Y)+\cos\alpha\pi}\right] =$$
$$= \frac{ie^{\sigma(ix-y)}}{2Y^2}\left[\frac{\sigma Y\sin\alpha\pi + \pi\cos\alpha\pi}{\mathrm{ch}(x\pi/Y)+\cos\alpha\pi} + \frac{\pi\sin^2\alpha\pi}{(\mathrm{ch}(x\pi/Y)+\cos\alpha\pi)^2}\right],\ \sigma = Y^{-1}\ln\delta.$$

Основными результатами параграфа являются следующие две теоремы.
Теорема 2.2.1. *При произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *и* $\delta > 0$, *удовлетворяющего условию*

$$|\ln\delta| \ge \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, \qquad (0.0.33)$$

для величин оптимального восстановления (0.0.25) *и модуля непрерывности* (0.0.26) *оператора* $\Upsilon^1_{\mathbb{R}+iy}$ *на классе* $Q^p(\Pi_Y)$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \frac{1}{Y}\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|\,.$$

При этом оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный оператор T^1_δ, *определённый равенством* (0.0.32).

Условие (0.0.33) совпадает с неравенством (0.0.28) для рассматриваемого случая.

Теорема 2.2.2. *При произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *и* $N > 0$, *представимого в виде*

$$N = e^{-\sigma y} \left|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\right|, \quad |\sigma| \ge \frac{\pi}{Y}\,\frac{1}{\sin\alpha\pi}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

для наилучшего приближения (0.0.27) *оператора* $\Upsilon^1_{\mathbb{R}+iy}$ *на классе* $Q^p(\Pi_Y)$ *справедливо равенство*

$$E(N) = e^{\sigma(Y-y)} \left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|.$$

При этом оператором наилучшего приближения является T^1_δ, *определённый равенством* (0.0.32), *в котором параметр* δ *задаётся соотношением* $\ln\delta = \sigma Y$.

В параграфе **2.3** рассматривается случай, аналогичный изучаемому в параграфе 1.6, но для оператора $\Upsilon^1_{l_\rho}$, сопоставляющего предельным граничным значениям на окружности l_r функции, аналитической в кольце $C_{r,R}$, её производную на окружности l_ρ, $0 < r < \rho < R$. Точнее, исследуются задачи (0.0.25), (0.0.26) и (0.0.27) для оператора $\Upsilon^1_{l_\rho}$ на классе $Q = Q^p(C_{r,R})$, в которых область G есть кольцо $C_{r,R}$, $\gamma_0 = l_R, \gamma_1 = l_r$, весовые функции тождественно равны величинам, обратным к длинам окружностей, $K = l_\rho$ и $B(K) = L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$, $\phi_\rho \equiv (2\pi\rho)^{-1}$, $1 \le p \le \infty$.

Определим оператор (свертки) $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta} = \mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}[\rho, r], \nu \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{R}$, из $L^p_{\phi_r}(l_r)$ в $L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$ формулой

$$(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta} f)(\rho e^{ix}) = e^{-ix}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Lambda^1_{\nu,\eta}(x-t) f(re^{it})\,dt \tag{0.0.34}$$

с ядром

$$\Lambda^1_{\nu,\eta}(t) = r^{-\nu} e^{i\nu t}\, \left(\lambda^1_\nu(t)+\eta\right), \quad \lambda^1_\nu(t) = \frac{\partial}{\partial\rho}\rho^\nu \Lambda_1(t) = \lambda^1_{\nu,0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^1_{\nu,k}\cos kt;$$

коэффициенты $\lambda^1_{\nu,k}$ задаются равенствами

$$\lambda^1_{\nu,0} = \rho^{\nu-1}\frac{\nu\ln(\rho/R)+1}{\ln(r/R)},\ \lambda^1_{\nu,k} = \rho^{\nu-1}\frac{(\nu+k)(\rho/R)^k-(\nu-k)(R/\rho)^k}{(r/R)^k-(R/r)^k},\ k\neq 0.$$

Для функций f из пространства Харди $H^p(C_{r,R})$, с представлением в виде ряда Лорана, оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}$ можно выписать следующим образом

$$\left(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta} f\right)(\rho e^{ix}) = \eta f_\nu e^{i(\nu-1)x} + e^{-ix}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^1_{\nu,k-\nu} f_k r^{k-\nu} e^{ikx}, \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k\, z^k.$$

Пусть $\mu^1_\nu(t) = \dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho^\nu\Lambda_0(t)$ и отрезок $S_\nu = [\eta^-_\nu, \eta^+_\nu]$ имеет граничные точки

$$\eta^-_\nu = \max_{t\in[0,2\pi]}\min\{-\lambda^1_\nu(t), \mu^1_\nu(t)\}, \quad \eta^+_\nu = \min_{t\in[0,2\pi]}\max\{-\lambda^1_\nu(t), \mu^1_\nu(t)\}.$$

Следующие две теоремы являются основными результатами параграфа.

Теорема 2.3.1. *При произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *и* $\delta_\nu = (r/R)^\nu$, *где* $\nu \in \mathbb{Z}$ *удовлетворяет условию*

$$|\nu| \ge \frac{\pi}{\ln(R/r)}\,\sin^{-1}\left(\frac{\ln(R/\rho)}{\ln(R/r)}\pi\right), \tag{0.0.35}$$

для величин оптимального восстановления (0.0.25) *и модуля непрерывности* (0.0.26) *оператора* $\Upsilon^1_{l_\rho}$ *на классе* $Q = Q^p(C_{r,R})$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu) = |\nu|\rho^{\nu-1}/R^\nu.$$

В этом случае линейный ограниченный оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,0}$, *определённый равенством* (0.0.34), *является оптимальным методом восстановления, а функция* $s_{\delta_\nu}(z) = cz^\nu R^{-\nu}$, $|c|=1$, *– экстремальной.*

Теорема 2.3.3. *При произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *параметра* N, *имеющего представление*

$$N_{\nu,\eta} = \frac{1}{r^\nu}\left|\lambda^1_{\nu,0} + \eta\right| = \frac{1}{r^\nu}\left|\rho^{\nu-1}\,\frac{\nu\ln(\rho/R)+1}{\ln(r/R)} + \eta\right|,$$

в котором $\nu \in \mathbb{Z}$ *удовлетворяет условию* (0.0.35) *и* $\eta \in S_\nu$, *для наилучшего приближения* (0.0.27) *оператора* $\Upsilon^1_{l_\rho}$ *на классе* $Q = Q^p(C_{r,R})$ *справедливо равенство*

$$E(N_{\nu,\eta}) = \frac{1}{R^\nu}\left|\mu^1_{\nu,0} - \eta\right| = \frac{1}{R^\nu}\left|\rho^{\nu-1}\,\frac{\nu\ln(r/\rho)-1}{\ln(R/r)} - \eta\right|.$$

В этом случае оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}$, *определённый равенством* (0.0.34), *является оператором наилучшего приближения.*

В случае, когда $\nu \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет условию (0.0.35), оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}$, определённый формулой (0.0.34), для произвольного $\eta \in S_\nu$ также является методом оптимального восстановления. Однако эти операторы не дают новых случаев решения задачи оптимального восстановления. Точнее, справедливо равенство $\mathcal{U}(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}, \delta_\nu) = |\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu}$.

В параграфе **2.4** рассматривается задача (0.0.13) наилучшего приближения класса $\partial Q^p(D_\rho)$, состоящего из производных функций класса Харди в круге D_ρ, другим классом Харди $Q^p(D_R, N)$, $N > 0$, функций, аналитических в круге D_R большего радиуса, по норме пространства $L^p_{\phi_r}(l_r)$, $0 < r < \rho < R$, $1 \le p \le \infty$. Для произвольной аналитической в кольце $C_{r_0,\rho} = \{z \in \mathbb{C}\colon r_0 < |z| < \rho\}$, $0 < r_0 < r$, функции f, представимой в $C_{r_0,\rho}$ рядом Лорана, и целого числа ν определим функцию F формулой

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{v}_k\, f_k\, z^{k-1}, \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k z^k,$$

$$\mathrm{v}_\nu = \frac{\nu\ln\rho - \nu\ln r - 1}{\ln R - \ln r}, \quad \mathrm{v}_{\nu+k} = \frac{(\nu-k)\rho^{2k} - (\nu+k)r^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}}, \quad k \ne 0.$$

Определим линейный оператор $\widetilde{V}^1_{\nu,\eta}$ равенством

$$\left(\widetilde{V}^1_{\nu,\eta} f\right)(z) = F(z) - \eta f_\nu z^{\nu-1}. \qquad (0.0.36)$$

Теорема 2.4.1. *Пусть числа r, ρ, R удовлетворяют неравенствам $0 < r < \rho < R$. Тогда при произвольном p, $1 \le p \le \infty$, справедливы следующие утверждения.*

1. *Имеет место порядковое равенство*

$$\mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \asymp N^{-\beta/\alpha} \ln^{1/\alpha} N, \quad \text{\textit{при}}\ N \to +\infty,$$

в котором

$$\alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}.$$

2. *Если положительное число N представимо в виде*

$$N_{\nu,\eta} = \frac{R^{\nu-1}}{\rho^\nu} \left(\frac{\nu \ln \rho - \nu \ln r - 1}{\ln R - \ln r} - \eta \right), \qquad (0.0.37)$$

где ν есть произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству (0.0.35), *и η – произвольное число из отрезка S_ν, то имеет место равенство*

$$\mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N_{\nu,\eta})\right)_{L^p(l_r)} = \frac{r^{\nu-1}}{\rho^\nu} \left(\frac{\nu \ln R - \nu \ln \rho + 1}{\ln R - \ln r} + \eta \right). \quad (0.0.38)$$

При этом линейный метод, определённый равенством (0.0.36), *доставляет наилучшее приближение класса классом.*

Аналогичное (0.0.38) равенство справедливо для величины $\mathrm{E}\left(\partial Q^p(C_{r_0,\rho}), H^p(C_{r,R}, N_{\nu,\eta})\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)}$, где величина $N_{\nu,\eta}$ определяется формулой (0.0.37), в которой ν – произвольное целое число, удовлетворяющее (0.0.35), и η – произвольное число из отрезка S_ν.

Глава 3 посвящена исследованию экстремальных задач на классах функций, аналитических в полуплоскости Π_+. Изучаются: задача (0.0.14) оптимального восстановления функции и производных функции класса по сужению её спектральной функции, и задача наилучшего приближения класса пространством целых функций экспоненциального типа.

В параграфе **3.1** рассматривается задача наилучшего приближения класса Харди – Соболева Q_n^p и класса $\partial^m Q_n^p$ пространствами A_σ целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, и $A_\sigma^p = A_\sigma^p \bigcap \mathcal{H}^p(\Pi_+)$. Приближения рассматриваются по норме пространств $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и $L^p(\mathbb{R}+iy)$, $y>0$.

Пусть функция l чётная, имеет носитель $[-\sigma,\sigma]$ и на отрезке $[0,\sigma]$ задаётся равенством $l(t)=1-t^{n-m}(2\sigma-t)^{m-n}e^{-2y(\sigma-t)}$; $\widehat{l}$ – преобразование Фурье функции l. Определим оператор $L^{(m)}$ равенством

$$(L^{(m)}f)(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{l}^{(m)}(z-\zeta)f(\zeta)\,d\zeta,\quad z=x+iy.$$

Образ оператора $L^{(m)}f$ зависит только от сужения спектральной функции φ_σ функции f на интервал $(-\varepsilon,\sigma)$, $\varepsilon>0$. Обозначим через Ψ отображение, определяемое равенством $\Psi\varphi_\sigma=L^{(m)}f$.

Полученные в теоремах 3.1.1, 3.1.2 и 3.1.4 результаты сформулированы в следующем утверждении.

Теорема 3.1.(1,2,4). *Для произвольных* $1\le p\le\infty, \sigma>0, n,m\in\mathbb{Z}_+$, $0\le m\le n$, *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}=\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}=\sigma^{m-n}\,e^{-y\sigma},\quad y>0,$$

$$\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma)_{\mathcal{H}^p}=\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma^p)_{\mathcal{H}^p}=\sigma^{m-n}.$$

Линейный оператор $L^{(m)}$ *является методом наилучшего приближения.* Показано, что пространство A_σ^p и построенный метод реализуют средние поперечники по Колмогорову и Бернштейну, средний линейный поперечник класса Q_n^p по норме пространства $L^p(\mathbb{R}+iy)$, $y\ge0$.

В параграфе **3.2** исследуется задача (0.0.14) оптимального восстановления аналитической в полуплоскости Π_+ функции и её производных на прямой $\mathbb{R} + iy$, $y > 0$, по известной информации о функции – сужении её спектральной функции на $(-\varepsilon, \sigma)$. В качестве априорной информации рассматривается принадлежность функции классу $Q_n^p = Q_n^p(\Pi_+)$.

Полученные в теоремах 3.2.1 и 3.2.2 результаты сформулированы в следующем утверждении.

Теорема 3.2.(1,2). *Пусть* $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq m \leq n$, $\sigma, y > 0$ *и* $1 \leq p \leq \infty$. *Тогда для величины оптимального восстановления* (0.0.14) *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma}, \tag{0.0.39}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m, \sigma, n]_{\mathcal{H}^p} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m, \sigma, n]_{\mathcal{H}^p} = \sigma^{m-n}.$$

Оптимальным методом восстановления является метод Ψ.

В Теореме 3.2.3 для случая $0 \leq n < m$ и $y > 0$ показано существование такого $\sigma_0 = \sigma_0(m - n)$, что для произвольных $\sigma \geq \sigma_0$ для величины оптимального восстановления (0.0.14) справедливы равенства (0.0.39). Оптимальным методом восстановления является метод Ψ.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту профессору, д.ф.-м.н. Виталию Владимировичу Арестову за постоянное многолетнее внимание к работе, полезные обсуждения и поддержку.

Глава 1. Оптимальное восстановление аналитической функции по неточно заданным значениям на части границы

В главе исследуется задача оптимального восстановления (0.0.16) аналитической в области G функции (оператора Υ_K^0) по некасательным предельным значениям функции, заданным с погрешностью на части границы γ_1, на классе $Q = Q^{r,q}(G;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, и взаимосвязанные задачи о модуле непрерывности (0.0.17) оператора Υ_K^0 на классе Q, и наилучшего приближения (0.0.18) оператора Υ_K^0 множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q.

§ 1.1. Оптимальное восстановление значения в точке аналитической в односвязной области функции

Далее в параграфе G – односвязная область комплексной плоскости, ограниченная жордановой спрямляемой кривой Γ. Пусть γ_1 – измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 – дополнение γ_1 до Γ, т.е. $\gamma_0 := \Gamma \setminus \gamma_1$.

Функции всех рассматриваемых классов $N(G)$, $N_*(G)$, $H^p(G)$ обладают свойством суммируемости логарифма модуля их предельных граничных значений по гармонической мере, т.е. $\int_\Gamma |\ln|f(\zeta)||\, P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| < +\infty$ [66, §4, 4.1]. Особо важным далее будет класс Харди $H^1(G)$, который совпадает (см. [57], [72, §2], [65]) с классом аналитических в области G функций, представимых через свои граничные значения по формуле Грина

$$f(z) = \int_\Gamma f(\zeta)\, P(z,\zeta)\,|d\zeta|, \quad z \in G.$$

В этом параграфе на классе Q изучаются экстремальные задачи (0.0.16), (0.0.17), (0.0.18) для функционала $\Upsilon_{z_0}^0$, который ставит в соответствие граничным значениям на γ_1 функции f её значение $f(z_0)$ в точке z_0 области G.

Приведём явно формулировки решаемых здесь задач. Основной является задача оптимального восстановления значения аналитической в области G функции в точке z_0 (функционала $\Upsilon^0_{z_0}$) по заданным с известной погрешностью δ по норме $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ её граничным значениям на γ_1 и дополнительной информации принадлежности функции классу Q. Более точно, пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ такая, что справедливо неравенство $\|f-g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta$. Мы хотим найти наилучший (оптимальный) способ восстановить по g значение функции $f(z_0)$, $z_0 \in G$, для всех таких пар функций f и g. В качестве множества методов восстановления, из которых выбирается оптимальный, достаточно рассматривать только множество $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов на $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$. Как обсуждалось выше, в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом уравновешенном классе с помощью множества $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный ограниченный функционал, величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала, и справедливы равенства (0.0.11). Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{F}$ величина

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(T,\delta) = \sup \Big\{ &|f(z_0) - Tg| \, : \\ &f \in Q,\, g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1),\, \|f-g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta \Big\}\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

является погрешностью восстановления значения в точке z_0 функций класса Q по их граничным значениям на γ_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$, методом T. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \inf \{\mathcal{U}(T,\delta) \, : \, T \in \mathcal{F}\} \tag{1.1.2}$$

есть *величина оптимального восстановления* значения в точке z_0 (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала $\Upsilon^0_{z_0}$) функций класса Q по их δ-приближённым граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{F}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – функционала, на котором в (1.1.2) достигается нижняя грань.

Функцию переменной $\delta > 0$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon^0_{z_0}, Q) = \sup\left\{|f(z_0)| \,:\, f \in Q,\, \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta\right\}, \tag{1.1.3}$$

называют *модулем непрерывности функционала* $\Upsilon^0_{z_0}$ на классе Q. Из определения (1.1.3) следует, что для функций из $\mathcal{H}$ справедливо точное неравенство

$$|f(z_0)| \le \|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}\, \omega\left(\frac{\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}}{\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}}\right). \tag{1.1.4}$$

В случае $q = r = \infty$ величина (1.1.3) и, соответственно, неравенство (1.1.4) следуют из хорошо известной теоремы братьев Неванлинна о двух константах (см. [91; 23, Гл. VIII, §4, Теорема 1]). А именно, неравенство (1.1.4) в этом случае принимает вид

$$|f(z_0)| \le \|f\|^{\alpha}_{L^\infty(\gamma_1)}\, \|f\|^{1-\alpha}_{L^\infty(\gamma_0)},$$

где $\alpha = w(z_0, \gamma_1, G)$ – гармоническая мера γ_1 относительно области G в точке z_0.

С задачами (1.1.2) и (1.1.3) тесно связана задача наилучшего приближения функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ линейными ограниченными функционалами. Точная постановка задачи такова. Пусть $\mathcal{B}(N)$ есть множество линейных ограниченных функционалов на $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$, норма которых не превосходит числа $N > 0$. Величина

$$U(T) = \sup\{|f(z_0) - Tf| \,:\, f \in Q\} \tag{1.1.5}$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{B}(N)$ от функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf\{U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N)\} \tag{1.1.6}$$

есть *наилучшее приближение функционала* $\Upsilon^0_{z_0}$ множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (1.1.6) достигается нижняя грань.

1.1.1 Основные результаты

По функциям φ_k, $k = 0, 1$, для $\delta > 0$ определим на границе Γ области G функцию ψ_δ по формуле

$$\psi_\delta(\zeta) = \begin{cases} \left(\dfrac{P(z_0,\zeta)}{\beta\varphi_0(\zeta)}\right)^{1/r}, & \zeta \in \gamma_0; \\ \delta\left(\dfrac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\varphi_1(\zeta)}\right)^{1/q}, & \zeta \in \gamma_1, \end{cases} \tag{1.1.7}$$

в которой величины α и β, соответственно, равны гармонической мере γ_1 и γ_0 относительно области G в точке z_0, то есть определяемые равенствами

$$\alpha = w(z_0, \gamma_1, G) = \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\,|d\zeta|,$$

$$\beta = 1 - \alpha = w(z_0, \gamma_0, G) = \int_{\gamma_0} P(z_0,\zeta)\,|d\zeta|.$$

В равенстве (1.1.7) и в дальнейшем, если r и/или q равны бесконечности, то считаем, что величины $1/r$ и/или $1/q$, соответственно, равны нулю.

Весовые функции φ_k, $k = 0, 1$, удовлетворяют условию суммируемости функций $\ln\varphi_k$ с плотностью гармонической меры, т.е. условию

$$\int_{\gamma_k} |\ln\varphi_k(\zeta)|\,P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| < +\infty, \quad k = 0, 1. \tag{1.1.8}$$

Эти ограничения для всех $\delta > 0$ обеспечивают существование аналитической в области G функции s_δ, имеющей почти всюду на Γ некасательные предельные граничные значения, модуль которых равен значениям функции ψ_δ. При требовании $s_\delta \in N_*(G)$ условия (1.1.8) являются и необходимыми. Действительно, вследствие ограничений (1.1.8) на функции φ_k

для произвольного значения параметра $\delta > 0$ функция $\ln \psi_\delta$ является суммируемой на Γ с плотностью гармонической меры. Тогда (см. [57, 66]) требуемой функцией $s_\delta \in N_*(G)$ является функция (функция Сегё, функция максимального модуля, внешняя функция), определяемая по функции ψ_δ равенством

$$s_\delta(z) = \exp\left(u_\delta(z) + iv_\delta(z)\right), \quad z \in G, \tag{1.1.9}$$

где функция

$$u_\delta(z) = \int_\Gamma P(z,\zeta)\, \ln \psi_\delta(\zeta)\, |d\zeta|, \quad z \in G,$$

является гармонической в области G, а v_δ – функция, гармонически сопряжённая к u_δ. Функция v_δ однозначная в силу односвязности области G, и единственная с точностью до вещественной аддитивной константы, выбор значения которой нам не важен.

На пространстве $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ определим функционал T_δ формулой

$$T_\delta g := \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta) \frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\, g(\zeta)\, |d\zeta|, \quad g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1). \tag{1.1.10}$$

Далее будет использоваться величина $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{q,r}(z_0; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$, определяемая равенствами

$$\begin{gathered} \mathcal{C} = \varepsilon^{1/q}(\gamma_1,\varphi_1)\, \varepsilon^{1/r}(\gamma_0,\varphi_0)\, \alpha^{-\alpha/q}\beta^{-\beta/r}, \\ \varepsilon(\gamma_k,\varphi_k) = \exp \int_{\gamma_k} P(z_0,\zeta) \ln \frac{P(z_0,\zeta)}{\varphi_k(\zeta)}\, |d\zeta|, \quad k = 0, 1. \end{gathered} \tag{1.1.11}$$

Основными результатами данного параграфа являются следующие два утверждения.

Теорема 1.1.1. *Пусть функции φ_k, $k = 0, 1$, удовлетворяют условию* (1.1.8). *При произвольном $\delta > 0$ для величины* (1.1.2) *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha.$$

При этом экстремальными в (1.1.3) *являются функции вида* cs_δ, $|c|=1$; *в задаче* (1.1.2) *оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал* T_δ .

Для функций пространства $\mathcal{H}$ *справедливо точное неравенство*

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C}\, \|f\|^{\alpha}_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \|f\|^{\beta}_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}. \tag{1.1.12}$$

Неравенство (1.1.12) *обращается в равенство на функциях вида* cs_δ, $\delta > 0$, $c \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.1.2. *Пусть функции* φ_k, $k = 0, 1$, *удовлетворяют условию* (1.1.8). *Для произвольного* $N > 0$ *для величины* (1.1.6) *справедливо равенство*

$$E(N) = \mathcal{C}^{1/\beta}\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом в задаче (1.1.6) *функционалом наилучшего приближения является функционал* T_δ, *у которого параметр* δ *определён равенством*

$$\delta = \mathcal{C}^{1/\beta}\alpha^{1/\beta}N^{-1/\beta}.$$

Заметим, что для весов $\widetilde{\varphi}_0(\zeta) = \beta^{-1}P(z_0,\zeta)$ и $\widetilde{\varphi}_1(\zeta) = \alpha^{-1}P(z_0,\zeta)$ величина $\mathcal{C}$ равна единице. В этом случае неравенство (1.1.12) для функций класса $\mathcal{H}$ (аналога класса Харди) примет вид

$$|f(z_0)| \le \|f\|^{\alpha}_{L^q_{\widetilde{\varphi}_1}(\gamma_1)} \|f\|^{\beta}_{L^r_{\widetilde{\varphi}_0}(\gamma_0)}.$$

1.1.2 Свойства экстремальной функции и функционала

В этой части будут исследованы некоторые свойства экстремальных функции s_δ и функционала $T_\delta, \delta > 0$, определённых равенствами (1.1.9) и (1.1.10).

Вначале убедимся, что функция s_δ, $\delta > 0$, принадлежит классу Q. По определению (1.1.9) функция s_δ является аналитической и не обращающейся в нуль в области G. Для её модуля имеем равенство

$$|s_\delta(z)| = \exp \int_\Gamma P(z,\zeta) \ln \psi_\delta(\zeta)\, |d\zeta|, \quad z \in G.$$

По построению функция $s_\delta \in N_*(G)$ имеет почти всюду на Γ [57,66] некасательные предельные граничные значения и для их модуля справедливо равенство

$$|s_\delta(\zeta)| = \psi_\delta(\zeta).$$

Используя это равенство и определение (1.1.7) функции ψ_δ, получим

$$\|s_\delta\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} = \|\psi_\delta\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} = \delta \left(\frac{1}{\alpha} \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\, |d\zeta| \right)^{1/q} = \delta;$$

$$\|s_\delta\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)} = \|\psi_\delta\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)} = \left(\frac{1}{\beta} \int_{\gamma_0} P(z_0,\zeta)\, |d\zeta| \right)^{1/r} = 1.$$

Следовательно, функция s_δ принадлежит $\mathcal{H}$, и более того, классу Q.

Вычислим абсолютное значение функции s_δ в точке z_0 :

$$|s_\delta(z_0)| = \exp \int_\Gamma P(z_0,\zeta) \ln \psi_\delta(\zeta)\, |d\zeta| =$$

$$= \exp \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta) \left(\ln \delta + \frac{1}{q} \ln \frac{P(z_0,\zeta)}{\varphi_1(\zeta)} - \frac{1}{q} \ln \alpha \right) |d\zeta| \times \tag{1.1.13}$$

$$\times \exp \int_{\gamma_0} P(z_0,\zeta) \left(\frac{1}{r} \ln \frac{P(z_0,\zeta)}{\varphi_2(\zeta)} - \frac{1}{r} \ln \beta \right) |d\zeta|.$$

В обозначениях (1.1.11) равенство (1.1.13) можно переписать в виде

$$|s_\delta(z_0)| = \mathcal{C}\delta^\alpha. \tag{1.1.14}$$

Суммируя описанные выше свойства функции s_δ получим следующее утверждение.

Лемма 1.1.1. *Для величины* (1.1.3) *модуля непрерывности функционала* $\Upsilon^0_{z_0}$ *на классе* Q *имеет место оценка снизу*

$$\omega(\delta) \geq \mathcal{C}\delta^\alpha. \tag{1.1.15}$$

Доказательство. Функция s_δ принадлежит классу Q и, следовательно, по определению модуля непрерывности (1.1.3) справедливо неравенство

$$\omega(\delta) \geq |s_\delta(z_0)|.$$

Теперь из равенства (1.1.14) следует утверждение Леммы 1.1.1. $\square$

Лемма 1.1.2. *Имеет место неравенство*

$$E(N) \geq \mathcal{C}^{1/\beta}\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta}. \tag{1.1.16}$$

Доказательство. В силу леммы 1.1.1 для величины (0.0.6) справедлива оценка снизу

$$\Delta(N) \geq \sup\{\mathcal{C}\delta^\alpha - N\delta \,:\, \delta \geq 0\} = \mathcal{C}^{1/\beta}\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta}.$$

Откуда, используя неравенство (0.0.8), получим оценку снизу (1.1.16) наилучшего приближения функционала. $\square$

Лемма 1.1.3. *Для произвольной функции $f \in Q$ функция f/s_δ принадлежит классу Харди $H^1(G)$.*

Доказательство. Функции f и s_δ аналитичны в области G, при этом s_δ в G не обращается в нуль, поэтому отношение f/s_δ также является аналитической в области G функцией. Более того, функции f и $1/s_\delta$ принадлежат классу $N_*(G)$. Действительно, $f \in N_*(G)$ по определению класса Q, а функция $1/s_\delta$ является функцией Сегё (максимального модуля), построенной по функции ψ_δ^{-1}, и так как $\ln\psi_\delta$ (а значит и $\ln\psi_\delta^{-1}$) суммируем на Γ с плотностью гармонической меры, следовательно, как отмечалось ранее, $1/s_\delta \in N_*(G)$. Тогда из неравенства $\ln^+|f(z)/s_\delta(z)| \leq \ln^+|f(z)| + \ln^+|1/s_\delta(z)|$ по определению класса $N_*(G)$ следует, что функция f/s_δ также принадлежит классу $N_*(G)$. Теперь для доказательства принадлежности f/s_δ классу Харди $H^1(G)$ достаточно показать, что граничные значения суммируемы с плотностью гармонической меры на Γ. Будем отдельно рассматривать интегралы на измеримых частях $\gamma_k, k = 0,1$. Подставляя граничные значения функции s_δ на γ_1 и используя принадлежность граничных значений f, как функции класса Q, пространству $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$, получим оценку сверху

$$\int_{\gamma_1} \left|\frac{f(\zeta)}{s_\delta(\zeta)}\right| P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| = \int_{\gamma_1} \frac{|f(\zeta)|\alpha^{1/q}\varphi_1^{1/q}(\zeta)}{\delta P^{1/q}(z_0,\zeta)}\,P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| =$$

$$= \alpha^{1/q}\delta^{-1}\int_{\gamma_1}\left\{|f(\zeta)|\varphi_1^{1/q}(\zeta)\right\}P^{1-1/q}(z_0,\zeta)\,|d\zeta| \le$$

$$\le \alpha^{1/q}\delta^{-1}\,\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\left(\int_{\gamma_1}P(z_0,\zeta)\,|d\zeta|\right)^{1-1/q} = \alpha\delta^{-1}\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}.$$

Аналогично, на γ_0 имеем

$$\int_{\gamma_0} \left|\frac{f(\zeta)}{s_\delta(\zeta)}\right| P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| = \int_{\gamma_0} \frac{|f(\zeta)|\beta^{1/r}\varphi_0^{1/r}(\zeta)}{P^{1/r}(z_0,\zeta)}\,P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| =$$

$$= \beta^{1/r}\int_{\gamma_0}\left\{|f(\zeta)|\varphi_0^{1/r}(\zeta)\right\}P^{1-1/r}(z_0,\zeta)\,|d\zeta| \le$$

$$\le \beta^{1/r}\,\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}\left(\int_{\gamma_0}P(z_0,\zeta)\,|d\zeta|\right)^{1-1/r} = \beta\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}.$$

Итак, функция f/s_δ принадлежит классу $N_*(G)$ и её граничные значения суммируемы с плотностью гармонической меры на Γ. Согласно аналогу теоремы Полубариновой – Кочиной функция f/s_δ принадлежит классу Харди $H^1(G)$. Лемма доказана. $\square$

Теперь исследуем свойства функционала T_δ, определённого на пространстве $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ соотношением (1.1.10). Убедимся, что функционал T_δ является ограниченным, вычислим его норму и уклонения (1.1.1) и (1.1.5).

Лемма 1.1.4. *Имеют место равенства*

$$\|T_\delta\| = \alpha \mathcal{C} \delta^{-\beta}, \tag{1.1.17}$$

$$U(T_\delta) = \beta \mathcal{C} \delta^{\alpha}, \tag{1.1.18}$$

$$\mathcal{U}(T_\delta, \delta) = \mathcal{C} \delta^{\alpha}. \tag{1.1.19}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $1 < q \le \infty$. Для произвольной функции $g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ имеем оценку

$$|T_\delta g| = \left| \int_{\gamma_1} P(z_0, \zeta) \frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)} \, g(\zeta) \, |d\zeta| \right| \le$$

$$\le |s_\delta(z_0)| \int_{\gamma_1} \left(\frac{P(z_0, \zeta)}{\varphi_1^{1/q}(\zeta) |s_\delta(\zeta)|} \right) \left(|g(\zeta)| \varphi_1^{1/q}(\zeta) \right) \, |d\zeta| \le \tag{1.1.20}$$

$$\le |s_\delta(z_0)| \left(\int_{\gamma_1} \left(\frac{P(z_0, \zeta)}{\varphi_1^{1/q}(\zeta) |s_\delta(\zeta)|} \right)^{1/(1-1/q)} \, |d\zeta| \right)^{1-1/q} \, \|g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}.$$

Функция s_δ почти всюду на границе Γ области G, имеет некасательные предельные граничные значения такие, что $|s_\delta(\zeta)| = \psi_\delta(\zeta)$, в частности для точек γ_1 справедливо равенство

$$|s_\delta(\zeta)| = \delta \left(\frac{P(z_0, \zeta)}{\alpha \varphi_1(\zeta)} \right)^{1/q}.$$

Подставив это выражение $|s_\delta(\zeta)|$ в подынтегральную функцию в правой части (1.1.20), запишем её новое представление в степени $1 - 1/q$:

$$\frac{P(z_0, \zeta)}{\varphi_1^{1/q}(\zeta) |s_\delta(\zeta)|} = \frac{P(z_0, \zeta) \alpha^{1/q} \varphi_1^{1/q}(\zeta)}{\varphi_1^{1/q}(\zeta) \delta P^{1/q}(z_0, \zeta)} = \delta^{-1} \alpha^{1/q} P^{1-1/q}(z_0, \zeta).$$

Используем последнее равенство в оценке (1.1.20), получим при $1 < q \le \infty$ оценку

$$|T_\delta g| \le |s_\delta(z_0)| \alpha \delta^{-1} \, \|g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}.$$

Такая же оценка справедлива при $q = 1$. Действительно, имеем

$$|T_\delta g| \le \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\frac{|s_\delta(z_0)|}{|s_\delta(\zeta)|}\,|g(\zeta)|\,|d\zeta| =$$

$$= |s_\delta(z_0)|\int_{\gamma_1} \alpha\delta^{-1}|g(\zeta)|\varphi_1(\zeta)\,|d\zeta| = |s_\delta(z_0)|\alpha\delta^{-1}\,\|g\|_{L^1_{\varphi_1}(\gamma_1)}.$$

Теперь, учитывая равенство (1.1.14), для произвольного $q, 1 \le q \le \infty$, имеем оценку нормы функционала сверху

$$\|T_\delta\| \le \alpha\mathcal{C}\delta^{\alpha-1} = \alpha\mathcal{C}\delta^{-\beta}.$$

С другой стороны, рассмотрев в качестве g граничные значения функции $\delta^{-1}s_\delta$ на γ_1, используя (1.1.14), получим

$$T_\delta\left(\delta^{-1}s_\delta\right) = \alpha\delta^{-1}|s_\delta(z_0)| = \alpha\mathcal{C}\delta^{-\beta},$$

что даёт обратное неравенство для нормы функционала и, как следствие, равенство (1.1.17).

По лемме 1.1.3 функция f/s_δ принадлежит классу Харди $H^1(G)$. Поэтому она представима по формуле Грина через свои граничные значения и справедливо равенство

$$\frac{f(z_0)}{s_\delta(z_0)} = \int_\Gamma P(z_0,\zeta)\,\frac{f(\zeta)}{s_\delta(\zeta)}\,|d\zeta|.$$

Откуда имеем представление

$$f(z_0) - T_\delta f = \int_{\gamma_0} P(z_0,\zeta)\,\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta|.$$

Теперь, рассуждая аналогично доказательству равенства (1.1.17), нетрудно получить и равенство (1.1.18). Верхняя грань в (1.1.5) вновь достигается на функции s_δ.

Равенство (1.1.19) следует из следующих стандартных рассуждений. Для произвольных функций $f \in Q$ и $g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ имеем

$$|f(z_0) - T_\delta g| \le |f(z_0) - T_\delta f| + |T_\delta(f-g)| \le U(T_\delta) + \|T_\delta\|\,\|f-g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}.$$

Теперь из равенств (1.1.17) и (1.1.18) для уклонения (1.1.1) получаем оценку сверху

$$\mathcal{U}(T_\delta,\delta) \le \beta\mathcal{C}\delta^\alpha + \alpha\mathcal{C}\delta^{-\beta}\cdot\delta = \mathcal{C}\delta^\alpha.$$

Для оценки снизу достаточно рассмотреть конкретные функции f и g. Выбрав $f = s_\delta$ и $g \equiv 0$, получим неравенство

$$\mathcal{U}(T_\delta,\delta) \ge |s_\delta(z_0) - 0| = \mathcal{C}\delta^\alpha.$$

Лемма доказана. □

1.1.3 Доказательство теорем 1.1.1 и 1.1.2

Доказательство теоремы 1.1.1. В силу неравенства (1.1.15) леммы 1.1.1, равенства (0.0.11) и равенства (1.1.19) леммы 1.1.4 имеет место соотношение

$$\mathcal{C}\delta^\alpha \le \omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) \le \mathcal{U}(T_\delta,\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha.$$

Отсюда следуют утверждения теоремы 1.1.1. □

Доказательство теоремы 1.1.2. Положим $N = \|T_\delta\| = \alpha\mathcal{C}\delta^{-\beta}$. В этом случае $\delta = \mathcal{C}^{1/\beta}\alpha^{1/\beta}N^{-1/\beta}$. Тогда в силу (1.1.17) и (1.1.18) для величины наилучшего приближения (1.1.6) справедлива оценка сверху

$$E(N) \le U(T_\delta) = \beta\mathcal{C}\delta^\alpha = \mathcal{C}^{1/\beta}\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta}.$$

Оценка снизу получена в неравенстве (1.1.16) леммы 1.1.2. Теорема 1.1.2 доказана. □

Замечание 1.1.1. *Рассмотренные в параграфе задачи конформно инвариантны. Пусть отображение $\xi = \xi(z)$ конформно переводит область G в жорданову область $\widetilde{G}$, при этом $\widetilde{\gamma}_k = \xi(\gamma_k)$, $k = 0,1$, и $\xi_0 =$*

$\xi(z_0)$. *Весовые функции связаны равенством* $\widetilde{\varphi}_k(\xi(z))|\xi'(z)| = \varphi_k(z)$, $k = 0, 1$. *Тогда величины оптимального восстановления* (1.1.2) *функционалов* $\Upsilon^0_{z_0}$ *и* $\Upsilon^0_{\xi_0}$, *соответственно, на классах* $Q^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ *и* $Q^{r,q}(\widetilde{G}; \widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\varphi}_0; \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\varphi}_1)$ *равны. Аналогичные равенства имеют место для величин модуля непрерывности* (1.1.3) *и наилучшего приближения* (1.1.6). *Экстремальные функции и функционалы отличаются лишь заменой переменных* $\xi = \xi(z)$.

§ 1.2. Явный вид экстремалей в случаях полуплоскости и круга

Обозначим через $\mathcal{H} = \mathcal{H}^p(G, \varphi)$, $1 \le p \le \infty$, класс функций $f \in N_*(G)$ с граничными значениями из $L^p_\varphi(\Gamma)$ с весом φ. Таким образом класс $\mathcal{H}^p(G, \varphi)$ есть класс $\mathcal{H}^{p,p}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$, в котором показатели совпадают и равны p, а весовые функции φ_k являются сужениями функции φ на γ_k, $k = 0, 1$. Пусть $Q = Q^p(G, \gamma_1, \varphi)$ – подкласс функций $f \in \mathcal{H}$ таких, что $\|f\|_{L^p_\varphi(\gamma_0)} \le 1$.

В параграфе на классе $Q^p(G, \gamma_1, \varphi)$ в задаче оптимального восстановления (1.1.2) значения функции в точке $z_0 \in G$ по её приближённо заданным предельным граничным значениям на γ_1 по норме $L^p_\varphi(\gamma_1)$ и во взаимосвязанной задаче (1.1.6) наилучшего приближения функционала линейными ограниченными функционалами для случаев, когда область G является полуплоскостью и кругом, а подмножество γ_1 границы области, соответственно, промежутком и дугой, явно выписаны решения – экстремальная функция, оптимальный метод восстановления, функционал наилучшего приближения. В частности, вычислена константа $\mathcal{C}$ неравенства (1.1.12), определённая равенством (1.1.11). В теоремах 1.1.1 и 1.1.2 получено решение этих задач в более общей постановке. Однако нахождение явного аналитического вида решений (экстремальных функции и функционала, константы точного неравенства), вообще говоря, затруднителен. Рассматриваемые случаи являются примерами, когда это возможно сделать. Отметим, что с помощью приведённых формул можно получить явный вид решений в аналогичных задачах для односвязных жордановых областей G, если явно записана функция, задающая конформное отображения области G на полуплоскость или круг. Это следует из замечания 1.1.1.

Приведем конструкции некоторых функций. Зададим функцию h_{γ_1} в области G равенством

$$h_{\gamma_1}(z) = \exp\{w(z) + i\widetilde{w}(z)\},$$

в котором $w(z) = w(z, \gamma_1, G)$ – гармоническая мера γ_1 относительно области G в точке z, $\widetilde{w}$ – гармонически сопряжённая к w функция, которая определена и единственна с точностью до аддитивной (вещественной) константы, выбор которой нам не важен. Функция h_{γ_1} является ограниченной аналитической, не обращается в нуль в области G и удовлетворяет равенствам

$$|h_{\gamma_1}(z)| = e^{w(z)},\ z \in \Pi_+; \quad |h_{\gamma_1}(\zeta)| = e,\ \zeta \in \gamma_1; \quad |h_{\gamma_1}(x)| = 1,\ \zeta \in \gamma_0.$$

Для фиксированной точки $z_0 \in G$ определим функцию Ψ_{z_0} соотношением

$$\Psi_{z_0}(z) = \exp\{v(z) + i\widetilde{v}(z)\},$$

в котором гармоническая в G функция v является интегралом

$$v(z) = \int\limits_{\Gamma} P(z,\zeta) \ln P(z_0,\zeta)\, |d\zeta|,$$

а $\widetilde{v}$ – функция, гармонически сопряжённая к v и для которой выбор аддитивной постоянной нам также не важен. Функция Ψ_{z_0} является аналитической и не обращается в нуль в области G, принадлежит классу $N_*(G)$. Граничные значения модуля функции Ψ_{z_0} почти всюду совпадают с плотностью гармонической меры, т. е.

$$|\Psi_{z_0}(\zeta)| = P(z_0,\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

Третья функция будет построена по весовой функции φ. Пусть неотрицательная измеримая функция φ удовлетворяет условию: $\ln\varphi$ является суммируемой функцией на Γ по гармонической мере. Аналитическую в области G функцию Φ из класса $N_*(G)$ определим равенством

$$\Phi(z) = \exp\{u(z) + i\widetilde{u}(z)\},$$

в котором гармоническая в G функция u является интегралом

$$u(z) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(z,\zeta)\ln\varphi(x)\,|d\zeta|,$$

а $\widetilde{u}$ – функция, гармонически сопряжённая к u. Функция Φ не обращается в нуль в области G, а граничные значения модуля функции Φ почти всюду совпадают с функцией $1/\varphi$, т. е.

$$|\Phi(\zeta)| = 1/\varphi(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

Используя введённые выше функции h_{γ_1}, Ψ_{z_0} и Φ, функцию s_δ, определённую формулой (1.1.9), можно представить в виде произведения

$$s_\delta(z) = \beta^{-1/p}\, h^{\sigma}_{\gamma_1}(z)\, \Psi^{1/p}_{z_0}(z)\, \Phi^{1/p}(z), \quad z \in G, \tag{1.2.1}$$

в котором

$$\sigma = \ln\delta + 1/p\ln\beta/\alpha, \quad \alpha = w(z_0,\gamma_1,G), \quad \beta = 1-\alpha = w(z_0,\gamma_0,G),$$

и $1 \le p \le \infty$. Если $p = \infty$, то величину $1/p$ считаем равной нулю. В этом случае ($p = \infty$) функция $s_\delta = h^{\sigma}_{\gamma_1}$, $\sigma = \ln\delta$, не зависит от точки z_0.

Когда область G является полуплоскостью и кругом, хорошо известны явный вид плотности гармонической меры и, соответственно, гармонической меры промежутка на граничной прямой и дуги граничной окружности. Используя их и представление (1.2.1) функции s_δ, далее будут выписаны явные решения (экстремальные функция и функционал, константа точного неравенства) рассматриваемых задач.

1.2.1. Явный вид экстремалей в случае полуплоскости

Через Π_+ обозначим верхнюю полуплоскость; $\mathbb{I}$ – промежуток граничной прямой $\mathbb{R}$, в качестве которого будет выступать либо конечный интервал (a, b), либо полупрямая $(0, +\infty)$. В дальнейшем $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 \le \arg z < 2\pi$, и $z^\zeta = \exp\{\zeta \ln z\}$, $z, \zeta \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

Для плотности гармонической меры (ядра Пуассона) полуплоскости справедливо равенство

$$P(z, \xi) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i\pi}\frac{1}{z-\xi}\right\} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}, \quad z = x+iy, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Для гармонической меры $w(z) = w(z, \mathbb{I}, \Pi_+)$ промежутка $\mathbb{I}$ относительно полуплоскости Π_+ в точке $z \in \Pi_+$ справедливы равенства

$$w\left(z, (a,b), \Pi_+\right) = \frac{1}{\pi}\arg\frac{z-b}{z-a}; \quad w\left(z, (0,+\infty), \Pi_+\right) = \frac{\pi - \arg z}{\pi}. \qquad (1.2.2)$$

Вид функции $h_{\mathbb{I}}$ зависит от промежутка $\mathbb{I}$. Точнее, в случае $\mathbb{I} = (a, b)$ справедливо равенство

$$h_{(a,b)}(z) = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{i/\pi} = \exp\left\{-\frac{i}{\pi}\ln\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\right\};$$

а в случае $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ – равенство

$$h_{\mathbb{R}_+}(z) = e\, z^{i/\pi} = \exp\left\{1 + \frac{i}{\pi}\ln z\right\}.$$

Для функции Ψ_{z_0} имеет место равенство

$$\Psi_{z_0}(z) = \frac{y_0}{\pi}\frac{1}{(z-\overline{z_0})^2}, \quad y_0 = \mathrm{Im}\, z_0.$$

Нетрудно проверить, что сужение модуля функции Ψ_{z_0} на вещественную ось совпадает с плотностью гармонической меры (ядром Пуассона), т. е. $|\Psi_{z_0}(x)| = P(z_0, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Пусть φ – весовая функция, определённая и неотрицательная на вещественной прямой $\mathbb{R}$, для которой конечна величина

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln \varphi(x)|}{x^2+1}\, dx < +\infty. \qquad (1.2.3)$$

В качестве примера весовых функций φ и соответствующих им аналитических функций Φ приведем "степенные" веса:

$$\varphi(x) = P^{\nu}(z_1, x) = \left(\frac{1}{\pi}\frac{y_1}{(x-x_1)^2+y_1^2}\right)^{\nu}, \quad z_1 = x_1 + iy_1 \in \Pi_+,\ \nu \in \mathbb{R},$$

$$\Phi(z) = \Psi_{z_1}^{-\nu}(z) = (y_1/\pi)^{-\nu}\ (z-\overline{z_1})^{2\nu}, \quad z \in \Pi_+;$$

$$\varphi(x) = |x-x_1|^{-2\nu}, \quad x_1 \in \mathbb{R},\ \nu \in \mathbb{R},$$

$$\Phi(z) = (z-x_1)^{2\nu}, \quad z \in \Pi_+.$$

Напомним, что для произвольной точки $z_1 \in \Pi_+$ и веса $\phi_1(x) = P(z_1, x)$ класс $\mathcal{H}^p(\Pi_+, \phi_1)$ совпадает с классом Харди $H^p(\Pi_+)$.

Далее, используя выписанные выше функции $h_{\mathbb{I}}, \Psi_{z_0}$ и функцию Φ, получим представление экстремальной функции s_δ по формуле (1.2.1), а также константу $\mathcal{C} = |s_1(z_0)|$ неравенства (1.1.12) и экстремальный функционал T_δ, задаваемый равенством

$$T_\delta f = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{I}} \frac{y_0}{(x_0-x)^2+y_0^2}\,\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(x)}\, f(x)\, dx, \quad f \in L^p_{\varphi}(\mathbb{I}). \qquad (1.2.4)$$

Экстремальные функция и функционал для $\mathbb{I} = (a, b)$. В случае, когда промежутком $\mathbb{I}$ является интервал (a, b), для гармонических мер имеем

$$\alpha = w\,(z_0, (a,b), \Pi_+) = \frac{\vartheta}{\pi},$$

$$\beta = w\,(z_0, \mathbb{R}\setminus(a,b), \Pi_+) = \frac{\pi-\vartheta}{\pi}, \quad \vartheta = \arg\frac{z_0-b}{z_0-a},$$

где ϑ – угол при вершине z_0 треугольника с вершинами в точках a, b и z_0.

Экстремальная функция (1.2.1) имеет вид

$$s_\delta(z) = \left(\frac{y_0}{\pi-\vartheta}\right)^{1/p} \frac{1}{(z-\overline{z_0})^{2/p}} \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{i/\pi(\ln\delta+1/p\ln(\pi/\vartheta-1))} \Phi^{1/p}(z),$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$.

Функционал (1.2.4) оптимального восстановления (наилучшего приближения) T_δ для случая $\mathbb{I} = (a,b)$ примет вид

$$T_\delta f = \mathcal{K}\,\delta^{\vartheta/\pi-1} \int\limits_a^b \left[\frac{1}{\pi}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\right]^{1-1/p} \varphi^{1/p}(x)\, v(x)\, f(x)\, dx,$$

где функция $v(x) = v(z_0,p,\varphi;\, x)$ с модулем, тождественно равным единице, задаётся равенством

$$v(x) = \exp i\Big\{\frac{2}{p}\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x-x_0} - \frac{\pi}{p} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\Big(\ln\delta + \frac{1}{p}\ln\frac{\pi-\vartheta}{\vartheta}\Big)\ln\frac{|z_0-a|(b-x)}{|z_0-b|(x-a)} - \frac{1}{p}\arg(\Phi(x))\Big\},$$

и величина $\mathcal{K}$ – равенством

$$\mathcal{K} = \left\{\frac{\Phi(z_0)}{4\pi y_0}\left(\frac{\vartheta}{\pi-\vartheta}\right)^{1-\vartheta/\pi}\right\}^{1/p}.$$

Соответственно, точное неравенство (1.1.12) для функций класса $\mathcal{H} = \mathcal{H}^p(\Pi_+,\varphi)$ примет вид

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C}\ \|f\|^{\vartheta/\pi}_{L^p_\varphi(a,b)}\,\|f\|^{1-\vartheta/\pi}_{L^p_\varphi(\mathbb{R}\setminus(a,b))}, \quad f\in\mathcal{H}^p(\Pi_+,\varphi),$$

величина $\mathcal{C}$ задаётся равенством

$$\mathcal{C} = \left\{\frac{|\Phi(z_0)|}{4y_0(\pi-\vartheta)}\Big(\frac{\vartheta}{\pi-\vartheta}\Big)^{-\vartheta/\pi}\right\}^{1/p}.$$

Экстремальные функция и функционал для $\mathbb{I} = (0,+\infty)$. В случае, когда промежуток $\mathbb{I}$ является полупрямой $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$, для гармонических мер имеем

$$\alpha = w\,(z_0,\mathbb{R}_+,\Pi_+) = \frac{\pi-\vartheta_0}{\pi}, \quad \beta = w\,(z_0,\mathbb{R}_+,\Pi_+) = \frac{\vartheta_0}{\pi}, \quad \vartheta_0 = \arg z_0.$$

Экстремальная функция (1.2.1) имеет вид

$$s_\delta(z) = \Big(\frac{y_0}{\pi - \vartheta_0}\Big)^{1/p} \frac{\delta}{(z-\overline{z_0})^{2/p}}\, z^{i/\pi(\ln\delta - 1/p\ln(\pi/\vartheta_0 - 1))}\, \Phi^{1/p}(z),$$

$$z_0 = |z_0|e^{i\vartheta_0} = x_0 + iy_0.$$

Функционал (1.2.4) оптимального восстановления (наилучшего приближения) T_δ для полуоси примет вид

$$T_\delta f = \mathcal{K}\,\delta^{-\vartheta_0/\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\pi}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\right]^{1-1/p} \varphi^{1/p}(x)\,\upsilon(x)\,f(x)\,dx,$$

где функция $\upsilon(x) = \upsilon(z_0, p, \varphi;\, x)$ с модулем, тождественно равным единице, задаётся равенством

$$\upsilon(x) = \exp i\left\{\frac{2}{p}\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x-x_0} - \frac{\pi}{p} + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{\pi}\left(\ln\delta + \frac{1}{p}\ln\frac{\vartheta_0}{\pi-\vartheta_0}\right)\ln\frac{|z_0|}{x} - \frac{1}{p}\,\arg\left(\Phi(x)\right)\right\},$$

и величина $\mathcal{K}$ – равенством

$$\mathcal{K} = \left\{\frac{\Phi(z_0)}{4\pi y_0}\left(\frac{\pi-\vartheta_0}{\vartheta_0}\right)^{\vartheta_0/\pi}\right\}^{1/p}.$$

Соответственно, точное неравенство (1.1.12) для функций класса $\mathcal{H} = \mathcal{H}^p(\Pi_+, \varphi)$ примет вид

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C}\,\|f\|^{\vartheta_0/\pi}_{L^p_\varphi(-\infty,0)}\,\|f\|^{1-\vartheta_0/\pi}_{L^p_\varphi(0,+\infty)}, \quad f \in \mathcal{H}^p(\Pi_+, \varphi),$$

величина $\mathcal{C}$ задаётся равенством

$$\mathcal{C} = \left\{\frac{|\Phi(z_0)|}{4\vartheta_0\, y_0}\Big(\frac{\pi-\vartheta_0}{\vartheta_0}\Big)^{\vartheta_0/\pi-1}\right\}^{1/p}.$$

1.2.2. Явный вид экстремалей в случае круга

Рассмотрим случай, когда область G является единичным кругом $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; точка z_0 принадлежит полуинтервалу

$[0,1)$, далее $\rho = z_0$; и множество γ_1 – дуга окружности, точнее $\gamma_1 = \left\{z = e^{it} : t \in (\tau_1, \tau_2)\right\}$, при $-\pi \le \tau_1 \le \pi$, $\tau_1 < \tau_2 \le 2\pi$, $\tau_2 - \tau_1 < 2\pi$.

В этом случае плотностью гармонической меры является классическое ядро Пуассона:

$$P(\rho, e^{it}) = \mathcal{P}(\rho, t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}.$$

Пусть величина $\vartheta(\tau_1,\tau_2)$ определена равенством

$$\vartheta(\tau_1,\tau_2) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau_2}{2}\right) - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau_1}{2}\right).$$

Для гармонической меры дуги γ_1 относительно круга D в точке ρ имеет место равенство

$$\alpha = w(\rho,\gamma_1,D) = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} \vartheta(\tau_1,\tau_2), & \tau_2 < \pi; \\ 2\pi - \vartheta(\tau_2 - 2\pi, \tau_1), & \tau_2 \ge \pi. \end{cases}$$

Другими словами, пусть отрезки $[e^{i\tau_s}, e^{i\theta_s}]$, $s = 1,2$, являются хордами единичной окружности и проходят через точку $z_0 = \rho$. Тогда для гармонической меры дуги γ_1 относительно круга D в точке ρ справедливо

$$\alpha = w(\rho,\gamma_1,D) = \frac{\theta}{2\pi}, \quad \theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Соответственно, для дуги γ_0, дополнения γ_1 до единичной окружности, имеем

$$\beta = w(\rho,\gamma_0,D) = 1-\alpha = \frac{2\pi-\theta}{2\pi}.$$

Функции h_{γ_1} и Ψ_ρ определяются равенствами

$$h_{\gamma_1}(z) = \exp\left\{\frac{i}{\pi}\ln\frac{(a+i)z+(a-i)}{(b+i)z+(b-i)}\right\}, \quad a = \mathrm{tg}\,\frac{\tau_1}{2},\ b = \mathrm{tg}\,\frac{\tau_2}{2};$$

$$\Psi_\rho(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{(1-\rho z)^2}.$$

Тогда, используя представление (1.2.1) экстремальной функции s_δ в виде произведения, получим

$$s_\delta(z) = \left(\frac{1-\rho^2}{(2\pi-\theta)(1-\rho z)^2}\right)^{1/p}\left(\frac{(a+i)z+(a-i)}{(b+i)z+(b-i)}\right)^{i/\pi(\ln\delta+1/p\ln(2\pi/\theta-1))}\Phi(z).$$

Подставляя экстремальную функцию s_δ в равенство (1.1.10), получим, что функционал оптимального восстановления (наилучшего приближения) T_δ принимает вид

$$T_\delta f = \mathcal{K}\,\delta^{\theta/(2\pi)-1}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}\right]^{1-1/p}\varphi^{1/p}(e^{it})\,\upsilon(e^{it})\,f(e^{it})\,dt,$$

где функция $\upsilon(t)=\upsilon(\rho,p,\varphi;\,t)$ с модулем, тождественно равным единице, задаётся равенством

$$\upsilon(t)=\exp i\Big\{-\frac{2}{p}\operatorname{arctg}\frac{\rho\sin t}{1-\rho\cos t}-\frac{1}{p}\arg(\Phi(e^{it}))+$$

$$+\frac{1}{\pi}\Big(\ln\delta+\frac{1}{p}\ln\frac{2\pi-\theta}{\theta}\Big)\Big(\frac{1}{2}\ln\frac{a^2(\rho+1)^2-(\rho-1)^2}{b^2(\rho+1)^2-(\rho-1)^2}-\ln\frac{\operatorname{tg}t/2-a}{b-\operatorname{tg}t/2}\Big)\Big\},$$

и величина $\mathcal{K}$ – равенством

$$\mathcal{K}=\left\{\frac{\Phi(\rho)}{1-\rho^2}\left(\frac{\theta}{2\pi-\theta}\right)^{1-\theta/(2\pi)}\right\}^{1/p}.$$

Наконец, величина $\mathcal{C}$ в неравенстве (1.1.12), для рассматриваемого случая, имеет вид

$$\mathcal{C}=\left\{\frac{|\Phi(\rho)|}{(2\pi-\theta)(1-\rho^2)}\left(\frac{2\pi-\theta}{\theta}\right)^{\theta/2\pi}\right\}^{1/p}.$$

§ 1.3. Оптимальное восстановление на множестве ограниченной с весом аналитической функции

В данном параграфе для весовых функций $\varphi_k,\ k=0,1,$ т.е. для неотрицательных функций, определённых почти всюду на $\gamma_k,\ k=0,1,$ и удовлетворяющих условию (1.1.8), будем рассматривать класс $\mathcal{H}=\widetilde{\mathcal{H}}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ функций $f\in N_*(G),$ для которых нормы предельных граничных значений

$$\|f\|_{L^\infty_{\varphi_k}}=\operatorname{ess\,sup}\{|f(\zeta)|\varphi_k(\zeta)\,:\,\zeta\in\gamma_k\},\quad k=0,1,$$

конечны. Соответственно, класс $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{L^\infty_{\varphi_0}} \le 1$.

По функциям φ_k, $k = 0, 1$, для $\delta > 0$ определим на границе Γ области G функцию ψ_δ по формуле

$$\psi_\delta(\zeta) = \begin{cases} 1/\varphi_0(\zeta), & \zeta \in \gamma_0; \\ \delta/\varphi_1(\zeta), & \zeta \in \gamma_1, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Функция s_δ и функционал T_δ будут задаваться теми же формулами (1.1.9) и (1.1.10), соответственно, по функции ψ_δ, определённой равенством (1.3.1). В этом случае величина $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\infty,\infty}(z_0; \gamma_1, \varphi_1; \gamma_0, \varphi_0) = |s_1(z_0)|$ будет задаваться формулой

$$\mathcal{C} = \exp \int_{\gamma_0} P(z_0, \zeta) \ln \frac{1}{\varphi_0(\zeta)} \, |d\zeta| \, \exp \int_{\gamma_1} P(z_0, \zeta) \ln \frac{1}{\varphi_1(\zeta)} \, |d\zeta|. \tag{1.3.2}$$

Решение задач на классе функций $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ формально не следует из теорем 1.1.1 и 1.1.2. Однако, буквально повторяя все рассуждения параграфа 1.1 для рассматриваемого весового случая, получаем следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Пусть функции* $\varphi_k, k = 0, 1$, *удовлетворяют условию* (1.1.8). *При произвольном* $\delta > 0$ *для величин оптимального восстановления* (1.1.3) *и модуля непрерывности* (1.1.2) *функционала* $\Upsilon^0_{z_0}$ *на классе* $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ *имеют место равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha, \tag{1.3.3}$$

где величина $\mathcal{C}$ *определена равенством* (1.3.2). *При этом экстремальными в* (1.1.3) *являются функции вида* cs_δ, $|c| = 1$; *в задаче* (1.1.2) *оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал* T_δ, *определённый по функции* (1.3.1).

Для функций пространства $\mathcal{H}$ *справедливо точное неравенство*

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C} \, \|f\|^\alpha_{L^\infty_{\varphi_1}(\gamma_1)} \, \|f\|^\beta_{L^\infty_{\varphi_0}(\gamma_0)}. \tag{1.3.4}$$

Неравенство (1.3.4) *обращается в равенство на функциях* cs_δ, $\delta > 0$, $c \in \mathbb{C}$.

При произвольном $N > 0$ *для величины наилучшего приближения* (1.1.6) *функционала* $\Upsilon^0_{z_0}$ *на классе* $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ *справедливо равенство*

$$E(N) = \mathcal{C}^{1/\beta}\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом, в задаче (1.1.6) *функционалом наилучшего приближения является функционал* T_δ, *у которого параметр* δ *определён равенством*

$$\delta = \mathcal{C}^{1/\beta}\alpha^{1/\beta}N^{-1/\beta}.$$

Пусть K – подмножество односвязной области G, $(K, \widetilde{m})$ – пространство с некоторой конечной мерой $\widetilde{m}$. Обозначим через $B = B(K)$ функциональную банахову структуру (функциональную банахову решётку) – банахово пространство функций, измеримых по мере $\widetilde{m}$ на множестве K, с монотонной нормой $\|\cdot\|_B$, т.е. удовлетворяющей утверждению:

$$\begin{gathered}(f_2 \in B(K), \quad |f_1(z)| \le |f_2(z)|, a.e.) \Rightarrow \\ \Rightarrow (f_1 \in B(K), \quad \|f_1\|_B \le \|f_2\|_B)\,.\end{gathered} \tag{1.3.5}$$

Будем считать, что функция $\epsilon \equiv 1$ принадлежит пространству $B(K)$ и её норма равна единице, т.е. $\|\epsilon\|_B = 1$. В частности, это означает, что все существенно ограниченные функции принадлежат $B(K)$. Более того, далее предполагается справедливость вложения $Q \subset B(K)$. В теореме 1.3.2 приведено условие, при выполнении которого вложение имеет место.

Оператор Υ^0_K из Q в $B(K)$, ставит в соответствие граничным значениям на γ_1 аналитической функции её сужение на K.

Пусть w – гармоническая в области G функция, имеющая в каждой точке области значение, равное гармонической мере γ_1 относительно области G и точки z , т.е. $w(z) = w(z, \gamma_1, G)$. Функция w имеет почти всюду на γ_1 некасательные предельные граничные значения, равные единице, и на $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ – равные нулю. Для числа $\alpha \in (0,1)$ через γ_α будем обозначать подмножество точек z области G, в которых функция $w(z)$ принимает значение α :

$$\gamma_\alpha = \{z \in G \,:\, w(z,\gamma_1,G) = \alpha\}\,.$$

Отметим, что во всех точках $z \in \gamma_\alpha$ функция $w(z,\gamma_0,G)$ — гармоническая мера γ_0 относительно точки z и круга D, также принимает постоянное значение равное $\beta = 1-\alpha$.

В качестве примера приведем случай, когда область $G = D$ – единичный круг, а множество γ_1 есть дуга единичной окружности, множества $\gamma_\alpha, \alpha \in (0,1)$, являются дугами окружностей, пересекающих единичную окружность в двух точках – концах дуги γ_1. Выделим случай, когда $\gamma_1 = \left\{e^{it} \,:\, t \in [0,\pi]\right\}$ – верхняя половина единичной окружности и $\alpha = 1/2$, тогда линией уровня $\gamma_{1/2}$ является интервал $(-1,1)$. В этом случае в качестве пространства $B = B(\gamma_{1/2})$ можно рассматривать, например, классические пространства $L^p(-1,1), p \ge 1$.

1.3.1. Модуль непрерывности оператора Υ_K^0

Модулем непрерывности оператора Υ_K^0 на классе Q является функция вещественного переменного $\delta \in [0,\infty)$, определённая равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta;\Upsilon_K^0,Q) = \sup\left\{\|f\|_B \,:\, f \in Q,\ \|f\|_{L^\infty_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta\right\}. \qquad (1.3.6)$$

Помимо значений величины $\omega(\delta)$, интерес представляют экстремальные функции, на которых в (1.3.6) достигается верхняя грань.

Для функции s_1, построенной по функции ψ_δ, определённой равенством (1.3.1) при $\delta = 1$, введём специальное обозначение $s_1(z) = s(z)$.

Зададим функцию h формулой

$$h(z) = \exp\left(w(z) + i\widetilde{w}(z)\right), \qquad (1.3.7)$$

в которой $w(z) = w(z, \gamma_1, G)$ есть гармоническая мера γ_1 относительно области G и точки z, $\widetilde{w}$ – гармонически сопряжённая к w функция в области G.

В следующей теореме выписано решение задачи (1.3.6).

Теорема 1.3.2. *Пусть* $s \in B(K)$. *Тогда имеет место вложение* $Q \subset B(K)$ *и для модуля непрерывности* ω *оператора* Υ_K^0 *на классе* Q, *определённого соотношением* (1.3.6), *справедливо равенство*

$$\omega(\delta) = \|s\delta^w\|_B. \tag{1.3.8}$$

Верхняя грань в (1.3.6) *достигается на функциях* εs_δ *при* $|\varepsilon| = 1$.

В случае, когда $K \subset \gamma_\alpha$, *равенство* (1.3.8) *примет вид*

$$\omega(\delta) = \mathrm{C}\delta^\alpha \tag{1.3.9}$$

с коэффициентом $\mathrm{C} = \|s\|_B$.

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ из условий (1.1.8) следует, что функция s_δ принадлежит классу $\mathcal{H}$. Нетрудно тогда убедится в справедливости равенств $\|s_\delta\|_{L^\infty_{\varphi_0}(\gamma_0)} = 1$ и $\|s_\delta\|_{L^\infty_{\varphi_1}(\gamma_1)} = \delta$. Следовательно, функция s_δ принадлежит классу Q. Кроме того, для функции s_δ справедливо представление

$$s_\delta(z) = s(z)\, h^\sigma(z), \quad \sigma = \ln\delta, \quad z \in G, \tag{1.3.10}$$

при этом

$$|h(z)| = \exp w(z), \quad z \in G.$$

Следовательно, если $s \in B(K)$, то для любого $\delta > 0$ функция s_δ – произведение s на ограниченную h^σ – также принадлежит $B(K)$. Для произвольной функции f класса Q найдется δ такое, что справедливо неравенство $\|f\|_{L^\infty_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta$. Иными словами, модуль граничных значений почти всюду не превосходит значений функции ψ_δ :

$$|f(\zeta)| \le \psi_\delta(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

Тогда из теоремы 1.3.1 следует поточечное в области G неравенство

$$|f(z)| \leq |s_\delta(z)|, \quad z \in G.$$

Отсюда, используя условие (1.3.5) , получаем вложение $Q \subset B(K)$ и оценку сверху для модуля непрерывности

$$\omega(\delta) \leq \|s_\delta\|_B.$$

С другой стороны, так как $s_\delta \in Q$, для величины модуля непрерывности (1.3.6) имеет место оценка снизу

$$\omega(\delta) \geq \|s_\delta\|_B.$$

Для завершения доказательства равенства (1.3.8) осталось заметить, что следствием представления (1.3.10) является равенство $\|s_\delta\|_B = \|s\delta^w\|_B$. Равенство (1.3.9) вытекает из факта, что на множестве γ_α функция $|h|$ имеет постоянное значение, равное числу e^α. Теорема доказана. $\square$

В частном случае, когда весовые функции φ_k, $k = 0, 1,$ тождественно (почти всюду на γ_k, $k = 0, 1,$) равны единице, функция s в области G также тождественно равна единице, отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 1.3.1. *В случае* $\varphi_k \equiv 1$, $k = 0, 1,$ *равенство* (1.3.8) *примет вид* $\omega(\delta) = \|\delta^w\|_B$, *а при дополнительном предположении* $K \subset \gamma_\alpha$ *– вид* $\omega(\delta) = \delta^\alpha$.

1.3.2. Оптимальное восстановление и наилучшее приближение оператора Υ_K^0

Целью этой части параграфа является исследование задачи оптимального восстановления (0.0.16) аналитической функции на подмножестве K области G (оператора Υ_K^0) относительно нормы пространства $B(K)$ по заданным с погрешностью δ по норме $L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)$ граничным значениям функции на γ_1, на классе $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$. Пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $g \in L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)$ такая, что почти всюду на γ_1 справедливо неравенство

$$|f(\zeta) - g(\zeta)|\varphi_1(\zeta) \le \delta,$$

или, что то же самое, $\|f-g\|_{L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta$. Иными словами, заданы граничные значения функции f с погрешностью на части границы γ_1. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по g функцию f на K. Соответственно, в качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать $\mathcal{F}$ – множество всех возможных, $\mathcal{L}$ – линейных или $\mathcal{B}$ – линейных ограниченных операторов из $L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$. Рассматриваемый здесь случай задачи (0.0.16) следующий. Для числа $\delta \ge 0$ и метода $T \in \mathcal{R}$ погрешность метода восстановления задается формулой

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\Big\{\|f - Tg\|_B \ : \\ f \in Q,\ g \in L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1),\ \|f-g\|_{L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta\Big\}. \tag{1.3.11}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta)\ :\ T \in \mathcal{R}\right\} \tag{1.3.12}$$

есть величина оптимального восстановления аналитической функции на множестве K (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ^0_K) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на γ_1, заданным с погрешностью δ по норме $L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (1.3.12) достигается нижняя грань.

Одновременно рассматриваемая задача – задача наилучшего приближения оператора Υ^0_K на классе $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ множеством $\mathcal{L}(N)$

линейных ограниченных операторов из $L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$, норма которых не превосходит числа $N > 0$. Конкретная постановка задачи (0.0.18) такова. Величина

$$U(T) = \sup \{ \|f - Tf\|_B \,:\, f \in Q \} \tag{1.3.13}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора Υ^0_K на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf \{ U(T) \;:\; T \in \mathcal{L}(N) \} \tag{1.3.14}$$

есть наилучшее приближение оператора Υ^0_K множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный оператор, на котором в (1.3.14) достигается нижняя грань.

Произвольной функции $g \in L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)$ поставим в соответствие функцию F_δ, определённую в области G следующей формулой

$$F_\delta(z) = \int\limits_{\gamma_1} P(z,\zeta) \frac{s_\delta(z)}{s_\delta(\zeta)}\, g(\zeta)\, |d\zeta| =$$

$$= \int\limits_{\gamma_1} P(z,\zeta) \frac{s(z)}{s(\zeta)} \left(\frac{h(z)}{h(\zeta)} \right)^{\sigma} g(\zeta)\, |d\zeta|, \tag{1.3.15}$$

где $\sigma = \ln \delta \in \mathbb{R}$, а функция h определена соотношением (1.3.7). Функционал T_δ на $L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)$, который является экстремальным в теореме 1.3.1 связан с функцией F_δ равенством

$$T_\delta g = F_\delta(z_0),$$

т.е. функционал сопоставляет g значение функции F_δ в точке z_0.

Определим оператор T_δ на пространстве $L^{\infty}_{\varphi_1}(\gamma_1)$, ставя в соответствие функции g след функции F_δ, определяемой равенством (1.3.15), на множестве K. Таким образом, оператор T_δ задаётся формулой

$$(\mathrm{T}_\delta g)(z) = F_\delta(z) = \int\limits_{\gamma_1} P(z,\zeta) \frac{s_\delta(z)}{s_\delta(\zeta)}\, g(\zeta)\, |d\zeta|, \quad z \in K. \tag{1.3.16}$$

Соответственно, связь между оператором T_δ и функционалом T_δ выражается соотношением $(\mathrm{T}_\delta g)(z_0) = T_\delta g$. Используя эту взаимосвязь и свойства функционала T_δ, можно выписать норму оператора T_δ и его уклонения от оператора Υ_K^0.

Лемма 1.3.1. *Для оператора* T_δ, *определяемого соотношением* (1.3.16), *величина погрешности восстановления* (1.3.11) *принимает значение*

$$\mathcal{U}(\mathrm{T}_\delta, \delta) = \|s\delta^w\|_B; \tag{1.3.17}$$

норма и уклонение (1.3.13) *– значения*

$$\|\mathrm{T}_\delta\| = \|ws\delta^{w-1}\|_B, \quad U(\mathrm{T}_\delta) = \|(1-w)s\delta^w\|_B. \tag{1.3.18}$$

В случае $K \subset \gamma_\alpha$ *равенство* (1.3.17) *примет вид*

$$\mathcal{U}(\mathrm{T}_\delta, \delta) = \|s\|_B\, \delta^\alpha;$$

равенства (1.3.18) *– вид*

$$\|\mathrm{T}_\delta\| = \alpha\|s\|_B\, \delta^{-\beta}, \quad U(\mathrm{T}_\delta) = \beta\|s\|_B\, \delta^\alpha, \quad \beta = 1-\alpha. \tag{1.3.19}$$

В следующих двух теоремах исследуются задачи оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора Υ_K^0.

Теорема 1.3.3. *Для произвольного* $K \subset G$ *и* $\delta > 0$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \|s\delta^w\|_B. \tag{1.3.20}$$

При этом оптимальным методом восстановления является метод T_δ, *определяемый соотношением* (1.3.16).

В случае $K \subset \gamma_\alpha$ *равенства* (1.3.20) *примут вид*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \mathrm{C}\delta^\alpha,$$

где коэффициент определяется равенством $\mathrm{C} = \|s\|_B$.

Доказательство. Объединив (1.3.8), (0.0.10) и (1.3.17), получим

$$\|s\delta^w\|_B = \omega(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \le \mathcal{U}(\mathrm{T}_\delta, \delta) = \|s\delta^w\|_B.$$

Откуда следуют равенства (1.3.20) и экстремальность оператора T_δ. Теорема доказана. □

Теорема 1.3.4. *В случае* $K \subset \gamma_\alpha$ *для произвольного* $N > 0$ *справедливо равенство*

$$E(N) = \mathrm{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta},$$

с коэффициентом $\mathrm{C} = \|s\|_B$. *При этом оператором наилучшего приближения является оператор* T_δ, *определяемый соотношением* (1.3.16) *с параметром* δ, *задаваемым равенством*

$$\delta = \mathrm{C}^{1/\beta}\alpha^{1/\beta}N^{-1/\beta}.$$

Доказательство. Обозначая $N = \alpha\|s\|_B\,\delta^{-\beta}$ и выражая $U(\mathrm{T}_\delta)$ из равенства (1.3.19) через N, получим

$$U(\mathrm{T}_\delta) = \mathrm{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{1.3.21}$$

С другой стороны, вычислив величину $\Delta(N)$, определённую равенством (0.0.6), получим

$$\Delta(N) = \mathrm{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{1.3.22}$$

Объединив равенства (1.3.21), (1.3.22) и неравенство (0.0.8) теоремы B, получаем

$$\mathrm{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta} = \Delta(N) \le E(N) \le U(\mathrm{T}_\sigma) = \mathrm{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Откуда вытекает утверждение теоремы 1.3.4. □

1.3.3. Оптимальная информация при восстановлении Υ_K^0

Здесь для случая множества G, являющегося единичным кругом $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, и некоторых случаев подмножеств K круга D рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора Υ_K^0 с наилучшим (с минимальной погрешностью восстановления) выбором множества γ_1, на котором заданы граничные значения функции. Точная постановка задачи следующая. Пусть для параметров δ, μ справедливы неравенства $0 < \delta \leq 1$ и $0 < \mu < 2\pi$. Рассмотрим

$$\mathtt{E}(\delta, \mu) = \inf \{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) : m(\gamma_1) \leq \mu\}, \tag{1.3.23}$$

точную нижнюю грань величины оптимального восстановления (1.3.12) по всевозможным измеримым подмножествам γ_1 единичной окружности Γ, мера которых не превосходит числа μ. В экстремальной задаче (1.3.23) кроме значения нижней грани представляет интерес множество, на котором она достигается. Общую постановку задачи выбора оптимальной информации при восстановлении оператора можно найти в работе [47].

Сначала рассмотрим случай, когда множество K состоит из точки z_0, и, соответственно, Υ_K^0 является функционалом – значение функции в точке $z_0 \in D$, $\Upsilon_K^0 f = \Upsilon_{z_0}^0 f = f(z_0)$.

Подставив в определение (1.3.23) величину оптимального восстановления функционала (1.3.3), получим

$$\mathtt{E}(\delta, \mu) = \inf \left\{ |s(z_0)| \delta^{w(z_0, \gamma_1, D)} : m(\gamma_1) \leq \mu \right\} =$$
$$= |s(z_0)| \exp \left\{ \ln \delta \sup \{w(z_0, \gamma_1, D) : m(\gamma_1) \leq \mu\} \right\}.$$

Выражая гармоническую меру через ядро Пуассона, вычислим её верхнюю грань

$$\sup \{w(\rho e^{i\tau}, \gamma_1, D) : m(\gamma_1) \leq \mu\} =$$
$$= \sup \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E_1} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(t - \tau) + \rho^2} \, dt : E_1 \subset [-\pi, \pi], \, m(E_1) \leq \mu \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\mu/2}^{\mu/2} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}\,dt = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu}{4}\right).$$

В результате получаем решение задачи (1.3.23) выбора оптимальной информации при восстановлении функционала. Обозначим через u_μ функцию, определяемую в круге D равенством

$$u_\mu(z) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu}{4}\right).$$

Ясно, что функция u_μ является радиальной, т. е. $u_\mu(z) = u(|z|)$, $z \in D$.

Теорема 1.3.5. *В случае* $K = z_0 = \rho e^{i\tau}$, $0 < \rho < 1$, *при* $0 < \delta \le 1$ *и* $0 < \mu < 2\pi$ *для величины* (1.3.23) *справедливо равенство*

$$\mathtt{E}(\delta,\mu) = |s(\rho e^{i\tau})|\delta^{u_\mu(\rho)}.$$

При этом нижняя грань в (1.3.23) *достигается на дуге окружности*

$$\gamma_1 = \left\{e^{it}\ :\ |t-\tau| < \frac{\mu}{2}\right\}.$$

Из теоремы 1.3.5 и монотонности нормы $B(K)$ при произвольном $K \subset D$ для задачи выбора оптимальной информации при восстановлении оператора Υ_K^0 вытекает оценка снизу.

Следствие 1.3.2. *При* $0 < \delta \le 1$ *и* $0 < \mu < 2\pi$, *для произвольного* $K \subset D$ *величина* (1.3.23) *удовлетворяет неравенству*

$$\mathtt{E}(\delta,\mu) \ge \|s\delta^{u_\mu}\|_B. \tag{1.3.24}$$

Доказательство. Действительно, из теоремы 1.3.5 следует, что для произвольной точки $z_0 \in D$ и произвольного множества γ_1, $m(\gamma_1) \le \mu$, имеет место неравенство

$$|s(z_0)|\delta^{u_\mu(z_0)} \le |s(z_0)|\delta^{w(z_0,\gamma_1,D)}.$$

Тогда, используя монотонность нормы $B(K)$, получаем

$$\|s\delta^{u_\mu}\|_B \leq \|s\delta^w\|_B.$$

Рассмотрев в последнем неравенстве нижнюю грань по γ_1 и используя равенство (1.3.20), получим утверждение следствия 1.3.2. $\square$

В случае, когда все точки множества K имеют один аргумент, для каждой точки множества K нижняя грань в задаче выбора оптимальной информации при восстановлении функционала – значения аналитической функции в этой точке – достигается на одном интервале и, следовательно, в неравенстве (1.3.24) имеет место равенство. Обозначим через K^τ радиус круга D:

$$K^\tau = \{z \in D \,:\, \arg z = \tau\}.$$

Теорема 1.3.6. *В случае* $K \subset K^\tau$, *при* $0 < \delta \leq 1$ *и* $0 < \mu < 2\pi$ *для величины* (1.3.23) *справедливо равенство*

$$\mathtt{E}(\delta, \mu) = \|s\delta^{u_\mu}\|_B.$$

При этом нижняя грань в (1.3.23) *достигается на дуге окружности*

$$\gamma_1 = \left\{e^{it} \,:\, |t - \tau| < \frac{\mu}{2}\right\}.$$

§ 1.4. Оптимальное восстановление на прямой аналитической в полосе функции

В этом параграфе изучаются экстремальные задачи на классе аналитических в полосе функций. Будут использоваться следующие обозначения: Y – положительное число, являющееся шириной полосы, которую, в свою очередь, будем обозначать Π_Y; точнее, Π_Y – полоса, параллельная вещественной оси, точки которой имеют мнимую часть между нулём и Y, т.е.

$$\Pi_Y = \{z \,:\, 0 < \operatorname{Im} z < Y\}.$$

Через α и β обозначим произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Через y – положительное число, определяемое равенством $y = \beta Y$. Ясно, что справедливо неравенство $0 < y < Y$. Введённые параметры α, β, y и Y связаны равенствами

$$\alpha = \frac{Y - y}{Y}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{y}{Y}.$$

Обозначив $\gamma_0 = \mathbb{R} + iY$ и $\gamma_1 = \mathbb{R}$, для произвольной точки z_0, $\operatorname{Im} z_0 = y$, имеем равенства $\beta = w(z_0, \gamma_0, \Pi_Y)$ и $\alpha = w(z_0, \gamma_1, \Pi_Y)$. Соответственно, линией уровня гармонической меры $w(z) = w(z, \gamma_1, \Pi_Y) = 1 - \operatorname{Im} z/Y$ вещественной прямой $\gamma_1 = \mathbb{R}$ относительно полосы Π_Y является прямая $\gamma_\alpha = \mathbb{R} + iy$.

1.4.1. Постановки задач и результаты

Пусть $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$, $1 \le p \le \infty$, – класс функций f, аналитических в полосе Π_Y, след которых на каждой прямой $\mathbb{R} + i\eta$, $0 < \eta < Y$, принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R} + i\eta)$ и для которых

$$\sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} \,:\, 0 < \eta < Y\right\} < +\infty.$$

Для функции $f \in \mathcal{H}^p(\Pi_Y)$, $1 \le p \le \infty$, на границах полосы, прямых $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} + iY$, существуют функции из L^p, являющиеся почти всюду некасательными пределами функции f. В дальнейшем для граничных значений будем использовать обозначения $f(x), f(x + iY)$, $x \in \mathbb{R}$. Более того, класс $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ совпадает с введённым ранее классом $\mathcal{H}^p(\Pi_Y, 1)$ функций из $N_*(\Pi_Y)$ с конечной L^p-нормой (с тождественно равным единице весом) предельных значений на граничных прямых. Обсудим этот факт ниже.

В $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ выделим класс $Q = Q^p(\Pi_Y)$ функций f, чьи граничные значения на прямой $\mathbb{R} + iY$ удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)} \le 1$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления на прямой $\mathbb{R}+iy$ аналитических в полосе Π_Y функций класса Q (оператора $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$) по granичным значениям функции на вещественной оси $\mathbb{R}$, заданных с погрешностью δ. Формальная постановка рассматриваемого конкретного варианта задачи (0.0.16) такова. Для числа $\delta > 0$ и оператора $T \in \mathcal{R}$ определим величину

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{\|f - Tg\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q,\, g \in L^p(\mathbb{R}),\, \|f-g\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \delta\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta) \,:\, T \in \mathcal{R}\right\} \tag{1.4.1}$$

есть величина оптимального восстановления (оператора $\Upsilon^0_{\gamma_\alpha}$) аналитической функции с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на вещественной оси $\mathbb{R}$, заданных с погрешностью δ. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (1.4.1) достигается нижняя грань. В качестве множества методов $\mathcal{R}$ рассматриваем одно из следующих: множество $\mathcal{F}$ всех однозначных отображений, множество $\mathcal{L}$ линейных или множество $\mathcal{B}$ линейных ограниченных операторов из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$.

С задачей (1.4.1) исследуются соответствующие задачи (0.0.17) о модуле непрерывности оператора $\Upsilon^0_{\gamma_\alpha}$ и (0.0.18) наилучшего приближения оператора $\Upsilon^0_{\gamma_\alpha}$ линейными ограниченными операторами на классе Q . Явные постановки этих задач следующие.

Функция вещественного переменного $\delta > 0$, определяемая равенством

$$\omega(\delta) = \sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q,\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \delta\right\}, \tag{1.4.2}$$

является модулем непрерывности оператора $\Upsilon^0_{\gamma_\alpha}$ аналитического продолжения на классе Q. Цель состоит в вычислении величины $\omega(\delta)$ и нахождении экстремальной функции (последовательности функций), на которой в (1.4.2) достигается верхняя грань.

Пусть $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(N; L^p(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}+iy))$ есть множество линейных ограниченных операторов из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$, норма которых $\|T\| = \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\mapsto L^p(\mathbb{R}+iy)}$ не превосходит числа $N > 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|f - Tf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ : \ f \in Q\right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ от оператора аналитического продолжения $\Upsilon^0_{\gamma_\alpha}$ на классе Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T) \ : \ T \in \mathcal{B}(N)\right\} \tag{1.4.3}$$

есть наилучшее приближение оператора аналитического продолжения $\Upsilon^0_{\gamma_\alpha}$ множеством ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении экстремального оператора, на котором в (1.4.3) достигается нижняя грань.

На пространстве $L^p(\mathbb{R})$ определим оператор (свертки) $\mathrm{T}_\delta = \mathrm{T}_\delta[y, Y]$ формулой

$$\left(\mathrm{T}_\delta f\right)(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_\delta\left((x+iy) - t\right)\, f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.4.4}$$

с ядром

$$\mathrm{T}_\delta(z) = \frac{1}{2Y}\frac{e^{i\sigma z}\,\sin\alpha\pi}{\mathrm{ch}\,(z/Y - i\beta)\,\pi + \cos\alpha\pi}, \quad \sigma = Y^{-1}\ln\delta. \tag{1.4.5}$$

Основными результатами параграфа являются следующие две теоремы.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$ *и числа* y, Y *удовлетворяют неравенству* $0 < y < Y$. *Тогда для величин* (1.4.1) *и* (1.4.2) *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \delta^\alpha,$$

При этом оптимальным методом восстановления в задаче (1.4.1) *является линейный ограниченный оператор* T_δ, *определённый равенствами* (1.4.4) – (1.4.5).

Теорема 1.4.2. *Пусть* $1 \le p \le \infty$ *и числа* y, Y *удовлетворяют неравенству* $0 < y < Y$ *и* $N > 0$. *Тогда для величины* (1.4.3) *справедливо равенство*

$$E(N) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом экстремальным в задаче (1.4.3) *оператором является оператор* T_δ, *определённый равенствами* (1.4.4)–(1.4.5), *в котором параметр* δ *задаётся равенством*

$$\delta = \alpha^{1/\beta}\,N^{-1/\beta}.$$

1.4.2. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем будем использовать функцию $K_{a,b}$, $a > 0, b > 0$, определённую на вещественной оси формулой

$$K_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh}(a+b)t}, & t \ne 0; \\ \dfrac{a}{a+b}, & t = 0. \end{cases} \tag{1.4.6}$$

Ясно, что функция $K_{a,b}$ при произвольных положительных значениях параметров a и b является положительной, чётной, непрерывной на вещественной оси и для неё имеет место равенство

$$K_{b,a}(t) = \big(1 - e^{-bt} K_{a,b}(t)\big)\, e^{-at}, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, преобразование Фурье $\widehat{K_{a,b}}$ функции $K_{a,b}$ обладает следующими свойствами.

Лемма 1.4.1. *При произвольных положительных значениях параметров* a *и* b *функция* $\widehat{K_{a,b}}$: *в полосе* $|\operatorname{Im} z| < b$ *удовлетворяет равенству*

$$\widehat{K_{a,b}}(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{a+b}\,\frac{\sin\dfrac{a\pi}{a+b}}{\operatorname{ch}\dfrac{z\pi}{a+b} + \cos\dfrac{a\pi}{a+b}}; \tag{1.4.7}$$

на вещественной оси является положительной суммируемой функцией, при этом справедливо равенство

$$\|\widehat{K_{a,b}}\|_{L^1(\mathbb{R})} = K_{a,b}(0) = \frac{a}{a+b}.$$

Доказательство. Из определения (1.4.6) следует, что при $|\eta| < b$ функция $e^{\eta t} K_{a,b}(t)$ суммируема на вещественной прямой. Тогда для произвольного z, $|\operatorname{Im} z| < b$, используя известное равенство (см., например, равенство 2.5.16.8. в [56]), имеем

$$\widehat{K_{a,b}}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} K_{a,b}(t)\, e^{-izt}\, dt = \frac{1}{2}\, \frac{1}{a+b}\; \frac{\sin \dfrac{a\pi}{a+b}}{\operatorname{ch} \dfrac{z\pi}{a+b} + \cos \dfrac{a\pi}{a+b}}\,.$$

Выражение в правой части последнего равенства положительно на вещественной оси, что следует из неравенств

$$\operatorname{ch} \frac{x\pi}{a+b} \geq 1, x \in \mathbb{R}; \quad \left|\cos \frac{a\pi}{a+b}\right| < 1; \;\; \sin \frac{a\pi}{a+b} > 0.$$

Тогда для нормы $\widehat{K_{a,b}}$ получаем

$$\|\widehat{K_{a,b}}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_{a,b}}(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{K_{a,b}}(x)\, e^{i0x}\, dx = K_{a,b}(0) = \frac{a}{a+b}\,.$$

Лемма 1.4.1 доказана. □

В качестве следствия леммы 1.4.1 приведем следующее равенство

$$\widehat{K_{b,a}}(z) = \frac{1}{2}\, \frac{1}{a+b}\, \frac{\sin \dfrac{a\pi}{a+b}}{\operatorname{ch} \dfrac{z\pi}{a+b} - \cos \dfrac{a\pi}{a+b}}, \quad |\operatorname{Im} z| < a. \tag{1.4.8}$$

Следующее известное утверждение о функциях класса $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ и их представлении через граничные значения является формулой Грина, см. [59, Гл. III, §6, п. 6.12].

Лемма 1.4.2. *Для произвольной функции* $f \in \mathcal{H}^p(\Pi_Y)$, $1 \le p \le \infty$, *на границах полосы, прямых* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{R}+iY$, *существуют функции из* L^p, *являющиеся почти всюду некасательными пределами функции* f. *При этом для произвольных* $x \in \mathbb{R}$ *и* $0 < y < Y$ *справедливо равенство*

$$f(x+iy) = \frac{1}{2Y}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y} + \cos\alpha\pi} f(t)\,dt + \tag{1.4.9}$$

$$\frac{1}{2Y}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y} - \cos\alpha\pi} f(t+iY)\,dt.$$

Покажем, что класс $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ совпадает с введённым ранее классом $\mathcal{H}^p(\Pi_Y, 1)$ функций из $N_*(\Pi_Y)$ с конечной L^p-нормой (с весом, тождественно равным единице) предельных значений на граничных прямых.

Следствием леммы 1.4.2 является вложение $\mathcal{H}^p(\Pi_Y) \subset \mathcal{H}^p(\Pi_Y, 1)$. Точнее, представление функций класса $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ по формуле Грина (1.4.9) влечёт вложение $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ в класс Харди $H^1(\Pi_Y)$ и, тем более, в класс $N_*(\Pi_Y)$. Кроме того, по лемме, функции класса $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ имеют конечные L^p-нормы предельных значений на граничных прямых.

С другой стороны, рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{H}^p(\Pi_Y, 1)$, имеющую конечные L^p-нормы предельных граничных значений. Тогда величина

$$\frac{1}{2Y}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \frac{dt}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi t}{Y}} + \frac{1}{2Y}\int_{\mathbb{R}} |f(t+iY)|^p \frac{dt}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi t}{Y}}$$

тем более конечна, т.е. предельные граничные значения $|f|^p$ суммируемы с плотностью гармонической меры. Следовательно, по теореме Полубариновой – Кочиной, $f \in H^p(\Pi_Y)$. Из вложения классов Харди получаем, что $f \in H^1(\Pi_Y)$, т.е. функция представима по формуле Грина (1.4.9). Отсюда, используя обобщенное неравенство Минковского, для произвольного $0 < y < Y$ получим неравенство

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \alpha \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \beta \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)}.$$

Последнее неравенство даёт оценку

$$\sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)}\,:\,0<\eta<Y\right\}\le\max\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R})},\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)}\right\}.$$

Это означает, что $f\in\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$.

В результате имеем равенство классов $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)=\mathcal{H}^p(\Pi_Y,1)$.

Следствие 1.4.1. *Для произвольных* $x\in\mathbb{R}$, $0<y<Y$ *и функции* f *из класса* Q *справедливо равенство*

$$f(x+iy)=\frac{1}{2Y}\,e^{-\sigma y}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma(x-t)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}+\cos\alpha\pi}\,f(t)\,dt+ \tag{1.4.10}$$

$$+\frac{1}{2Y}\,e^{\sigma(Y-y)}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma(x-t)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}-\cos\alpha\pi}\,f(t+iY)\,dt.$$

Доказательство. Применим формулу Грина (1.4.9) к функции $e^{-i\sigma z}f(z)$ и полученное равенство умножим на $e^{i\sigma z}$:

$$f(x+iy)=\frac{1}{2Y}e^{i\sigma z}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\sigma t}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}+\cos\alpha\pi}\,f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2Y}e^{i\sigma z}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\sigma(t+iY)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}-\cos\alpha\pi}\,f(t+iY)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2Y}e^{-\sigma y}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma(x-t)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}+\cos\alpha\pi}\,f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2Y}e^{\sigma(Y-y)}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma(x-t)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y}-\cos\alpha\pi}\,f(t+iY)\,dt.$$

$\square$

Лемма 1.4.3. *Для произвольного числа* $\delta > 0$ *справедливо неравенство*

$$\omega(\delta) \geq \delta^{\alpha}. \tag{1.4.11}$$

Доказательство. В случае $p = \infty$ рассмотрим (целую) функцию

$$f_\sigma(z) = e^{i\sigma z}, \ \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

На прямой $\mathbb{R} + i\eta$ справедливо тождество $|f_\sigma(x+i\eta)| \equiv e^{-\sigma\eta}$ и, следовательно, $\|f_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+i\eta)} = e^{-\sigma\eta}$. Откуда вытекает, что при любом σ функция $e^{\sigma Y} f_\sigma$ принадлежит классу Q. Введя обозначение $\delta = e^{\sigma Y}$ и используя определение модуля непрерывности (1.4.2), получим оценку

$$\omega(\delta) \geq \|e^{\sigma Y} f_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R})+iy} = e^{\sigma(Y-y)} = \delta^{\alpha}.$$

Для обоснования оценки снизу (1.4.11) при $1 \leq p < \infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h}\int_{\sigma-h}^{\sigma+h} \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\sigma z}\int_{-1}^{1} \varphi(t)\, e^{ihzt}\, dt,$$

где $h > 0$ и φ – неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция, с носителем в $[-1,1]$. Непосредственно из определения функции $f_{\sigma,h}$ следует равенство

$$\|f_{\sigma,h}\|_{L^p\mathbb{R}+i\eta} = \frac{1}{h} e^{-\eta\sigma} \|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ih\eta)}\,.$$

Следовательно, функция $f_{\sigma,h} h e^{Y\sigma} / \|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihY)}$ принадлежит классу Q. Используя обозначение $\delta = e^{\sigma Y}$ и определение модуля непрерывности (1.6.3), для произвольного положительного h получим оценку

$$\omega(\delta) \geq \left\| \frac{f_{\sigma,h} h e^{Y\sigma}}{\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihY)}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \delta^{\alpha}\, \frac{\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihy)}}{\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihY)}}\,.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $h \to +0$, получим оценку (1.4.11). Лемма 1.4.3 доказана. $\square$

Теперь получим оценку снизу величины $\Delta(N)$.

Следствие 1.4.2. *Для произвольного положительного числа* N *справедливо неравенство*
$$\Delta(N) \geq \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \qquad (1.4.12)$$

Действительно, из определения величины $\Delta(N)$ и леммы 1.4.3 имеем
$$\Delta(N) \geq \sup\{\delta^{\alpha} - N\delta \,:\, \delta \geq 0\} = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Лемма 1.4.4. *При произвольном* $\delta > 0$ *для оператора* T_δ, *определённого равенствами* (1.4.4) – (1.4.5), *справедливо*
$$U(\mathrm{T}_\delta) \leq \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}, \quad \|\mathrm{T}_\delta\| \leq N, \ \textit{где}\ N = \alpha\,\delta^{-\beta}. \qquad (1.4.13)$$

Доказательство. Из равенства (1.4.10) и формул (1.4.4)–(1.4.5) следует соотношение
$$f(x+iy) - (\mathrm{T}_\delta f)(x+iy) =$$
$$= \frac{1}{2Y}e^{\sigma(Y-y)}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sigma(x-t)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y} - \cos\alpha\pi}\,f(t+iY)\,dt. \qquad (1.4.14)$$
Это соотношение означает, что разность $f - \mathrm{T}_\delta f$ представима в виде свертки следа функции f на прямой $\mathbb{R}+iY$ с функцией U_σ, определённой формулой
$$\mathrm{U}_\delta(z) = \frac{1}{2Y}\frac{e^{i\sigma z}\,e^{\sigma Y}\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{z}{Y} - i\beta\right)\pi - \cos\alpha\pi}, \quad \sigma = Y^{-1}\ln\delta. \qquad (1.4.15)$$

Заданные равенствами (1.4.7), (1.4.8), функции $\widehat{K_{a,b}}$ и $\widehat{K_{b,a}}$ взаимосвязаны с ядром оператора (1.4.5) и уклонения (1.4.15) формулами
$$\mathrm{T}_\delta(z) = e^{i\sigma z}\widehat{K_{a,b}}(z-iy), \quad \mathrm{U}_\delta(z) = e^{i\sigma(z-iY)}\widehat{K_{b,a}}(z-iy),$$
при $a = Y - y = \alpha Y$, $b = y = \beta Y$. Тогда, по лемме 1.4.1, справедливы равенства
$$\|\mathrm{T}_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \alpha\,e^{-\sigma y} = \alpha\,\delta^{-\beta}, \quad \|\mathrm{U}_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \beta\,e^{\sigma(Y-y)} = \beta\,\delta^{\alpha}.$$

Откуда, используя определение оператора (1.4.4) и представление уклонения (1.4.14), получим неравенства

$$\|\mathrm{T}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \alpha\,\delta^{-\beta}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \|f-\mathrm{T}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \beta\,\delta^{\alpha}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)}.$$

И поэтому

$$\|\mathrm{T}_\delta\| \le \alpha\,\delta^{-\beta}, \quad U(\mathrm{T}_\delta) \le \beta\,\delta^{\alpha}.$$

Лемма 1.4.4 доказана. □

Отметим, что в действительности неравенства (1.4.13) являются равенствами; экстремальными здесь являются функции f_σ (для $p=\infty$) и семейство функций $f_{\sigma,h}$ (для $1\le p<\infty$), определённых в лемме 1.4.3. Этот факт следует из приведённых далее доказательств основных теорем. Лемма 1.4.4 позволяет получить оценки сверху для величин $E(N)$ и $\ell(\delta)$.

Следствие 1.4.3. *Для произвольных положительных чисел N и δ справедливы неравенства*

$$E(N) \le \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}, \tag{1.4.16}$$

$$\ell(\delta) \le \delta^{\alpha}. \tag{1.4.17}$$

Доказательство. Пусть параметр N определяется равенством $N=\alpha\,\delta^{-\beta}$. Тогда, используя определение (1.4.3) величины $E(N)$ и неравенство (1.4.13), получим

$$E(N) \le U(\mathrm{T}_\delta) \le \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Соответственно, из определения величины $\ell(\delta)$, используя предыдущее неравенство, получим

$$\ell(\delta) \le \inf_{N>0}\left\{\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}+N\delta\right\} = \delta^{\alpha}.$$

□

1.4.3. Доказательства теорем 1.4.1 и 1.4.2

Объединив неравенства (0.0.9) теоремы B, (1.4.11) леммы 1.4.3 и (1.4.17) следствия 1.4.3, получим цепочку неравенств

$$\delta^\alpha \le \omega(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \le l(\delta) \le \delta^\alpha.$$

Откуда вытекают равенства

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \delta^\alpha.$$

В частности, в следующей цепочке

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) \le \mathcal{U}(\mathrm{T}_\delta, \delta) \le U(\mathrm{T}_\delta) + \|\mathrm{T}_\delta\|\,\delta = \delta^\alpha$$

все неравенства являются равенствами. Что означает экстремальность линейного ограниченного оператора T_δ в (1.4.1). Теорема 1.4.1 доказана. □

Объединив неравенства (0.0.8) теоремы A, (1.4.12) следствия 1.4.2 и (1.4.16) следствия 1.4.3, получим цепочку неравенств

$$\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta} \le \Delta(N) \le E(N) \le \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Откуда вытекает равенство

$$E(N) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Это означает, что и в (1.4.13) имеют место равенства, а оператор T_δ является экстремальным в (1.4.3). Теорема 1.4.2 доказана. □

§ 1.5. Случай конечносвязной области

Для классов $N(G), N_*(G), H^p(G)$ аналитических функций в конечносвязной области G справедливы многие аналоги известных классических теорем для функций, аналитических в односвязной области, подробную информацию см. [65, 66, 68, 88] и приведённую там библ.

В параграфе для конечносвязной области G рассматривается оценка модуля значения аналитической функции в точке области через нормы её предельных граничных значений. Обсуждаются случаи, когда справедливы аналоги теорем 1.1.1 и 1.1.2 для двусвязной области G.

1.5.1. Оценка сверху модуля непрерывности, аналог теоремы Адамара о трёх кругах

Пусть G есть конечносвязная область комплексной плоскости, ограниченная кривой Γ, которая является объединением спрямляемых жордановых непересекающихся кривых: $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу на классе функций $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$. Обозначим Ω функцию двух неотрицательных переменных, определяемую соотношением

$$\Omega(\lambda_0, \lambda_1) = \sup\left\{|f(z_0)| : f \in \mathcal{H}, \|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)} \le \lambda_0, \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \lambda_1\right\}. \quad (1.5.1)$$

Функция Ω связана с модулем непрерывности ω функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ равенствами

$$\omega(\delta) = \Omega(1, \delta),\ \delta \ge 0, \quad \Omega(\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0\, \omega\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right),\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_0 > 0.$$

Определение (1.5.1) влечёт точное неравенство

$$|f(z_0)| \le \Omega\left(\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}, \|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\right), \quad f \in \mathcal{H}.$$

Оценки модуля значения аналитической функции в точке многосвязной области через её предельные граничные значения исследовали М. Хейнс и Р. М. Робинсон (круговое кольцо), Г. Грунский, Л. Альфорс, С. Я. Хавинсон, З. Нехари, П. Р. Гарабедян, Х. Уидом, Т. С. Кузина (многосвязная область) и др., см. [29,69,72–74,87,89,98] и приведённую там библ. В отличие от классических постановок, рассмотрим ограничения на (вообще говоря, различные) $L^q_{\varphi_1}, L^r_{\varphi_0}$ -средние на произвольных измеримых подмножествах γ_k, $k = 0, 1$.

Сформулируем здесь лишь два классических результата, относящиеся к случаю, когда область G есть кольцо $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, множества γ_k, $k = 0, 1$, совпадают с граничными окружностями, точнее $\gamma_k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R(r/R)^k\}$, и $q = r = \infty$.

Первый из них — хорошо известная теорема Адамара о трёх кругах. *Для чисел r, ρ и R таких, что $0 < r < \rho < R$, произвольной ограниченной аналитической в кольце $C_{r,R}$ функции f, не обязательно однозначной, но без точек ветвления в $C_{r,R}$ и имеющей однозначный модуль, и произвольной точки z_0, $|z_0| = \rho$, справедливо неравенство*

$$\ln|f(z_0)| \le \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}\,\ln\|f\|_{L^\infty(\gamma_1)} + \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}\,\ln\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)}. \qquad (1.5.2)$$

Неравенство (1.5.2) *обращается в равенство на функциях cz^d, $c \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{R}$, и только на них.*

Неравенство (1.5.2) в случае $q = r = \infty$, $G = C_{r,R}$, γ_k – граничные окружности радиуса $R(r/R)^k$, $k = 0, 1$, даёт оценку сверху решения задачи (1.5.1), а следовательно и модуля непрерывности, – неравенства

$$\Omega(\lambda_0, \lambda_1) \le \lambda_0^\beta\,\lambda_1^\alpha, \quad \omega(\delta) \le \delta^\alpha, \quad \alpha = \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}, \beta = 1 - \alpha.$$

Однако, эти неравенства обращаются в равенство только при $\delta = \lambda_1/\lambda_0 = (r/R)^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Результат Р. М. Робинсона (1943) [97] (см. также [23, гл. 11, § 4]), уточняет неравенство (1.5.2) и даёт решение задачи (1.5.1). Для его формулировки введём обозначения. При произвольных значениях параметров $0 < \mathfrak{r} < 1$ и $\varrho > 0$ определим однозначную аналитическую в $C_{\mathfrak{r},1}$ функцию следующей формулой

$$f[\mathfrak{r}, \varrho](z) = z^\kappa\,\frac{\Theta\left(z\,\mathfrak{r}^\kappa\,\varrho^{-1},\,\mathfrak{r}\right)}{\Theta\left(z\,\mathfrak{r}^{-\kappa}\,\varrho,\,\mathfrak{r}\right)},$$

$$\Theta(\zeta,\mathfrak{r}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\mathfrak{r}^{2k-1}\zeta)(1+\mathfrak{r}^{2k-1}\zeta^{-1}),$$

в которой целый параметр κ задаётся равенством $\kappa = \left\lfloor \frac{\ln\varrho}{\ln\mathfrak{r}} \right\rfloor + 1$. Таким образом, $\mathfrak{r}^{\kappa} \le \varrho < \mathfrak{r}^{\kappa-1}$. Эта функция отображает кольцо $C_{\mathfrak{r},1}$ на единичный круг с разрезом по дуге окружности с центром в нуле и радиусом $\varrho\mathfrak{r}^{1-\kappa}$, симметричной относительно вещественной оси. Справедливо следующее утверждение.

Для случая $G = C_{r,R}$, $q = r = \infty$ *и* $\gamma_k, k = 0,1$, *совпадающих с граничными окружностями, для произвольных* $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ *верхняя грань в задаче* (1.5.1) *достигается на функциях*

$$\epsilon\lambda_0 f\left[\frac{r}{R},\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]\left(\frac{z|z_0|}{z_0R}\right), \quad |\epsilon| = 1,$$

и только на них.

Как и в случае односвязной области, в параграфе 1.1, введём функцию s_δ, равенством

$$s_\delta(z) = \exp\left(u_\delta(z) + iv_\delta(z)\right), \quad z \in G,$$

где функция

$$u_\delta(z) = \int_\Gamma P(z,\zeta)\,\ln\psi_\delta(\zeta)\,|d\zeta|, \quad z \in G,$$

является гармонической в области G, v_δ – функция, гармонически сопряжённая к u_δ, функция ψ_δ определена на границе Γ области G формулой

$$\psi_\delta(\zeta) = \begin{cases} \left(\dfrac{P(z_0,\zeta)}{\beta\varphi_0(\zeta)}\right)^{1/r}, & \zeta \in \gamma_0; \\ \delta\left(\dfrac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\varphi_1(\zeta)}\right)^{1/q}, & \zeta \in \gamma_1. \end{cases}$$

В случае односвязной области G функция v_δ однозначная и единственная с точностью до аддитивной константы, выбор значения которой нам не важен. В случае, когда G не является односвязной областью, функции v_δ и, как следствие, s_δ, вообще говоря, однозначными не являются.

Также будем использовать введённую в параграфе 1.1 величину $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{q,r}(z_0; \gamma_1, \varphi_1; \gamma_0, \varphi_0)$, определяемую равенствами

$$\begin{gathered} \mathcal{C} = \varepsilon^{1/q}(\gamma_1, \varphi_1)\, \varepsilon^{1/r}(\gamma_0, \varphi_0)\, \alpha^{-\alpha/q} \beta^{-\beta/r}, \\ \varepsilon(\gamma_k, \varphi_k) = \exp \int_{\gamma_k} P(z_0, \zeta) \ln \frac{P(z_0, \zeta)}{\varphi_k(\zeta)}\, |d\zeta|, \quad k = 0, 1. \end{gathered} \tag{1.5.3}$$

Теорема 1.5.1. *Пусть G – конечносвязная область; γ_1 – измеримое подмножество Γ и $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$; функции φ_k, $k = 0, 1$, удовлетворяют условию* (1.1.8) *и $0 < r, q \leq 0$. Функция f аналитическая в области G, без точек ветвления в G и имеющая в G однозначный модуль, который на Γ имеет почти всюду некасательные предельные граничные значения, удовлетворяющие условиям:*

$$\int_\Gamma |\ln |f(\zeta)||\, P(z, \zeta)\, |d\zeta| < +\infty \tag{1.5.4}$$

для некоторой (и, что тоже самое, для произвольной) точки $z \in G$;

$$\forall z \in G \quad \ln |f(z)| \leq \int_\Gamma \ln |f(\zeta)|\, P(z, \zeta)\, |d\zeta|. \tag{1.5.5}$$

Тогда справедливо неравенство

$$|f(z_0)| \leq \mathcal{C}\, \|f\|^{\alpha}_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\, \|f\|^{\beta}_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}, \quad z_0 \in G. \tag{1.5.6}$$

Неравенство (1.5.6) *обращается в равенство на функциях вида cs_δ, $c \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$. Других экстремальных функций нет.*

Доказательство. Из аналитичности функции f следует, что $\ln |f(z)|$, $z \in G$, является функцией субгармонической. Точнее, является гармонической функцией кроме (исключительных точек) нулей f, в которых стремится к минус бесконечности. Рассмотрим гармоническую в области G функцию, определяемую равенством

$$u(z) = \int_\Gamma P(z, \zeta)\, \ln |f(\zeta)|\, |d\zeta| = \sum_{k=0}^{1} \int_{\gamma_k} P(z, \zeta) \ln |f(\zeta)|\, |d\zeta|. \tag{1.5.7}$$

Из условий теоремы для субгармонической функции $\ln|f(z)|$ справедливо неравенство (1.5.5), в частности – неравенство

$$\ln|f(z_0)| \le u(z_0). \tag{1.5.8}$$

В случае $0 < q < \infty$ с использованием неравенства Йенсена получим оценку сверху второго слагаемого в представлении $u(z_0)$:

$$\int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\ln|f(\zeta)|\,|d\zeta| = \frac{1}{q}\int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\,\ln\frac{|f(\zeta)|^q\,P(z_0,\zeta)\,\alpha\,\varphi_1(\zeta)}{P(z_0,\zeta)\,\alpha\,\varphi_1(\zeta)}\,|d\zeta| =$$

$$= \frac{\alpha}{q}\int_{\gamma_1}\frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha}\,\ln\frac{|f(\zeta)|^q\,\alpha\,\varphi_1(\zeta)}{P(z_0,\zeta)}\,|d\zeta| +$$

$$+\frac{1}{q}\int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\,\ln\frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\,\varphi_1(\zeta)}\,|d\zeta| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{q}\ln\int_{\gamma_1}\frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha}\,\frac{|f(\zeta)|^q\,\alpha\,\varphi_1(\zeta)}{P(z_0,\zeta)}\,|d\zeta| +$$

$$+\frac{1}{q}\int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\,\ln\frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\,\varphi_1(\zeta)}\,|d\zeta| = \ln\mathcal{C}_1 + \ln\|f\|^{\alpha}_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)},$$

$$\ln\mathcal{C}_1 = \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\,\ln\left(\frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\,\varphi_1(\zeta)}\right)^{1/q}\,|d\zeta|.$$

Оценим сверху второе слагаемое при $q = \infty$:

$$\int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\ln|f(\zeta)|\,|d\zeta| \le$$

$$\le \operatorname{ess\,sup}\{\ln|f(\zeta)| \,:\, \zeta\in\gamma_1\}\cdot\int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| = \ln\|f\|^{\alpha}_{L^{\infty}(\gamma_1)};$$

в этом случае $\ln\mathcal{C}_1 = 0$. Аналогично оцениваем интеграл по множеству γ_0. Теперь, подставляя полученные оценки слагаемых в соотношения (1.5.7), (1.5.8) и потенциируя полученное неравенство, получим (1.5.6).

Из равенства (1.5.3) следует, что на функциях вида cs_δ, $c\in\mathbb{C}$, $\delta > 0$, неравенство (1.5.6) обращается в равенство. Для завершения доказательства теоремы 1.5.1 осталось выяснить, что других таких функций нет.

Заметим, что неравенство (1.5.8) является равенством в том и только в том случае, когда $\ln|f(z)| = u(z)$, $z \in G$. А неравенства в оценках слагаемых являются равенствами только в случае, когда функции $|f(\zeta)|(\beta\,\varphi_0(\zeta)/P(z_0,\zeta))^{1/r}$ почти всюду на γ_0 и $|f(\zeta)|(\alpha\,\varphi_1(\zeta)/P(z_0,\zeta))^{1/q}$ почти всюду на γ_1 являются константами. Теорема 1.5.1 доказана. $\square$

Следствие 1.5.1. *Для произвольной функции* f *класса* $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{r,q}(G;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, $0 < r, q \le \infty$, *справедливо неравенство* (1.5.6).

Доказательство. Из теоремы 1.5.1 имеем: достаточно показать справедливость условий (1.5.4) и (1.5.5) для функций класса $N_*(G)$. Условие (1.5.4) выполняется для произвольной функции класса $N(G)$, и тем более для функции класса $N_*(G)$ [68, теорема 2.5.1]. Воспользуемся мультипликативным (параметрическим) представлением функций класса $N_*(G)$ (теоремой Смирнова [55] для односвязной G, обобщение для конечносвязных областей см. [88, теорема 4.2]). Для произвольной функции $f \in N_*(G)$ справедливо равенство $f(z) = B(z)F(z)$, $z \in G$, в котором F является однозначной аналитической в G функцией, для которой

$$\ln|F(z)| = \int_\Gamma \ln|F(\zeta)|P(z,\zeta)|d\zeta| + \int_\Gamma P(z,\zeta)d\nu, \quad z \in G, \qquad (1.5.9)$$

где ν – сингулярная мера на Γ и $d\nu \le 0$. Функция B есть произведение Бляшке, построенное по нулям $\{z_k\}$ функции f. Это однозначная аналитическая функция, для которой существует набор вещественных чисел c_j, $j = \overline{1,N}$, такой что почти всюду на границе справедливы равенства

$$\ln|B(\zeta)| = c_j, \quad \zeta \in \Gamma_j, \quad j = \overline{1,N},$$

а в области – соотношение

$$\ln|B(z)| = \sum_{j=1}^{N} c_j w(z,\Gamma_j,G) - \sum_k g(z,z_k), \quad z \in G. \qquad (1.5.10)$$

Из равенств (1.5.9) и (1.5.10) следуют оценки

$$\ln|F(z)| \le \int_\Gamma \ln|F(\zeta)|P(z,\zeta)|d\zeta|, \quad z\in G, \tag{1.5.11}$$

$$\ln|B(z)| \le \sum_{j=1}^{N} c_j w(z,\Gamma_j,G) = \int_\Gamma \ln|B(\zeta)|P(z,\zeta)|d\zeta|, \quad z\in G. \tag{1.5.12}$$

Складывая соотношения (1.5.11) и (1.5.12) получим условие (1.5.5). Следствие 1.5.1 доказано. □

В случае односвязной области G из теоремы 1.5.1 следует решение задачи (1.5.1). Однако в сравнении с теоремой 1.1.1 новым является только случай $0 < q < 1$ и/или $0 < r < 1$. В случае многосвязной области G из теоремы 1.5.1 решение задачи (1.5.1) следует тогда и только тогда, когда функция s_δ является однозначной в области G.

Подробно исследуем случай, когда G есть двусвязная область. Будем обозначать $\mathfrak{g}$ функцию, реализующую однолистное конформное отображение двусвязной области G на кольцо $C_{\mathfrak{r},1} = \{z\in\mathbb{C} : \mathfrak{r} < |z| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям: при отображении Γ_1 переходит в окружность радиуса $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r} < \mathfrak{g}(z_0) < 1$. Функция $\mathfrak{g}$ и число $\mathfrak{r}$ (модуль двусвязной области G) существуют и единственны (см. [23, Гл.V, §1]). Введём обозначения:

$$e_\rho = \left\{t\in[0,2\pi] : \rho e^{it} = \mathfrak{g}(\zeta), \zeta\in\gamma_1\right\}, \quad \rho = \mathfrak{r}, 1,$$

$$\mu = \mu(e_{\mathfrak{r}}) - \mu(e_1),$$

где $\mu(e)$ является мерой Лебега измеримого множества $e\in\mathbb{R}$.

Пусть $\nu(\delta) = \nu(G,\gamma_0,\varphi_0,\gamma_1,\varphi_1,\delta)$ есть величина, задаваемая равенством

$$\begin{aligned}\nu(\delta) &= \frac{1}{2\pi\ln\mathfrak{r}}\int_0^{2\pi} \ln\frac{\psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})\right)}{\psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})\right)}\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\ln\mathfrak{r}}\left\{\mu\ln\delta + \int_0^{2\pi}\ln\frac{\psi_1\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})\right)}{\psi_1\left(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})\right)}\,dt\right\}.\end{aligned} \tag{1.5.13}$$

Следствие 1.5.2. *Если G есть двусвязная область, то $s_\delta \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда число $\nu(\delta)$, определённое равенством* (1.5.13), *является целым. В этом случае верхняя грань в* (1.5.1) *достигается на функциях $\epsilon s_\delta, |\epsilon| = 1$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $s_\delta \in \mathcal{H}$, т.е. s_δ является однозначной аналитической функцией тогда и только тогда, когда $\nu(\delta) \in \mathbb{Z}$.

По определению s_δ, функция $u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\xi)), \xi \in C_{\mathfrak{r},1}$, есть решение задачи Дирихле. Это гармоническая функция с граничными значениями, которые почти всюду задаются равенствами $u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}^k e^{it})) = \ln \psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}^k e^{it})\right)$, $k = 0, 1$, $t \in [0, 2\pi]$. Известно (см., например, [22, §3]), что функция $u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\xi)), \xi \in C_{\mathfrak{r},1}$, имеет вид

$$u_\delta(\mathfrak{g}^{-1}(\xi)) = \nu \ln|\xi| + \Re\varphi(\xi), \text{ где } \varphi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \xi^n, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}.$$

Интегрируя последнее равенство вдоль граничных окружностей, получаем соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})\right) dt = \nu \ln \mathfrak{r} + \Re c_0, \tag{1.5.14}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \psi_\delta\left(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})\right) dt = \Re c_0.$$

Выражая из равенств (1.5.14) коэффициент ν, имеем $\nu = \nu(\delta)$, где $\nu(\delta)$ определено в (1.5.13). Тогда для функции s_δ справедлива формула

$$s_\delta(z) = \exp\left\{u_\delta(z) + i v_\delta(z)\right\} = \mathfrak{g}(z)^{\nu(\delta)} \exp \varphi\left(\mathfrak{g}(z)\right), \quad z \in G.$$

Отсюда следует, что функция s_δ однозначна в том и только том случае, если $\nu(\delta)$ является целым числом. □

Следующее утверждение – это аналог теоремы Адамара о трёх кругах. Оно является частным случаем теоремы 1.5.1, когда область G является кольцом $C_{r,R}$, для которого $\mathfrak{r} = r/R$, и множества γ_k, $k = 0, 1$, совпадают с граничными окружностями $\gamma_k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\mathfrak{r}^k\}$.

Следствие 1.5.3. *В условиях теоремы* 1.5.1 *для чисел* r, ρ *и* R *таких, что* $0 < r < \rho < R$, *аналитической в кольце* $C_{r,R}$ *функции* f *и точки* z_0, $|z_0| = \rho$, *справедливо неравенство*

$$\ln|f(z_0)| \le \ln\mathcal{C} + \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}\,\ln\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} + \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}\,\ln\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}. \quad (1.5.15)$$

Неравенство (1.5.15) *обращается в равенство на функциях вида* cs_δ, $c \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$. *Если*

$$\ln\delta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{\psi_1(re^{it})}{\psi_1(Re^{it})}\,dt + \nu\ln\frac{r}{R}, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

то функция s_δ *является однозначной аналитической, принадлежит классу* $\mathcal{H}$.

Действительно, неравенство (1.5.15) является аналогом (различных метрик) классического случая теоремы Адамара (1.5.2); при $q = r = \infty$ величина $\mathcal{C}$ равна единице и, следовательно, первое слагаемое в правой части неравенства (1.5.15) равно нулю. С другой стороны, из поточечного неравенства (1.5.15) не следуют хорошо известные обобщения теоремы Адамара для q-средних на трёх окружностях (см. [54, Отд. III, Гл. 6, §3]); связанные с этими неравенствами для q-средних, при $q \ge 1$, задачи оптимального восстановления и наилучшего приближения функционала изучаются в параграфе 1.6.

В следующей части рассматривается задача (1.1.2) оптимального восстановления функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ и взаимосвязанные задачи (1.1.3), (1.1.6) на классах функций, аналитических в двусвязной области.

1.5.2. Оптимальное восстановление значения функции, аналитической в двусвязной области

Предполагаем далее, что $\mu \neq 0.$ В следующей теореме для случая двусвязной области $G,$ когда параметр δ является элементом последовательности

$$\delta_0 = \exp\left\{\frac{1}{\mu}\int_0^{2\pi} \ln\frac{\psi_1(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it}))}{\psi_1(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it}))}\,dt\right\}, \quad \delta_\nu = \delta_0\,\mathfrak{r}^{2\pi\nu/\mu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \qquad (1.5.16)$$

т.е. если $s_\delta \in \mathcal{H},$ выписано решение задач (1.1.2) и (1.1.3). Также решение задачи (1.1.6) получено в случае, когда параметр N является элементом последовательности

$$N_\nu = \alpha\,\mathcal{C}\,\delta_\nu^{-\beta}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \qquad (1.5.17)$$

Выражая из равенства (1.5.17) параметр δ_ν через $N_\nu,$ получим соотношение

$$\delta_\nu = \alpha^{1/\beta}\,\mathcal{C}^{1/\beta}\,N_\nu^{-1/\beta}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \qquad (1.5.18)$$

Пусть δ_ν удовлетворяют условию (1.5.16). Тогда функция s_{δ_ν} является однозначной аналитической в области G и формула (1.1.10) определяет линейный ограниченный функционал T_{δ_ν} на пространстве $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$:

$$T_{\delta_\nu} g = \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\frac{s_{\delta_\nu}(z_0)}{s_{\delta_\nu}(\zeta)}\,g(\zeta)\,|d\zeta|, \quad g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1).$$

Теорема 1.5.2. *Пусть* G *есть двусвязная область,* $1 \le q, r \le \infty,$ *и весовые функции* $\varphi_k,\ k = 0, 1,$ *удовлетворяют условию* (1.1.8). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1). *Для произвольного элемента* δ_ν *последовательности* (1.5.16) *для величин* (1.1.2) *и* (1.1.3) *имеют место равенства*

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) = \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha. \qquad (1.5.19)$$

При этом экстремальными в (1.1.3) *являются функции вида* $\varepsilon s_{\delta_\nu},\ |\varepsilon| = 1;$ *в задаче* (1.1.2) *оптимальным методом восстановления является функционал* $T_{\delta_\nu}.$

2). *Для произвольного элемента* N_ν *последовательности* (1.5.17) *для величины* (1.1.6) *справедливо равенство*

$$E(N_\nu) = \beta\, \mathcal{C}^{1/\beta}\, \alpha^{\alpha/\beta}\, N_\nu^{-\alpha/\beta}.$$

При этом в задаче (1.1.6) *функционалом наилучшего приближения является функционал* T_{δ_ν}.

Доказательство. При $\delta = \delta_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, функция s_{δ_ν} является однозначной аналитической из класса $\mathcal{H}$, более того – принадлежит классу Q. При этом справедливы равенства $\|s_{\delta_\nu}\|_{L^q(\gamma_1)} = \delta_\nu$ и $|s_{\delta_\nu}(z_0)| = \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha$. Отсюда имеем цепочку соотношений

$$\mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha = |s_{\delta_\nu}(z_0)| \le \omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu).$$

Также для величины $\Delta(N_\nu)$, используя её определение и равенство (1.5.18), получим оценку снизу

$$\Delta(N_\nu) = \sup\{\omega(\delta) - N_\nu\delta \,:\, \delta \ge 0\} \ge \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha - N_\nu\delta_\nu = \beta\,\mathcal{C}^{1/\beta}\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N_\nu^{-\alpha/\beta}.$$

Вычисляя аналогично лемме 1.1.4 норму и уклонения для оператора T_{δ_ν} получаем равенства

$$\|T_{\delta_\nu}\| = N_\nu, \quad U(T_{\delta_\nu}) = \beta\,\mathcal{C}^{1/\beta}\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N_\nu^{-\alpha/\beta}, \quad \mathcal{U}(T_{\delta_\nu}) = \mathcal{C}\,\delta_\nu^\alpha.$$

Наконец, соотношения

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) \le \mathcal{U}(T_{\delta_\nu}) \quad \text{и} \quad \Delta(N_\nu) \le E(N_\nu) \le U(T_{\delta_\nu})$$

завершают доказательство теоремы 1.5.2. □

Уделим особое внимание случаю, когда область G является кольцом $C_{r,R}$, как в следствии 1.5.3. В этом случая имеют место равенства

$$\mathfrak{r} = r/R, \quad \mathfrak{g}^{-1}(\zeta) = Re^{-i\arg z_0}\zeta, \quad \mu = 2\pi;$$

$$\beta = \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r},\ \alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r},\ \text{где}\ \rho = |z_0|.$$

Подставляя их в теорему 1.5.2, получаем утверждение.

Следствие 1.5.4. *Пусть область G является кольцом $C_{r,R}$, $\mathfrak{r} = r/R$, и множества γ_k, $k = 0, 1$, совпадают с граничными окружностями $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\mathfrak{r}^k\}$. Тогда справедливы утверждения теоремы* 1.5.2, *в которых последовательность $\{\delta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ задаётся соотношениями*

$$\delta_0 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{\psi_1(Re^{it})}{\psi_1(re^{it})}\, dt\right\}, \quad \delta_\nu = \delta_0\, \left(\frac{r}{R}\right)^\nu,$$

и последовательность $\{N_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ – равенством $N_\nu = \mathcal{C}\, \alpha\, \delta_\nu^{-\beta}$. При этом экстремальные функция и функционал будут иметь вид:

$$s_{\delta_\nu}(z) = \frac{z^\nu}{R^\nu}\, s_{\delta_0}(z); \quad T_{\delta_\nu} g = \frac{z_0^\nu}{r^{\nu-1}} \int_0^{2\pi} P(z_0, re^{it}) \frac{s_{\delta_0}(z_0)}{e^{i\nu t}\, s_{\delta_0}(re^{it})}\, g(re^{it})\, dt.$$

В последнем случае при $q = r = \infty$, т.е. на классе функций, аналитических и ограниченных в кольце $C_{r,R}$, функция s_{δ_0} тождественно равна единице, а значит $s_{\delta_\nu}(z) = (z/R)^\nu$, $\delta_\nu = (r/R)^\nu$. Кроме того, действие функционала T_{δ_ν} может записано в терминах ряда Лорана функции, что будет обсуждаться в следующем параграфе 1.6.

В завершение обсудим случай, когда число μ равно нулю. Как следует из определения (1.5.13), при $\mu = 0$ величина $\nu(\delta)$ не зависит от δ и справедливо равенство

$$\nu(\delta) \equiv \frac{1}{2\pi \ln \mathfrak{r}} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\psi_1\left(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})\right)}{\psi_1\left(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})\right)}\, dt.$$

Если эта величина целая, то при любых $\delta \geq 0$ функция s_δ однозначная и справедливы аналоги теорем 1.1.1 и 1.1.2. Если величина не является целой, то при любых $\delta \geq 0$ функция s_δ не принадлежит классу $\mathcal{H}$.

§ 1.6. Оптимальное восстановление на окружности аналитической в кольце функции

В этом параграфе исследуются задачи (0.0.16), (0.0.17) и (0.0.18) на классе Харди $H^p(C_{r,R})$, $p \geq 1$, аналитических в кольце $C_{r,R}$ функций, для оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$, сопоставляющего предельным значениям функции на граничной окружности $\gamma_1 = l_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ её сужение на окружность $l_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$, $0 < r < \rho < R$, внутри кольца. Окружность l_ρ является линией уровня γ_α гармонической меры

$$w(z, l_r, C_{r,R}) = \alpha, \quad z \in \gamma_\alpha,$$

ее радиус ρ и меры α и β связаны равенствами

$$\alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}.$$

Дополнительно будем использовать обозначение $\phi_\varrho \equiv (2\pi\varrho)^{-1}$, $\varrho > 0$, для (постоянного) веса на окружности l_ϱ.

Класс Харди $H^p(C_{r,R})$ совпадает с классом (Смирнова $E^p(C_{r,R})$) функций f, аналитических в кольце $C_{r,R}$, след которых на каждой окружности радиуса ϱ, $r < \varrho < R$, принадлежит пространству L^p и для которых

$$\sup\{\|f\|_{L^p_{\phi_\varrho}(l_\varrho)} : r < \varrho < R\} < +\infty.$$

Для функций f из пространства $H^p(C_{r,R})$ будем использовать представление в виде сходящегося в кольце $C_{r,R}$ степенного ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \, z^k. \tag{1.6.1}$$

Ясно, что пространство Харди $H^p(D_R)$ функций, аналитических в круге D_R, вложено в $H^p(C_{r,R})$. Соответственно, представление (1.6.1) функций пространства Харди $H^p(D_R)$ есть ряд Тейлора, т.е. $f_k = 0$, $k < 0$.

В пространстве Харди $H^p(C_{r,R})$ выделим класс $Q = Q^p(C_{r,R})$ функций f , чьи граничные значения на окружности $\gamma_0 = l_R$ радиуса R удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p_{\phi_R}(l_R)} \leq 1$. Также через Q обозначаем класс их граничных значений на окружности l_r.

При введённых обозначениях изучаемый в параграфе вариант задачи (0.0.16) следующий. Для числа $\delta \geq 0$ величина восстановления оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ методом T из множества методов $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} = \mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ или $\mathcal{B}$) задаётся равенством

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{\|f - Tg\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \ : \ f \in Q,\, g \in L^p_{\phi_r}(l_r),\, \|f - g\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \leq \delta\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta) \ : \ T \in \mathcal{R}\right\} \tag{1.6.2}$$

есть величина наилучшего (оптимального) восстановления оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ аналитического продолжения (аналитической функции) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q, по их значениям, заданным с ошибкой δ, на окружности l_r с центром в нуле и радиусом r. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (1.6.2) достигается нижняя грань.

Соответственно, величина (0.0.17) определяется здесь следующим образом. Модулем непрерывности оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ аналитического продолжения на классе Q является функция вещественного переменного $\delta \geq 0$, определяемая равенством

$$\omega(\delta) = \sup\left\{\|f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \ : \ f \in Q,\, \|f\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \leq \delta\right\}. \tag{1.6.3}$$

Задача (0.0.18) наилучшего приближения оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ аналитического продолжения функции с окружности с центром в нуле и радиусом r на окружность большего радиуса ρ линейными ограниченными операторами на классе Q имеет следующую точную постановку. Величина

$$U(T) = \sup \left\{ \|f - Tf\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \; : \; f \in Q \right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ от оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ аналитического продолжения на классе Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf \left\{ U(T) \; : \; T \in \mathcal{B}(N) \right\}, \tag{1.6.4}$$

где нижняя грань берется по множеству $\mathcal{B}(N)$ линейных ограниченных операторов, норма которых $\|T\| = \|T\|_{L^p_{\phi_r}(l_r) \mapsto L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)}$ не превосходит числа $N > 0$, есть наилучшее приближение оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ множеством $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении экстремального оператора, на котором в (1.6.4) достигается нижняя грань.

Для функций, аналитических в кольце, хорошо известно как обобщение неравенства (1.5.2) – теоремы Адамара о трёх кругах (см., например, [54, Отд.3, Гл.6, §3]) – следующее неравенство

$$\ln \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} \le \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r} \ln \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r} \ln \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(R e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Иными словами, для произвольной фиксированной функции f из пространства $H^p(C_{r,R})$ функция

$$\mathcal{M}(\xi) = \ln \|f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} = \ln \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p}, \ \xi = \ln \rho,$$

является выпуклой на отрезке $[\ln r, \ln R]$. Потенциируя и подставляя выражения α и β через r, ρ и R, получим эквивалентное неравенство

$$\|f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \le \|f\|^{\alpha}_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \, \|f\|^{\beta}_{L^p_{\phi_R}(l_R)}. \tag{1.6.5}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для L^0-средних (средних геометрических). Таким образом, при произвольных $p, 0 \le p \le \infty$, справедливо неравенство $\omega(\delta) \le \delta^\alpha$.

Используя последовательность функций $R^{-\nu} z^\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, ($\nu \ge 0$ для аналитических в круге функций), нетрудно получить оценку снизу модуля непрерывности (1.6.3)

$$\omega(\delta) \ge \max\left\{R^{-\nu}\rho^\nu \, : \, \nu \in \mathbb{Z},\, R^{-\nu} r^\nu \le \delta\right\}.$$

На функциях $s_{\delta_\nu}(z) = R^{-\nu} z^\nu$ неравенство (1.6.5) обращается в равенство, поэтому оценки модуля непрерывности сверху и снизу в точках $\delta_\nu = R^{-\nu} r^\nu$ совпадают, т.е. имеют место равенства

$$\omega(\delta_\nu) = \delta_\nu^\alpha. \tag{1.6.6}$$

Именно в случаях, когда теорема Адамара даёт значение модуля непрерывности, в дальнейшем будет получено решение задач (1.6.2) и (1.6.4).

Для $0 < r < \varrho$ и $N > 0$ введём класс функций из $\mathcal{H}^p(C_{r,\varrho})$ равенством

$$Q^p(C_{r,\varrho}, N) = \left\{f \colon f \in \mathcal{H}^p(C_{r,\varrho}), \|f(\varrho e^{i\cdot})\|_{L^p_{\phi_\varrho}(0,2\pi)} \le N\right\};$$

при $N = 1$ обозначим $Q^p(C_{r,\varrho}, 1) = Q^p(C_{r,\varrho})$. В последней части параграфа рассматривается задача наилучшего приближения класса $Q^p(C_{r,\rho})$ классом $Q^p(C_{r,R}, N)$, $N > 0$.

Все результаты данного параграфа формулируются и доказываются для классов аналитических в кольце функций. В случае, когда параметр ν является целым неотрицательным, аналогичные утверждения и доказательства справедливы и для классов функций, аналитических в круге.

1.6.1 Конструкция и свойства экстремальных операторов

Будем использовать конструкцию из параграфа 1.4. Точнее, рассмотрим функцию $K_{a,b}$, $a>0, b>0$, определённую на вещественной оси формулой

$$K_{a,b}(t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh}(a+b)t}, & t\neq 0;\\[2mm] \dfrac{a}{a+b}, & t=0.\end{cases}$$

Ясно, что функция $K_{a,b}$ при произвольных положительных значениях параметров a и b является положительной, чётной, непрерывной на вещественной оси и удовлетворяет равенству

$$K_{b,a}(t)=\bigl(1-e^{-bt}K_{a,b}(t)\bigr)\,e^{-at},\;\; t\in\mathbb{R}.$$

Кроме того, для преобразования Фурье $\widehat{K_{a,b}}$ функции $K_{a,b}$ справедливо (лемма 1.4.1) равенство

$$\widehat{K_{a,b}}(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{a+b}\;\frac{\sin\dfrac{a\pi}{a+b}}{\operatorname{ch}\dfrac{z\pi}{a+b}+\cos\dfrac{a\pi}{a+b}}.$$

Важным в дальнейшем является факт, что для произвольных значений параметров $a,b>0$ функция $\widehat{K_{a,b}}$ положительна на всей вещественной оси.

Определим функцию $\Lambda_{a,b}$ следующей формулой

$$\Lambda_{a,b}(x)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{K_{a,b}}(x+2k\pi). \tag{1.6.7}$$

Лемма 1.6.1. *Для произвольных $a,b>0$ функция $\Lambda_{a,b}$ положительна. При значениях параметров*

$$a=\ln R-\ln\rho,\quad b=\ln\rho-\ln r$$

справедливо равенство

$$\Lambda_{a,b}(x)=\lambda_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\,\cos kx, \tag{1.6.8}$$

$$\lambda_0=\alpha=\frac{\ln R-\ln\rho}{\ln R-\ln r},\quad \lambda_k=\left(\frac{r}{\rho}\right)^k\frac{1-\rho^{2k}R^{-2k}}{1-r^{2k}R^{-2k}},\;\; k\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Непосредственно из представления (1.6.7) и свойств функции $\widehat{K_{a,b}}$ следует, что функция $\Lambda_{a,b}$ является 2π -периодической, чётной, гладкой, положительной.

Вычислим коэффициенты λ_k в представлении (1.6.8) функции $\Lambda_{a,b}$ или, что тоже самое, в виде ряда Фурье

$$\Lambda_{a,b}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \, e^{ikx}, \quad \lambda_k = \lambda_{-k},$$

при заданных значениях параметров a и b. Для произвольного целого k имеем

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Lambda_{a,b}(x) \, e^{-ikx} \, dx = \int_0^{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{K_{a,b}}(x + 2j\pi) \, e^{-ikx} \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K_{a,b}}(x) \, e^{-ikx} \, dx = K_{a,b}(k).$$

Подставляя в явный вид значения функции $K_{a,b}(k)$ параметры $a = \ln R - \ln \rho$, $b = \ln \rho - \ln r$, получим представление (1.6.8). Лемма доказана. □

Для произвольных $\nu \in \mathbb{Z}$ и $\eta \in \mathbb{R}$ на пространствах L^p определим операторы (свертки) $\mathrm{U}_{\nu,\eta} = \mathrm{U}_{\nu,\eta}[r, \rho, R]$ и $\mathrm{T}_{\nu,\eta} = \mathrm{T}_{\nu,\eta}[r, \rho, R]$ формулами

$$(\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta} f) \, (\rho e^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{u}_{\nu,\eta}(x - t) \, f(Re^{it}) \, dt,$$

$$(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} f) \, (\rho e^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{t}_{\nu,\eta}(x - t) \, f(re^{it}) \, dt, \tag{1.6.9}$$

в которых ядра определены равенствами

$$\begin{gathered} \mathrm{u}_{\nu,\eta}(x) = \rho^\nu R^{-\nu} \, e^{i\nu x} \, \left[-\eta + \Lambda_{b,a}(x)\right], \\ \mathrm{t}_{\nu,\eta}(x) = \rho^\nu r^{-\nu} \, e^{i\nu x} \, \left[\eta + \Lambda_{a,b}(x)\right] \end{gathered} \tag{1.6.10}$$

при $a = \ln R - \ln \rho$, $b = \ln \rho - \ln r$.

Для функций f из пространства Харди $H^p(C_{r,R})$ с представлением (1.6.1) в виде ряда Лорана операторы $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$ и $\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta}$ по лемме 1.6.1 можно выписать следующим образом

$$(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) = \eta\,\rho^\nu r^{-\nu}\,f_\nu\,e^{i\nu x} + \rho^\nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_{k-\nu} f_k\,r^{k-\nu}\,e^{ikx}, \tag{1.6.11}$$

где коэффициенты $\lambda_k = K_{a,b}(k)$ определены равенствами (1.6.8);

$$(\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) = -\eta\,\rho^\nu R^{-\nu}\,f_\nu\,e^{i\nu x} + \rho^\nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_{k-\nu} f_k\,R^{k-\nu}\,e^{ikx}, \tag{1.6.12}$$

где коэффициенты $\mu_k = K_{b,a}(k)$ определены равенствами

$$\mu_0 = \beta = \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}, \quad \mu_k = \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \frac{1 - r^{2k}\rho^{-2k}}{1 - r^{2k}R^{-2k}}, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Лемма 1.6.2. *Для функций $f \in H^p(C_{r,R})$ и произвольных $\nu \in \mathbb{Z}$ и $\eta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) + (\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) = f(\rho e^{ix}). \tag{1.6.13}$$

Доказательство. Используя представления операторов (1.6.11) и (1.6.12), для произвольной функции $f \in H^p(C_{r,R})$ имеем

$$\begin{gathered}(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) + (\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) = \\ = \rho^\nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[r^{k-\nu}\lambda_{k-\nu} + R^{k-\nu}\mu_{k-\nu}\right] f_k\,e^{ikx}.\end{gathered} \tag{1.6.14}$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках, применяя свойство функции $K_{a,b}$:

$$r^{k-\nu}\lambda_{k-\nu} + R^{k-\nu}\mu_{k-\nu} = \rho^{k-\nu}\left[r^{k-\nu}\rho^{-(k-\nu)}\lambda_{k-\nu} + R^{k-\nu}\rho^{-(k-\nu)}\mu_{k-\nu}\right] =$$

$$\rho^{k-\nu}\left[e^{-b(k-\nu)}K_{a,b}(k-\nu) + e^{a(k-\nu)}K_{b,a}(k-\nu)\right] = \rho^{k-\nu}.$$

Результат подставим в (1.6.14)

$$(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) + (\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \rho^k e^{ikx} = f(\rho e^{ix}).$$

Лемма доказана. $\square$

Введём обозначение

$$\eta_{a,b} = \min \left\{ \Lambda_{a,b}(x) \, : \, x \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Для нас важно, что согласно лемме 1.6.1 для произвольных значений параметров $a, b > 0$ функция $\Lambda_{a,b}$ и, следовательно, $\eta_{a,b}$ строго больше нуля. Поэтому для любых $a, b > 0$ отрезок $[-\eta_{a,b}, \eta_{b,a}]$ содержит нуль и имеет положительную меру.

Лемма 1.6.3. *Для норм операторов* $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$ *и* $\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta}$ *при произвольных* $\nu \in \mathbb{Z}$ *и* $\eta \in [-\eta_{a,b}, \eta_{b,a}]$ *справедливы равенства*

$$\|\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}\| = \rho^\nu r^{-\nu} \left(\alpha + \eta \right), \quad \|\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta}\| = \rho^\nu R^{-\nu} \left(\beta - \eta \right).$$

Доказательство. Из неотрицательности функции $\eta + \Lambda_{a,b}(x)$ следует цепочка соотношений, дающая оценку сверху нормы оператора $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$:

$$\|\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \rho^\nu r^{-\nu} \, e^{i\nu x} \, [\eta + \Lambda_{a,b}(x)] \right| \, dx =$$

$$= \rho^\nu r^{-\nu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\eta + \Lambda_{a,b}(x)] \, dx = \rho^\nu r^{-\nu} \left[\eta + \lambda_0 \right].$$

Норма оператора достигается на функции $s_{\delta_\nu}(z) = r^{-\nu} z^\nu \in H^p(C_{r,R})$ (в случае $\nu \geq 0$, $s_{\delta_\nu} \in H^p(D_R)$).

Аналогично вычисляется норма оператора $\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta}$. $\square$

1.6.2. Оптимальное восстановление и наилучшее приближение оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$

В следующей теореме в случае, когда параметр δ является элементом последовательности

$$\delta_\nu = \left(\frac{r}{R} \right)^\nu = \mathfrak{r}^\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

получено решение задачи оптимального восстановления функции на окружности l_ρ с центром в нуле и радиусом ρ. При этом для каждого δ_ν приводится семейство оптимальных методов восстановления.

Теорема 1.6.1. *Пусть числа* r, ρ, R *удовлетворяют неравенству* $0 < r < \rho < R$. *Тогда при произвольных* p, $1 \leq p \leq \infty$, *и целых* ν *для величин* (1.6.2) *и* (1.6.3) *справедливы равенства*

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu) = \delta_\nu^\alpha.$$

При этом оптимальными методами восстановления в задаче (1.6.2) *являются линейные ограниченные операторы* $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$, *определённые равенствами* (1.6.9) – (1.6.10) *при любом* $\eta \in [-\eta_{a,b}, \eta_{b,a}]$.

В следующей теореме сформулированы связанные результаты в задаче наилучшего приближения оператора аналитического продолжения с граничной окружности l_r на окружность l_ρ внутри кольца линейными ограниченными операторами. При этом семейство экстремальных операторов $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$, соответствующих в задаче (1.6.2) одному значению параметра δ_ν, в задаче (1.6.4) даёт решение для некоторого отрезка значений параметра N, нормы приближающего оператора. На каждом из этих отрезков зависимости наилучшего приближения $E(N)$ от N являются линейными.

Теорема 1.6.2. *Пусть числа* r, ρ, R *удовлетворяют неравенству* $0 < r < \rho < R$. *Тогда при произвольных* p, $1 \leq p \leq \infty$, *для положительного числа*

$$N_{\nu,\eta} = \rho^\nu r^{-\nu}(\alpha + \eta),$$

где ν *есть целое число и* $\eta \in [-\eta_{a,b}, \eta_{b,a}]$, *для величины* (1.6.4) *справедливо равенство*

$$E(N_{\nu,\eta}) = (\beta - \eta)\,(\alpha + \eta)^{\alpha/\beta}\, N_{\nu,\eta}^{-\alpha/\beta} = (\rho/R)^\nu - (r/R)^\nu\, N_{\nu,\eta}.$$

При этом экстремальным в задаче (1.6.4) *оператором является оператор* $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$, *определённый равенствами* (1.6.9) – (1.6.10).

Доказательство теорем 1.6.1 и 1.6.2. В качестве значений параметров N и δ рассматриваем величины

$$N_{\nu,\eta} = \|\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}\| = \rho^\nu r^{-\nu}(\alpha+\eta), \quad \delta_\nu = R^{-\nu} r^\nu \text{ при } \nu \in \mathbb{Z}, \quad \eta \in [-\eta_{a,b}, \eta_{b,a}].$$

Объединив равенство (1.6.6), неравенство (0.0.8) теоремы A, определения (1.6.4), (0.0.6) и утверждения лемм 1.6.2 и 1.6.3, получим цепочку соотношений

$$(\beta-\eta)\,(\alpha+\eta)^{\alpha/\beta}\,N_{\nu,\eta}^{-\alpha/\beta} = \omega(\delta_\nu) - N_{\nu,\eta}\delta_\nu \le \Delta(N_{\nu,\eta}) \le E(N_{\nu,\eta}) \le$$

$$\le U(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}) = \|\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta}\| = (\beta-\eta)\,(\alpha+\eta)^{\alpha/\beta}\,N_{\nu,\eta}^{-\alpha/\beta}.$$

Откуда вытекает равенство

$$E(N_{\nu,\eta}) = (\beta-\gamma)\,(\alpha+\eta)^{\alpha/\beta}\,N_{\nu,\eta}^{-\alpha/\beta}. \tag{1.6.15}$$

Объединив равенство (1.6.6), неравенства (0.0.10) теоремы B, определение (0.0.7) и равенство (1.6.15), получим цепочку соотношений

$$\delta_\nu^\alpha = \omega(\delta_\nu) \le \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu) \le \ell(\delta_\nu) \le E(N_{\nu,\eta}) + N_{\nu,\eta}\delta_\nu = \delta_\nu^\alpha.$$

Откуда вытекает равенство

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu) = \delta_\nu^\alpha.$$

Теоремы 1.6.1 и 1.6.2 доказаны. $\square$

1.6.3. Задача приближения одного класса Харди другим

Операторы, близкие к рассмотренным в предыдущей части операторам $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}$ и $\mathrm{U}_{\delta_\nu,\eta}$, возникали в работе Л.В.Тайкова 1971 года [63], в которой рассматривалась задача (0.0.13) приближения класса $Q^p(D_\rho)$ функций, аналитических в круге D_ρ, классом $Q^p(D_R, N)$, $N > 0$, функций, аналитических в круге D_R, большего радиуса. Приведем точную постановку задачи. Для чисел $N > 0$, $0 < r < \rho < R$, $1 \le p \le \infty$ и функции $f \in Q^p(D_\rho)$ величина

$$\mathrm{E}\left(f, Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = \inf\left\{\|f - F\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \ : \ F \in Q^p(D_R, N)\right\}$$

является наилучшим приближением функции f классом $Q^p(D_R, N)$. Соответственно, величина

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left(Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = \\ &\qquad = \sup\left\{\mathrm{E}\left(f, Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \,:\, f \in Q^p(D_\rho)\right\} \end{aligned} \tag{1.6.16}$$

есть наилучшее приближение класса $Q^p(D_\rho)$ классом $Q^p(D_R, N)$ по норме пространства $L^p_{\phi_r}(l_r)$.

В работе [63] эта задача исследовалась для случая приближения класса Харди функций, аналитических в единичном круге D, классом Харди функций, аналитических в круге D_R, $R > 1$, при $\rho = 1$, что не снижает общности утверждений. Результаты статьи [63] сформулированы в следующей теореме.

Теорема C (Л. В. Тайков). *Для произвольных* $1 \le p \le +\infty$, $0 < r < 1 < R$ *справедливо*

$$\mathrm{E}\left(Q^p(D), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \asymp N^{\ln r/\ln R}, \ \textit{при } N \to +\infty.$$

В случае $R = r^{-1}$, *если* $N = \lambda r^{-\nu}$, *где* ν *есть целое неотрицательное число, и* λ *удовлетворяет неравенству*

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} r^k}{1 + r^{2k}} \le \lambda \le 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k r^k}{1 + r^{2k}},$$

то

$$\mathrm{E}\left(Q^p(D), Q^p(D_{1/r}, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = (1 - \lambda) r^\nu.$$

В данной части результаты теоремы C будут несколько обобщены. Мы рассмотрим задачу для классов функций, аналитических в кольцах $C_{r,\rho}$, $C_{r,R}$, и снимем ограничение, связывающее радиусы r, ρ и R. То есть исследуем величину (0.0.13) наилучшего приближения класса $Q^p(C_{r,\rho}) =$

$Q^p(C_{r,\rho},1)$ классом $Q^p(C_{r,R},N)$, $N>0$, по норме пространства $L^p_{\phi_r}(l_r)$:

$$\mathrm{E}(N)=\mathrm{E}\left(Q^p(C_{r,\rho}),Q^p(C_{r,R},N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)},$$

при произвольных $0<r<\rho<R$ и $1\le p\le\infty$.

Определим операторы (свертки) $\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}=\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}[r,\rho,R]$ и $\widetilde{\mathrm{T}}_{\nu,\eta}=\widetilde{\mathrm{T}}_{\nu,\eta}[r,\rho,R]$ в пространстве L^p формулами

$$(\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}f)(Re^{ix})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}_{-\nu,\eta}\,(t-x)\;f(\rho e^{it})\,dt, \tag{1.6.17}$$

$$(\widetilde{\mathrm{T}}_{\nu,\eta}f)(re^{ix})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{T}_{-\nu,\eta}\,(t-x)\;f(\rho e^{it})\,dt.$$

Нетрудно понять, повторив рассуждения леммы 1.6.3, что для норм операторов имеют место равенства

$$\|\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}\|=\rho^{-\nu}R^{\nu}\,(\beta-\eta)\,,\quad \|\widetilde{\mathrm{T}}_{\nu,\eta}\|=\rho^{-\nu}r^{\nu}\,(\alpha+\eta)\,.$$

Теорема 1.6.3. *Пусть числа* r,ρ,R *удовлетворяют неравенству* $0<r<\rho<R$. *Тогда при произвольных* p, $1\le p\le\infty$, *если положительное число* N *представимо в виде*

$$N=\rho^{-\nu}R^{\nu}(\beta-\eta),$$

где ν *есть целое число и* $\eta\in[-\eta_{a,b},\eta_{b,a}]$, *то справедливо равенство*

$$\mathrm{E}(N)=(\alpha+\eta)\,(\beta-\eta)^{\beta/\alpha}\,N^{-\beta/\alpha}.$$

При этом линейный метод $\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}$, *определённый равенством* (1.6.17), *доставляет наилучшее приближение класса классом.*

Доказательство теоремы 1.6.3 проводится по схеме статьи [63]. Пусть в качестве значения параметра N выступает величина

$$N=\|\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}\|=\rho^{-\nu}R^{\nu}(\beta-\eta).$$

Для получения оценки сверху наилучшего линейного приближения воспользуемся методом, который функции $f \in Q^p(C_{r,\rho})$ ставит в соответствие функцию $F \in Q^p(C_{r,R}, N)$, определяемую равенством

$$F(Re^{ix}) = (\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta} f)(Re^{ix}). \tag{1.6.18}$$

Действительно, из представления функции F в виде ряда Лорана

$$F(R\,e^{ix}) = -\eta f_\nu R^\nu e^{i\nu x} + R^\nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_{k-\nu}\, f_k\, \rho^{k-\nu}\, e^{ikx} \tag{1.6.19}$$

следует, что если f аналитична в кольце $C_{r,\rho}$, то F является аналитической в кольце $C_{r,R}$. При этом из определения (1.6.18) следует оценка

$$\|F\|_{L^p_{\phi_R}(l_R)} \le \|\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}\|\, \|f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \le N.$$

Откуда $F \in Q^p(C_{r,R}, N)$.

Используя представление (1.6.19), для произвольной f имеем

$$\begin{gathered} f(re^{ix}) - F(re^{ix}) = \\ = \eta f_\nu r^\nu e^{i\nu x} + r^\nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[r^{k-\nu} - \mu_{k-\nu}\,(r\rho R^{-1})^{k-\nu}\right]\, f_k\, e^{ikx}. \end{gathered} \tag{1.6.20}$$

Преобразуем выражения в квадратных скобках, применяя свойство функции $K_{a,b}$

$$r^{k-\nu} - \mu_{k-\nu}\,(r\rho R^{-1})^{k-\nu} = \rho^{k-\nu}\left[1 - R^{-(k-\nu)} r^{k-\nu} \mu_{k-\nu}\right] =$$

$$\rho^{k-\nu}\left[1 - e^{-(a+b)(k-\nu)} K_{b,a}(k-\nu)\right] = \rho^{k-\nu}\, K_{a,b}(k-\nu) = \rho^{k-\nu}\lambda_{k-\nu}.$$

Результат подставим в (1.6.20)

$$f(re^{ix}) - F(re^{ix}) = \eta f_\nu r^\nu e^{i\nu x} + r^\nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_{k-\nu}\, f_k\, \rho^{k-\nu}\, e^{ikx} = (\widetilde{\mathrm{T}}_{\nu,\eta} f)(re^{ix}).$$

Откуда на окружности l_r получим оценку уклонения

$$\|f - F\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \le \|\widetilde{\mathrm{T}}_{\nu,\eta}\| \, \|f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)}.$$

И следовательно, имеем оценку сверху наилучшего (линейного) приближения класса классом

$$\mathrm{E}(N) \le \sup\Big\{\|f - F\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \,:\, f \in Q(C_{r,\rho})\Big\} =$$

$$= \|\widetilde{\mathrm{T}}_{\nu,\eta}\| = (\alpha + \eta)\,(\beta - \eta)^{\beta/\alpha}\, N^{-\beta/\alpha}.$$

Оценка снизу следует из равенства (см. [62]) для наилучшего приближения функции $g_\nu(z) = \rho^{-\nu}\, z^\nu \in Q^p(C_{r,\rho})$

$$\inf\Big\{\|g_\nu - F\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \,:\, F \in Q^p(C_{r,R}, N)\Big\} = (\alpha + \eta)\,(\beta - \eta)^{\beta/\alpha}\, N^{-\beta/\alpha}.$$

Теорема 1.6.3 доказана. □

Следствие 1.6.1. *Пусть числа* r, ρ, R *удовлетворяют неравенству* $0 < r < \rho < R$. *Тогда при произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *если положительное число* N *представимо в виде*

$$N = \rho^{-\nu} R^\nu (\beta - \eta),$$

где $\nu \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\eta \in [-\eta_{a,b}, \eta_{b,a}]$, *то для величины* (1.6.16) *справедливо равенство*

$$\mathrm{E}\left(Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = (\alpha + \eta)\,(\beta - \eta)^{\beta/\alpha}\, N^{-\beta/\alpha}.$$

При этом линейный метод $\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}$, *определённый равенством* (1.6.17), *доставляет наилучшее приближение класса классом.*

Глава 2. Оптимальное восстановление производной по неточно заданным значениям аналитической функции на части границы

В главе исследуется задача оптимального восстановления (0.0.25) производной аналитической в области G функции (оператора Υ^1_K) по некасательным предельным значениям функции, заданным с погрешностью на измеримой части границы γ_1, на классе $Q = Q^p(G; \gamma_1, 1)$ из класса $\mathcal{H}^p(G)$, и взаимосвязанные задачи о модуле непрерывности (0.0.26) оператора Υ^1_K на классе Q, и наилучшего приближения (0.0.27) оператора Υ^1_K множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q.

§ 2.1. Оптимальное восстановление производной в точке ограниченной аналитической функции

В этом параграфе G есть односвязная область комплексной плоскости, ограниченная жордановой спрямляемой кривой Γ; γ_1 – произвольное измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 – дополнение γ_1 до Γ, $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$. Будем рассматривать аналитические и ограниченные в области G функции, т.е. функции класса Харди $H^\infty(G)$.

Выделим в $H^\infty(G)$ класс $Q = Q^\infty(G; \gamma_1, 1)$ функций f, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} \le 1$. Ясно, что Q является множеством выпуклым и уравновешенным. На классе Q изучаются три взаимосвязанные экстремальные задачи для функционала $\Upsilon^1_{z_0}$, который ставит в соответствие граничным значениям на γ_1 функции f значение её производной $f'(z_0)$ в точке z_0 области G.

Исследуем вариант задачи (0.0.25): оптимальное восстановление значения производной аналитической в области G функции в точке z_0 (функционала $\Upsilon^1_{z_0}$) по заданным с известной погрешностью δ по норме $L^\infty(\gamma_1)$

граничным значениям функции на γ_1 и дополнительной информации принадлежности функции классу Q. Более точно, пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $q \in L^\infty(\gamma_1)$ такая, что справедливо неравенство $\|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta$. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q значение производной функции $f'(z_0)$, $z_0 \in G$. В качестве множества методов восстановления, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать множество $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$. Как обсуждалось ранее, существует линейный ограниченный функционал, который является оптимальным методом среди всех возможных. Следовательно, решения аналогичных задач, где множество методов $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, есть множество $\mathcal{L}$ линейных, или $\mathcal{B}$ линейных ограниченных функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$ совпадают со случаем $\mathcal{R} = \mathcal{F}$ и справедливы равенства (0.0.11). Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta > 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{F}$ величина

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\Big\{&|f'(z_0) - Tq| \, : \\ &f \in Q,\, q \in L^\infty(\gamma_1),\, \|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta\Big\}\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

является погрешностью восстановления методом T значения в точке z_0 производной функции класса Q по граничным значениям функции на γ_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^\infty(\gamma_1)$. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta) \, : \, T \in \mathcal{F}\right\} \tag{2.1.2}$$

есть *величина оптимального восстановления* значения производной функции в точке z_0 (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала $\Upsilon^1_{z_0}$) функций класса Q по их δ-приближённым граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{F}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – функционала, на котором в (2.1.2) достигается нижняя грань.

Второй является задача вычисления модуля непрерывности функционала $\Upsilon^1_{z_0}$ на классе Q, т.е. функции переменной $\delta > 0$, определяемой равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon^1_{z_0}, Q) = \sup\left\{|f'(z_0)| \,:\, f \in Q,\, \|f\|_{L^\infty(\gamma_1)} \leq \delta\right\}, \qquad (2.1.3)$$

Из определения (2.1.3) следует, что для произвольной функции из $H^\infty(G)$ справедливо точное неравенство

$$|f'(z_0)| \leq \|f\|_{L^\infty(\gamma_0)}\, \omega\left(\frac{\|f\|_{L^\infty(\gamma_1)}}{\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)}}\right), \quad f \in H(G).$$

В рассматриваемом случае величины (2.1.2) и (2.1.3) равны. Более того, справедливы равенства (0.0.11).

С задачами (2.1.2) и (2.1.3) тесно связана задача наилучшего приближения функционала $\Upsilon^1_{z_0}$ линейными ограниченными функционалами. Точная постановка задачи такова. Пусть $\mathcal{B}(N)$ есть множество линейных ограниченных функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$, норма которых не превосходит числа $N > 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{|f'(z_0) - Tf| \,:\, f \in Q\right\} \qquad (2.1.4)$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{B}(N)$ от функционала $\Upsilon^1_{z_0}$ на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N)\right\} \qquad (2.1.5)$$

есть *наилучшее приближение функционала* $\Upsilon^1_{z_0}$ множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (2.1.5) достигается нижняя грань. Взаимосвязь задач (2.1.2), (2.1.3) и (2.1.2) даёт формулы (0.0.11) и (0.0.12).

2.1.1. Основные результаты

Пусть w есть гармоническая в области G функция переменной z, значение которой в точке равно гармонической мере γ_1 относительно области G в этой точке, $w(z) = w(z, \gamma_1, G)$.

Будем использовать обозначения $\alpha = \alpha(z_0)$ и $\beta = \beta(z_0)$ для величин гармонической меры γ_1 и γ_0 относительно области G в точке z_0 :

$$\alpha = \alpha(z_0) = w(z_0, \gamma_1, G), \quad \beta = \beta(z_0) = w(z_0, \gamma_0, G) = 1 - \alpha.$$

Также обозначим через $\kappa = \kappa(z_0), \overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0)$ и $t = t(z_0)$, соответственно, длину, направление и аргумент градиента функции w (гармонической меры γ_1 относительно области G) в точке z_0, т.е. определяемые равенствами

$$\kappa = \kappa(z_0) = \left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|, \quad \overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0) = \frac{\overline{\nabla} w(z_0)}{\left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|}, \quad \overline{\nu} = (\cos t, \sin t).$$

Пусть g есть функция, задающая однолистное отображение области G на единичный круг и удовлетворяющая условиям

$$g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) > 0.$$

Обозначим через $\eta(z_0)$ положительную величину

$$\eta(z_0) = \frac{2g'(z_0)}{\kappa(z_0)},$$

если $\kappa(z_0) \neq 0$, и равную $+\infty$, если градиент гармонической меры равен нулю.

Для $\delta > 0$ зададим на границе Γ области G функцию ψ_δ формулой

$$\psi_\delta(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in \gamma_0; \\ \delta, & \zeta \in \gamma_1. \end{cases}$$

Пусть s_δ есть функция Сегё (функция максимального модуля), определяемая по функции ψ_δ равенством

$$s_\delta(z) = \exp\left(u_\delta(z) + iv_\delta(z)\right), \quad z \in G, \qquad (2.1.6)$$

где функция

$$u_\delta(z) = \int_\Gamma P(z,\zeta)\, \ln \psi_\delta(\zeta)\, |d\zeta| = \ln\delta\, w(z), \quad z \in G,$$

является гармонической в области $G, v_\delta(z) = \ln\delta\, v(z)$ и v является гармонически сопряжённой к w функцией. В силу односвязности области G, функция v_δ однозначная и единственная с точностью до аддитивной вещественной константы, выбор значения которой нам не важен. Отметим возможность представления функции s_δ в виде

$$s_\delta(z) = h^\sigma(z),\, \sigma = \ln\delta, \quad h(z) = \exp\{w(z) + iv(z)\}.$$

Функция s_δ является аналитической, ограниченной и не обращается в нуль в области G.

Для $\delta > 0$ и точки $z_0 \in G$ со свойством

$$|\ln\delta| \geq \eta(z_0) \tag{2.1.7}$$

определим на пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ следующий функционал:

$$\begin{aligned}(T^1_\delta f)(z) &= e^{-it} \int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\, \frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta| = \\ &= e^{-it} \int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta) \left(\frac{h(z_0)}{h(\zeta)}\right)^\sigma f(\zeta)\, |d\zeta|,\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

где

$$J_{z_0}(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0,\zeta) + \ln\delta\, \kappa(z_0)\, P(z_0,\zeta). \tag{2.1.9}$$

Для $\delta > 0$ и точки $z_0 \in G$, удовлетворяющих противоположному к (2.1.7) неравенству

$$|\ln\delta| < \eta(z_0), \tag{2.1.10}$$

определим в области G следующую функцию:

$$F_\delta(z) = \frac{g(z) - g_0}{1 - g(z)\,\overline{g_0}}\, s_\delta(z), \quad g_0 = -e^{it}\frac{\kappa(z_0)\,\ln\delta}{2g'(z_0)} = -e^{it}\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}. \tag{2.1.11}$$

Ясно, что если справедливо условие (2.1.10), то 1) функция F_δ является аналитической в области G, 2) справедливо неравенство

$$|F_\delta(z)| \le |s_\delta(z)|, \quad z \in G,$$

3) предельные граничные значения функций $|F_\delta|$ и $|s_\delta|$ совпадают. Таким образом, справедливо равенство

$$|F_\delta(\zeta)| = \psi_\delta(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

В случае (2.1.10), определим функционал T_δ^1 равенством

$$\begin{aligned} T_\delta^1 f = e^{-it} \int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\, \frac{s_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta| = \\ = e^{-it} \int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\, \frac{1-\overline{g_0} g(\zeta)}{g(\zeta)-g_0} \left(\frac{h(z_0)}{h(\zeta)}\right)^{\sigma} f(\zeta)\, |d\zeta|, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

в котором

$$I_{z_0}(\zeta) = \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\, \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0,\zeta) + \kappa(z_0)\, \frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) P(z_0,\zeta). \tag{2.1.13}$$

Основными результатами этого параграфа являются следующие две теоремы, содержащие полные решения задач о вычислении величин (2.1.2), (2.1.3) и (2.1.5).

Теорема 2.1.1. *Для величины* (2.1.2) *справедливы следующие утверждения.*

(I) *В случае* $|\ln\delta| \ge \eta(z_0)$, *верны равенства*:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, |\ln\delta|. \tag{2.1.14}$$

Экстремальными в (2.1.3) *являются функции вида* cs_δ, $|c| = 1$, *и оптимальным методом восстановления в задаче* (2.1.2) *является линейный ограниченный функционал* T_δ^1, *определённый равенством* (2.1.8).

(II) *В случае* $|\ln\delta| < \eta(z_0)$, *верны равенства*:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, \frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right). \tag{2.1.15}$$

Экстремальными в (2.1.3) *являются функции вида* cF_δ, $|c| = 1$, *и оптимальным методом восстановления в задаче* (2.1.2) *является линейный ограниченный функционал* T^1_δ, *определённый равенством* (2.1.12).

Теорема 2.1.2. *Для величины* (2.1.5) *справедливы следующие утверждения.*

(I *) *Если* $N > 0$ *представимо в виде*

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta}\, |\alpha \ln \delta + 1|, \quad |\ln \delta| \ge \eta(z_0),$$

то для величины (2.1.5) *справедливо равенство*:

$$E(N) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, |\beta \ln \delta - 1|. \tag{2.1.16}$$

Функционал T^1_δ, *определённый формулой* (2.1.8), *является функционалом наилучшего приближения.*

(II *) *Если* $N > 0$ *представимо в виде*

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta} \left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)}\right) + \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)}\right], \quad |\ln \delta| < \eta(z_0),$$

то для величины (2.1.5) *справедливо равенство*:

$$E(N) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha} \left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)}\right]. \tag{2.1.17}$$

Функционал T^1_δ, *определённый формулой* (2.1.12), *является функционалом наилучшего приближения.*

2.1.2. Свойства экстремальных функций s_δ и F_δ

В этой части параграфа будут исследованы некоторые свойства экстремальных функций s_δ и F_δ, определённых равенствами (2.1.6) и (2.1.11).

Убедимся, что функция s_δ, $\delta > 0$, принадлежит классу Q. По определению (2.1.6), функция s_δ является аналитической и ограниченной в области G, т.е. принадлежит классу Харди $H^\infty(G)$. При этом для её модуля имеем равенство

$$|s_\delta(z)| = \delta^{w(z)} = \exp\int_\Gamma P(z,\zeta)\ln\psi_\delta(\zeta)|d\zeta|, \quad z\in G.$$

Так как интеграл в правой части есть интеграл Пуассона – Лебега, то некасательные предельные граничные значения $|s_\delta|$ почти всюду на Γ удовлетворяют равенству $|s_\delta(\zeta)| = \psi_\delta(\zeta)$. Откуда получим

$$\|s_\delta\|_{L^\infty(\gamma_1)} = \|\psi_\delta\|_{L^\infty(\gamma_1)} = \delta; \quad \|s_\delta\|_{L^\infty(\gamma_0)} = \|\psi_\delta\|_{L^\infty(\gamma_0)} = 1.$$

Следовательно, функция s_δ принадлежит классу Q.

Как было отмечено выше, если δ удовлетворяет условию (2.1.10), то функция F_δ является аналитической в G и предельные граничные значения $|s_\delta|$ и $|F_\delta|$ совпадают. Следовательно, функция F_δ также принадлежит классу Q.

Пусть f есть дифференцируемая в точке z_0 функция. Рассмотрим производную по направлению $\overline{\nu}$ функции f, как функции двух вещественных переменных x и y, в точке z_0. Имеем равенство

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\overline{\nu}}\right|_{z_0} = \big(\overline{\nu}, \overline{\nabla} f(z_0)\big) = \cos t\, f'(z_0) + i\sin t\, f'(z_0) = f'(z_0)\, e^{it}. \tag{2.1.18}$$

Вычислим абсолютное значение производной функции s_δ в точке z_0, которое потребуется в дальнейшем. Рассмотрим производную по направлению $\overline{\nu}$ функции s_δ, как функции $s_\delta(x+iy)$ двух вещественных переменных x и y, в точке z_0. С одной стороны

$$\left.\frac{\partial s_\delta}{\partial\overline{\nu}}\right|_{z_0} = s_\delta'(z_0)\, e^{it}.$$

С другой стороны, используя определение функции (2.1.6) и учитывая, что производная по направлению $\overline{\nu}$ функции w равна $|\overline{\nabla} w(z_0)| = \kappa(z_0)$, а производная по направлению её гармонически сопряжённой функции v

равна нулю, имеем

$$\left.\frac{\partial s_\delta}{\partial \overline{\nu}}\right|_{z_0} = \ln\delta\, s_\delta(z_0) \left(\left.\frac{\partial w}{\partial \overline{\nu}}\right|_{z_0} + i\, \left.\frac{\partial v}{\partial \overline{\nu}}\right|_{z_0} \right) = \ln\delta\, \kappa(z_0)\, s_\delta(z_0). \tag{2.1.19}$$

Объединяя два последних равенства, получим

$$s'_\delta(z_0)\, e^{it} = \ln\delta\, \kappa(z_0)\, s_\delta(z_0).$$

Это позволяет выписать модуль производной

$$|s'_\delta(z_0)| = |\ln\delta|\, \kappa(z_0)\, |s_\delta(z_0)| = \kappa(z_0)\, \delta^\alpha\, |\ln\delta|. \tag{2.1.20}$$

Теперь, при δ, удовлетворяющих неравенству (2.1.10), вычислим производную $F'_\delta(z_0)$ функции (2.1.6):

$$F'_\delta(z_0) = g'(z_0)(1 - |g_0|^2) s_\delta(z_0) - g_0 s'_\delta(z_0).$$

Подставляя в последнее равенство вычисленное значение $s'_\delta(z_0)$, величину g_0 и выражая через $\eta(z_0)$, получим равенство

$$F'_\delta(z_0) = \kappa(z_0)\, s_\delta(z_0)\, \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)} \right).$$

Тогда для производной F_δ по направлению $\overline{\nu}$ в точке z_0 справедливы представления:

$$\left.\frac{\partial F_\delta}{\partial \overline{\nu}}\right|_{z_0} = e^{it}\, \kappa(z_0)\, s_\delta(z_0)\, \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)} \right), \tag{2.1.21}$$

и для модуля производной:

$$|F'_\delta(z_0)| = \kappa(z_0)\, \delta^\alpha\, \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)} \right). \tag{2.1.22}$$

Обозначим через $\widetilde{\omega}$ функцию неотрицательной переменной δ, определяемую равенством

$$\widetilde{\omega}(\delta) = \begin{cases} \kappa\, \delta^\alpha\, |\ln\delta|, & |\ln\delta| \geq \eta; \\ \kappa\, \delta^\alpha\, \dfrac{1}{2} \left(\eta + \dfrac{\ln^2\delta}{\eta} \right), & |\ln\delta| < \eta. \end{cases}$$

Отметим, что функция $\widetilde{\omega}$ непрерывно-дифференцируема на полуоси.

Лемма 2.1.1. *Для величины* (2.1.3) *модуля непрерывности функционала* $\Upsilon^1_{z_0}$ *на классе* Q *имеет место равенство*

$$\omega(\delta) = \widetilde{\omega}(\delta), \quad \delta > 0. \tag{2.1.23}$$

Экстремальными в (2.1.3) *при условии* (2.1.7) *являются функции* cs_δ, $|c| = 1$, *а при условии* (2.1.10) *являются функции* $cF_\delta, |c| = 1$.

Доказательство. Оценка снизу $\omega(\delta) \geq \widetilde{\omega}(\delta)$ имеет место по определению модуля непрерывности (2.1.3) и в виду равенств (2.1.20), (2.1.22). Из результатов работы [67, теоремы 15, 17] следует, что экстремальные функции в задаче (2.1.3)

$$\Phi_j[\delta,\xi](z) = s_\delta(z) \left(\frac{g(z) - \xi}{1 - g(z)\overline{\xi}} \right)^j,$$

где ξ и j – это некоторые параметры, удовлетворяющие условиям: $|\xi| < 1$, значение j равно либо нулю, либо единице. В случае $j = 0$ имеем $\Phi_0[\delta,\xi] \equiv s_\delta$. Для производной $\Phi_1[\delta,\xi]$ в точке z_0 справедливо

$$|\Phi_1'[\delta,\xi](z_0)| = \left| s_\delta(z_0)\, g'(z_0)\,(1 - |\xi|^2) - s_\delta'(z_0)\,\xi \right| =$$

$$= \delta^\alpha \left| g'(z_0)\,(1 - |\xi|^2) - e^{-it}\,\kappa(z_0)\,\ln\delta\,\xi \right|.$$

При условии (2.1.10) нетрудно получить следующее соотношение

$$\max\left\{ |\Phi_1'[\delta,\xi](z_0)| \,:\, |\xi| < 1 \right\} = |\Phi_1'[\delta,g_0](z_0)| = \kappa\,\delta^\alpha\,\frac{1}{2}\left(\eta + \frac{\ln^2\delta}{\eta}\right),$$

а в случае, когда справедливо противоположное к (2.1.10) неравенство (2.1.7),– следующее соотношение

$$|\Phi_1'[\delta,\xi](z_0)| \leq |s_\delta'(z_0)| = \kappa\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|, \quad |\xi| < 1.$$

Заметим, что при условии (2.1.10) справедливо $\Phi_1[\delta,g_0] = F_\delta$. Утверждение леммы 2.1.1 доказано. □

Отметим, что оценка сверху $\omega(\delta)$ (другим способом и независимо от [67]) следует из доказательства основных результатов данного параграфа.

Используя лемму 2.1.1, можно вычислить значение величины (0.0.6). Откуда, используя равенство (0.0.12), получим и наилучшее приближение функционала (2.1.5).

Лемма 2.1.2. *Для величины* (2.1.5) *справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если* $N > 0$ *имеет вид*

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta}\, |\alpha \ln \delta + 1|, \quad |\ln \delta| \geq \eta(z_0), \tag{2.1.24}$$

то для величины (2.1.5) *справедливо равенство*

$$E(N) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, |\beta \ln \delta - 1|.$$

(ii) *Если* $N > 0$ *имеет вид*

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta} \left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)}\right) + \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)}\right], \quad |\ln \delta| < \eta(z_0), \tag{2.1.25}$$

то для величины (2.1.5) *справедливо равенство*

$$E(N) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha} \left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)}\right].$$

Доказательство. Вычислим производную модуля непрерывности $\omega(\delta)$. Имеем равенство

$$\omega'(\delta) = \begin{cases} \kappa\, \delta^{-\beta}\ |\alpha \ln \delta + 1|, & |\ln \delta| \geq \eta; \\ \kappa\, \delta^{-\beta}\ \left(\dfrac{\alpha}{2}\left(\eta + \dfrac{\ln^2 \delta}{\eta}\right) + \dfrac{\ln \delta}{\eta}\right), & |\ln \delta| < \eta. \end{cases}$$

Верхняя грань в определении (0.0.6) величины $\Delta(N)$ достигается в точке δ_N, которая является решением уравнения $\omega'(\delta) = N$. Тогда из равенства (0.0.12) получим

$$E(N) = \Delta(N) = \omega(\delta_N) - N\delta_N.$$

Рассмотрим случай (i), т.е когда δ_N удовлетворяет условию (2.1.7). Используя равенство (2.1.24) и следствие 2.1.1, получим

$$E(N) = \kappa\delta_N^\alpha |\ln\delta_N| - N\delta_N = \kappa\delta_N^\alpha \left(|\ln\delta_N| - N\kappa^{-1}\delta_N^\beta\right) =$$

$$= \kappa\delta_N^\alpha \left(|\ln\delta_N| - |\alpha\ln\delta_N + 1|\right) = \kappa\,\delta_N^\alpha |\beta\ln\delta_N - 1|.$$

Теперь рассмотрим случай (ii), т.е когда δ_N удовлетворяет условию (2.1.10). Используя равенство (2.1.25), получим

$$E(N) = \kappa\delta_N^\alpha \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{\ln^2\delta_N}{\eta}\right) - N\delta_N = \kappa\delta_N^\alpha \left[\frac{1}{2}\left(\eta + \frac{\ln^2\delta_N}{\eta}\right) - N\kappa^{-1}\delta_N^\beta\right] =$$

$$= \kappa\delta_N^\alpha \left[\frac{1}{2}\left(\eta + \frac{\ln^2\delta_N}{\eta}\right) - \frac{\alpha}{2}\left(\eta + \frac{\ln^2\delta_N}{\eta}\right) - \frac{\ln\delta_N}{\eta}\right] =$$

$$= \kappa\delta_N^\alpha \left[\frac{\beta}{2}\left(\eta + \frac{\ln^2\delta_N}{\eta}\right) - \frac{\ln\delta_N}{\eta}\right].$$

Лемма 2.1.2 доказана. □

2.1.3. Свойства функционала T_δ^1, при условии (2.1.7)

Лемма 2.1.3. *Условие* (2.1.7) *является необходимым и достаточным для того, чтобы функция* J_{z_0}, *определённая равенством* (2.1.9), *не меняла знак на кривой* Γ. *При этом знак* J_{z_0} *совпадает со знаком* $\ln\delta$.

Доказательство. Перейдем к переменным ρ, τ, связанным с $z = x + iy$ равенством $\rho\, e^{i\tau} = g(x+iy)$. Тогда для плотности гармонической меры и её производной (по переменной z) справедливы равенства

$$P(z,\zeta)\,|d\zeta| = \mathcal{P}(\rho, \tau-\theta)\,d\tau, \quad g(\zeta) = e^{i\theta},$$

$$\frac{\partial P}{\partial\overline{\nu}}(z,\zeta)\,|d\zeta| = \left[\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}(\rho,\tau-\theta)\ \mathrm{Re}\left\{e^{i(t-\tau)}g'(z)\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}(\rho,\tau-\theta)\ \mathrm{Im}\left\{e^{i(t-\tau)}g'(z)\right\}\right]\,d\tau,$$

в которых $\mathcal{P}$ есть классическое ядро Пуассона круга, определяемое равенством
$$\mathcal{P}(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}.$$
Подставляя вместо z точку z_0, получим
$$P(z_0,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d\tau}{|d\zeta|}, \quad \frac{\partial P}{\partial\overline{\nu}}(z_0,\zeta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{d\tau}{|d\zeta|}\,g'(z_0)\cos(t-\theta).$$
Соответственно, для функции J_{z_0} имеем представление
$$J_{z_0}(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d\tau}{|d\zeta|}\,\left(2g'(z_0)\cos(t-\theta)+\kappa(z_0)\,\ln\delta\right).$$
Откуда нетрудно понять, что если δ удовлетворяет условию (2.1.7), то для всех $\zeta\in\Gamma$ знак $J_{z_0}(\zeta)$ совпадает со знаком $\ln\delta$. А в случае, когда условие (2.1.7) не справедливо, функция J_{z_0} меняет знак. Лемма 2.1.3 доказана. □

Следствие 2.1.1. *Если $\delta>0$ и $z_0\in G$ удовлетворяют условию* (2.1.7), *то справедливо равенство*
$$|\alpha(z_0)\,\ln\delta+1|+|\beta(z_0)\,\ln\delta-1| = |\ln\delta|.$$

Доказательство. По лемме 2.1.3 при выполнении условия (2.1.7) функция J_{z_0} не меняет знак на кривой Γ. Тогда интегралы
$$\int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\,|d\zeta|, \quad \int_{\gamma_0} J_{z_0}(\zeta)\,|d\zeta|$$
имеют один знак. Вычислим эти интегралы
$$\int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\,|d\zeta| = \int_{\gamma_1}\frac{\partial P}{d\overline{\nu}}(z_0,\zeta)\,|d\zeta| + \kappa(z_0)\,\ln\delta\int_{\gamma_1}P(z_0,\zeta)\,|d\zeta| =$$
$$= \left.\frac{\partial w}{d\overline{\nu}}\right|_{z_0} + \kappa(z_0)\,\ln\delta\,w(z_0) = \kappa(z_0)(\alpha\,\ln\delta+1),$$
аналогично
$$\int_{\gamma_0} J_{z_0}(\zeta)\,|d\zeta| = \left.\frac{\partial(1-w)}{d\overline{\nu}}\right|_{z_0} + \kappa(z_0)\,\ln\delta\,(1-w(z_0)) = \kappa(z_0)(\beta\,\ln\delta-1).$$

Тогда из совпадения знаков интегралов, учитывая равенство $\alpha + \beta = 1$, имеем

$$|\kappa(z_0)(\alpha \,\ln\delta + 1)| + |\kappa(z_0)(\beta \,\ln\delta - 1)| =$$

$$= |\kappa(z_0)|\, |(\alpha \,\ln\delta + 1) + (\beta \,\ln\delta - 1)| = |\kappa(z_0)|\, |\ln\delta|.$$

Разделив последнее равенство на $|\kappa(z_0)|$, получим утверждение следствия 2.1.1. $\square$

Теперь при условии (2.1.7) исследуем свойства функционала T^1_δ, определённого на пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ соотношением (2.1.8). Точнее, вычислим для функционала T^1_δ его норму, уклонение (2.1.4) и погрешность (2.1.1) восстановления методом T^1_δ .

Лемма 2.1.4. *Если* $\delta > 0$ *и* z_0 *удовлетворяют условию* (2.1.7), *то имеют место следующие равенства*

$$\|T^1_\delta\| = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta}\, |\alpha \ln\delta + 1|\,, \tag{2.1.26}$$

$$U(T^1_\delta) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, |\beta \ln\delta - 1|, \tag{2.1.27}$$

$$\mathcal{U}(T^1_\delta, \delta) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, |\ln\delta|. \tag{2.1.28}$$

Доказательство. Докажем равенство (2.1.26). Для произвольной функции $q \in L^\infty(\gamma_1)$, используя знакопостоянство функции J_{z_0} и равенство $|s_\delta(\zeta)| = \delta$, $\zeta \in \gamma_1$, получим оценку сверху

$$|T^1_\delta q| = \left| \int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\, \frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\, q(\zeta)\, |d\zeta| \right| \leq$$

$$\leq |s_\delta(z_0)|\, \delta^{-1} \left| \int_{\gamma_1} \left[\frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0, \zeta) + \kappa \,\ln\delta\, P(z_0, \zeta) \right] |d\zeta| \right| \|q\|_{L^\infty(\gamma_1)} =$$

$$= \delta^{-\beta} \left| \left. \frac{\partial w}{\partial \overline{\nu}} \right|_{z_0} + \kappa \,\ln\delta\, w(z_0) \right| \|q\|_{L^\infty(\gamma_1)} = \kappa\, \delta^{-\beta}\, |1 + \alpha \,\ln\delta|\, \|q\|_{L^\infty(\gamma_1)}.$$

Следовательно, для нормы функционала справедлива оценка сверху $\|T_\delta^1\| \leq \kappa\,\delta^{-\beta}\,|\alpha\ln\delta+1|$. Для оценки снизу рассмотрим функцию $\delta^{-1}s_\delta$. Получим

$$\|T_\delta^1\| \geq |T_\delta^1(\delta^{-1}s_\delta)| = \delta^{-1}|s_\delta(z_0)|\,\left|\int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\,|d\zeta|\right| = \kappa\,\delta^{-\beta}\,|\alpha\ln\delta+1|\,.$$

Рассмотрим теперь уклонение (2.1.4) для оператора T_δ. По лемме 1.1.3 для произвольной функции $f\in Q$ справедливо равенство

$$f(z) = \int_\Gamma P(z,\zeta)\,\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta|, \quad z\in G.$$

Дифференцируем это равенство по направлению $\overline{\nu}$ в точке z_0, получаем

$$f'(z_0)\,e^{it} = \int_\Gamma \left[\frac{\partial P}{\partial\overline{\nu}}(z_0,\zeta)+\kappa\,\ln\delta\,P(z_0,\zeta)\right]\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta| =$$

$$= \int_\Gamma J_z(\zeta)\,\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta|.$$

Тогда

$$f'(z_0)-(T_\delta^1 f)(z_0) = e^{-it}\int_{\gamma_0} J_{z_0}(\zeta)\,\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta|.$$

Теперь, рассуждая аналогично доказательству равенства (2.1.26), нетрудно получить и равенство (2.1.27). Действительно, имеем оценку сверху

$$\left|f'(z_0)-(T_\delta^1 f)(z_0)\right| \leq$$

$$\leq |f_\delta(z_0)|\,\left|\int_{\gamma_0}\left[\frac{\partial P}{\partial\overline{\nu}}(z_0,\zeta)+\kappa\,\ln\delta\,P(z_0,\zeta)\right]\,|d\zeta|\right|\,\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} =$$

$$= \delta^{-\beta}\,\left|\left.\frac{\partial(1-w)}{\partial\overline{\nu}}\right|_{z_0}+\kappa\,\ln\delta\,(1-w(z_0))\right|\,\|f\|_{L^\infty(\gamma_1)} = \kappa\,\delta^{\alpha}\,|\beta\ln\delta-1|\,\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)}.$$

Отметим, что верхняя грань в (2.1.4) также достигается на функции s_δ.

Равенство (2.1.28) следует из следующих стандартных рассуждений. Для произвольных функций $f\in Q$ и $q\in L^\infty(\gamma_1)$ имеем

$$|f'(z_0)-(T_\delta^1 q)(z_0)| \leq |f(z_0)-(T_\delta^1 f)(z_0)| + |(T_\delta^1(f-q))(z_0)| \leq$$

$$\leq U(T_\delta^1) + \|T_\delta^1\| \, \|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)}.$$

Тогда из равенств (2.1.26), (2.1.27) и следствия 2.1.1 для погрешности (2.1.1) метода T_δ^1 получаем оценку сверху

$$\mathcal{U}(T_\delta^1, \delta) \leq \kappa \, |\beta \ln \delta - 1| \, \delta^\alpha + \kappa \, \delta^{-\beta} \, |1 + \alpha \ln \delta| \cdot \delta = \kappa \, \delta^\alpha \, |\ln \delta|.$$

Для оценки снизу достаточно рассмотреть $f = s_\delta$ и $q \equiv 0$. Лемма доказана. □

2.1.4. Свойства функционала T_δ^1, при условии (2.1.10)

Будем предполагать, что параметр δ и точка z_0 удовлетворяют условию (2.1.10). Доказательство экстремальности функционала T_δ^1, определённого формулой (2.1.12) при условии (2.1.10) основывается на формуле для производной функции из $H^\infty(G)$, приведённой в следующем утверждении.

Теорема 2.1.3. *Для произвольной функции* $f \in H^\infty(G)$ *в случае* $|\ln \delta| < \eta(z_0)$ *справедлива формула:*

$$f'(z_0) = e^{-it} \, \frac{\partial}{\partial \overline{\nu}} \int_\Gamma P(z, \zeta) \, \frac{F_\delta(z)}{F_\delta(\zeta)} \, f(\zeta) \, |d\zeta| \, \bigg|_{z_0} =$$

$$= \int_\Gamma I_{z_0}(\zeta) \, \frac{s_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)} \, f(\zeta) \, |d\zeta| = \int_\Gamma I_{z_0}(\zeta) \, \frac{1 - \overline{g_0} g(\zeta)}{g(\zeta) - g_0} \, \frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)} \, f(\zeta) \, |d\zeta|,$$

в которой функция I_{z_0} *определена равенством* (2.1.13).

Доказательство. Обозначим через V гармоническую в G функцию, задаваемую интегралом Пуассона – Лебега

$$V(z) = \int_\Gamma P(z, \zeta) \, \frac{1}{F_\delta(\zeta)} \, |d\zeta|.$$

В начале покажем, что для функции V справедливо равенство:

$$V(z) = \frac{1}{F_\delta(z)} - \frac{1}{s_\delta(z_1)} \, \frac{(1 - |g_0|^2)(1 - |g(z)|^2)}{(g(z) - g_0)(1 - \overline{g(z)} g_0)}, \quad z \in G, \qquad (2.1.29)$$

где точка $z_1 \in G$ такая, что $g(z_1) = g_0$. Рассмотрим функцию V_0, определённую соотношением

$$V_0(z) = \frac{1}{F_\delta(z)} - \frac{1}{s_\delta(z_1)} \frac{(1-|g_0|^2)(1-|g(z)|^2)}{(g(z)-g_0)(1-\overline{g(z)}g_0)}, \quad z \in G.$$

Функция V_0 может быть представлена как сумма: $V_0(z) = V_1(z) + \overline{V_2(z)}$, $z \in G$, в которой

$$V_1(z) = \frac{1}{F_\delta(z)} - \frac{1}{s_\delta(z_1)} \frac{1-|g_0|^2}{g(z)-g_0}$$

является аналитической (имеет в z_1 устранимую особую точку) и ограниченной в G функцией, и

$$V_2(z) = \frac{1}{\overline{s_\delta(z_1)}} \frac{1-|g_0|^2}{1-g(z)\overline{g_0}}$$

также функция аналитическая и ограниченная в G. Тогда функция V_0 является гармонической в области G и представима по формуле Грина. Учитывая равенство $|g(\zeta)| = 1$, $\zeta \in \Gamma$, получим следующее равенство для граничных значений функции V_0:

$$V_0(\zeta) = 1/F_\delta(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

Таким образом, функции V и V_0 совпадают в G, т.е. справедливо равенство (2.1.29).

Теперь покажем, что производная функции $F_\delta V$ в точке z_0 по направлению вектора $\overline{\nu}$ равна нулю, т.е. справедливо следующее равенство

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\nu}} \left[F_\delta(z) V(z)\right]\bigg|_{z_0} = 0. \tag{2.1.30}$$

Используя (2.1.29), получаем представление

$$F_\delta(z)V(z) = 1 - \frac{(1-|g_0|^2)(1-|g(z)|^2)}{|1-g(z)\overline{g_0}|^2} \frac{s_\delta(z)}{s_\delta(z_1)}.$$

Значит, для доказательства (2.1.30) достаточно показать справедливость равенства

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\nu}}\left\{s_\delta(z)\frac{1-|g(z)|^2}{|1-g(z)\overline{g_0}|^2}\right\}\Bigg|_{z_0}=0. \tag{2.1.31}$$

Используя равенства $g(z_0)=0$, (2.1.19) и обозначение

$$\varphi(z)=\frac{1-|g(z)|^2}{|1-g(z)\overline{g_0}|^2},$$

перепишем производную в левой части (2.1.31) в виде

$$s_\delta(z_0)\left[\ln\delta\kappa(z_0)+\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\nu}}(z_0)\right].$$

Теперь, для доказательства (2.1.30), достаточно показать, что производная функции φ в точке z_0 по направлению $\overline{\nu}$ равна величине $-\ln\delta\kappa(z_0)$. Для функции φ имеем представление

$$\varphi(z)=\frac{1-a^2(z)-b^2(z)}{(1-a_0a(z)-b_0b(z))^2+(a_0b(z)-b_0a(z))^2},$$

в котором

$$a(z)=\operatorname{Re}g(z),\quad b(z)=\operatorname{Im}g(z);$$

$$a_0=\operatorname{Re}g_0=-\cos t\,\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)},\quad b_0=\operatorname{Im}g_0=-\sin t\,\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}.$$

Функция g является аналитической и справедливо неравенство $g'(z_0)>0$. Следовательно, имеем равенства:

$$\frac{\partial a}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial b}{\partial y}(z_0)=g'(z_0),$$

$$\frac{\partial a}{\partial y}(z_0)=-\frac{\partial b}{\partial x}(z_0)=0.$$

Вычисляя частные производные функции φ, получим соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z_0)=2a_0\frac{\partial a}{\partial x}(z_0)+2b_0\frac{\partial b}{\partial x}(z_0)=a_0 2g'(z_0),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z_0)=2a_0\frac{\partial a}{\partial y}(z_0)+2b_0\frac{\partial b}{\partial y}(z_0)=b_0 2g'(z_0).$$

В результате имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\nu}}(z_0) = a_0 2g'(z_0)\cos t + b_0 2g'(z_0)\sin t.$$

Подстановка a_0 и b_0 в это равенство завершает доказательство равенства (2.1.30).

Пусть точка $z_1 \in G$ такая, что $g(z_1) = g_0$. Точка z_1 является единственным нулём функции F_δ в области G и, как нуль функции F_δ, имеет кратность один. Для произвольной функции $f \in H^\infty(G)$, рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{f(z) - f(z_1)}{F_\delta(z)}.$$

Точка z_1 является устранимой особой точкой функции Φ. Поэтому функция Φ является аналитической в области G. Ограниченность функции f и равенство $|F_\delta(\zeta)| = |\psi_\delta(\zeta)|$, $\zeta \in \Gamma$, влекут и ограниченность функции Φ. Таким образом, функция Φ принадлежит классу Харди $H^\infty(G)$. Следовательно, функция Φ принадлежит классу Харди $H^1(G)$. Тогда Φ представима через свои предельные граничные значения по формуле Грина:

$$\Phi(z) = \int_\Gamma P(z,\zeta)\,\Phi(\zeta)\,|d\zeta|, \quad z \in G. \tag{2.1.32}$$

Подставляя функцию Φ в соотношение (2.1.32), используя определение функции V, и выразив $f(z)$, получим

$$f(z) = F_\delta(z)\int_\Gamma P(z,\zeta)\,\frac{f(\zeta) - f(z_1)}{F_\delta(\zeta)}\,|d\zeta| + f(z_1) =$$

$$= \int_\Gamma P(z,\zeta)\,\frac{F_\delta(z)}{F_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta| - f(z_1)F_\delta(z)V(z) + f(z_1).$$

Применив равенство (2.1.30), вычислим производную f в точке z_0 по направлению $\overline{\nu}$:

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{\nu}}(z_0) = \frac{\partial}{\partial\overline{\nu}}\int_\Gamma P(z,\zeta)\,\frac{F_\delta(z)}{F_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta|\,\Big|_{z_0}.$$

Теперь первое равенство в утверждении теоремы 2.1.3 следует из (2.1.18). Второе и третье равенство в утверждении теоремы следуют из определения (2.1.6) функции F_δ и формулы (2.1.21) для её производной в точке z_0 по направлению $\overline{\nu}$. Теорема 2.1.3 доказана. $\square$

Следствие 2.1.2. *Для произвольной функции* $f \in H^\infty(G)$ *в случае* $|\ln\delta| < \eta(z_0)$ *справедлива следующая формула*:

$$f'(z_0) - T_\delta^1 f = \int_{\gamma_0} I_{z_0}(\zeta)\,\frac{s_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta|.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2.1.3 и определения функционала T_δ^1.

Лемма 2.1.5. *Функция* I_{z_0}, *определённая равенством* (2.1.13), *неотрицательна на кривой* Γ.

Доказательство. Используем равенства

$$P(z_0,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d\tau}{|d\zeta|}, \qquad \frac{\partial P}{\partial\overline{\nu}}(z_0,\zeta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{d\tau}{|d\zeta|}\,g'(z_0)\cos(t-\theta),$$

полученные в лемме 2.1.3. Тогда для функции I_{z_0} имеем представление

$$I_{z_0}(\zeta) = \frac{\kappa(z_0)}{2\pi}\,\frac{d\tau}{|d\zeta|}\left(\ln\delta\cos(t-\theta) + \frac{\eta(z_0)}{2} + \frac{\ln^2\delta}{2\eta(z_0)}\right).$$

Рассмотрим выражение в скобках как квадратный трёхчлен относительно $\ln\delta$. Выражение является неотрицательным, т.к. его дискриминант неположительный: $\cos^2(t-\theta) - 1 \le 0$. Лемма 2.1.3 доказана. $\square$

Теперь рассмотрим свойства функционала T_δ^1, определённого на пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ соотношением (2.1.12) при условии (2.1.10). Более точно, вычислим норму функционала T_δ^1, уклонение (2.1.1) и погрешность восстановления (2.1.4) методом T_δ^1.

Лемма 2.1.6. *Если* $\delta > 0$ *и* z_0 *удовлетворяют условию* (2.1.10), *то справедливы равенства*:

$$\|T^1_\delta\| = \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,\left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0)+\frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right)+\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right], \tag{2.1.33}$$

$$U(T^1_\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,\left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0)+\frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right)-\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right], \tag{2.1.34}$$

$$\mathcal{U}(T^1_\delta,\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,\frac{1}{2}\left(\eta(z_0)+\frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right). \tag{2.1.35}$$

Доказательство. Докажем равенство (2.1.33). Используя неотрицательность функции I_{z_0} и равенство $|F_\delta(\zeta)| = \delta$, $\zeta\in\gamma_1$, для произвольной функции $q\in L^\infty(\gamma_1)$ получим следующую оценку сверху:

$$|T^1_\delta q| = \left|\int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\,\frac{s_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)}\,q(\zeta)\,|d\zeta|\right| \le$$

$$\le |s_\delta(z_0)|\,\delta^{-1}\int_{\gamma_1}\left[\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\,\frac{\partial P}{\partial\overline{\nu}}(z_0,\zeta)+\right.$$

$$\left.+\kappa(z_0)\,\frac{1}{2}\left(\eta(z_0)+\frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right)\,P(z_0,\zeta)\right]\,|d\zeta|\,\|q\|_{L^\infty(\gamma_1)} =$$

$$= \delta^{-\beta}\,\left[\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\,\frac{\partial w}{\partial\overline{\nu}}\bigg|_{z_0}+\kappa(z_0)\,\frac{1}{2}\left(\eta(z_0)+\frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right)\,w(z_0)\right]\,\|q\|_{L^\infty(\gamma_1)} =$$

$$= \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,\left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0)+\frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right)+\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right]\,\|q\|_{L^\infty(\gamma_1)}.$$

Тогда справедлива оценка сверху для нормы функционала:

$$\|T^1_\delta\| \le \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,\left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0)+\frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right)+\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right].$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $\delta^{-1}F_\delta$. Имеем

$$\|T^1_\delta\| \ge |T^1_\delta(\delta^{-1}F_\delta)| = \delta^{-1}|s_\delta(z_0)|\,\left|\int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\,|d\zeta|\right| =$$

$$= \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,\left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0)+\frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right)+\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right].$$

Теперь рассмотрим уклонение (2.1.4) функционала T_δ. По следствию 2.1.2, для произвольной функции $f \in Q$ справедливо следующее равенство:

$$f'(z_0) - T^1_\delta f = \int_{\gamma_0} I_{z_0}(\zeta)\, \frac{s_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta|.$$

Отсюда, аналогично доказательству равенства (2.1.33), получим равенство (2.1.34). Действительно, имеем оценку сверху

$$\left| f'(z_0) - T^1_\delta f \right| \le |s_\delta(z_0)| \int_{\gamma_0} I_{z_0}(\zeta)\, |d\zeta|\, \|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} =$$

$$= \delta^\alpha \left[\frac{\ln \delta}{\eta(z_0)} \left. \frac{\partial(1-w)}{\partial \overline{\nu}} \right|_{z_0} + \right.$$

$$\left. + \kappa(z_0)\, \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)} \right)\, (1 - w(z_0)) \right]\, \|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} =$$

$$= \kappa(z_0)\, \delta^\alpha \left[\frac{\beta}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)} \right) - \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)} \right]\, \|f\|_{L^\infty(\gamma_0)}.$$

Заметим, что верхняя грань в (2.1.4) также достигается на функции F_δ.

Следующие стандартные рассуждения дают оценку величины (2.1.35). Для произвольных функций $f \in Q$ и $q \in L^\infty(\gamma_1)$ имеем

$$|f'(z_0) - T^1_\delta q| \le |f(z_0) - T^1_\delta f| + |T^1_\delta (f - q)| \le U(T^1_\delta) + \|T^1_\delta\|\, \|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)}.$$

Теперь из равенств (2.1.33) и (2.1.34) получим следующую оценку погрешности (2.1.1) метода T^1_δ :

$$\mathcal{U}(T^1_\delta, \delta) \le \kappa(z_0)\, \delta^\alpha \left[\frac{\beta}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)} \right) - \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)} \right] +$$

$$\kappa(z_0)\, \delta^{-\beta} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)} \right) + \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)} \right] \delta =$$

$$= \kappa(z_0)\, \delta^\alpha\, \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)} \right).$$

Для оценки снизу достаточно рассмотреть $f = F_\delta$ и $q \equiv 0$. Лемма доказана. $\square$

2.1.5. Доказательство теорем 2.1.1 и 2.1.2.

Равенства (2.1.14) и (2.1.15) теоремы 2.1.1 следуют из равенства (2.1.23) леммы 2.1.1 и равенства (0.0.11). Оптимальность метода восстановления T_δ^1 в случае (2.1.7) вытекает из леммы 2.1.4 и цепочки соотношений

$$\kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,|\ln\delta| \le \omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) \le \kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|.$$

Соответственно, оптимальность метода восстановления T_δ^1 в случае (2.1.10) вытекает из леммы 2.1.4 и цепочки соотношений

$$\kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,\frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) \le \omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) \le$$

$$\le \mathcal{U}(T_\delta^1,\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,\frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right).$$

Тем самым утверждения теоремы 2.1.1 обоснованы. □

Равенства (2.1.16) и (2.1.17) теоремы 2.1.2 следуют из леммы 2.1.2. Экстремальность функционала T_δ при δ, удовлетворяющем условию (2.1.7), вытекает из леммы 2.1.4, а при условии (2.1.10) – из леммы 2.1.6 и соотношений:

$$\kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,|\beta\ln\delta - 1| \le \Delta(N) \le E(N) \le U(T_\delta^1) = \kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,|\beta\ln\delta - 1|,$$

в которых параметр N задан равенством

$$N = \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,|\alpha\ln\delta + 1|$$

при $|\ln\delta| \ge \eta(z_0)$; соответственно, соотношений

$$\kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,\left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right] \le \Delta(N) \le$$

$$\le E(N) \le U(T_\delta^1) = \kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,\left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right],$$

в которых параметр N задан равенством

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta} \left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) + \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right]$$

при $|\ln\delta| < \eta(z_0)$. Теперь теорема 2.1.2 также доказана. $\square$

§ 2.2. Оптимальное восстановление оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций

В данном параграфе изучаются задачи оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций.

Будем использовать обозначения параграфа 1.4. А именно, Y – это положительное число, являющееся шириной полосы $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < Y\}$, которую, в свою очередь, обозначаем Π_Y; α и β – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице; y, $0 < y < Y$, – положительное число, определяемое равенством $y = \beta Y$. Для произвольной точки z_0, $\operatorname{Im} z_0 = y$, числа α и β являются гармоническими мерами, соответственно, вещественной прямой $\mathbb{R}$ и параллельной ей прямой $\mathbb{R} + iY$ относительно полосы Π_Y в точке z_0; при этом прямая $\mathbb{R} + iy$ является линией уровня γ_α гармонической меры:

$$\gamma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \omega(z, \mathbb{R}, \Pi_Y) = \alpha\} = \{z \in \mathbb{C} : \omega(z, \mathbb{R} + iY, \Pi_Y) = \beta\} = \mathbb{R} + iy.$$

Параметры α, β, y и Y связаны равенствами

$$\alpha = \frac{Y - y}{Y}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{y}{Y}\,.$$

Обозначаем $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ пространство аналитических в полосе Π_Y функций f, след которых на каждой прямой $\mathbb{R} + i\eta$, $0 < \eta < Y$, принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R} + i\eta)$ и для которых

$$\sup\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} : 0 < \eta < Y\} < +\infty.$$

В пространстве $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$, $1 \le p \le \infty$, выделяем класс $Q = Q^p(\Pi_Y)$ функций f, чьи граничные значения на прямой $\mathbb{R} + iY$ удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)} \le 1$.

2.2.1. Постановки задач и основной результат.

В настоящем параграфе рассматриваются задачи оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора дифференцирования на прямой $\gamma_\alpha = \mathbb{R} + iy$ линейными ограниченными операторами на классе Q, а также задача вычисления модуля непрерывности оператора дифференцирования на классе Q; т.е. задачи (0.0.25), (0.0.26) и (0.0.27) при $\gamma_k = \mathbb{R} + iY^k$, $\varphi_k \equiv 1$, $k = 0, 1$, $q = r = p$, $1 \le p \le \infty$, $B = L^p(\mathbb{R} + iy)$ и $A = \Upsilon^1_{\gamma_\alpha}$. Результат будет получен для случая, когда параметры удовлетворяют условию (2.1.7).

Точные постановки рассматриваемых задач таковы. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$ берется одно из следующих: множество $\mathcal{F}$ всех однозначных отображений, множество $\mathcal{L}$ линейных операторов или множество $\mathcal{B}$ линейных ограниченных операторов из $L^p(\gamma_1) = L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\gamma_\alpha) = L^p(\mathbb{R} + iy)$. Восстановление оператора дифференцирования (производной аналитической функции) с помощью оператора $T \in \mathcal{R}$ на функциях класса Q, по их граничным значениям на вещественной оси $\mathbb{R}$, заданных с погрешностью $\delta > 0$, есть величина

$$\mathcal{U}(T, \delta) = \sup\left\{\|f' - Tq\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q,\, q \in L^p(\mathbb{R}),\, \|f - q\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \delta\right\}.$$

Соответственно, величина наилучшего (оптимального) восстановления задаётся равенством

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T, \delta) \,:\, T \in \mathcal{R}\right\}. \tag{2.2.1}$$

Связанные задачи здесь имеют следующую постановку. Функция неотрицательного переменного δ, определяемая равенством

$$\omega(\delta) = \sup\left\{\|f'\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q,\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \delta\right\} \tag{2.2.2}$$

является модулем непрерывности оператора дифференцирования на классе Q. Соответствующее точное неравенство для функций пространства $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ имеет вид

$$\|f'\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)}\, \omega\left(\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)}}\right).$$

Пусть $\mathcal{B}(N)$ есть множество линейных ограниченных операторов из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$, нормы которых $\|T\| = \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\mapsto L^p(\mathbb{R}+iy)}$ не превосходит числа $N>0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|f' - Tf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}\ :\ f \in Q\right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ от оператора дифференцирования на классе Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T)\ :\ T \in \mathcal{B}(N)\right\} \tag{2.2.3}$$

есть наилучшее приближение оператора дифференцирования множеством ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q.

Определим оператор (свертки) $\mathrm{T}^1_\delta = \mathrm{T}^1_\delta[y,Y]$, $\delta>0$, из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$ формулой

$$\left(\mathrm{T}^1_\delta f\right)(x+iy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{T}^1_\delta\,(x-t)\ f(t)\,dt, \tag{2.2.4}$$

с ядром

$$\mathrm{T}^1_\delta(z) = \frac{1}{2Yi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{\sigma(ix-y)}\,\sin\alpha\pi}{\mathrm{ch}(x\pi/Y)+\cos\alpha\pi}\right] = \tag{2.2.5}$$

$$= \frac{ie^{\sigma(ix-y)}}{2Y^2}\left[\frac{\sigma Y\sin\alpha\pi + \pi\cos\alpha\pi}{\mathrm{ch}(x\pi/Y)+\cos\alpha\pi} + \frac{\pi\sin^2\alpha\pi}{(\mathrm{ch}(x\pi/Y)+\cos\alpha\pi)^2}\right], \sigma = \frac{1}{Y}\ln\delta.$$

Заметим, что оператор T^1_δ связан с функционалом T^1_δ, определяемым соотношением (2.1.8), равенством $(\mathrm{T}^1_\delta f)(z_0) = T^1_\delta f$, $z_0 \in \gamma_\alpha = \mathbb{R}+iy$.

Основными результатами параграфа являются следующие две теоремы.

Теорема 2.2.1. *Пусть числа* y, Y *удовлетворяют неравенству* $0 < y < Y$, *число* $\delta > 0$ *такое, что*

$$|\ln\delta| \geq \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}. \tag{2.2.6}$$

Тогда для величин (2.2.1) *и* (2.2.2) *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \frac{1}{Y}\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|\,.$$

При этом оптимальным методом восстановления в задаче (2.2.1) *является линейный ограниченный оператор* T^1_δ, *определённый равенствами* (2.2.4) – (2.2.5).

Условие (2.2.6) совпадает с неравенством (2.1.7) для рассматриваемого случая.

Теорема 2.2.2. *Пусть числа* y, Y *удовлетворяют неравенству* $0 < y < Y$ *и положительное число* N *представимо в виде*

$$N = e^{-\sigma y}\left|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\right|, \quad |\sigma| \geq \frac{\pi}{Y}\,\frac{1}{\sin\alpha\pi}, \quad \sigma\in\mathbb{R}. \tag{2.2.7}$$

Тогда для величины (2.2.3) *справедливо равенство*

$$E(N) = e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|.$$

При этом экстремальным в задаче (2.2.3) *оператором является оператор* T^1_δ, *определенный равенствами* (2.2.4)–(2.2.5), *в котором параметр* δ *задаётся соотношением* $\ln\delta = \sigma Y$.

2.2.2. Вспомогательные утверждения

Введя обозначения

$$\mathrm{k}_{\pm}(x,y) = \frac{e^{-\sigma y}\,\sin\alpha\pi}{\mathrm{ch}(x\pi/Y) \pm \cos\alpha\pi}$$

и дифференцируя равенство (1.4.10) по переменной y, получим следующее утверждение.

Лемма 2.2.1. *Для произвольной функции f из класса Q, $\sigma \in \mathbb{R}$, справедливо равенство*

$$
\begin{aligned}
f'(x+iy) = \frac{1}{2Yi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma(x-t)} \bigg[\frac{\partial}{\partial y} \mathrm{k}_+(x-t,y) f(t) + \\
+ e^{\sigma Y} \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{k}_-(x-t,y) f(t+iY) \bigg] \, dt.
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

Далее потребуются следующие свойства производной по переменной y функций $\mathrm{k}_\pm$.

Лемма 2.2.2. *Условие*

$$
|\sigma| \geq \frac{\pi}{Y} \frac{1}{\sin \alpha\pi} \tag{2.2.9}
$$

является необходимым и достаточным, при котором для произвольных $x \in \mathbb{R}$, $0 < y < Y$ функции $\frac{\partial \mathrm{k}_\pm}{\partial y}$ не меняют знак и справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{k}_+(\cdot, y) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} &= 2e^{-\sigma y} \, |\sigma(Y-y)+1|, \\
\left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{k}_-(\cdot, y) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} &= 2e^{-\sigma y} \, |\sigma y+1|.
\end{aligned}
\tag{2.2.10}
$$

Доказательство. Пусть величина $\xi = \operatorname{ch} \frac{\pi x}{Y}$. Заметим, что $\xi \geq 1$ и, следовательно, $\xi \pm \cos \alpha\pi$ не обращается в нуль. Вычислив произведение $-\frac{Y}{\pi} \, e^{\sigma y} \, (\xi \pm \cos \alpha\pi)^2 \, \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{k}_\pm(x,y)$, обращающееся в нуль одновременно с производными функций $\mathrm{k}_\pm$, получим

$$
\left(\frac{\sigma Y}{\pi} \sin \alpha\pi + \cos \alpha\pi \right) \xi \pm \left(\frac{\sigma Y}{\pi} \sin \alpha\pi \cos \alpha\pi + 1 \right). \tag{2.2.11}
$$

Если обозначить $v = \frac{\sigma Y}{\pi} \sin \alpha\pi$ и $v_0 = \cos \alpha\pi$, то выражения (2.2.11) примут вид

$$
(v+v_0)\xi \pm (v \, v_0 + 1).
$$

Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ или, что тоже самое, для произвольного $\xi \geq 1$ выражения (2.2.11) не меняют знак тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$
\left| \frac{v+v_0}{1+v \, v_0} \right| \geq 1.
$$

Дробно-линейное выражение в последнем неравенстве задаёт автоморфизм единичного круга, поэтому это неравенство эквивалентно соотношению $|v| \geq 1$, т.е. условию (2.2.9).

Теперь, используя знакопостоянство функций $\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{k}_{\pm}(x,y)$ и меняя порядок интегрирования и дифференцирования, получаем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{k}_{\pm}(\cdot,y)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{k}_{\pm}(t,y)\right| dt = \left|\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{k}_{\pm}(t,y)\,dt\right|. \qquad (2.2.12)$$

Вычислив в последнем выражении (2.2.12) интегралы с помощью леммы 1.4.1 и производные, получим равенства (2.2.10). Лемма 2.2.2 доказана.

□

Лемма 2.2.3. *Для произвольного числа* $\delta > 0$ *справедливо неравенство*

$$\omega(\delta) \geq Y^{-1}\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|. \qquad (2.2.13)$$

Доказательство. В случае $p = \infty$ рассмотрим (целую) функцию, определяемую равенством $f_\sigma(z) = e^{i\sigma z}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. На прямой $\mathbb{R} + i\eta$ справедливо тождество $|f_\sigma(x+i\eta)| \equiv e^{-\sigma\eta}$ и, следовательно, $\|f_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+i\eta)} = e^{-\sigma\eta}$. Откуда вытекает, что при любом σ функция $e^{\sigma Y} f_\sigma$ принадлежит классу Q. Введя обозначение $\delta = e^{\sigma Y}$ и используя определение модуля непрерывности (2.2.2), получим оценку

$$\omega(\delta) \geq \|f'_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = |\sigma|\,e^{\sigma(Y-y)} = Y^{-1}\,\delta^{\alpha}|\ln\delta|.$$

Для обоснования оценки снизу (2.2.13) при $1 \leq p < \infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h}\int\limits_{\sigma-h}^{\sigma+h} \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt}dt = e^{i\sigma z}\int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)\,e^{ihzt}\,dt,$$

где $h > 0$ и φ – неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция, с носителем в $[-1, 1]$. Непосредственно из определения функции $f_{\sigma,h}$ следует равенство

$$\|f_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} = h^{-1}e^{-\eta\sigma}\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ih\eta)}.$$

Следовательно, функция $f_{\sigma,h}he^{Y\sigma}/\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihY)}$ принадлежит классу Q. Для производной функции $f_{\sigma,h}$ имеют место соотношения

$$f'_{\sigma,h}(z) = \left(i\sigma f_{0,1}(hz) + ihf'_{0,1}(hz)\right)\, e^{i\sigma z},$$

$$\|f'_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \geq e^{-\sigma y}\left(|\sigma|\, h^{-1}\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihy)} - \|f'_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihy)}\right).$$

Используя обозначение $\delta = e^{\sigma Y}$ и определение модуля непрерывности (2.2.2), для произвольного положительного h получим оценку

$$\omega(\delta) \geq \frac{\|f'_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}\, he^{Y\sigma}}{\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihY)}} \geq \delta^{\alpha}\, \frac{Y^{-1}|\ln\delta|\, \|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihy)} - h\|f'_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihy)}}{\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+ihY)}}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $h \to +0$, получим оценку (2.2.13). Лемма 2.2.3 доказана. □

Теперь получим оценку снизу величины $\Delta(N)$.

Следствие 2.2.1. *Пусть положительное число N имеет представление* (2.2.7). *Тогда справедливо неравенство*

$$\Delta(N) \geq e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|. \tag{2.2.14}$$

Доказательство. Действительно, из определения величины $\Delta(N)$, леммы 2.2.3, обозначив $\delta_\sigma = e^{\sigma Y}$, имеем

$$\Delta(N) \geq \omega(\delta_\sigma) - N\delta_\sigma \geq \frac{1}{Y}\,\delta_\sigma^{\alpha}|\ln\delta_\sigma| - N\delta_\sigma = e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|.$$

□

Для оператора T_δ^1, определённого равенствами (2.2.4) – (2.2.5) в терминах функций k_+ справедливо представление

$$\left(\mathrm{T}_\delta^1 f\right)(x+iy) = \frac{1}{2Yi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma(x-t)}\,\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{k}_+(x-t,y)\,f(t)\,dt.$$

Лемма 2.2.4. *Для оператора* T_δ^1, *определённого равенствами* (2.2.4) – (2.2.5) *и числа* σ, *удовлетворяющего условию* (2.2.9), *имеют место неравенства*

$$U(\mathrm{T}_\delta^1) \le e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|, \quad \|\mathrm{T}_\delta^1\| \le e^{-\sigma y}\left|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\right|. \tag{2.2.15}$$

Доказательство. Из равенства (2.2.8) и формул (2.2.4)–(2.2.5) следует, что

$$f'(x+iy)-(\mathrm{T}_\delta^1 f)(x+iy) = \frac{e^{\sigma Y}}{2Yi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma(x-t)}\,\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{k}_-(x-t,y)\,f(t+iY)\,dt. \tag{2.2.16}$$

Соотношение (2.2.16) означает, что разность $f' - \mathrm{T}_\delta^1 f$ представима в виде свертки функции f на прямой $\mathbb{R}+iY$ с функцией U_δ^1, определённой формулой

$$\mathrm{U}_\delta^1(x) = \frac{e^{\sigma Y}}{2Yi}\,e^{i\sigma x}\,\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{k}_-(x,y). \tag{2.2.17}$$

Для ядра оператора (2.2.5) и уклонения (2.2.17) по лемме 2.2.2 справедливы равенства

$$\|\mathrm{T}_\delta^1\|_{L^1(\mathbb{R})} = e^{-\sigma y}\left|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\right|, \quad \|\mathrm{U}_\delta^1\|_{L^1(\mathbb{R})} = e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|.$$

Отсюда, используя определение оператора (2.2.4) и представление уклонения (2.2.16), получим неравенства

$$\|\mathrm{T}_\delta^1 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le e^{-\sigma y}\left|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\right|\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

$$\|f' - \mathrm{T}_\delta^1 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)}.$$

Откуда следует утверждение леммы 2.2.4. $\square$

Отметим, что неравенства (2.2.15) являются равенствами; экстремальными здесь являются функции f_σ (для $p=\infty$) и семейство функций $f_{\sigma,h}$ (для $1\le p<\infty$), определённые в лемме 2.2.3. Этот факт следует из приведённых далее доказательств основных теорем.

Лемма 2.2.4 позволяет получить оценки сверху для величин $E(N)$ и $\ell(\delta)$.

Следствие 2.2.2. *Пусть положительное число* N *представимо в виде* (2.2.7). *Тогда для величины* (2.2.3) *справедливо неравенство*

$$E(N)\le e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|. \tag{2.2.18}$$

Следствие 2.2.3. *Пусть неотрицательное число* δ *удовлетворяет условию* (2.2.6). *Тогда для величины* $\ell(\delta)$ *справедливо неравенство*

$$\ell(\delta)\le\frac{1}{Y}\,\delta^{\alpha}\,\left|\ln\delta\right|. \tag{2.2.19}$$

Доказательство следствий 2.2.2 и 2.2.3. Согласно определению (2.2.3) величины $E(N)$ и неравенствам (2.2.15), имеем

$$E(N)\le U(\mathrm{T}_\delta^1)\le e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|.$$

Соответственно, из определения величины $\ell(\delta)$ и предыдущего неравенства следует, что

$$\ell(\delta)\le E\left(\|\mathrm{T}_\delta^1\|\right)+\delta\|\mathrm{T}_\delta^1\|\le e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|+\delta e^{-\sigma y}\left|\alpha\sigma+\frac{1}{Y}\right|.$$

Выбрав в правой части последнего неравенства в качестве параметра σ величину $Y^{-1}\ln\delta$ и замечая, что при сделанных предположениях сумма модулей равна модулю суммы, получим неравенство (2.2.19). $\square$

2.2.3. Доказательства теорем 2.2.1 и 2.2.2

Объединив неравенства (0.0.8), (2.2.14) следствия 2.2.1 и (2.2.18) следствия 2.2.2, получим цепочку неравенств

$$e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|\le\Delta(N)\le E(N)\le e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|.$$

Откуда вытекает равенство

$$E(N)=e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|.$$

Это означает, что и в (2.2.15) имеют место равенства, а оператор T^1_δ является экстремальным. Теорема 2.2.2 доказана. $\square$

Объединив неравенства (0.0.9), (2.2.13) леммы 2.2.3 и (2.2.19) следствия 2.2.3, получим цепочку неравенств

$$\frac{1}{Y}\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|\le\omega(\delta)\le\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta)\le\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta)\le\ell(\delta)\le\frac{1}{Y}\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|.$$

Откуда вытекает равенство

$$\omega(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta)=\frac{1}{Y}\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|.$$

В частности, для параметров σ и δ, связанных равенством $\delta=e^{\sigma Y}$, в следующей цепочке

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)\le\mathcal{U}(\mathrm{T}^1_\delta,\delta)\le\sup\left\{\|f'-\mathrm{T}^1_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}\,:\,f\in Q\right\}+$$

$$+\sup\left\{\|\mathrm{T}^1_\delta(f-q)\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}:\|f-q\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\delta\right\}=U(\mathrm{T}^1_\delta)+\|\mathrm{T}^1_\delta\|\delta\le\frac{1}{Y}\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|$$

все неравенства являются равенствами. Это означает экстремальность (линейного ограниченного) оператора T^1_δ. Теорема 2.2.1 доказана. $\square$

§ 2.3. Оптимальное восстановление оператора дифференцирования на классе аналитических в кольце функций

В этом параграфе изучаются задачи оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора дифференцирования на классе аналитических в кольце функций.

Будем использовать обозначения параграфа 1.6: положительные числа r, ρ и R связаны неравенством $0 < r < \rho < R$; $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ – кольцо с центром в нуле, внутренним и внешним радиусами, соответственно, r и R; α и β – положительные числа, определяемые равенствами

$$\alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}.$$

Для произвольной точки z_0, $|z_0| = \rho$, числа α и β являются гармоническими мерами, соответственно, окружностей $\gamma_1 = l_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ и $\gamma_0 = l_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ относительно кольца $C_{r,R}$ в точке z_0; при этом окружность $l_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$ является линией уровня γ_α гармонической меры:

$$\gamma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \omega(z, \gamma_1, C_{r,R}) = \alpha\} = \{z \in \mathbb{C} : \omega(z, \gamma_0, C_{r,R}) = \beta\}.$$

Для (постоянного) веса на окружности l_ϱ будем использовать обозначение $\phi_\varrho \equiv (2\pi\varrho)^{-1}$, $\varrho > 0$.

Класс Харди $H^p(C_{r,R})$, $1 \leq p \leq \infty$, совпадает с классом функций $f \in A(C_{r,R})$ таких, что $\sup\left\{\|f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} : r < \rho < R\right\} < +\infty$. В $H^p(C_{r,R})$ выделим класс $Q = Q^p(C_{r,R})$ функций f чьи граничные значения на окружности $\gamma_0 = l_R$ удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p_{\phi_R}(l_R)} \leq 1$.

2.3.1. Постановки задач и основные результаты

Постановка исследуемого здесь варианта задачи оптимального восстановления (0.0.25) следующая. Величина восстановления производных аналитических в кольце $C_{r,R}$ функций класса Q на окружности $\gamma_\alpha = l_\rho$, у которой центр в нуле и радиус равен ρ, методом $\mathrm{T} \in \mathcal{R}$ по граничным значениям на окружности $\gamma_1 = l_r$ радиуса r, известным с погрешностью $\delta > 0$, задаётся формулой

$$\mathcal{U}(\mathrm{T},\delta) = \sup\left\{\|f' - \mathrm{T}g\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \,:\, f \in Q,\, g \in L^p_{\phi_r}(l_r),\, \|f-g\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \le \delta\right\}.$$

Тогда оптимальное восстановление есть

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(\mathrm{T},\delta) \,:\, \mathrm{T} \in \mathcal{R}\right\}. \tag{2.3.1}$$

Величина (2.3.1) исследуется с помощью теорем A и B, величин модуля непрерывности оператора $\Upsilon^1_{l_\rho}$ и наилучшего приближения оператора $\Upsilon^1_{l_\rho}$ множеством $\mathcal{B}(N)$ линейных ограниченных операторов из $L^p_{\phi_r}(l_r)$ в $L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$ с нормой, не превосходящей $N > 0$, на классе Q. Эти величины, в изучаемом случае, определяются равенствами, соответственно,

$$\omega(\delta) = \sup\left\{\|f'\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \,:\, f \in Q,\, \|f\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \le \delta\right\}, \tag{2.3.2}$$

для модуля непрерывности, и

$$E(N) = \inf\left\{U(\mathrm{T}) \,:\, \mathrm{T} \in \mathcal{B}(N)\right\} \tag{2.3.3}$$

где

$$U(\mathrm{T}) = \sup\left\{\|f' - \mathrm{T}f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \,:\, f \in Q\right\},$$

для наилучшего приближения.

Определим оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu} = \mathrm{T}^1_{\delta_\nu}[r,\rho,R]$, $\nu \in \mathbb{Z}$, из $L^p_{\phi_r}(l_r)$ в $L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$ формулой

$$(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu} f)(\rho e^{ix}) = e^{-ix}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{T}^1_\nu(x-t) f(re^{it})\,dt \tag{2.3.4}$$

с ядром, задаваемым равенствами

$$\begin{gathered}\mathrm{T}^1_\nu(t) = \frac{\partial}{\partial\rho}\mathrm{T}_{\nu,0}(t) = r^{-\nu}e^{i\nu t}\,\lambda^1_\nu(t), \quad \lambda^1_\nu(t) = \frac{\partial}{\partial\rho}\rho^\nu\Lambda_{a,b}(t);\\ \lambda^1_\nu(t) = \lambda^1_{\nu,0} + 2\sum_{k=1}^\infty \lambda^1_{\nu,k}\cos kt,\end{gathered} \tag{2.3.5}$$

где функции $\Lambda_{a,b}$ и $\mathrm{T}_{\nu,0}$ определены формулами (1.6.8) и (1.6.10) параграфа 1.6. Соответственно, коэффициенты $\lambda^1_{\nu,k}$ задаются равенствами

$$\lambda^1_{\nu,0} = \frac{\partial}{\partial\rho}\,(\rho^\nu\,\lambda_0) = \rho^{\nu-1}\,\frac{\nu\ln(\rho/R)+1}{\ln(r/R)},$$

$$\lambda^1_{\nu,k} = \frac{\partial}{\partial\rho}\,(\rho^\nu\,\lambda_k) = \rho^{\nu-1}\,\frac{(\nu+k)(\rho/R)^k-(\nu-k)(R/\rho)^k}{(r/R)^k-(R/r)^k}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Для функций f из пространства Харди $H^p(C_{r,R})$, с представлением в виде ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k\,z^k,$$

оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}$ можно выписать в таком виде

$$\left(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu} f\right)(\rho e^{ix}) = e^{-ix}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda^1_{\nu,k-\nu} f_k\,r^{k-\nu}\,e^{ikx}.$$

Следующие две теоремы являются основными результатами этого параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\delta_\nu = (r/R)^\nu$, *где* $\nu\in\mathbb{Z}$ *и удовлетворяет условию*

$$|\nu| \ge \frac{\pi}{\ln(R/r)}\,\sin^{-1}\left(\frac{\ln(R/\rho)}{\ln(R/r)}\pi\right). \tag{2.3.6}$$

Тогда для величин (2.3.1) *и* (2.3.2) *справедливы равенства*

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu) = |\nu|\rho^{\nu-1}/R^\nu.$$

В этом случае линейный ограниченный оператор $T^1_{\delta_\nu}$, *определённый равенствами* (2.3.4) *и* (2.3.5), *есть оптимальный метод восстановления в задаче* (2.3.1). *Функции* $s_{\delta_\nu}(z) = cz^\nu R^{-\nu}$, $|c|=1$, *являются экстремальными в задаче* (2.3.2).

Теорема 2.3.2. *Пусть параметр* N *имеет представление*

$$N_\nu = \frac{\rho^{\nu-1}\,|\nu\ln(\rho/R)+1|}{r^\nu\,\ln(R/r)},$$

в котором $\nu \in \mathbb{Z}$ *и удовлетворяет условию* (2.3.6). *Тогда для величины* (2.3.3) *справедливо равенство*

$$E(N_\nu) = \frac{\rho^{\nu-1}\,|\nu\ln(r/\rho) - 1|}{R^\nu \ln(R/r)}.$$

В этом случае оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}$, *определённый равенствами* (2.3.4) *и* (2.3.5), *является экстремальным в задаче* (2.3.3).

2.3.2. Вспомогательные утверждения

Дополнительно, рассмотрим оператор (свертки) $V^1_{\delta_\nu} = V^1_{\delta_\nu}[r,\rho,R]$, $\nu \in \mathbb{Z}$, из $L^p_{\phi_R}(l_R)$ в $L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$, определяемый формулой

$$(V^1_{\delta_\nu} f)(\rho e^{ix}) = e^{-ix}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{V}^1_\nu(x-t) f(Re^{it})\,dt, \qquad (2.3.7)$$

с ядром

$$\begin{gathered}\mathrm{V}^1_\nu(t) = \frac{\partial}{\partial\rho}\mathrm{U}_{\nu,0}(t) = R^{-\nu}e^{i\nu t}\,\mu^1_\nu(t), \quad \mu^1_\nu(t) = \frac{\partial}{\partial\rho}\rho^\nu\Lambda_{b,a}(t);\\ \mu^1_\nu(t) = \mu^1_{\nu,0} + 2\sum_{k=1}^\infty \mu^1_{\nu,k}\cos kt,\end{gathered} \qquad (2.3.8)$$

где функции $\Lambda_{b,a}$ и $\mathrm{U}_{\nu,0}$ задаются формулами (1.6.8) и (1.6.10) параграфа 1.6. Соответственно, коэффициенты $\mu^1_{\nu,k}$ определяются равенствами

$$\mu^1_{\nu,0} = \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^\nu\mu_0) = \rho^{\nu-1}\,\frac{\nu\ln(r/\rho) - 1}{\ln(r/R)},$$

$$\mu^1_{\nu,k} = \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^\nu\mu_k) = \rho^{\nu-1}\,\frac{(\nu+k)(\rho/r)^k - (\nu-k)(r/\rho)^k}{(R/r)^k - (r/R)^k}\,,\ k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.3.1. *Для произвольной функции* f *из класса* Q *и* $\nu \in \mathbb{Z}$ *справедливо равенство*

$$f'(\rho e^{ix}) = (\mathrm{T}^1_{\delta_\nu} f)(\rho e^{ix}) + (V^1_{\delta_\nu} f)(\rho e^{ix}), \quad x \in [0, 2\pi]. \qquad (2.3.9)$$

Доказательство. Функция f в кольце $C_{r,R}$ представима как сумма ряда Лорана
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k\, z^k, \quad z \in C_r.$$
Тогда из определений операторов (2.3.4)–(2.3.5) и (2.3.7)–(2.3.8) имеем
$$(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu} f)(\rho e^{ix}) + (V^1_{\delta_\nu} f)(\rho e^{ix}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\lambda^1_{\nu,k} r^k + \mu^1_{\nu,k} R^k)\, f_{\nu+k}\, e^{i(\nu+k-1)x}.$$
Теперь утверждение леммы 2.3.1 следует из равенства
$$\lambda^1_{\nu,k} r^k + \mu^1_{\nu,k} R^k = (\nu + k)\rho^{\nu+k-1}.$$
□

Лемма 2.3.2. *Пусть число* $\nu \in \mathbb{Z}$ *и удовлетворяет условию* (2.3.6). *Функции* λ^1_ν *и* μ^1_ν, *определённые равенствами* (2.3.5) *и* (2.3.8), *имеют один знак, который не изменяется на периоде, т.е.* $\lambda^1_\nu(x)\mu^1_\nu(x) > 0$, $x \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Используем обозначения
$$\mathrm{k}_\pm(x,y) = \frac{e^{-\sigma y}\sin(\alpha\pi)}{\mathrm{ch}\,\dfrac{x\pi}{Y} \pm \cos(\alpha\pi)} = \frac{e^{\nu\ln(\rho/r)} \sin\left(\dfrac{\ln(R/\rho)}{\ln(R/r)}\pi\right)}{\mathrm{ch}\,\dfrac{x\pi}{\ln(R/r)} \pm \cos\left(\dfrac{\ln(R/\rho)}{\ln(R/r)}\pi\right)},$$
$$y = \ln(\rho/r), \quad Y = \ln(R/r), \quad \sigma = -\nu Y^{-1}\ln(R/r).$$
Для функций $\mathrm{k}_\pm$ по лемме 2.2.2 справедливо следующее утверждение. Условие (2.2.9) является необходимым и достаточным, чтобы функции $\dfrac{\partial \mathrm{k}_\pm}{\partial y}$ имели фиксированный знак для всех $x \in \mathbb{R}$ и y, $0 < y < Y$, т.е. для всех ρ, $r < \rho < R$. Условие (2.3.6) при введённых обозначениях эквивалентно условию (2.2.9).

Из определений (2.3.5), (2.3.8) функций λ_ν^1 и μ_ν^1 и леммы 1.6.1 имеем

$$\lambda_\nu^1(x) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^\nu \Lambda_{a,b}(x)\right) = \frac{\pi r^\nu}{\rho\ln(R/r)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{k}_+(x+2\pi k, y),$$

$$\mu_\nu^1(x) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^\nu \Lambda_{b,a}(x)\right) = \frac{\pi r^\nu}{\rho\ln(R/r)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{k}_-(x+2\pi k, y).$$

Следовательно, если число $\nu\in\mathbb{Z}$ и удовлетворяет условию (2.3.6), то в правой части последних равенств каждое слагаемое имеет один знак, не изменяющийся на периоде. Лемма 2.3.2 доказана. $\square$

Следствие 2.3.1. *Пусть число* $\nu\in\mathbb{Z}$ *и удовлетворяет условию* (2.3.6). *Тогда справедливо следующее равенство* $|\lambda_{\nu,0}^1| + |\mu_{\nu,0}^1| = |\nu|\rho^{\nu-1}$.

Доказательство следует из леммы 2.3.2 и цепочки равенств

$$|\lambda_{\nu,0}^1| + |\mu_{\nu,0}^1| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda_\nu^1(t)\,dt\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu_\nu^1(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda_\nu^1(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu_\nu^1(t)\,dt\right| = |\lambda_{\nu,0}^1 + \mu_{\nu,0}^1| = |\nu|\rho^{\nu-1}.$$

$\square$

Лемма 2.3.3. *Пусть число* $\nu\in\mathbb{Z}$ *и удовлетворяет условию* (2.3.6). *Тогда для норм и уклонений оператора* $\mathrm{T}_{\delta_\nu}^1$, *определяемого соотношением* (2.3.4), *справедливы следующие равенства*

$$\|\mathrm{T}_{\delta_\nu}^1\| = \frac{\rho^{\nu-1}\,|\nu\ln(\rho/R)+1|}{r^\nu\,\ln(R/r)}, \tag{2.3.10}$$

$$U(\mathrm{T}_{\delta_\nu}^1) = \frac{\rho^{\nu-1}\,|\nu\ln(r/\rho)-1|}{R^\nu\ln(R/r)}, \tag{2.3.11}$$

$$\mathcal{U}(\mathrm{T}_{\delta_\nu}^1, \delta_\nu) = |\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu}, \quad \delta_\nu = r^\nu R^{-\nu}. \tag{2.3.12}$$

Доказательство. Используя определение оператора $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}$ и лемму 2.3.2, получим следующую оценку сверху для нормы

$$\|\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}\| \le \|\mathrm{T}^1_\nu\|_{L^1(0,2\pi)} = \left|\frac{1}{2\pi r^\nu}\int_0^{2\pi} \lambda^1_\nu(t)\,dt\right| = r^{-\nu}|\lambda^1_{\nu,0}| = \frac{\rho^{\nu-1}\,|\nu\ln(\rho/R)+1|}{r^\nu\,\ln(R/r)}.$$

Теперь равенство (2.3.10) следует из оценки снизу, которую дают функции $c(R/r)^\nu s_{\delta_\nu}(z) = cr^{-\nu}z^n, |c| = 1$.

Из равенства (2.3.9) леммы 2.3.1 следует представление

$$f'(\rho e^{ix}) - (\mathrm{T}^1_{\delta_\nu} f)(\rho e^{ix}) = (V^1_{\delta_\nu} f)(\rho e^{ix}), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Тогда из определения отклонения и с учётом того, что для функции f класса Q справедливо неравенство $\|f\|_{L^p(l_R)} \le 1$, имеем оценку $U(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}) \le \|V^1_{\delta_\nu}\|$. Рассуждая как и в первой части доказательства, мы можем получить равенство $\|V^1_{\delta_\nu}\| = R^{-\nu}|\mu^1_{n,0}|$. Чтобы завершить доказательство равенства (2.3.11) заметим, что уклонение $U(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu})$ и норма оператора $V^1_{\delta_\nu}$ достигаются на функциях $cs_{\delta_\nu}(z) = cR^{-\nu}z^\nu$, $|c| = 1$.

Наконец, покажем, что равенство (2.3.12) верно. Для произвольных функций $f \in Q$ и $g \in L^p_{\phi_r}(l_r)$ имеем

$$\|f' - \mathrm{T}^1_{\delta_\nu} g\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \le \|f' - \mathrm{T}^1_{\delta_\nu} f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} + \|\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}(f-g)\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \le$$

$$\le U(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}) + \|\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}\|\,\|f-g\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)}.$$

Тогда равенства (2.3.10), (2.3.11) и следствие 2.3.1 влекут оценку сверху

$$\mathcal{U}(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}, \delta_\nu) \le U(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}) + \|\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}\|\,(r/R)^\nu = \left(|\mu^1_{\nu,0}| + |\lambda^1_{\nu,0}|\right) R^{-\nu} = |\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu}.$$

Для оценки снизу достаточно рассмотреть $f(z) = s_{\delta_\nu}(z)$ и $g \equiv 0$. Лемма доказана. □

Лемма 2.3.4. *Для произвольного $\nu \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства*

$$\omega(\delta_\nu) \ge |\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu}, \quad \delta_\nu = r^\nu R^{-\nu}; \tag{2.3.13}$$

$$\Delta\left(N_\nu\right) \geq \frac{\rho^{\nu-1}\left|\nu\ln(r/\rho)-1\right|}{R^\nu\ln(R/r)}, \quad N_\nu = \frac{\rho^{\nu-1}\left|\nu\ln(\rho/R)+1\right|}{r^\nu\,\ln(R/r)}. \qquad (2.3.14)$$

Доказательство. Функция $s_{\delta_\nu}(z) = R^{-\nu}z^\nu$ принадлежит классу Q. На окружности l_r радиуса r имеет место тождество $|s_{\delta_\nu}(re^{it})| = r^\nu R^{-\nu}$. Тогда для $\delta_\nu = \|s_{\delta_\nu}\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = r^\nu R^{-\nu}$ справедливо неравенство

$$\omega(\delta_\nu) \geq \|s'_{\delta_\nu}\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} = |\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu}.$$

Имеем цепочку неравенств

$$\Delta(N_\nu) \geq \omega(\delta_\nu) - N_\nu\delta_\nu \geq |\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu} - N_\nu r^\nu R^{-\nu}.$$

Подставляя N_ν в последнее неравенство и используя следствие 2.3.1, получаем неравенство (2.3.14). Лемма 2.3.4 доказана. □

2.3.3. Доказательства теорем 2.3.1 и 2.3.2

Доказательство теоремы 2.3.1. Пусть $\delta_\nu = r^\nu R^{-\nu}$, где $\nu \in \mathbb{Z}$ и удовлетворяет условию (2.3.6). Комбинируя неравенства (0.0.10), (2.3.13) леммы 2.3.4 и равенство (2.3.12) леммы 2.3.3, получим цепочку соотношений

$$|\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu} \leq \omega(\delta_\nu) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu) \leq \mathcal{U}(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}, \delta_\nu) = \nu\rho^{\nu-1}R^{-\nu}.$$

Откуда получаем

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu) = |\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu}.$$

Это означает, что (линейный и ограниченный) оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}$ является оптимальным методом восстановления. Теорема 2.3.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.3.2. Рассмотрим в качестве параметра N величину N_ν, в которой $\nu \in \mathbb{Z}$ и удовлетворяет (2.3.6). Комбинируя неравенства (0.0.8), (2.3.14) леммы 2.3.4 и равенство (2.3.11) леммы 2.3.3, получим цепочку соотношений

$$\frac{\rho^{\nu-1}\left|\nu\ln(r/\rho)-1\right|}{R^\nu\ln(R/r)} \leq \Delta(N_\nu) \leq E(N_\nu) \leq U(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}) = \frac{\rho^{\nu-1}\left|\nu\ln(r/\rho)-1\right|}{R^\nu\ln(R/r)}.$$

Откуда получаем

$$E(N_\nu)=\frac{\rho^{\nu-1}\,|\nu\ln(r/\rho)-1|}{R^\nu\ln(R/r)}.$$

Это означает, что оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu}$ является экстремальным в задаче наилучшего приближения оператора дифференцирования. Теорема 2.3.2 доказана. $\square$

2.3.4. Обобщение экстремального оператора и теоремы 2.3.2

В лемме 2.3.2 было доказано, что если $\nu\in\mathbb{Z}$ и удовлетворяет условию (2.3.6), то непрерывные 2π-периодические функции λ^1_ν и μ^1_ν не обращаются в нуль на $[0,2\pi]$, более точно – $\lambda^1_\nu(t)\mu^1_\nu(t)>0,\ t\in[0,2\pi]$. Следовательно, существует интервал $\widetilde{S}_\nu$ (положительной длины), определяемый равенством

$$\widetilde{S}_\nu=\left\{\eta\in\mathbb{R}\,:\,(\lambda^1_\nu(t)+\eta)(\mu^1_\nu(t)-\eta)>0,\ t\in[0,2\pi]\right\}.$$

Интервал $\widetilde{S}_\nu=(\eta^-_\nu,\eta^+_\nu)$ имеет граничные точки

$$\eta^-_\nu=\max_{t\in[0,2\pi]}\min\{-\lambda^1_\nu(t),\mu^1_\nu(t)\},\quad \eta^+_\nu=\min_{t\in[0,2\pi]}\max\{-\lambda^1_\nu(t),\mu^1_\nu(t)\},$$

которые связаны неравенством $\eta^-_\nu<0<\eta^+_\nu$. Обозначим через S_ν отрезок $[\eta^-_\nu,\eta^+_\nu]$.

Определим оператор (свертки) $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}=\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}[\rho,r],\ \nu\in\mathbb{Z},\ \eta\in\mathbb{R},$ из $L^p(l_r)$ в $L^p(l_\rho)$ формулой

$$(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}f)(\rho e^{ix})=e^{-ix}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Lambda^1_{\nu,\eta}(x-t)f(re^{it})\,dt \tag{2.3.15}$$

с ядром

$$\Lambda^1_{\nu,\eta}(t)=r^{-\nu}e^{i\nu t}\,\big(\lambda^1_\nu(t)+\eta\big). \tag{2.3.16}$$

Следующее утверждение обобщает теорему 2.3.2.

Теорема 2.3.3. *Пусть параметр* N *имеет представление*

$$N_{\nu,\eta} = \frac{1}{r^\nu}\left|\lambda^1_{\nu,0} + \eta\right| = \frac{1}{r^\nu}\left|\rho^{\nu-1}\,\frac{\nu\ln(\rho/R)+1}{\ln(r/R)} + \eta\right|,$$

в котором $\nu \in \mathbb{Z}$ *и удовлетворяет условию* (2.3.6), *а* $\eta \in S_\nu$. *Тогда величина* (2.3.3) *удовлетворяет равенству*

$$E(N_{\nu,\eta}) = \frac{1}{R^\nu}\left|\mu^1_{\nu,0} - \eta\right| = \frac{1}{R^\nu}\left|\rho^{\nu-1}\,\frac{\nu\ln(r/\rho)-1}{\ln(R/r)} - \eta\right|.$$

В этом случае оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}$, *определённый равенствами* (2.3.15) *и* (2.3.16), *является экстремальным в* (2.3.3).

Доказательство теоремы можно провести по схеме доказательства теоремы 2.3.2.

В случае, когда $\nu \in \mathbb{Z}$ и удовлетворяет условию (2.3.6), а $\eta \in S_\nu$, оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}$, определённый формулами (2.3.15) и (2.3.16), также является методом оптимального восстановления. Однако эти операторы не дают новых случаев решения этой проблемы. Точнее, справедливо равенство $\mathcal{U}(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}, \delta_\nu) = |\nu|\rho^{\nu-1}R^{-\nu}$.

§ 2.4. Наилучшее приближение производных аналитических функций одного класса Харди другим классом Харди

В параграфе рассматривается задача (0.0.13) наилучшего приближения класса, состоящего из производных функций класса Харди, аналитических в круге, другим классом Харди функций, аналитических в круге большего радиуса. В последней части параграфа аналогичная задача обсуждается для случая классов функций, аналитических в кольцах. Используем следующие обозначения: $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \varrho\}$ есть круг с центром в нуле радиуса ϱ; $l_\tau = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \tau\}$ – окружность с центром в нуле радиуса τ. Обозначаем через $A(D_\varrho)$ множество аналитических в круге D_ϱ функций; $H^p(D_\varrho)$, $1 \le p \le \infty$, – класс Харди в круге D_ϱ.

Ясно, что для чисел $0 < \rho < R$ имеет место вложение $H^p(D_R) \subset H^p(D_\rho)$.

В $H^p(D_\varrho)$ выделим класс $Q^p(D_\varrho, N)$, $N > 0$, функций, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{H^p(D_\varrho)} = \|f\|_{L^p_{\phi_\varrho}(l_\varrho)} \leq N$. Будем применять обозначение $Q^p(D_\varrho)$ при $N = 1$.

Введем класс $\partial Q^p(D_\varrho)$, состоящий из производных функций класса $Q^p(D_\varrho)$, т.е. $\partial Q^p(G_\varrho) = \{f' \colon f \in Q^p(D_\varrho)\}$. Отметим, что класс $\partial Q^p(D_\varrho)$ не содержится в пространстве Харди $H^p(D_\varrho)$, однако является подмножеством весового пространства Бергмана (подробнее см. [77, §10, п.10.1] и дальнейшие ссылки там).

2.4.1. Постановка и обсуждение задачи

Пусть три числа r, ρ и R связаны неравенствами $0 < r < \rho < R$.

Рассматривается задача (0.0.13) наилучшего приближения класса $\partial Q^p(D_\rho)$ классом $Q^p(D_R, N)$ по норме пространства $L^p_{\phi_r}(l_r)$ (или, что то же самое, по норме пространства $H^p(D_r)$), т.е. величина

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = \\ &= \sup\left\{\mathrm{E}\left(f, Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \colon f \in \partial Q^p(D_\rho)\right\} = \\ &= \sup\left\{\mathrm{E}\left(f', Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \colon f \in Q^p(D_\rho)\right\}. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Будет получен порядок величины (2.4.1) при $N \to +\infty$; в случае, когда параметр N принадлежит некоторой последовательности отрезков, будут получены значение величины наилучшего приближения класса классом и линейный метод, реализующий наилучшее приближение. Помимо того, будет рассмотрена аналогичная задача для классов функций, аналитических в кольцах.

Известны двойственная взаимосвязь задачи о модуле непрерывности неограниченного оператора на классе с соответствующей задачей наилучшего приближения одного класса другим в сопряжённых пространствах и взаимосвязь задачи Стечкина приближения неограниченного оператора ограниченными операторами на классе с соответствующей задачей наилучшего линейного приближения одного класса другим (см. [2]). Наиболее обстоятельно исследована взаимосвязь задачи Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными операторами с задачей наилучшего приближения одного класса дифференцируемых функций вещественной переменной другим классом более гладких функций (подробнее см. [3, 8, 9]). Изучаемая здесь задача (2.4.1) в случае $1 < p < \infty$ является родственной задачам (о модуле непрерывности оператора и наилучшего приближения оператора ограниченными операторами) на классе $H^{p'}(D_{R'})$ для оператора, сопоставляющего следу функции на окружности $l_{r'}$ её производную на окружности $l_{\rho'}$. Оператор рассматривается как оператор из $L^{p'}_{\phi_{r'}}(l_{r'})$ в $L^{p'}_{\phi_{\rho'}}(l_{\rho'})$ с параметрами, определяемыми равенствами $1/p + 1/p' = 1,\ \ r' = 1/R, \rho' = 1/\rho, R' = 1/r$. Эти задачи рассматривались в параграфе 2.2. В дальнейших рассуждениях связь задач явно использоваться не будет. Однако для построения линейного метода, доставляющего наилучшее приближение класса классом (2.4.1), и исследования его свойств будут существенно использоваться идеи построения оператора наилучшего приближения из предыдущего параграфа.

2.4.2. Построение метода приближения

Пусть числа r_0, r, ρ и R связаны неравенствами $0 < r_0 < r < \rho < R$. Для произвольной аналитической в кольце $C_{r_0,\rho} = \{z \in \mathbb{C} \colon r_0 < |z| < \rho\}$ функции f, представимой в $C_{r_0,\rho}$ рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k z^k, \tag{2.4.2}$$

и целого числа ν определим функцию F формулой

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{v}_k\, f_k\, z^{k-1}, \tag{2.4.3}$$

$$\mathrm{v}_\nu = \frac{\nu \ln\rho - \nu\ln r - 1}{\ln R - \ln r}, \quad \mathrm{v}_{\nu+k} = \frac{(\nu-k)\rho^{2k} - (\nu+k)r^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}}, \quad k \neq 0.$$

С помощью теоремы Коши – Адамара нетрудно проверить, что функция F является аналитической в кольце $C_{r_0,R^2/\rho}$ (большем, чем исходное кольцо $C_{r_0,\rho}$, т.к. $R/\rho > 1$). Равенство (2.4.3) нам удобно интерпретировать как определение $\widetilde{V}^1_\nu f = F$ линейного оператора $\widetilde{V}^1_\nu$ из пространства $A(C_{r_0,\rho})$ в пространство $A(C_{r_0,R^2/\rho})$. Отметим, что если функция f является аналитической в круге D_ρ, то для коэффициентов ряда (2.4.2) имеет место свойство $f_k = 0$ для $k < 0$, и, следовательно, $F \in A(D_{R^2/\rho}) \subset H^\infty(D_R) \subset H^p(D_R)$.

Выпишем представление разности $f' - F$ в терминах коэффициентов ряда (2.4.2) функций f :

$$f'(z) - F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k - \mathrm{v}_k)\, f_k\, z^{k-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{l}_k\, f_k\, z^{k-1}, \quad \mathrm{l}_k = k - \mathrm{v}_k, \tag{2.4.4}$$

$$\mathrm{l}_\nu = \frac{\nu\ln R - \nu\ln\rho + 1}{\ln R - \ln r}, \quad \mathrm{l}_{\nu+k} = \frac{(\nu+k)R^{2k} - (\nu-k)\rho^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}}, \quad k \neq 0.$$

Равенство (2.4.4) также можно интерпретировать как определение $\widetilde{\mathrm{T}}^1_\nu f = f' - F$ линейного оператора $\widetilde{\mathrm{T}}^1_\nu$ в пространстве $A(C_{r_0,\rho})$.

Теперь, используя равенство (2.4.3), выразим значения функции F на окружности l_R через значения функции f на окружности l_ρ. Получим представление

$$\begin{aligned} F(Re^{ti}) &= R^{-1}e^{-it} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (R/\rho)^k\, \mathrm{v}_k\ f_k\, \rho^k e^{ikt} = \\ &= R^{-1}e^{-it}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{V}_\nu(t-\tau) f(\rho e^{i\tau})\, d\tau \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

с ядром $\mathcal{V}_\nu$, выражаемым через сумму μ_ν косинус-ряда

$$\mathcal{V}_\nu(t) = (R/\rho)^\nu \; e^{int}\, v_\nu(t); \quad v_\nu(t) = v_{\nu,0} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} v_{\nu,k}\, \cos kt,$$

в котором коэффициенты определяются формулами

$$\begin{gathered} v_{\nu,0} = \mathrm{v}_\nu = \frac{\nu \ln \rho/r - 1}{\ln R/r}, \\ v_{\nu,k} = (R/\rho)^k\, \mathrm{v}_{\nu+k} = (\rho/R)^k\, \mathrm{v}_{\nu-k} = \\ = \frac{(\nu-k)(\rho/r)^k - (\nu+k)(r/\rho)^k}{(R/r)^k - (r/R)^k}, \quad k \geq 1. \end{gathered} \tag{2.4.6}$$

Аналогично, используя равенство (2.4.4), выразим значения функции $f' - F$ на окружности l_r через значения функции f на окружности l_ρ. Имеем представление

$$f'(re^{it}) - F(re^{it}) = r^{-1}e^{-it} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (r/\rho)^k\, \mathrm{l}_k \; f_k\, \rho^k e^{ikt} = \tag{2.4.7}$$

$$= r^{-1}e^{-it}\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{L}_\nu(t-\tau) f(\rho e^{i\tau})\, d\tau$$

с ядром L_ν, выражаемым через сумму l_ν косинус-ряда

$$\mathrm{L}_\nu(t) = (r/\rho)^\nu \; e^{i\nu t}\; l_\nu(t); \quad l_\nu(t) = \, l_{\nu,0} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \, l_{\nu,k}\, \cos kt,$$

с коэффициентами, задаваемыми формулами

$$\begin{gathered} l_{\nu,0} = \mathrm{l}_\nu = \frac{\nu \ln(R/\rho) + 1}{\ln(R/r)}, \\ l_{\nu,k} = (r/\rho)^k\, \mathrm{l}_{\nu+k} = (\rho/r)^k\, \mathrm{l}_{\nu-k} = \\ = \frac{(\nu+k)(R/\rho)^k - (\nu-k)(\rho/R)^k}{(R/r)^k - (r/R)^k}, \quad k \geq 1. \end{gathered} \tag{2.4.8}$$

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение о свойствах функций l_ν и v_ν .

Лемма 2.4.1. *Для целого числа ν, удовлетворяющего неравенству* (2.3.6), *функции $\mathfrak{l}_\nu$ и v_ν не меняют и имеют один знак на периоде, т.е. $\mathfrak{l}_\nu(t)v_\nu(t) > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.*

Доказательство. Функции $\mathfrak{l}_\nu$ и v_ν, определённые равенствами (2.4.8) и (2.4.6), связаны с функциями $\lambda^1_{-\nu}$ и $\mu^1_{-\nu}$, заданными, соответственно, формулами (2.3.5) и (2.3.8), соотношениями

$$\mathfrak{l}_\nu(t) = -\rho^{\nu+1}\,\lambda^1_{-\nu}(t), \quad v_\nu(t) = -\rho^{\nu+1}\,\mu^1_{-\nu}(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Отсюда знакопостоянство функций $\lambda^1_{-\nu}(t)$ и $\mu^1_{-\nu}$ влечёт знакопостоянство функций $\mathfrak{l}_\nu$ и v_ν. Из леммы 2.3.2 следует, что если ν удовлетворяет неравенству (2.3.6), то функции λ^1_ν и μ^1_ν не меняют и имеют один знак на периоде. Ясно, что $-\nu$ удовлетворяет условию (2.3.6) тогда и только тогда, когда тому же условию удовлетворяет число ν. Этот факт завершает доказательство леммы 2.4.1. □

Коэффициенты $\mathfrak{l}_{\nu,0}$ и $v_{\nu,0}$, определённые в (2.4.8) и (2.4.6), являются средними значениями функций $\mathfrak{l}_\nu$ и v_ν на периоде. Формулы (2.4.8) и (2.4.6) влекут, что $v_{\nu,0} + \mathfrak{l}_{\nu,0} = \nu$. Поэтому, если выполнено условие (2.3.6), то как функции $\mathfrak{l}_\nu$, v_ν так и коэффициенты $\mathfrak{l}_{\nu,0}$, $v_{\nu,0}$ имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком ν .

Из леммы 2.4.1 следует, что существует интервал $\widetilde{S}_\nu$ (положительной длины), определяемый равенством

$$\widetilde{S}_\nu = \{\eta \in \mathbb{R} \colon (\,\mathfrak{l}_\nu(t) + \eta)(v_\nu(t) - \eta) > 0,\ t \in [0, 2\pi]\}\,.$$

Интервал $\widetilde{S}_\nu = (\eta^-_\nu, \eta^+_\nu)$ имеет граничные точки

$$\eta^-_\nu = \max_{t\in[0,2\pi]} \min\{-\,\mathfrak{l}_\nu(t), v_\nu(t)\}, \quad \eta^+_\nu = \min_{t\in[0,2\pi]} \max\{-\,\mathfrak{l}_\nu(t), v_\nu(t)\},$$

которые связаны неравенством $\eta^-_\nu < 0 < \eta^+_\nu$. Обозначим через S_ν отрезок $[\eta^-_\nu, \eta^+_\nu]$.

Для целого числа ν, удовлетворяющего неравенству (2.3.6), и числа η из отрезка S_ν определим линейный оператор $\widetilde{V}^1_{\nu,\eta}$ из пространства $A(C_{r_0,\rho})$ в пространство $A(C_{r_0,R})$ равенством

$$\left(\widetilde{V}^1_{\nu,\eta} f\right)(z) = \left(\widetilde{V}^1_{\nu} f\right)(z) - \eta f_\nu z^{\nu-1} = F(z) - \eta f_\nu z^{\nu-1}, \tag{2.4.9}$$

в котором f_ν есть коэффициент с индексом ν ряда Лорана (2.4.2) функции f, а оператор $\widetilde{V}^1_\nu$ со значениями $\widetilde{V}^1_\nu f = F$ определен равенством (2.4.3).

2.4.3. Основной результат

Теорема 2.4.1. *Пусть числа r, ρ, R удовлетворяют неравенствам $0 < r < \rho < R$. Тогда при произвольном p, $1 \le p \le \infty$, справедливы следующие утверждения.*

1. *Для величины (2.4.1) с учётом обозначений*

$$\alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}$$

имеет место порядковое равенство

$$\mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \asymp N^{-\beta/\alpha} \ln^{1/\alpha} N \ \text{ при } N \to +\infty. \tag{2.4.10}$$

2. *Если положительное число N представимо в виде*

$$N_{\nu,\eta} = \rho^{-\nu} R^{\nu-1} (\upsilon_{\nu,0} - \eta), \tag{2.4.11}$$

где ν есть произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.3.6), и η – произвольное число из отрезка S_ν, то для величины (2.4.1) имеет место равенство

$$\mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N_{\nu,\eta})\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = \rho^{-\nu} r^{\nu-1} (\mathfrak{l}_{\nu,0} + \eta). \tag{2.4.12}$$

Здесь $\upsilon_{\nu,0}$ и $\mathfrak{l}_{\nu,0}$ определяются формулами (2.4.6) и (2.4.8).

При этом линейный метод, определённый равенством (2.4.9), доставляет наилучшее приближение класса классом в (2.4.1).

Доказательство. Из замечания к лемме 2.4.1 следует, что для $\eta \in S_n$ функции $l_\nu + \eta$ и $v_\nu - \eta$, а также оба числа $l_{\nu,0} + \eta$ и $v_{\nu,0} - \eta$ положительные.

Убедимся, что функция $\left(\widetilde{V}_{\nu,\eta} f\right)(z) = F(z) - \eta f_\nu z^{\nu-1}$ принадлежит классу $Q^p(D_R, N_{\nu,\eta})$, если $f \in Q^p(D_\rho)$. Как было показано ранее, $F \in H^p(D_R)$. Рассмотрим p-нормы на окружности l_R. Используя представление (2.4.5) и положительность функции $l_\nu - \eta$, имеем

$$\|\widetilde{V}_{\nu,\eta} f\|_{L^p(l_R)} = \left\| F(Re^{it}) - \eta f_\nu R^{\nu-1} e^{i(\nu-1)t} \right\|_{L^p(0,2\pi)} =$$

$$= \left\| \frac{R^{\nu-1}}{2\pi\rho^\nu} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\nu(t-\tau)} (v_\nu(t-\tau) - \eta) f(\rho e^{i\tau})\, d\tau \right\|_{L^p(0,2\pi)} \le$$

$$\le \frac{R^{\nu-1}}{2\pi\rho^\nu} \|f\|_{L^p(\Gamma_\rho)} \int\limits_0^{2\pi} |v_\nu(\tau) - \eta|\, d\tau \le$$

$$\le \frac{R^{\nu-1}}{2\pi\rho^\nu} \int\limits_0^{2\pi} (v_\nu(\tau) - \eta)\ d\tau = \rho^{-\nu} R^{\nu-1} (v_{\nu,0} - \eta) = N_{\nu,\eta}.$$

Рассуждая аналогично, получим оценку приближения производной функции $f \in Q^p(D_\rho)$ методом $\widetilde{V}_{\nu,\eta}$, используя представление (2.4.7) и лемму 2.4.1. Имеем

$$\|f' - \widetilde{V}_{\nu,\eta} f\|_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = \left\| f'(re^{it}) - \left(F(re^{it}) - \eta f_\nu r^{\nu-1} e^{i(\nu-1)t} \right) \right\|_{L^p(0,2\pi)} =$$

$$= \left\| \frac{r^{\nu-1}}{2\pi\rho^\nu} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\nu(t-\tau)} (l_\nu(t-\tau) + \eta) f(\rho e^{i\tau})\, d\tau \right\|_{L^p(0,2\pi)} \le$$

$$\le \frac{r^{\nu-1}}{2\pi\rho^\nu} \int\limits_0^{2\pi} |l_\nu(\tau) + \eta|\, d\tau\, \|f\|_{L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)} \le \frac{r^{\nu-1}}{2\pi\rho^\nu} \int\limits_0^{2\pi} (l_\nu(\tau) + \eta)\ d\tau = \rho^{-\nu} r^{\nu-1} (l_{\nu,0} + \eta).$$

Следовательно, при $N_{\nu,\eta} = \rho^{-\nu} R^{\nu-1} (v_{\nu,0} - \eta)$ для величины (2.4.1) справедлива оценка сверху

$$\mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \le \rho^{-\nu} r^{\nu-1} (l_{\nu,0} + \eta). \tag{2.4.13}$$

Получим для величины (2.4.1) оценку снизу. Функция $\widetilde{s}_\nu(z) = \rho^{-\nu} z^\nu$ принадлежит классу $Q^p(D_\rho)$. Наилучшее приближение её производной $\widetilde{s}'_\nu(z) = \nu\rho^{-\nu} z^{\nu-1}$ классом $Q^p(D_R, N)$ при условии

$$0 \le N \le \nu\rho^{-\nu} R^{\nu-1} \tag{2.4.14}$$

реализует функция $NR^{1-\nu} z^{\nu-1}$ и при этом

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{s}'_\nu, Q^p(D_R, N)\right)_{L^p(l_r)} = \left(\nu\rho^{-\nu} - NR^{1-\nu}\right) r^{\nu-1}.$$

Значение $N_{\nu,\eta} = \rho^{-\nu} R^{\nu-1}(\upsilon_{\nu,0} - \eta)$ удовлетворяет условию (2.4.14). В данном случае будем иметь

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{s}'_\nu, Q^p(D_R, N_{\nu,\eta})\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = \rho^{-\nu} r^{\nu-1}\left(\nu - (\upsilon_{\nu,0} - \eta)\right) = \rho^{-\nu} r^{\nu-1}(\,l_{\nu,0} + \eta).$$

Отсюда следует оценка снизу

$$\begin{gathered} \mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N_{\nu,\eta})\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \ge \\ \ge \mathrm{E}\left(\widetilde{s}'_\nu, Q^p(D_R, N_{\nu,\eta})\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = \rho^{-\nu} r^{\nu-1}(\,l_{\nu,0} + \eta). \end{gathered} \tag{2.4.15}$$

Неравенства (2.4.13) и (2.4.15) влекут утверждение (2.4.12).

Наконец, порядковое равенство (2.4.10) для наилучшего приближения следует из равенства (2.4.12), монотонности величины (2.4.1) по параметру N, и того факта, что величина (2.4.11), к примеру – при $\eta = 0$, стремится к бесконечности при $\nu \to \infty$. Теорема доказана. $\square$

В теореме 2.4.1, в отличие от теоремы 1.6.3 (и, в частности, теоремы C), порядок наилучшего приближения (2.4.1) отличается от порядка величины $\mathrm{E}\left(Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)}$ множителем $\ln^{1/\alpha} N$. Как в теореме 1.6.3, так и в теореме 2.4.1 существует счётное число промежутков, на которых зависимость наилучшего приближения от N линейная; однако отрезок S_ν в теореме 2.4.1 зависит от ν, в отличие от играющего аналогичную роль отрезка $[-\eta_{b,a}, \eta_{a,b}]$ в теореме 1.6.3.

2.4.3. Случай кольца

В этой части рассмотрим задачу для случая классов функций, аналитических в кольце. Пусть $H^p(C_{\varrho_1,\varrho_2})$, $1 \le p \le \infty$, есть пространство Харди функций f, аналитических в кольце C_{ϱ_1,ϱ_2}, таких, что $\sup\{\|f\|_{L^p(l_\tau)}\colon \varrho_1 < \tau < \varrho_2\} < +\infty$. Введём классы функций равенствами

$$Q^p(C_{\varrho_1,\varrho_2}, N) = \left\{f\colon f \in H(C_{\varrho_1,\varrho_2}),\, \|g\|_{L^p(l_{\varrho_2})} \le N\right\}, \quad N > 0;$$

$$\partial Q^p(C_{\varrho_1,\varrho_2}) = \{f'\colon f \in Q^p(C_{\varrho_1,\varrho_2})\}\,.$$

Используя свойства оператора (2.4.9) и факт, что $\widetilde{s}'_\nu(z) = \nu\rho^{-\nu}z^{\nu-1}$ принадлежит классу $\partial Q^p(C_{r_0,\rho})$ для произвольного целого значения параметра ν, и рассуждая аналогично доказательству теоремы 2.4.1, получим следующее утверждение.

Теорема 2.4.2. *Пусть числа r_0, r, ρ и R удовлетворяют условию $0 < r_0 < r < \rho < R$. Тогда при произвольном p, $1 \le p \le \infty$, если положительное число N представимо в виде*

$$N_{\nu,\eta} = \rho^{-\nu}R^{\nu-1}\,|v_{\nu,0} - \eta|\,,$$

где ν есть произвольное целое число, удовлетворяющее неравенству (2.3.6), *и η – произвольное число из отрезка S_ν, то имеет место равенство*

$$\mathrm{E}\,(\partial Q^p(C_{r_0,\rho}), H^p(C_{r,R}, N_{\nu,\eta}))_{L^p_{\phi_r}(l_r)} = \rho^{-\nu}r^{\nu-1}\,|\,l_{\nu,0} + \eta|\,.$$

Здесь $v_{\nu,0}$ и $l_{\nu,0}$ определяются формулами (2.4.6) *и* (2.4.8).

При этом линейный метод, определённый равенством (2.4.9), *доставляет наилучшее приближение класса классом.*

Глава 3. Оптимальное восстановление аналитической в полуплоскости функции по сужению спектральной функции

Глава посвящена исследованию экстремальных задач на классах функций, аналитических в полуплоскости. Будут исследоваться задачи оптимального восстановления функции и производных функции класса по сужению её спектральной функции, и задачи наилучшего приближения класса пространством целых функций экспоненциального типа.

Обозначим через $\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(\Pi_+)$, $1 \le p \le \infty$, пространство функций, аналитических в верхней полуплоскости $\Pi_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, для которых конечна величина $\sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} : y > 0\right\}$. Пространство $\mathcal{H}^p$ наделено нормой

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p} = \sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} : y > 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dx\right)^{1/p} : y > 0\right\}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\|f\|_{\mathcal{H}^\infty} = \sup\left\{|f(z)| : z \in \Pi_+\right\}, \quad p = \infty.$$

Пространство $\mathcal{H}^p$ хорошо исследовано, см., например, [30, гл. VI]. Известно [30, гл. VI, C], что для пространства $\mathcal{H}^p$ имеет место вложение в пространство Харди: $\mathcal{H}^p \subset H^p(\Pi_+), 1 \le p < \infty$. Ясно, что $\mathcal{H}^\infty = H^\infty(\Pi_+)$. Следовательно функции из $\mathcal{H}^p$ обладают всеми свойствами функций класса $H^p(\Pi_+)$. В частности, в дальнейшем будем использовать следующее утверждение.

Лемма 3.0.1. *Пусть* $f \in \mathcal{H}^p, 1 \le p \le \infty$. *Тогда почти всюду на* $\mathbb{R}$ *существуют некасательные предельные граничные значения* $f(\zeta) = \lim\limits_{z \to \zeta} f(z)$, *при этом* $f \in L^p(\mathbb{R})$, *и для точек* $z = x + iy \in \Pi_+, y > 0$, *справедливо* *представление*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z})} \, f(\zeta) \, d\zeta. \qquad (3.0.1)$$

Отметим, что равенство (3.0.1) является формулой Грина, а функция $P(z, \zeta) = \dfrac{y}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z})}$ – плотностью гармонической меры (ядром Пуассона) полуплоскости Π_+.

Определим классы, для которых в данной главе изучаются экстремальные задачи. Для натурального n обозначим через Q_n^p *класс Харди – Соболева* функций из $\mathcal{H}^p$, у которых производная порядка n также принадлежит $\mathcal{H}^p$ и её норма ограничена единицей, т.е.

$$Q_n^p = \left\{ f \in \mathcal{H}^p \, : \, f^{(n)} \in \mathcal{H}^p, \, \|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p} \le 1 \right\}.$$

Аналогичный класс при $n = 0$ – единичный шар $\mathcal{H}^p$, обозначаем Q_0^p :

$$Q_0^p = \{ f \in \mathcal{H}^p \, : \, \|f\|_{\mathcal{H}^p} \le 1 \}.$$

Для функции l вещественной переменной $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $l(t) \, e^{-\beta t} \in L^1(\mathbb{R})$, $\beta \in \mathbb{R}$, будем задавать преобразование Фурье $\widehat{l}$ в точках $w \in \mathbb{R} + i\beta$ следующей формулой

$$\widehat{l}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) \, e^{iwt} \, dt.$$

Если при этом функция $\widehat{l}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R} + i\beta)$, то свертка функции $\widehat{l}(\cdot + i\beta)$ с функциями $f(\cdot + i\alpha)$, где $f \in \mathcal{H}^p, 1 \le p \le \infty$, и $\alpha \ge 0$ определена на прямой $\mathbb{R} + i\eta, \eta = \alpha + \beta$, соотношением

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{l}(x - \tau + i\beta) f(\tau + i\alpha) \, d\tau, \quad z = x + i\eta.$$

При этом из обобщённого неравенства Минковского следует, что функция h принадлежит $L^p(\mathbb{R} + i\eta)$ и справедливо неравенство

$$\|h\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} \le \|\widehat{l}\|_{L^1(\mathbb{R}+i\beta)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\alpha)} \qquad (3.0.2)$$

(см., например, [11, Гл. 1, п. 5], [59, гл. I, Теорема 1.3]).

Пусть $y > 0$. Для пары функций $\varphi \in L^1(\mathbb{R} + iy)$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$ в дальнейшем используем обозначение $\varphi * f$ для свертки функции $\varphi(\cdot + iy)$ с функцией f, т.е.

$$(\varphi * f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z - \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \quad z = x + iy.$$

При $y > 0$ определим на числовой прямой функцию $\epsilon = \epsilon_y$ формулой

$$\epsilon(t) = \epsilon_y(t) = \begin{cases} e^{2yt} & , t < 0; \\ 1 & , t \geq 0. \end{cases} \tag{3.0.3}$$

Функция $\epsilon(t)e^{-\beta t}$ суммируема на прямой $\mathbb{R}$ при $0 < \beta < 2y$. Поэтому преобразование Фурье $\widehat{\epsilon}$ функции ϵ определено в полосе $\Pi_{2y} = \{z \,:\, 0 < \operatorname{Im} z < 2y\}$ и, как нетрудно проверить,

$$\widehat{\epsilon}(z) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{z(z - 2iy)}.$$

Ясно, что $\widehat{\epsilon}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R} + iy)$.

Свертка $\widehat{\epsilon} * f$ функции $\widehat{\epsilon}$ и произвольной функции $f \in \mathcal{H}^p$ в точке $z = x + iy$ совпадает с правой частью формулы (3.0.1). Таким образом, интегральное представление (3.0.1) функций $f \in \mathcal{H}^p$ можно записать в виде

$$f(z) = (\widehat{\epsilon} * f)(z), \quad z = x + iy, \quad y > 0. \tag{3.0.4}$$

Для функции $f \in \mathcal{H}^p, 1 \leq p \leq \infty$, определим функцию ϕ равенством

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} + i\alpha} \frac{f(\zeta)}{(i\zeta)^2} e^{-it\zeta}\, d\zeta, \quad \alpha > 0.$$

Функция ϕ не зависит от α и равна нулю при $t < 0$. Функция φ, вторая (обобщённая) производная функции ϕ, называется *спектральной* для функции f. Соответственно, f является (обобщённым) преобразованием Фурье (обобщённой) функции φ, т.е. они связаны соотношением $f = \widehat{\varphi}$.

Обобщённая функция φ принадлежит множеству $\mathcal{S}'_+$ обобщённых функций медленного роста, обращающихся в нуль на отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ (см., например, [20, гл. 2, §10]). Носитель функции φ называется *спектром* функции f. Таким образом, спектр функции $f \in \mathcal{H}^p$ содержится в $[0, +\infty)$.

Обозначим через φ_σ, $\sigma > 0$, сужение (локальный элемент [20, гл. 2, §5, п. 5]) спектральной (обобщённой) функции φ функции $f \in \mathcal{H}^p$, на интервал $(-\varepsilon, \sigma)$, $\varepsilon > 0$. Отметим, что φ_σ не зависит от ε и имеет носитель в отрезке $[0, \sigma]: \quad \operatorname{supp} \varphi_\sigma \subset [0, \sigma]$.

§ 3.1. Наилучшее приближение класса Харди – Соболева целыми функциями экспоненциального типа; средние поперечники класса

Целыми функциями экспоненциального типа называют (см., например, [11, гл. IV]) целые функции f, которые (в комплексной плоскости $\mathbb{C}$) удовлетворяют неравенству

$$|f(z)| \le \alpha e^{\beta|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.1.1}$$

где числа α, $\beta > 0$ не зависят от точки z. Нижнюю грань σ_f констант β при которых имеет место неравенство (3.1.1) называют типом функции f; известно, что

$$\sigma_f = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|}.$$

Совокупность всех целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, обозначим A_σ. Пусть $A^p_\sigma = A_\sigma \bigcap \mathcal{H}^p$ есть множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, принадлежащих пространству $\mathcal{H}^p$.

Отметим, что по теореме Пэли – Винера – Шварца [76, теорема 7.3.1] целая функция g экспоненциального типа, не превосходящего σ, из пространства $L^p(\mathbb{R})$ имеет спектр в отрезке $[-\sigma, \sigma]$. Тогда для функции g из A^p_σ имеем, что её спектр в $[0, \sigma]$.

Предположим, что параметр p удовлетворяет неравенству $1 \le p \le \infty$, число σ положительное и n натуральное. Обозначим через $\mathrm{E}(Q^p_n, A^p_\sigma)_{\mathcal{H}^p}$ наилучшее приближение по норме пространства $\mathcal{H}^p$ класса Харди – Соболева Q^p_n целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, из A^p_σ, то есть величину

$$\begin{gathered}\mathrm{E}(Q^p_n, A^p_\sigma)_{\mathcal{H}^p} = \sup\left\{\mathrm{E}(f, A^p_\sigma)_{\mathcal{H}^p} \,:\, f \in Q^p_n\right\}, \\ \mathrm{E}(f, A^p_\sigma)_{\mathcal{H}^p} = \inf\left\{\|f-g\|_{\mathcal{H}^p} \,:\, g \in A^p_\sigma\right\}.\end{gathered} \tag{3.1.2}$$

Целые функции экспоненциального типа являются классическим аппаратом приближения функций как вещественной, так и комплексной переменной. Таким приближениям посвящена обширная литература (см., например, монографии [11], [26] и приведённую там библ.). Хорошо известно (см., например, [11, гл. V]), что для наилучшего приближения на числовой оси класса Соболева $W^p_n = \{f \in L^p(\mathbb{R}) \,:\, f^{(n)} \in L^p(\mathbb{R}),\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le 1\}$ целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, справедливо неравенство

$$\mathrm{E}(W^p_n, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R})} \le \mathcal{C}_n\, \sigma^{-n}, \quad \mathcal{C}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(n+1)}}{(2k+1)^{n+1}}.$$

В случаях $p=\infty$ и $p=1$ в последнем неравенстве имеет место равенство. Более того, в работе Г. Г. Магарил-Ильяева [36], в которой введены и исследованы средние поперечники, в частности, показано, что средние ν-поперечники по Колмогорову классов Соболева W^p_n в случаях $p=\infty$, $p=2$, и $p=1$ реализуются на пространстве $A_\sigma \bigcap L^p(\mathbb{R})$, $\sigma = \pi\nu$.

Близкая к исследуемой в параграфе задача для функций, аналитических в круге, хорошо изучена. Пусть $Q^p_n(D)$ есть класс Харди – Соболева функций из пространства Харди $H^p(D)$, аналитических в единичном круге D, у которых производная порядка n также принадлежит $H^p(D)$

и её норма ограничена единицей. Для наилучшего приближения по норме пространства $H^p(D)$ класса $Q_n^p(D)$ пространством $\mathcal{P}_{N-1}$ алгебраических многочленов степени не выше $N-1$ справедливо равенство

$$\mathrm{E}(Q_n^p(D), \mathcal{P}_{N-1})_{H^p(D)} = \frac{(N-n)!}{N!}, \quad n < N,\, 1 \le p \le \infty. \tag{3.1.3}$$

В случае $p = \infty$ это доказано в работе К. И. Бабенко [15]; в случае $1 \le p < \infty$ – в работе Л. В. Тайкова [62]. Более того, в статьях В. М. Тихомирова [64] ($p = \infty$) и Л. В. Тайкова [62] ($1 \le p < \infty$) показано, что величина (3.1.3) является N-мерным поперечником класса $Q_n^p(D)$ в пространстве $H^p(D)$, $1 \le p \le \infty$. Результаты, относящиеся к поперечникам классов аналитических функций, см. [92, Гл. 4; 70; 19] и ссылки там.

Относительно величины $\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{\mathcal{H}^p}$ в настоящем параграфе получим следующее утверждение.

Теорема 3.1.1. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty,\, \sigma > 0,\, n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{\mathcal{H}^p} = \sigma^{-n}. \tag{3.1.4}$$

Для функции $f \in Q_n^p$ и $y > 0$ положим

$$\mathrm{E}(f, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf\left\{\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, g \in A_\sigma\right\},$$

$$\mathrm{E}(f, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf\left\{\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, g \in A_\sigma^p\right\}.$$

Наряду с (3.1.2), будут изучены величины

$$\begin{gathered}\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup\left\{\mathrm{E}(f, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q_n^p\right\},\\ \mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup\left\{\mathrm{E}(f, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q_n^p\right\}\end{gathered} \tag{3.1.5}$$

наилучшего приближения по норме пространства $L^p(\mathbb{R}+iy)$ класса Харди – Соболева Q_n^p целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, и, соответственно, целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, из пространства $\mathcal{H}^p$. Ясно, что величины (3.1.5) связаны неравенством

$$\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

На самом деле, в последнем неравенстве имеет место равенство; точнее – будет доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1.2. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty$, $y > 0$, $\sigma > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{3.1.6}$$

В доказательстве теорем будут построены линейные методы наилучшего приближения, дающие равенства (3.1.4) и (3.1.6).

3.1.1 Построение линейного метода приближения

В этой части параграфа вводится конкретный оператор свертки в $\mathcal{H}^p, 1 \le p \le \infty$ и изучаются его свойства. Впоследствии будет показано, что этот оператор определяет метод наилучшего приближения класса Харди – Соболева Q_n^p целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ.

Пусть $y \ge 0$, $\sigma > 0$ и n – целое неотрицательное число. Определим функцию l переменной $t \in \mathbb{R}$ соотношением

$$l(t) = l[n,\sigma,y](t) = \begin{cases} 1 - (-t)^n (2\sigma + t)^{-n}\, e^{-2y(\sigma+t)} & , -\sigma \le t \le 0; \\ 1 - \qquad t^n (2\sigma - t)^{-n}\, e^{-2y(\sigma-t)} & , 0 < t \le \sigma; \\ 0 & , t \notin [-\sigma, \sigma]. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

В следующем утверждении обсуждаются свойства преобразования Фурье $\widehat{l}$ функции l и её свертки с функциями из пространства Харди $\mathcal{H}^p$, $1 \le p \le \infty$. В частности, доказано, что оператор сверки

$$Lf = \widehat{l} * f, \quad f \in \mathcal{H}^p, \tag{3.1.8}$$

отображает пространство $\mathcal{H}^p$, $1 \le p \le \infty$, в пространство $A_\sigma^p = A_\sigma \cap \mathcal{H}^p$.

Лемма 3.1.1. *При* $y \geq 0$, $\sigma > 0$ *и* $n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы следующие утверждения:*
(a) *функция* $\widehat{l}$ *является целой функцией экспоненциального типа, не превосходящего* σ;
(b) *функция* $|\,\widehat{l}\,|^q$, $1 \leq q < \infty$, *суммируема на любой прямой* $\mathbb{R} + iv$, $v \in \mathbb{R}$, *параллельной вещественной оси; при этом для произвольного* q, $1 \leq q \leq \infty$, *существует константа* M_q *такая, что справедливо неравенство*

$$\|\widehat{l}\|_{L^q(\mathbb{R}+iv)} \leq M_q\, e^{\sigma|v|}, \quad v \in \mathbb{R}; \tag{3.1.9}$$

(c) *свертка* $g = Lf = \widehat{l} * f$ *функции* $\widehat{l}$ *с произвольной функцией* $f \in \mathcal{H}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, *является целой функцией экспоненциального типа, не превосходящего* σ, *из пространства* $\mathcal{H}^p$, *т.е.* $Lf \in A^p_\sigma$;
(d) *формулой* (3.1.8) *определен линейный ограниченный оператор* L *в пространстве* $\mathcal{H}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, *для нормы которого имеет место оценка*

$$\|L\|_{\mathcal{H}^p \to \mathcal{H}^p} \leq \|\widehat{l}\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{3.1.10}$$

Доказательство. (a) Носитель функции l принадлежит отрезку $[-\sigma, \sigma]$. Поэтому $\widehat{l}$ является целой функцией экспоненциального типа, не превосходящего σ. Этот факт хорошо известен и следует из оценок

$$\begin{gathered}|\widehat{l}(z)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{+\sigma} l(t)\, e^{izt}\, dt\right| \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{+\sigma} l(t)\, e^{-vt}\, dt \leq \sigma\pi^{-1} e^{|v|\sigma}, \quad z = u + iv \in \mathbb{C}.\end{gathered} \tag{3.1.11}$$

(b) Рассмотрим функцию l_2, определённую равенством

$$l_2(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt} dl'(t).$$

Дважды взяв по частям интеграл в правой части последнего равенства, учитывая чётность l и свойство $l(\sigma) = l(-\sigma) = 0$, получим представление

$$l_2(z) = c(z) - \frac{z^2}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} l(t)\, e^{izt}\, dt = c(z) - z^2\, \widehat{l}(z),$$

где

$$c(z) = \pi^{-1} \left(l'(\sigma - 0) \cos \sigma z - l'(+0) \right).$$

Откуда имеем

$$\widehat{l}(z) = z^{-2}(c(z) - l_2(z)). \tag{3.1.12}$$

Функция l' нечётная, на отрезке $[0, \sigma]$ неположительная и невозрастающая. Поэтому, используя обозначение

$$M = \max\{|l'(t)| \,:\, t \in [0, \sigma]\} = -l'(\sigma - 0) = 2(n\sigma^{-1} + y),$$

получаем следующие оценки

$$\begin{gathered} |l_2(z)| \leq -\frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} e^{-vt} dl'(t) \leq \\ \leq \pi^{-1} e^{|v|\sigma} (l'(+0) - l'(\sigma - 0)) \leq \pi^{-1} M e^{|v|\sigma}, \end{gathered} \tag{3.1.13}$$

$$\begin{gathered} |c(z)| \leq \pi^{-1} \left| l'(\sigma - 0) \cos \sigma z + l'(+0) \right| \leq \\ \leq \pi^{-1} M \left(e^{|v|\sigma} + 1 \right) \leq 2\pi^{-1} M \, e^{|v|\sigma}. \end{gathered} \tag{3.1.14}$$

Используя равенство (3.1.12) и неравенства (3.1.13), (3.1.14), получаем следующее уточнение оценки (3.1.11) для функции $\widehat{l}$:

$$|\widehat{l}(u + iv)| \leq \pi^{-1} \, \mu(u) \, e^{|v|\sigma}, \quad \mu(u) = \min\{3M \, u^{-2}, \, \sigma\}. \tag{3.1.15}$$

Откуда следует неравенство (3.1.9) с константой

$$M_q = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^q(u) \, du \right)^{1/q} du, \; 1 \leq q < \infty; \quad M_\infty = \sigma/\pi.$$

(c) Так как функция $\widehat{l}$ целая и удовлетворяет неравенству (3.1.15), то для целой функции $g = Lf = \widehat{l} * f$ имеет место представление

$$g(z) = \int_{-\infty + i\alpha}^{+\infty + i\alpha} \widehat{l}(z - \zeta) f(\zeta) d\zeta, \;\; \alpha \geq 0.$$

Покажем, что g является целой функцией экспоненциального типа, не превосходящего σ, т.е. $g = Lf \in A_\sigma$. Используя определение функции

g и неравенство (3.1.9), получим оценку модуля значения функции g в произвольной точке $z = u + iv$

$$|g(z)| \le \|f\|_{H^p} \|\widehat{l}\|_{L^q(\mathbb{R}+iv)} \le \|f\|_{H^p} M_q \, e^{|v|\sigma}, \quad 1/q + 1/p = 1.$$

Убедимся, что $g \in \mathcal{H}^p$. Используя неравенство (3.0.2), для $v \ge 0$ получим

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)} &= \left\| \int_{-\infty+iv}^{+\infty+iv} \widehat{l}(z-\zeta) f(\zeta) d\zeta \right\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)} \le \\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{l}(w)| \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)} \, dw = \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{l}(w)| \, dw \le \|f\|_{H^p} \|\widehat{l}\,\|_{L^1(\mathbb{R})}; \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

так что, действительно, $g \in \mathcal{H}^p$. Таким образом, $g = Lf \in A^p_\sigma$ для любой функции $f \in \mathcal{H}^p$, $1 \le p \le \infty$.

(d) Оценка (3.1.10) содержится в (3.1.16); впрочем, эта оценка, как и (3.1.16), хорошо известна. Лемма доказана. $\square$

В дальнейшем будут использоваться функции $u_j = u_j[n, \sigma, y]$, $j = \overline{1,3}$, переменной $t \in \mathbb{R}$, определённые соотношениями

$$u_1(t) = \begin{cases} \phi(t), & t < \sigma; \\ t^{-n}, & t \ge \sigma; \end{cases} \tag{3.1.17}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} e^{2yt}, & t < -\sigma; \\ (-t)^n \phi(-t) + e^{2yt} - 1, & -\sigma \le t < 0; \\ t^n u_1(t), & t \ge 0; \end{cases} \tag{3.1.18}$$

$$u_3(t) = \begin{cases} t^n \phi(t) - e^{2yt}, & t < -\sigma; \\ t^n \phi(t) - (-t)^n \phi(-t) + (1 - e^{2yt}), & -\sigma \le t < 0; \\ 0, & t \ge 0, \end{cases} \tag{3.1.19}$$

в которых $\phi(t) = (2\sigma - t)^{-n} \, e^{-2y(\sigma - t)}$. Видно, что справедливы равенства

$$\epsilon(t) - l(t) = u_2(t), \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{3.1.20}$$

где функции ϵ и l заданы формулами (3.0.3) и (3.1.7), и

$$t^n u_1(t) - u_2(t) = u_3(t), \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.1.21}$$

В следующих утверждениях рассматриваются свойства преобразования Фурье $\widehat{u_j}$, $j = \overline{1,3}$, функций u_j, $j = \overline{1,3}$, определённых соотношениями (3.1.17) – (3.1.19).

Лемма 3.1.2. *При $y > 0$, $\sigma > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ для преобразования Фурье $\widehat{u_1}$ и $\widehat{u_2}$ функций u_1, u_2 справедливы следующие утверждения:*
(a) функции $\widehat{u_1}$ и $\widehat{u_2}$ являются аналитическими в полосе $\Pi_{2y} = \{z \,:\, 0 < \operatorname{Im} z < 2y\}$;
(b) для произвольного η, $0 < \eta < 2y$, функции $\widehat{u_1}$, $\widehat{u_2}$ и их производные суммируемы на прямой $\mathbb{R} + i\eta$ и, более того, на прямой стремятся к нулю не медленнее чем $|z|^{-2}$ при $z \to \infty$.

Доказательство. (a) Из определений (3.1.17), (3.1.18) следует, что функции u_j, $j = 1, 2$, на отрицательной полуоси удовлетворяют неравенству

$$|u_j(t)| \le Ce^{2yt}, \quad t \in (-\infty, 0),$$

где C – константа, и ограничены на неотрицательной полуоси $[0, +\infty)$. Поэтому, как хорошо известно, преобразования Фурье $\widehat{u_1}, \widehat{u_2}$ функций u_1 и u_2 определены и являются аналитическими функциями в полосе $\Pi_{2y} = \{z \,:\, 0 < \operatorname{Im} z < 2y\}$.

(b) Обозначим $u = u_{jk}$ функцию, задаваемую формулой $u(t) = u_{jk}(t) = t^k u_j(t)$, $j = 1, 2$; $k \in \mathbb{Z}_+$. Функция u непрерывная на $\mathbb{R}$, бесконечно дифференцируемая на всей прямой, кроме (может быть) трёх точек $t_1 = -\sigma$, $t_2 = 0$ и $t_3 = \sigma$, в каждой из которых производная имеет разрыв первого рода с (конечными) скачками $s_l, 1 \le l \le 3$. Величина

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\eta t} |u''(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\eta t} |u''(t)| dt +$$

$$+\int_{t_2}^{t_3} e^{-\eta t}|u''(t)|dt+\int_{t_3}^{+\infty} e^{-\eta t}|u''(t)|dt$$

конечна для всех η, $0<\eta<2y$. Определим в полосе Π_{2y} функцию U формулой

$$U(z)=\int_{-\infty}^{t_1} e^{izt}du'(t)+\int_{t_1}^{t_2} e^{izt}du'(t)+$$

$$+\int_{t_2}^{t_3} e^{izt}du'(t)+\int_{t_3}^{+\infty} e^{izt}du'(t),\quad z\in\Pi_{2y}.$$

Дважды интегрируя по частям, получим для функции U выражение

$$U(z)=\sum_{j=1}^{3} e^{it_j z}s_j-z^2\widehat{u}(z).$$

Откуда вытекает представление для преобразования Фурье $\widehat{u}$ функции u

$$\widehat{u}(z)=z^{-2}\left(\sum_{l=1}^{3} e^{it_l z}s_l-U(z)\right). \tag{3.1.22}$$

Следовательно, для $z\in\mathbb{R}+i\eta$ имеет место неравенство

$$|\widehat{u}(z)|\le\widetilde{M}(\eta)|z|^{-2},\quad \widetilde{M}(\eta)=\sum_{j=l}^{3}|s_j|e^{-t_l\eta}+M(\eta). \tag{3.1.23}$$

Последнее неравенство, в частности, означает, что функция $\widehat{u}$ суммируема на прямой $\mathbb{R}+i\eta$. Для завершения доказательства леммы 3.1.2 осталось отметить, что $\widehat{u}=\widehat{u_{jk}}=(-i)^k\widehat{u}_j^{(k)}$. □

Лемма 3.1.3. *При $y>0$, $\sigma>0$ и $n\in\mathbb{Z}_+$ для преобразования Фурье $\widehat{u_3}$ функции u_3 справедливы следующие утверждения:*

(a) функция $\widehat{u_3}$ является аналитической в полуплоскости $\Pi^-_{2y}=\{z:\operatorname{Im}z<2y\}$;

(b) для произвольного η, удовлетворяющего неравенству $\eta<2y$, функция $\widehat{u_3}$ суммируема на прямой $\mathbb{R}+i\eta$ и в полуплоскости $\Pi^-_\eta=\{z:\operatorname{Im}z<\eta\}$ стремится к нулю не медленнее чем $|z|^{-2}$ при $z\to\infty$.

Доказательство леммы 3.1.3 аналогично доказательству леммы 3.1.2. Дополнительного обоснования требует лишь утверждение (b) . Функция u_3 равна нулю на неотрицательной полуоси, следовательно неравенство (3.1.23) примет вид

$$|\widehat{u}_3(z)| \leq \widetilde{M}(\eta)|z|^{-2}, \quad z = x + i\eta,\ \eta < 2y,$$

$$\widetilde{M}(\eta) = |s_2| + |s_1|e^{\sigma\eta} + M(\eta),$$

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{-\sigma} e^{-\eta t}|u_3''(t)|dt + \int_{-\sigma}^{0} e^{-\eta t}|u_3''(t)|dt.$$

При этом величины $M(\eta)$ и $\widetilde{M}(\eta)$ не возрастают с ростом $-\eta$. □

Лемма 3.1.4. *При* $y > 0$, $\sigma > 0$ *и* $n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$\|\widehat{u_1}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}e^{-y\sigma}.$$

Доказательство. Функция $u_1(t-\sigma)\,e^{-yt}$ переменной t является чётной. Поэтому для преобразования Фурье $\widehat{u_1}$ функции u_1 в точке $z = x + iy$ имеет место представление

$$\widehat{u_1}(z) = e^{i\sigma x}\,I(x), \quad I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (t+\sigma)^{-n}\,e^{-y(t+\sigma)}\,\cos xt\,dt.$$

Дважды взяв по частям последний интеграл, получим представление функции I :

$$I(x) = \frac{1}{\pi x^2}\int_0^{+\infty} \psi''(t+\sigma)\,(1-\cos xt)\,dt.$$

Откуда, учитывая неотрицательность второй производной функции $\psi(t) = t^{-n}\,e^{-yt}$ на полупрямой $(\sigma, +\infty)$, заключаем, что функция $I(x)$ является неотрицательной. Поэтому справедливо равенство

$$\|\widehat{u_1}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\,e^{i\sigma x}\,I(x)\right|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\,dx = \sigma^{-n}e^{-y\sigma}.$$

□

Лемма 3.1.5. *При $y>0$, $\sigma>0$ и $n\in\mathbb{Z}_+$ для произвольной функции $f\in Q_n^p$, $1\le p\le\infty$, имеет место равенство*

$$(\widehat{u_1}*f^{(n)})(z)=i^n\,(\widehat{u_2}*f)(z),\quad z=x+iy.$$

Доказательство. По лемме 3.1.3, функция $\widehat{u_3}$ суммируема на прямой $\mathbb{R}+iy$ и является в полуплоскости $\Pi_y^-=\{z:\Im z<y\}$ аналитической функцией, стремящейся к нулю не медленнее чем $|z|^{-2}$ при $z\to\infty$. Отсюда для любой функции $f\in\mathcal{H}^p$ выполняется равенство

$$(\widehat{u_3}*f)(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u_3}(z-x)f(x)dx=0,\quad z=x+iy.$$

С другой стороны, из равенства (3.1.21) имеем соотношение

$$(\widehat{u_3}*f)(z)=\Big(((-i)^n\widehat{u_1}^{(n)}-\widehat{u_2})*f\Big)(z)=(-i)^n(\widehat{u_1}^{(n)}*f)(z)-(\widehat{u_2}*f)(z).$$

Откуда следует равенство

$$(\widehat{u_1}^{(n)}*f)(z)=i^n\,(\widehat{u_2}*f)(z),\ \ z=x+iy. \qquad (3.1.24)$$

Из свойства свертки

$$(\widehat{u_1}^{(n-k)}*f^{(k)})(z)=-\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(k)}(\zeta)\,d\widehat{u_1}^{(n-k-1)}(z-\zeta)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u_1}^{(n-k-1)}(z-\zeta)\,df^{(k)}(\zeta)=(\widehat{u_1}^{(n-k-1)}*f^{(k+1)})(z),\ \ k\in\mathbb{N},$$

получим равенство

$$(\widehat{u_1}^{(n)}*f)(z)=(\widehat{u_1}*f^{(n)})(z),\ \ z=x+iy.$$

Последнее равенство и (3.1.24) дают утверждение леммы 3.1.5. □

3.1.2. Оценка сверху наилучшего приближения

В этой части параграфа будет вычислено (теорема 3.1.3 и следствие 3.1.1) приближение класса Харди – Соболева линейным оператором L, задаваемым формулой (3.1.8). Откуда будут получены (следствие 3.1.2) оценки сверху величин (3.1.2) и (3.1.5).

Теорема 3.1.3. *При* $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, $y > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *для оператора свертки* (3.1.8) *справедливо равенство*

$$\sup\left\{\|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q_n^p\right\} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{3.1.25}$$

Доказательство. Убедимся, что для уклонения $f - Lf$, где f есть произвольная функция из класса Харди – Соболева Q_n^p, справедливо представление

$$(f - Lf)(z) = (-i)^n\, (\widehat{u_1} * f^{(n)})(z), \quad z = x + iy. \tag{3.1.26}$$

Применим к обеим частям равенства (3.1.20) преобразование Фурье:

$$\widehat{\epsilon}(z) - \widehat{l}(z) = \widehat{u_2}(z), \quad z = x + iy.$$

Рассмотрев свертку обеих частей полученного равенства с произвольной функцией $f \in Q_n^p$

$$\left((\widehat{\epsilon} - \widehat{l}) * f\right)(z) = (\widehat{u_2} * f)(z), \;\; z = x + iy,$$

и применяя соотношение из леммы 3.1.5:

$$(\widehat{u_2} * f)(z) = (-i)^n (\widehat{u_1} * f^{(n)})(z), \;\; z = x + iy,$$

получим равенство

$$\left((\widehat{\epsilon} - \widehat{l}) * f\right)(z) = (-i)^n (\widehat{u_1} * f^{(n)})(z), \;\; z = x + iy.$$

Откуда, используя представление (3.0.4) и определение (3.1.8), получим представление (3.1.26).

Из равенства (3.1.26) и неравенства (3.0.2), аналогично (3.1.16), следует оценка сверху для нормы уклонения

$$\|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|\widehat{u_1} * f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|\widehat{u_1}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} \|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p}\ .$$

Подставляя значение нормы u_1, вычисленное в лемме 3.1.4, получим неравенство

$$\|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma} \|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p}\ .$$

И поэтому для класса Харди – Соболева имеем

$$\sup\left\{\|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q_n^p\right\} \le \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Теперь для доказательства равенства (3.1.25) осталось получить оценку снизу

$$\sup\left\{\|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q_n^p\right\} \ge \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{3.1.27}$$

Рассмотрим функцию f_σ, определённую равенством

$$f_\sigma(z) = \sigma^{-n}\, e^{i\sigma z}.$$

Ясно, что $f_\sigma \in Q_n^\infty$. Так как $l(\sigma) = 0$, то для f_σ имеет место равенство

$$Lf_\sigma(z) = (\widehat{l} * f_\sigma)(z) = \sigma^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{l}(w)\, e^{io(z-w)} dw = \sigma^{-n}\, e^{i\sigma z}\; l(\sigma) \equiv 0.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\sup\left\{\|f - Lf\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in \mathcal{H}_n^\infty\right\} \ge$$

$$\ge \|f_\sigma - Lf_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \|f_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Для обоснования оценки снизу (3.1.27) при $1 \le p < \infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h}\int_\sigma^{\sigma+h} \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\sigma z} \int_0^1 \varphi(t)\, e^{ihzt}\, dt, \quad h > 0,$$

где φ есть неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция, с носителем в $[0,1]$. Нетрудно понять, что $f_{\sigma,h}(z) \in \mathcal{H}^p, p \ge 1$, и $\|f_{\sigma,h}(z)\|_{\mathcal{H}^p} \to \infty$ при $h \to 0$.

Так как носителем функции l является отрезок $[-\sigma,\sigma]$, то справедливо равенство

$$Lf_{\sigma,h} = \frac{1}{h}\int_\sigma^{\sigma+h} l(t)\,\varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt \equiv 0.$$

Для $f_{\sigma,h}^{(n)}$ имеет место представление

$$f_{\sigma,h}^{(n)}(z) = \frac{1}{h}\int_\sigma^{\sigma+h} (it)^n \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt =$$

$$= e^{i\sigma z}\left((i\sigma)^n f_{0,1}(hz) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k h^k (i\sigma)^{n-k} f_{0,1}^{(k)}(hz)\right).$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\sup\left\{\|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in \mathcal{H}_n^p\right\} \geq$$

$$\geq \lim_{h\to+0} \frac{\|f_{\sigma,h} - Lf_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f_{\sigma,h}^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p}} = \lim_{h\to+0} \frac{\|f_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f_{\sigma,h}^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p}} \geq$$

$$\geq \lim_{h\to+0} \frac{e^{-\sigma y}\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)}}{\sigma^n \,\|f_{0,1}\|_{\mathcal{H}^p} + \sum_{k=1}^n C_n^k \,\sigma^{n-k}\, h^k \,\|f_{0,1}^{(k)}\|_{\mathcal{H}^p}} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Теорема 3.1.3 доказана. □

Обозначим через L_0 оператор свертки (3.1.8) в случае $y = 0,$ то есть оператор свертки с преобразованием Фурье функции $l(t; n, \sigma, 0)$.

Следствие 3.1.1. *Для произвольного* $1 \leq p \leq \infty,$ $\sigma > 0, n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$\sup\left\{\|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^p} \,:\, f \in Q_n^p\right\} = \sigma^{-n}.$$

Доказательство. Убедимся, что для произвольной функции $f \in \mathcal{H}^p$ имеет место равенство

$$\lim_{y\to+0} \|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^p}\,. \tag{3.1.28}$$

Для этого оценим сверху следующий модуль

$$\left|\|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} - \|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^p}\right| =$$

$$= \left|\|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \pm \|f - L_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} - \|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^p}\right| \leq$$

$$\leq \|Lf - L_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} + \left|\|f - L_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} - \|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^p}\right|.$$

Теперь для доказательства (3.1.28) достаточно показать, что оба слагаемых в правой части последнего неравенства стремятся к нулю при $y \to +0$.

Для первого слагаемого имеет место оценка сверху

$$\|Lf - L_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|\widehat{v}\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_{\mathcal{H}^p}, \tag{3.1.29}$$

где $\widehat{v}$ есть преобразование Фурье функции v, задаваемой формулой

$$v(t) = l[n,\sigma,0](t) - l[n,\sigma,y](t) = \begin{cases} \phi(-t)\,(1-e^{-2y(\sigma+t)}), & -\sigma \le t \le 0; \\ \phi(\,t\,)\,(1-e^{-2y(\sigma-t)}), & 0 < t \le \sigma; \\ 0, & t \notin [-\sigma,\sigma], \end{cases}$$

в которой $\phi(t) = t^n(2\sigma - t)^{-n}$. Аналогично (3.1.22) можно получить представление функции $\widehat{v}$:

$$\widehat{v}(x) = \pi^{-1}x^{-2}\left(v'(\sigma)\cos xt - v'(0) - \int_0^\sigma v''(t)\cos xtdt\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, для $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{v}(x)| \le \pi^{-1}\min\left\{M_1,\, x^{-2}M_2\right\},$$

в котором

$$M_1 = \|v\|_{L^1(0,\sigma)} \le (1-e^{-2y\sigma})\sigma,$$

$$M_2 = |v'(\sigma)| + |v'(0)| + \|v''\|_{L^1(0,\sigma)} \le$$

$$(2n(n-1) + 8n\sigma^{-1})(1-e^{-2y\sigma}) + (8n+4)y + 4\sigma^{-1}y^2.$$

Отсюда получим оценку

$$\|\widehat{v}\|_{L^1(\mathbb{R})} \le 4\pi^{-1}\sqrt{M_1M_2},$$

в которой правая часть (и следовательно, правая часть (3.1.29)) стремится к нулю при $y \to +0$.

Равенство нулю предела второго слагаемого при $y \to +0$ следует из определения нормы пространства $\mathcal{H}^p$. Точнее, по утверждению (c) леммы 3.1.1, если $f \in \mathcal{H}^p$, то $L_0 f \in \mathcal{H}^p$, тогда и функция $f - L_0 f$ принадлежит пространству $\mathcal{H}^p$ и, следовательно,

$$\lim_{y\to+0}\|f - L_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^p}.$$

Используя равенства (3.1.28) и (3.1.25), для произвольной функции $f \in Q_n^p$ получим оценку сверху

$$\|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^p} \le \sigma^{-n}.$$

Оценку снизу можно получить аналогично оценке снизу в теореме 3.1.3, используя функции f_σ и $f_{\sigma,h}$, а именно

$$\sup\{\|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^\infty} : f \in \mathcal{H}_n^\infty\} \ge \|f_\sigma - L_0 f_\sigma\|_{\mathcal{H}^\infty} = \|f_\sigma\|_{Q^\infty} = \sigma^{-n},$$

при $p = \infty$; а в случае $1 \le p < \infty$:

$$\sup\{\|f - L_0 f\|_{\mathcal{H}^p} : f \in Q_n^p\} \ge$$
$$\ge \lim_{h \to +0} \frac{\|f_{\sigma,h} - L_0 f_{\sigma,h}\|_{\mathcal{H}^p}}{\|f_{\sigma,h}^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p}} = \lim_{h \to +0} \frac{\|f_{\sigma,h}\|_{\mathcal{H}^p}}{\|f_{\sigma,h}^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p}} = \sigma^{-n}.$$

□

Следствие 3.1.2. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы неравенства*

$$\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n} e^{-y\sigma}, \quad y > 0, \tag{3.1.30}$$

$$\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{H^p} \le \sigma^{-n}. \tag{3.1.31}$$

Доказательство. По утверждению (c) леммы 3.1.1, если $f \in \mathcal{H}^p$, то $Lf \in A_\sigma^p$. Отсюда из теоремы 3.1.3 для произвольной функции $f \in Q_n^p$ вытекает неравенство

$$\mathrm{E}(f, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n} e^{-y\sigma},$$

а из следствия 3.1.1 – неравенство

$$\mathrm{E}(f, A_\sigma^p)_{H^p} \le \|f - L_0 f\|_{H^p} \le \sigma^{-n}.$$

Из последних двух неравенств получаем соотношения (3.1.30) и (3.1.31), соответственно. □

3.1.3. Оценка снизу наилучшего приближения

В этой части параграфа будет получена оценка снизу величины (3.1.5) и доказаны теоремы 3.1.1 и 3.1.2.

Лемма 3.1.6. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty$, $y > 0$, $\sigma > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{3.1.32}$$

Доказательство. Пусть τ есть произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\sigma < \tau$, и число δ задаётся равенством $\delta = (\tau - \sigma)/2$. Рассмотрим функцию $H = H_{\tau,\delta,y}$, определённую формулой

$$H(t) = \begin{cases} (t + \delta - \tau)\delta^{-1} & , \ t \in [\tau - \delta, \tau]; \\ (\tau + \delta - t)\delta^{-1} & , \ t \in (\tau, \tau + \delta]; \\ 0 & , \ t \notin [\tau - \delta, \tau + \delta]. \end{cases}$$

Для произвольной функции $f \in \mathcal{H}^p$, $1 \le p \le \infty$, справедливо (точное) неравенство

$$\|f * \widehat{H}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|\widehat{H}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}, \tag{3.1.33}$$

в котором преобразование Фурье $\widehat{H}$ функции H имеет представление

$$\widehat{H}(x) = 2\, e^{i\tau x}\, \frac{1 - \cos\delta x}{\delta\, x^2}.$$

Откуда следует равенство

$$\|\widehat{H}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{H}(x)\, e^{-i\tau x} dx = H(\tau) = 1.$$

Кроме того, так как носителем функции H является отрезок $[\tau - \delta, \tau + \delta]$, не пересекающийся с отрезком $[-\sigma, \sigma]$, то для любой функции $g \in A_\sigma$ справедливо тождество $g * \widehat{H} \equiv 0$.

Убедимся, что в случае $p = \infty$ для функции $f_\tau(z) = \tau^{-n}\, e^{i\tau z}$ элементом наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа σ

при любом $\tau > \sigma$ является нуль. Для любой функции f из $L^\infty(\mathbb{R}+iy)$ вида $f(z) = f_\tau(z) - g(z)$, где $g \in A_\sigma$, имеет место равенство

$$(f * \widehat{H})(z) = f_\tau(z). \tag{3.1.34}$$

Из неравенства (3.1.33) и равенства (3.1.34) для произвольной функции $g \in A_\sigma$ получим соотношения

$$\|f_\tau - g\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \ge \|(f_\tau - g) * \widehat{H}\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \|f_\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \tau^{-n}\, e^{-y\tau}.$$

Следовательно, справедливо равенство $\mathrm{E}(f_\tau, A_\sigma)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \tau^{-n}\, e^{-y\tau}$. Откуда вытекает оценка снизу

$$\mathrm{E}(\mathcal{H}_n^p, A_\sigma)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \ge \lim_{\tau\to\sigma+0} \mathrm{E}(f_\tau, A_\sigma)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \lim_{\tau\to\sigma+0} \tau^{-n}\, e^{-y\tau} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Для обоснования оценки снизу (3.1.32) при $1 \le p < \infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\tau,h}(z) = \frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h} \varphi\left(\frac{t-\tau}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\tau z}\int_0^1 \varphi(t)\, e^{ihzt}\, dt,$$

где функция φ неотрицательна, бесконечно дифференцируема, с носителем в $[0,1]$. Для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}+iy)$ вида $f = f_{\tau,h} - g$, где $g \in A_\sigma$, имеет место равенство

$$f * \widehat{H} = f_{\tau,h} * \widehat{H}.$$

Откуда, используя неравенство (3.1.33), получаем оценку

$$\mathrm{E}(f_{\tau,h}, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf\left\{\|f_{\tau,h} - g\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, g \in A_\sigma\right\} \ge$$

$$\ge \inf\left\{\|(f_{\tau,h} - g) * \widehat{H}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, g \in A_\sigma\right\} = \|f_{\tau,h} * \widehat{H}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

Имеют место представления

$$\left(f_{\tau,h} * \widehat{H}\right)(z) = e^{i\tau z}\int_0^1 \varphi(u)\left(1 - \frac{uh}{\delta}\right) e^{izuh}\, du =$$

$$= e^{i\tau z}\left(f_{0,1}(hz) + \frac{ih}{\delta} f'_{0,1}(hz)\right),$$

$$f^{(n)}_{\tau,h}(z) = \frac{1}{h}\int_{\tau}^{\tau+h} (it)^n \varphi\left(\frac{t-\tau}{h}\right) e^{izt} dt =$$

$$= e^{i\tau z}\left((i\tau)^n f_{0,1}(hz) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k h^k (i\tau)^{n-k} f^{(k)}_{0,1}(hz)\right).$$

Из чего заключаем, что для произвольных $1 \le p < \infty$ и $\tau > \sigma$ справедливо неравенство

$$\mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \lim_{h\to+0} \frac{\mathrm{E}(f_{\tau,h}, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f^{(n)}_{\tau,h}\|_{H^p}} \ge$$

$$\ge \lim_{h\to+0} \frac{e^{-\tau y}\left(\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)} - h\,\delta^{-1}\,\|f'_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)}\right)}{\tau^n\,\|f_{0,1}\|_{H^p} + \sum_{k=1}^n C_n^k\,\tau^{n-k}\,h^k\,\|f^{(k)}_{0,1}\|_{H^p}} = \tau^{-n}\,e^{-y\tau}.$$

Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $\tau \to \sigma + 0$, получим оценку (3.1.32). Лемма 3.1.6 доказана. □

Перейдем к доказательствам теорем 3.1.1 и 3.1.2. Неравенство (3.1.30) следствия 3.1.2 теоремы 3.1.3 и неравенство (3.1.32) леммы 3.1.6 дают цепочку неравенств

$$\sigma^{-n}\,e^{-y\sigma} \le \mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\,e^{-y\sigma}.$$

Откуда следует равенство (3.1.6) теоремы 3.1.2. Соответственно, неравенство (3.1.31) следствия 3.1.2 теоремы 3.1.3 и неравенство (3.1.32) леммы 3.1.6 дают, для произвольного $y > 0$, цепочку неравенств

$$\sigma^{-n}\,e^{-y\sigma} \le \mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \mathrm{E}(Q_n^p, A_\sigma^p)_{\mathcal{H}^p} \le \sigma^{-n}.$$

Откуда следует равенство (3.1.4) теоремы 3.1.1.

3.1.4. Наилучшее приближение класса производных функций класса Харди — Соболева

Пусть m, n суть натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $1 \le m \le n$. Обозначим через $\partial^m Q_n^p$ класс, состоящий из производных порядка m функций класса Харди – Соболева Q_n^p, т.е. $\partial^m Q_n^p = \left\{ f^{(m)} : f \in Q_n^p \right\}$.

Достаточно простым следствием результатов о приближении класса Харди – Соболева является следующее утверждение о наилучшем приближении класса $\partial^m Q_n^p$ пространством A_σ целых функций экспоненциального типа и пространством A_σ^p целых функций экспоненциального типа из $\mathcal{H}^p$.

Теорема 3.1.4. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, *натуральных* n *и* m, $1 \le m \le n$, *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma}, \quad y > 0, \tag{3.1.35}$$

$$\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma)_{\mathcal{H}^p} = \mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma^p)_{\mathcal{H}^p} = \sigma^{m-n}. \tag{3.1.36}$$

Доказательство. Для произвольного $p, 1 \le p \le \infty$, из классического неравенства Колмогорова (см., например, [8, §4, п. 2]) следует, что для произвольной функции $f \in Q_n^p$ её производная порядка m, $1 \le m \le n$, принадлежит $\mathcal{H}^p$. Значит, справедливо вложение $\partial^m Q_n^p \subset Q_{n-m}^p$, которое, вместе с теоремами 3.1.1 и 3.1.2, влечёт оценки сверху

$$\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \mathrm{E}(Q_{n-m}^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma},$$

$$\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma^p)_{\mathcal{H}^p} \le \mathrm{E}(Q_{n-m}^p, A_\sigma^p)_{\mathcal{H}^p} = \sigma^{m-n}.$$

Оценки снизу проводятся аналогично оценкам в предыдущей части параграфа. При $p = \infty$ функция $f_\tau^{(m)}(z) = \tau^{m-n}\, e^{i\tau z}$ принадлежит классу $\partial^m Q_n^p$ и для неё элементом наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа σ, при любом $\tau > \sigma$, является нуль. Отсюда следует необходимая оценка.

Для произвольных $1 \le p < \infty$ и $\tau > \sigma$ справедливо неравенство

$$\mathrm{E}(\partial^m Q^p_n, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \lim_{h\to+0} \frac{\mathrm{E}(f^{(m)}_{\tau,h}, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f^{(n)}_{\tau,h}\|_{H^p}} \ge$$

$$\ge \lim_{h\to+0} \frac{e^{-\tau y}\left(\tau^m \|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)} - \sum_{k=1}^m C^k_m \tau^{m-k} h^k \|f^{(k)}_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)}\right)}{\tau^n \|f_{0,1}\|_{H^p} + \sum_{k=1}^n C^k_n \tau^{n-k} h^k \|f^{(k)}_{0,1}\|_{H^p}} =$$

$$= \tau^{m-n} e^{-y\tau}.$$

Завершение доказательства теоремы 3.1.4 проводится аналогично доказательствам теорем 3.1.1 и 3.1.2. □

Из теоремы 3.1.3 и доказательства теоремы 3.1.4 следует, что оператор L свертки с преобразованием Фурье функции $l[n-m,\sigma,y](t)$

$$Lg = \widehat{l} * g = \widehat{l} * f^{(m)}, \quad g = f^{(m)} \in \partial^m \mathcal{H}^p_n,$$

даёт метод наилучшего приближения класса $\partial^m Q^p_n$ по норме пространства $L^p(\mathbb{R}+iy)$, реализующий равенство (3.1.35). Аналогично, оператор L_0 свертки с преобразованием Фурье функции $l[n-m,\sigma,0](t)$ даёт метод наилучшего приближения класса $\partial^m Q^p_n$ по норме пространства $\mathcal{H}^p$, реализующий равенство (3.1.36).

Для произвольных $m, n \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $L^{(m)}$ оператор свертки с преобразованием Фурье функции $(it)^m l(t; n-m, \sigma, y)$. В случае $0 \le m \le n$ оператор $L^{(m)}$ является оператором свертки с производной порядка m преобразования Фурье функции $l(t; n-m, \sigma, y)$, то есть оператор, определяемый равенством

$$L^{(m)} f = L f^{(m)} = \widehat{l} * f^{(m)} = \widehat{l}^{(m)} * f, \quad f \in \mathcal{H}^p. \tag{3.1.37}$$

Соответственно, через $L^{(m)}_0$ обозначим оператор свертки (3.1.37) в случае $y = 0$, то есть оператор свертки с преобразованием Фурье функции $(it)^m l(t; n-m, \sigma, 0)$.

3.1.4. Средние поперечники $\mathcal{H}_n^p$

Введём обозначения для шаров пространства $L^p(\mathbb{R}+iy)$:

$$NB(p,y) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}+iy) \,:\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le N \right\}; \quad B(p,y) = 1B(p,y).$$

Введем средние поперечники класса Q_n^p, используя определения из работы [36]. Для $f \in L^p(\mathbb{R}), \alpha > 0$ положим $(P_\alpha f)(x) = f(x)$, если $x \in [-\alpha, \alpha]$ п.в., и $(P_\alpha f)(x) = 0$, вне отрезка. Обозначим через $Lin_c(L^p(\mathbb{R}))$ совокупность подпространств Y из $L^p(\mathbb{R})$, для которых при каждом $\alpha > 0$ сужение P_α на Y есть компактный оператор.

Средним ν-поперечником класса Q_n^p по Колмогорову в пространстве $L^p(\mathbb{R}+iy)$ является величина

$$\overline{d}_\nu(Q_n^p, L^p(\mathbb{R}+iy)) = \inf \Big\{ \mathrm{E}(Q_n^p, Y_\nu)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,: \\ Y_\nu \in Lin_c(L^p(\mathbb{R}+iy)), \overline{\dim}\,(Y_\nu, L^p(\mathbb{R}+iy)) \le \nu \Big\},$$

где нижняя грань берётся по подпространствам Y_ν из $Lin_c(L^p(\mathbb{R}+iy))$, имеющим среднюю размерность, не превосходящую ν. Подпространство, на котором эта нижняя грань достигается, назовем экстремальным для ν-поперечника класса Q_n^p по Колмогорову в пространстве $L^p(\mathbb{R}+iy)$.

Средним линейным ν-поперечником класса Q_n^p в пространстве $L^p(\mathbb{R}+iy)$ является величина

$$\overline{\lambda}_\nu(Q_n^p, L^p(\mathbb{R}+iy)) = \inf \Big\{ \sup \Big\{ \|f - Lf\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q_n^p \Big\} \,:\, (Y, L) \Big\},$$

где нижняя грань берётся по всем парам (Y, L) таким, что Y есть нормированное пространство, $Y \subset L^p(\mathbb{R}+iy)$, $Q_n^p \subset Y$, и $L \in \mathcal{L}(Y, L^p(\mathbb{R}+iy))$, при этом $LY \subset L^p(\mathbb{R}+iy)$, $\overline{\dim}\,(LY, L^p(\mathbb{R}+iy)) \le \nu$. Пару, на которой эта нижняя грань достигается, будем называть экстремальной для линейного ν-поперечника класса Q_n^p.

Средним ν-поперечником класса Q_n^p по Бернштейну в пространстве $L^p(\mathbb{R}+iy)$ является величина

$$\overline{\lambda}_\nu(Q_n^p, L^p(\mathbb{R}+iy)) = \sup\Big\{\sup\Big\{N \,:\, N>0,\, Y\bigcap NB(p,y)\subset Q_n^p\Big\} \,:\, Y\Big\},$$

где верхняя грань берется по всем подпространствам $Y\subset Lin_c(\mathbb{R}+iy)$ таким, что $\overline{\dim}\,(Y, L^p(\mathbb{R}+iy))>\nu$ и $\overline{d}_\nu(Y\bigcap B(p,y), L^p(\mathbb{R}+iy))=1$.

Покажем, что пространство A_σ^p, $1\le p\le\infty$, и оператор L, задаваемый равенством (3.1.8), являются экстремальными для средних поперечников (реализуют поперечники) класса Харди – Соболева Q_n^p. Будем использовать стандартный подход, получая оценку снизу с помощью неравенства Бернштейна и оценку сверху из теоремы 3.1.3.

Вначале рассмотрим хорошо известное неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа. Для произвольной функции $f\in A_\sigma\bigcap L^p(\mathbb{R})$, $0\le p\le\infty$, – целой экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma>0$, след которой на вещественной оси принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R})$, и произвольного натурального n справедливо точное неравенство

$$\|f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\sigma^n\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \qquad (3.1.38)$$

Это неравенство и его обобщения исследовали С. Н. Бернштейн, А. Зигмунд, В. В. Арестов, Р. П. Боас, К. И. Рахман, Г. Шмайссер и другие (см. работы [5, 96], [81, Гл. 11] и приведённую в них библиографию).

Кроме того, известно следующее утверждение, связывающее нормы целых функций на двух прямых. Для произвольной функции $f\in A_\sigma\bigcap L^p(\mathbb{R})$, $0\le p\le\infty$, справедливо неравенство

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}\le e^{\sigma|y|}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})},\quad y\in\mathbb{R}. \qquad (3.1.39)$$

Неравенство (3.1.39) получено в работе М.順 Планшереля и Г. Полиа [95], различные обобщения изучали Р. П. Боас, Дж. Кореваар, С. М. Никольский (см. [81, Гл. 6, п. 7] и ссылки там).

Следующее утверждение объединяет неравенства (3.1.38) и (3.1.39) при $p = \infty$. Если целая функция $f \in A_\sigma$ ограничена на какой-либо прямой, то для произвольного $n \in \mathbb{Z}_+$ производная $f^{(n)}$ (сама функция при $n = 0$) ограничена на произвольной параллельной прямой. Более точно, для произвольной функции $f \in A_\sigma \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$ и точки $z = x + iy$ при $n \geq 0$ справедливо неравенство [11, гл. 4, п. 83]

$$|f^{(n)}(z)| \leq \sigma^n \, e^{\sigma|y|} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{3.1.40}$$

В дальнейшем нам потребуется утверждение, обобщающее неравенство (3.1.40) на L^p -средние.

Лемма 3.1.7. *Для произвольной функции* $f \in A_\sigma \bigcap L^p(\mathbb{R} + iy)$, $y \in \mathbb{R}$, *при* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* $0 < p \leq \infty$ *справедливо неравенство*

$$\|f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \sigma^n \, e^{\sigma|y|} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}. \tag{3.1.41}$$

Доказательство. Неравенство (3.1.41) следует из неравенств (3.1.38) и (3.1.39). □

Отметим, что для обоснования (при $1 \leq p \leq \infty$) точности неравенства (3.1.41) при $p = \infty$ достаточно рассмотреть функции $f_\sigma(z) = e^{i\sigma z}$, а при $1 \leq p < \infty$ – функции

$$f_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h} \int_{\sigma-h}^{\sigma} \varphi\left(\frac{t-\sigma+h}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i(\sigma-h)z} \int_0^1 \varphi(u) e^{izuh} du,$$

где $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,1]$, $\varphi \geq 0$.

Следствием неравенств (3.1.38) и (3.1.41) является утверждение

Следствие 3.1.3. *Пусть* $y \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *и функция* $f \in A^p_\sigma$, $1 \leq p \leq \infty$, *тогда* $f^{(n)}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{H}^p$ *и справедливы точные неравенства*

$$\|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p} \leq \sigma^n \, e^{\sigma y} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}; \tag{3.1.42}$$

$$\|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p} \leq \sigma^n \, \|f\|_{\mathcal{H}^p}. \tag{3.1.43}$$

Доказательство. Пусть $f \in A^p_\sigma$, тогда для произвольного $\eta > 0$ из неравенства Бернштейна (3.1.38) имеем оценку

$$\|f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} \le \sigma^n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} \le \sigma^n \|f\|_{\mathcal{H}^p},$$

следовательно, $f^{(n)} \in \mathcal{H}^p$. Тогда из неравенств (3.1.38), (3.1.41) и вытекающего из определения $\mathcal{H}^p$-среднего равенства $\|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p} = \|f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R})}$ следуют неравенства (3.1.42) и (3.1.43). Следствие 3.1.3 доказано. $\square$

Из следствия 3.1.3 получаем решение двух экстремальных задач.

Следствие 3.1.4. *Для произвольных* $p,\ 1 \le p \le \infty,\ \ y \ge 0,\ \ \sigma > 0$ *справедливы равенства*

$$\sup\left\{N\ :\ N > 0,\ A^p_\sigma \bigcap N\mathcal{H}^p_0 \subset \mathcal{H}^p_n\right\} = \sigma^{-n};$$

$$\sup\left\{N\ :\ N > 0,\ A^p_\sigma \bigcap NB(p,y) \subset \mathcal{H}^p_n\right\} = \sigma^{-n}e^{-\sigma y}.$$

Для оценки снизу среднего ν-поперечника по Бернштейну вычислим среднюю размерность и поперечник единичного шара пространства A^p_σ при $1 \le p \le \infty$. Эти величины будут получены из следующих результатов [36, лемма 2.1, теорема 5.4 (б)]: если $\sigma > 0$ и $1 \le p \le \infty$, то

$$\overline{\dim}\left(A_\sigma \bigcap L^p(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right) = \frac{\sigma}{\pi}; \tag{3.1.44}$$

если $\sigma > 0,\ 1 \le p \le \infty$ и $\nu < \sigma/\pi$, то

$$\overline{d}_\nu\left(A_\sigma \bigcap B(p,0), L^p(\mathbb{R})\right) = 1. \tag{3.1.45}$$

Лемма 3.1.8. *Для произвольных* $\sigma > 0,\ y \ge 0,\ 1 \le p \le \infty$ *справедливо равенство*

$$\overline{\dim}\,(A^p_\sigma, L^p(\mathbb{R}+iy)) = \frac{\sigma}{2\pi}.$$

Для произвольных $\sigma > 0,\ y \ge 0,\ 1 \le p \le \infty$ *и* $\nu < \dfrac{\sigma}{2\pi}$ *справедливо равенство*

$$\overline{d}_\nu\left(A^p_\sigma \bigcap B(p,y), L^p(\mathbb{R}+iy)\right) = 1.$$

Доказательство. Ясно, что если утверждение леммы справедливо при $y = 0$, то и для произвольного $y \geq 0$. Покажем, что множество целых функций

$$\widetilde{A}^p_\sigma = \Big\{ G \,:\, G(z) = e^{i\sigma z/2}\, g(z),\; g \in A_{\sigma/2} \bigcap L^p(\mathbb{R}),\; z \in \mathbb{C} \Big\}$$

совпадает с пространством A^p_σ.

Произвольная функция $G \in \widetilde{A}^p_\sigma$, как произведение двух функций из $A_{\sigma/2}$, принадлежит A_σ. Для любого $\eta > 0$ и функции $G(z) = e^{i\sigma z/2}\, g(z)$, $z = x + i\eta$, из неравенства (3.1.39) получим оценку

$$\|G\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} = e^{-\sigma\eta/2} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} \leq e^{-\sigma\eta/2} \cdot e^{\sigma\eta/2} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Отсюда $G \in \mathcal{H}^p$; таким образом, $G \in A^p_\sigma$. Это означает справедливость вложения $\widetilde{A}^p_\sigma \subset A^p_\sigma$.

Получим обратное вложение, используя теорему Пэли – Винера – Шварца. Произвольная функция $G \in A^p_\sigma$ имеет спектр в отрезке $[0, \sigma]$. Тогда $g(z) = e^{-i\sigma z/2}\, G(z)$ имеет спектр в отрезке $[-\sigma/2, \sigma/2]$, отсюда $g \in A_{\sigma/2}$, при этом $\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|G\|_{L^p(\mathbb{R})}$. Это означает справедливость вложения $A^p_\sigma \subset \widetilde{A}^p_\sigma$.

В результате получили равенство $A^p_\sigma = \widetilde{A}^p_\sigma$. Теперь утверждение леммы следует из равенств (3.1.44) и (3.1.45). $\square$

Теорема 3.1.5. *При произвольном* $1 \leq p \leq \infty$, $y \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\sigma = 2\pi\nu$, $\nu > 0$ *для средних* ν*-поперечников класса Харди – Соболева* Q^p_n *справедливы равенства*

$$\overline{b}_\nu(Q^p_n, L^p(\mathbb{R}+iy)) = \overline{d}_\nu(Q^p_n, L^p(\mathbb{R}+iy)) = \overline{\lambda}_\nu(Q^p_n, L^p(\mathbb{R}+iy)) = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Пространство A^p_σ *и оператор* L, *задаваемый равенством* (3.1.8), *являются экстремальными для средних поперечников класса Харди – Соболева* Q^p_n.

Доказательство. Из определений средних поперечников следует [36] цепочка неравенств

$$\overline{b}_\nu(Q_n^p, L^p(\mathbb{R}+iy)) \le \overline{d}_\nu(Q_n^p, L^p(\mathbb{R}+iy)) \le \overline{\lambda}_\nu(Q_n^p, L^p(\mathbb{R}+iy)).$$

Следствие 3.1.4 и лемма 3.1.8 дают оценку снизу среднего ν-поперечника по Бернштейну

$$\overline{b}_\nu(Q_n^p, L^p(\mathbb{R}+iy)) \ge \sigma^{-n}\, e^{-\sigma y}.$$

Из теоремы 3.1.3 следует оценка сверху среднего линейного ν-поперечника

$$\overline{\lambda}_\nu(Q_n^p, L^p(\mathbb{R}+iy)) \le \sigma^{-n}\, e^{-\sigma y}.$$

Теорема 3.1.5 доказана. □

§ 3.2. Оптимальное восстановление по сужению спектральной функции

В настоящем параграфе исследуется задача оптимального восстановления аналитической в полуплоскости Π_+ функции f и её производных на прямой $\mathbb{R}+iy$, $y>0$, по известной информации о функции – сужении φ_σ, $\sigma>0$, её спектральной функции на $(-\varepsilon,\sigma)$. Информация о функции не полная, т.е. информационный оператор $I_\sigma f = \varphi_\sigma$ не является инъективным. В качестве дополнительной априорной информации рассмотрим принадлежность f классу Харди – Соболева $Q_n^p = Q_n^p(\Pi_+)$.

Формальная постановка задачи следующая. Класс $I_\sigma Q_n^p$ состоит из обобщённых функций из $\mathcal{S}'$ с носителем в отрезке $[0,\sigma]$, являющихся сужениями спектральных функций для функций f класса Q_n^p на интервал $(-\varepsilon,\sigma)$, $\varepsilon>0$. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$ рассматриваем либо множество $\mathcal{F}$ всех возможных, либо $\mathcal{L}$ линейных отображений, определённых на $I_\sigma Q_n^p$, в пространство $L^p(\mathbb{R}+iy)$.

Для метода $\Phi \in \mathcal{R}$ равенство

$$\mathcal{U}[\Phi, m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup\left\{\|f^{(m)} - \Phi\varphi_\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q_n^p,\, I_\sigma f = \varphi_\sigma\right\}$$

определяет величину восстановления производной порядка m функции f (функции f, при $m = 0$) методом Φ на классе Q_n^p по норме пространства $L^p(\mathbb{R}+iy)$. Величиной оптимального восстановления является

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf\left\{\mathcal{U}[\Phi, m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, \Phi \in \mathcal{R}\right\}. \qquad (3.2.1)$$

Задача состоит в вычислении величины оптимального восстановления (3.2.1) и построении оптимального метода (последовательности) на котором в (3.2.1) достигается нижняя грань.

Кроме задачи (3.2.1) будет получено решение аналогичной задачи оптимального восстановления по норме пространства $\mathcal{H}^p$. А именно, будет вычислена величина

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_{\mathcal{R}}[m, \sigma, n]_{\mathcal{H}^p} = \inf\left\{\mathcal{U}[\Phi, m, \sigma, n]_{\mathcal{H}^p} \,:\, \Phi \in \mathcal{R}\right\}, \\ \mathcal{U}[\Phi, m, \sigma, n]_{\mathcal{H}^p} = \sup\left\{\|f^{(m)} - \Phi\varphi_\sigma\|_{\mathcal{H}^p} \,:\, f \in Q_n^p,\, I_\sigma f = \varphi_\sigma\right\},\end{gathered} \qquad (3.2.2)$$

и найден соответствующий оптимальный метод восстановления.

Для нас представляет интерес следующий результат, относящийся к задаче оптимального восстановления функционала $f(\tau)$ — значения функции f в точке $\tau \in D = \{z : |z| < 1\}$), на классе Харди—Соболева $Q = Q_1^\infty(D)$ функций, аналитических в единичном круге D, удовлетворяющих неравенству $\|f'\|_{H^\infty(D)} \le 1$, по информации $If = (f(0), f'(0), \ldots, f^{(r-1)}(0))$, $r \in \mathbb{N}$. В этой задаче величина оптимального восстановления равна $|\tau|^r/r$; оптимальным методом восстановления является метод

$$\Phi_0(If) = \sum_{k=0}^{r}\left(1 - \frac{k|\tau|^{2(r-k)}}{2r-k}\right)\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,\tau^k$$

(см. [90, пример 4.6; 92] и приведённую там библ.).

С помощью отображения $\tau = e^{iz}$ этот результат можно интерпретировать следующим образом. Величина оптимального восстановления функционала $f(z)$ – значения функции f в точке $z = x + iy\,(y > 0)$ — на классе $Q = Q^{\infty}_{1,2\pi}$ функций, аналитических, 2π-периодических в полуплоскости $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и удовлетворяющих условию $\|f'\|_{H^\infty(\Pi_+)} \leq 1$, по коэффициентам Фурье $If = (c_0, c_1, \dots, c_{r-1})$ в её представлении $f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\zeta}$, равна $r^{-1}e^{-ry}$, и оптимальным является метод восстановления

$$\Phi_0(If) = \sum_{k=0}^{r} \left(1 - \frac{k\, e^{-2y(r-k)}}{2r-k}\right) c_k e^{ikz}.$$

Задачам оптимального восстановления функции по информации о её спектре посвящена серия работ Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко [38–45].

3.2.1. Построение метода восстановления

Для построения метода восстановления воспользуемся оператором $L^{(m)}$, определённым равенством (3.1.37). Покажем, что образ оператора $L^{(m)}f$ зависит только от сужения спектральной функции φ_σ функции f.

В случае, когда спектральная функция φ является регулярной, этот факт следует из свойств преобразований Фурье. Действительно, в этом случае, имеем цепочку равенств

$$L^{(m)}f = \widehat{\lambda_0} * f = \widehat{\lambda_0\varphi} = \widehat{\lambda_0\varphi_\sigma}, \tag{3.2.3}$$

в котором функция $\lambda_0 = \lambda_0[m, n, \sigma, y]$ определяется равенствами

$$\lambda_0(t) = \eta_\varepsilon(t+\varepsilon)\widetilde{\lambda}_0(t);$$

$$\widetilde{\lambda}_0(t) = \begin{cases} (it)^m \left(1 - t^{n-m}(2\sigma - t)^{m-n}\, e^{-2y(\sigma - t)}\right), & t \leq \sigma; \\ 0, & t > \sigma, \end{cases}$$

где η_δ – функция, определяемая равенствами (см. [20, гл. 1, §5, п. 2])

$$\eta_\delta(t) = \int_0^t \omega_{\delta/2}(\tau - \frac{\delta}{2}) d\tau,$$

$$\omega_{\delta/2}(t) = \begin{cases} c\ e^{-\delta^2/(\delta^2-4t^2)}, & |t| < \delta/2; \\ 0, & |t| \geq \delta/2, \end{cases} \qquad \int_{\mathbb{R}} \omega_{\delta/2}(t) dt = 1.$$

Последнее равенство в (3.2.3) является следствием тождества $\lambda_0\varphi \equiv \lambda_0\varphi_\sigma$, вытекающего из равенства нулю функции λ_0 вне интервала $(-\varepsilon, \sigma)$.

Рассмотрим общий случай. Пусть λ_δ, $0 < \delta < \sigma$, есть семейство функций, бесконечно дифференцируемых на всей числовой прямой, построенных по функции λ_0 таким образом, что

$$\lambda_\delta(t) = \lambda_0(t), \text{ если } t \notin (\sigma - \delta, \sigma),$$

и справедливы условия

(i) величины $\|\lambda_\delta''\|_{L_1(\sigma-\delta,\sigma)}$ являются равномерно ограниченными по $\delta \in (0, \sigma)$, т.е. $\exists M_2 : \forall\delta \in (0,\sigma)\|\lambda_\delta''\|_{L_1(\sigma-\delta,\sigma)} \leq M_2$;

(ii) на отрезке $[\sigma - \delta, \sigma]$ имеет место неравенство $0 \leq \lambda_\delta(t) \leq \lambda_0(t)$;

(iii) существует t_0 такое, что для всех $\delta \in (0, \sigma)$ функции λ_δ убывают на $[t_0, \sigma]$.

Отметим, что в качестве λ_δ можно рассмотреть функции $\lambda_\delta(t) = \lambda_0(t)\eta_\delta(\sigma - t)$.

Лемма 3.2.1. *Для произвольных $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $y \geq 0, \sigma > 0$ и произвольной функции f из $\mathcal{H}^p$ справедливо равенство*

$$(L^{(m)}f)(z) = \lim_{\delta \to +0} \widehat{\lambda_\delta\varphi_\sigma}(z), \quad z \in \mathbb{R} + iy. \tag{3.2.4}$$

Доказательство. Функция λ_δ бесконечно дифференцируема на всей оси и, следовательно, определено произведение $\lambda_\delta\varphi$. Носитель этого произведения совпадает с носителем произведения $\lambda_\delta\varphi_\sigma$. Отсюда получаем равенство $\lambda_\delta\varphi = \lambda_\delta\varphi_\sigma$.

Определим функцию F равенством

$$F(z) = \lim_{\delta\to+0} \widehat{\lambda_\delta \varphi}(z).$$

Тогда из определения спектральной функции следует представление

$$F(z) = \lim_{\delta\to+0} \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, \left(\lambda_\delta(t)\, e^{izt}\right)''\, dt,$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}+i\alpha} \frac{f(\zeta)}{(i\zeta)^2}\, e^{-it\zeta}\, d\zeta, \quad \alpha > 0.$$

Отметим, что $\phi(t) = 0$ при любых $t < 0$ и ϕ не зависит от α. Изменив порядок интегрирования, получим равенство

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\to+0} \int_{\mathbb{R}+i\alpha} \frac{f(\zeta)}{(i\zeta)^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_\delta(t)\; e^{izt}\right)''\; e^{-it\zeta}\, dt\, d\zeta.$$

Покажем, что существует предел

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{f(\zeta)}{(i\zeta)^2} \int_{\mathbb{R}} (\lambda_\delta(t)\, e^{izt})''\, e^{-i\zeta t}\, dt = f(\zeta) \int_{\mathbb{R}} \lambda_0(t)\, e^{it(z-\zeta)}\, dt, \tag{3.2.5}$$

равномерный по ζ на прямой $\mathbb{R} + i\alpha$. Действительно, имеем оценку

$$\left| \frac{1}{(i\zeta)^2} \int_{\mathbb{R}} (\lambda_\delta(t)\, e^{izt})''\, e^{-i\zeta t}\, dt - \int_{\mathbb{R}} \lambda_0(t)\, e^{i(z-\zeta)t}\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} (\lambda_\delta(t) - \lambda_0(t))\, e^{i(z-\zeta)t}\, dt \right| \le \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} |\lambda_\delta(t) - \lambda_0(t)|\, e^{-(y-\alpha)t} dt,$$

и правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $\delta \to 0$, т. е. (3.2.5) доказано. Далее, интеграл

$$\int_{\mathbb{R}+i\alpha} \frac{f(\zeta)}{(i\zeta)^2} \int_0^{\sigma} \left(\lambda_\delta(t)\; e^{izt}\right)''\; e^{-it\zeta}\, dt\, d\zeta \tag{3.2.6}$$

сходится равномерно по δ в положительной полуокрестности нуля. Действительно справедлива оценка

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_\delta(t)\, e^{izt}\right)''\; e^{-it\zeta}\, dt \right| = \tag{3.2.7}$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_\delta''(t) + 2iz\lambda_\delta'(t) - z^2 \lambda_\delta(t)\right)\; e^{i(z-\zeta)t}\, dt \right| \le S_1(z) + S_2(z,\delta),$$

где первое слагаемое

$$S_1(z) = \int_{\mathbb{R}} \big(|\lambda_0''(t)| + 2|z|\,|\lambda_0'(t)| + |z|^2\lambda_0(t)\big)\,dt$$

не зависит от параметра δ, а второе слагаемое задаётся равенством

$$S_2(z,\delta) = \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} \big(|\lambda_\delta''(t)| + 2|z|\,|\lambda_\delta'(t)| + |z|^2\lambda_\delta(t)\big)\,dt.$$

Для $S_2(z,\delta)$, используя условия (i), (ii) и (iii) имеем

$$S_2(z,\delta) \le M_2 + 2|z|\,\|\lambda_0\|_{C[0,\sigma]} + |z|^2\|\lambda_0\|_{L^1(0,\sigma)}.$$

Получили, что интеграл (3.2.7) равномерно по δ ограничен в положительной полуокрестности нуля и, следовательно, интеграл (3.2.6) равномерно по δ сходится. Таким образом, имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}+i\alpha} f(\zeta)\int_{\mathbb{R}} \lambda_0(t)\,e^{i(z-\zeta)t}\,dt\,d\zeta = (L^{(m)}f)(z),$$

т. е. равенство (3.2.4) справедливо. Лемма 3.2.1 доказана. □

Определим метод $\Psi = \Psi[m,n,\sigma,y]$ на классе $I_\sigma Q_n^p$ формулой

$$(\Psi\varphi_\sigma)(z) = \lim_{\delta\to+0}\widehat{\lambda_\delta\varphi_\sigma}(z), \quad z \in \mathbb{R}+iy. \tag{3.2.8}$$

Согласно лемме 3.2.1, для функции $f \in Q_n^p$ и сужения её спектральной функции φ_σ справедливо

$$\Psi\varphi_\sigma = L^{(m)}f.$$

Следовательно, как показано в предыдущем параграфе для оператора $L^{(m)}$, метод Ψ действует в пространство $\mathcal{H}^p$, а точнее в A_σ^p.

3.2.2. Аналог неравенства Бора – Фавара и оценка снизу оптимального восстановления

Для функции $f \in C(\mathbb{R})$, имеющей локально абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$ на оси и спектр вне интервала $(-\sigma,\sigma)$, справедливо точное неравенство [33, 72]

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} \le \sigma^{-n}\mathcal{C}_n\|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}, \quad \mathcal{C}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j(n+1)}}{(2j+1)^{n+1}},$$

называемое неравенством Виртингера – Бора – Фавара. Подобные неравенства для различных норм исследовали: В. Виртингер, Х. Бор, С. Н. Бернштейн, Ж. Фавар, Р. Беллман, Н. И. Ахиезер, С. Б. Стечкин, Б. М. Левитан, Л. Хёрмандер и другие [11, 33, 72, 75, 86].

Обозначим через $\mathcal{K} = \mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y]$ величину, задаваемую равенством

$$\mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y] = \sup\left\{ \|f^{(m)}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in \mathcal{H}^p(\sigma) \cap Q_n^p \right\}, \tag{3.2.9}$$

где $\mathcal{H}^p(\sigma)$ есть класс функций из $\mathcal{H}^p$ со спектром в полупрямой $[\sigma, \infty)$:

$$\mathcal{H}^p(\sigma) = e^{i\sigma z}\mathcal{H}^p = \left\{ e^{i\sigma z} g(z) \,:\, g \in \mathcal{H}^p \right\}.$$

Если для фиксированных значений m, n, σ, y величина $\mathcal{K} = \mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y]$ конечна, то на классе $\mathcal{H}^p(\sigma)$ справедливо точное неравенство

$$\|f^{(m)}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \mathcal{K}\ \|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p}, \quad f \in \mathcal{H}^p(\sigma). \tag{3.2.10}$$

Величина $\mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y]$ даёт оценку снизу величины оптимального восстановления (3.2.1), получаемую с помощью следующих рассуждений. Для произвольного метода восстановления $\Phi \in \mathcal{F}$ имеем неравенство

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}[\Phi, m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \frac{1}{2} \sup \Big\{ \|f^{(m)} - \Phi(0)\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} + \\
+ \|-f^{(m)} - \Phi(0)\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in \mathcal{H}^p(\sigma) \cap Q_n^p \Big\} \ge \\
\ge \frac{1}{2} \sup \left\{ \Big\| (f^{(m)} - \Phi(0)) - (-f^{(m)} - \Phi(0)) \Big\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in \mathcal{H}^p(\sigma) \cap Q_n^p \right\} = \\
= \mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y].
\end{aligned}$$

Отсюда справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y].$$

С другой стороны, используя для оценки снизу величины $\mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y]$ функцию f_τ при $p = \infty$, и функцию $f_{\tau,h}$ при $1 \le p < \infty$, как в теореме 3.1.4, получим неравенство

$$\mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y] \ge \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma}.$$

В результате получили следующее утверждение.

Лемма 3.2.2. *Для произвольных* $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $y \geq 0, \sigma > 0$, *и* $1 \leq p \leq \infty$ *справедливы неравенства*

$$\sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma} \leq \mathcal{K}_p[m,n,\sigma,y] \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m,\sigma,n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)}. \tag{3.2.11}$$

Далее в теореме 3.2.1 для $0 \leq m \leq n$ и в теореме 3.2.3 для $m > n$ при достаточно больших σ будет показано, что в (3.2.11) имеют место равенства. В частности, получено точное неравенство (3.2.10).

3.2.3. Решение задачи оптимального восстановления

Относительно задачи оптимального восстановления (3.2.1) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq m \leq n$, $\sigma, y > 0$ *и* $1 \leq p \leq \infty$. *Тогда для величины оптимального восстановления* (3.2.1) *и величины* (3.2.9) *справедливы равенства*

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m,\sigma,n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m,\sigma,n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \\ = \mathcal{K}_p[m,n,\sigma,y] = \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma}.\end{gathered} \tag{3.2.12}$$

Оптимальным методом восстановления является метод $\Psi = \Psi[m,n,\sigma,y]$, *определённый равенством* (3.2.8).

Доказательство. Из леммы 3.2.2 и определения (3.2.1) имеем цепочку неравенств

$$\sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma} \leq \mathcal{K}_p[m,n,\sigma,y] \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m,\sigma,n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq$$
$$\leq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m,\sigma,n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq \mathcal{U}[\Psi,m,\sigma,n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

С другой стороны, из леммы 3.2.1 и результатов параграфа 3.1 следует равенство

$$\mathcal{U}[\Psi,m,\sigma,n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup\left\{\|f^{(m)} - L^{(m)}f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in\ Q_n^p\right\} = \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Отсюда следуют равенства (3.2.12) и экстремальность метода Ψ, определённого равенством (3.2.8). $\square$

Теперь для задачи оптимального восстановления (3.2.2) в случае $0 \le m \le n$ покажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le n$, $\sigma > 0$ *и* $1 \le p \le \infty$. *Тогда для величины оптимального восстановления* (3.2.2) *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m,\sigma,n]_{\mathcal{H}^p} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m,\sigma,n]_{\mathcal{H}^p} = \mathcal{K}_p[m,n,\sigma,0] = \sigma^{m-n}.$$

Оптимальным методом восстановления является метод $\Psi_0 = \Psi[m,n,\sigma,0]$, *определённый равенством* (3.2.8), *при* $y = 0$.

На классе $\mathcal{H}^p(\sigma)$ *справедливо точное неравенство*

$$\|f^{(m)}\|_{\mathcal{H}^p} \le \sigma^{m-n}\, \|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p}, \quad f \in \mathcal{H}^p(\sigma).$$

Доказательство теоремы 3.2.2 проводится аналогично доказательству теоремы 3.2.1. Точнее, оценка снизу следует из леммы 3.2.2. Оценку сверху даёт метод $\Psi_0 = \Psi[m,n,\sigma,0]$, определённый равенством (3.2.8), при $y = 0$, для которого справедливо равенство $\Psi_0\varphi_\sigma = L_0^{(m)} f$, $f \in Q_n^p$. Для произвольной функции f из класса Q_n^p функция $L_0^{(m)} f$ принадлежит пространству $\mathcal{H}^p$ и, следовательно, имеет место равенство

$$\|f^{(m)} - L_0^{(m)} f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f^{(m)} - L_0^{(m)} f\|_{\mathcal{H}^p}.$$

$\square$

3.2.4. Восстановление в случае $m > n$

Величина оптимального восстановления (3.2.1) производной порядка m на классе Харди – Соболева Q_n^p, и, как следствие, величина (3.2.9) являются конечными не только в случае $0 \le m \le n$, рассмотренном в теореме 3.2.1, но и в случае $m > n$. Точнее, будет показано, что для любых фиксированных значений $m > n \geq 0$, $\sigma > 0$, $y > 0$ и $1 \leq p \leq \infty$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y] \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq \\ \leq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq \mathfrak{J}(m-n, \sigma, y), \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

где

$$\mathfrak{J}(s, \sigma, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |J_s(x)|\, dx,$$

$$J_s(x) = \int_0^\infty (t+\sigma)^s e^{-y(t+\sigma)} \cos(tx)\, dt = (-1)^s \frac{\partial^s}{\partial y^s} \frac{y e^{-\sigma y}}{x^2 + y^2}.$$

Основным результатом этой части параграфа является следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq n < m$, $y > 0$ *и* $1 \leq p \leq \infty$. *Тогда существует* $\sigma_0(m-n)$ *такое, что для произвольных* $\sigma \geq \sigma_0(m-n)$ *для величины оптимального восстановления* (3.2.1) *и величины* (3.2.9) *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \\ = \mathcal{K}_p[m, n, \sigma, y] = \sigma^{m-n} e^{-y\sigma}. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Оптимальным методом восстановления является метод $\Psi = \Psi[m, n, \sigma, y]$, *определённый равенством* (3.2.8).

Доказательство. В (3.2.13) необходимо обосновать только последнее неравенство. Для этого покажем, что справедливо неравенство

$$\mathcal{U}[\Psi, m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq \mathfrak{J}(m-n, \sigma, y).$$

Рассмотрим функцию

$$u_1(t) = \begin{cases} (2\sigma - t)^{m-n} e^{-2y(\sigma - t)}, & t < \sigma; \\ t^{m-n}, & t \geq \sigma. \end{cases}$$

Функция $u_1(\sigma+t)e^{-y(\sigma+t)}$ является чётной, значит для её преобразования Фурье справедливо равенство $\widehat{u_1}(x+iy) = J_{m-n}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и, следовательно, для её нормы – равенство

$$\|\widehat{u_1}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \mathfrak{J}(m-n,\sigma,y).$$

Для разности $f^{(m)} - \Psi\varphi_\sigma$ имеет место представление

$$f^{(m)} - \Psi\varphi_\sigma = f^{(m)} - \widehat{\lambda}_0 * f = (-i)^n \widehat{u_1} * f^{(n)}.$$

Тогда, используя неравенство (3.0.2), для произвольной $f \in \mathcal{H}^p_n$ получим неравенства

$$\|f^{(m)} - \Psi\varphi_\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|\widehat{u_1} * f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq$$

$$\leq \|\widehat{u_1}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} \|f^{(n)}\|_{\mathcal{H}^p} = \|\widehat{u_1}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)}.$$

Отсюда, для уклонения метода Ψ справедлива оценка сверху

$$\mathcal{U}[\Psi,m,\sigma,n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq \|\widehat{u_1}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \mathfrak{J}(m-n,\sigma,y).$$

Тем самым неравенство (3.2.13) доказано.

Введем обозначение $\sigma_0(s) = y^{-1}\left(s+\sqrt{s}\right), s \in \mathbb{N}$. Покажем, что если $\sigma \geq \sigma_0(s)$, то значение функции $J_s(x)$ для любых x неотрицательно. Действительно, дважды интегрируя по частям, получим представление

$$J_s(x) = \frac{2}{x^2}\int_{\mathbb{R}_+} \left((t+\sigma)^s\, e^{-y(t+\sigma)}\right)'' (1-\cos xt)\; dt.$$

Если справедливо неравенство $\sigma \geq \sigma_0(s)$, то функция $(t+\sigma)^s\, e^{-y(t+\sigma)}$ выпукла на полуоси $\mathbb{R}_+$, откуда имеем $J_s(x) \geq 0$.

Отметим, что если функция J_{m-n} неотрицательна на $\mathbb{R}$, то справедливо равенство

$$\mathfrak{J}(m-n,\sigma,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} J_s(x)dx = \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma},$$

и оценка сверху (3.2.13) совпадает с оценкой снизу, полученной ранее. Теорема 3.2.3 доказана. □

Отметим, что в случае $1 \leq m-n \leq 4$ в качестве $\sigma_0(m-n)$ в теореме 3.2.3 можно взять величину $y^{-1}(m-n)$. Действительно, если $1 \leq m-n \leq 4$ и $\sigma \geq y^{-1}(m-n)$, то из явного вида функции J_{m-n} следует её неотрицательность. А именно, для функций $J_s, 1 \leq s \leq 4$, справедливы равенства

$$J_1(x) = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{ye^{-\sigma y}}{x^2+y^2} = \frac{e^{-\kappa}\left[(\kappa-1)x^2+y^2(\kappa+1)\right]}{(x^2+y^2)^2};$$

$$J_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{ye^{-\sigma y}}{x^2+y^2} = \frac{e^{-\kappa}\left[\sigma(\kappa-2)x^4+2y\left(\kappa^2-3\right)x^2+y^3\left(\kappa^2+\kappa+2\right)\right]}{(x^2+y^2)^3};$$

$$J_3(x) = -\frac{\partial^3}{\partial y^3}\frac{ye^{-\sigma y}}{x^2+y^2} = \frac{e^{-\kappa}}{(x^2+y^2)^4}\left[\sigma^2(\kappa-3)x^6+3\left(\kappa^3-\kappa^2-6\kappa+2\right)x^4+\right.$$
$$\left.+3y^2\left(\kappa^3+\kappa^2-4\kappa-12\right)x^2+y^4\left(\kappa^3+\kappa^2+6\kappa+6\right)\right];$$

$$J_4(x) = \frac{\partial^4}{\partial y^4}\frac{ye^{-\sigma y}}{x^2+y^2} = \frac{e^{-\kappa}}{(x^2+y^2)^5}\left[\sigma^3(\kappa-4)x^8+4\sigma\left(\kappa^3-2\kappa^2-9\kappa+6\right)x^6+\right.$$
$$+6y\left(\kappa^4-10\kappa^2-20\kappa+20\right)x^4+4y^3\left(\kappa^4+2\kappa^3-3\kappa^2-30\kappa-60\right)x^2+$$
$$\left.+y^5\left(\kappa^4+4\kappa^3+12\kappa^2+24\kappa+24\right)\right], \quad \kappa = \sigma y.$$

В каждом из представлений $J_s, 1 \leq s \leq 4$, первый множитель положителен, а второй является чётным многочленом по переменной x, при этом нетрудно показать, что коэффициенты многочленов положительны при $\kappa = \sigma y \geq s$.

В завершение заметим, что в случае $m > n, 0 < \sigma < \varsigma = y^{-1}(m-n)$ и $p = \infty$ равенство (3.2.14) не справедливо, что можно проверить с помощью функции $f_\varsigma(z) = \varsigma^{-n}e^{i\varsigma z} \in \mathcal{H}_n^p$, для которой справедливо $\|f_\varsigma^{(m)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \varsigma^{m-n}e^{-\varsigma y} > \sigma^{m-n}e^{-\sigma y}$.

Заключение

Исследованы задачи оптимального восстановления аналитической (голоморфной) в области функции и производной по некасательным предельным значениям функции на части границы области, заданным с погрешностью, и взаимосвязанные точные неравенства, задачи наилучшего приближения неограниченных операторов ограниченными, наилучшего приближения одного класса аналитических функций другим. Исследована задача оптимального восстановления аналитической в полуплоскости функции и производных по сужению её спектральной функции и связанная задача наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

Решена задача оптимального восстановления значения аналитической функции в точке односвязной области по ее предельным значениям на измеримой части границы области, заданным с весовой L^q-погрешностью, на классе функций с ограниченной весовой L^r-нормой предельных значений на дополнительной части границы, при $1 \leq q, r \leq \infty$, для широкого класса весов. Дано решение соответствующей задачи Стечкина наилучшего приближения функционала аналитического продолжения функции в точку области с части границы линейными ограниченными функционалами.

Для двусвязной области решены аналогичные задача оптимального восстановления значения функции в точке области по её предельным значениям на части границы, заданным с погрешностью δ_n, где δ_n – геометрическая прогрессия с целым показателем, и соответствующая задача Стечкина наилучшего приближения функционала значения функции в точке линейными ограниченными функционалами.

Получено неравенство между значением аналитической функции в конечносвязной области и интегральными с весом нормами её граничных значений на двух измеримых подмножествах границы области. Это неравенство есть аналог теоремы братьев Неванлинна о двух константах при $0 < q, r \leq \infty$.

Решена задача оптимального восстановления аналитической функции в односвязной области на подмножестве линии уровня гармонической меры по её предельным значениям на измеримой части границы, заданным с весовой L^∞-погрешностью, на классе функций с ограниченной весовой L^∞-нормой предельных значений на дополнительной части границы. Решена взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения оператора аналитического продолжения с части границы на подмножество линии уровня гармонической меры линейными ограниченными операторами.

Решена задача оптимального восстановления аналитической в полосе функции на внутренней прямой по её предельным значениям, заданным с погрешностью на одной граничной прямой, на классе функций с ограниченной нормой предельных значений на другой граничной прямой, для L^p-норм, $1 \leq p \leq \infty$, на трёх прямых. Решена взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения оператора аналитического продолжения линейными ограниченными операторами.

Решена задача оптимального восстановления аналитической в кольце функции на внутренней окружности по её предельным значениям, заданным с погрешностью δ_n, где δ_n – целые степени отношения радиусов граничных окружностей, на одной граничной окружности, на классе функций с ограниченной нормой предельных значений на другой граничной окружности, для L^p-норм, $1 \leq p \leq \infty$, на трёх окружностях. Решены взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения оператора линейными ограниченными операторами и задача приближения одного класса Харди аналитических в круге функций другим классом Харди функций, аналитических в круге большего радиуса.

Решена задача оптимального восстановления производной в точке аналитической в односвязной области функции по предельным значениям функции, заданным с L^∞-погрешностью на измеримой части границы, на классе функций с ограниченной L^∞-нормой предельных значений на дополнительной части границы. Получено точное неравенство между значением производной функции, аналитической в односвязной области, и L^∞-нормами граничных значений на двух измеримых подмножествах границы области. Решена взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения функционала, сопоставляющего предельным значениям функции на части границы её производную в точке области, линейными ограниченными функционалами.

Решена задача оптимального восстановления производной аналитической в полосе функции на внутренней прямой по заданным с погрешностью δ предельным значениям функции на одной граничной прямой, на классе функций с ограниченной нормой предельных значений на другой граничной прямой, в случае L^p-норм, $1 \le p \le \infty$, на трёх прямых и достаточно большого $|\ln \delta|$. Решена взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами.

Решена задача оптимального восстановления производной аналитической в кольце функции на внутренней окружности по предельным значениям функции на одной граничной окружности, заданным с погрешностью δ_n, где δ_n – целые степени отношения радиусов граничных окружностей и $|\ln \delta_n|$ достаточно большой, на классе функций с ограниченной нормой предельных значений на другой граничной окружности, для L^p-норм, $1 \le p \le \infty$, на трёх окружностях. Решены взаимосвязанные задачи Стечкина наилучшего приближения оператора линейными ограниченными операторами и наилучшего приближения производных аналитических в круге функций одного класса Харди другим классом Харди функций, аналитических в круге большего радиуса.

На классах Харди – Соболева функций, аналитических в полуплоскости, с ограниченной $\mathcal{H}^p$-нормой, $1 \le p \le \infty$, производной порядка n, решена задача оптимального восстановления производной порядка $k, 0 \le k \le n$, по сужению спектральной функции на интервал. Решена связанная задача наилучшего приближения класса Харди – Соболева пространством целых функций конечного экспоненциального типа. Вычислены средние поперечники класса.

Список литературы

[1] **Айзенберг Л. А.** Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука. 1990. 248 с.

[2] **Арестов В.В.** Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 29–42.

[3] **Арестов В. В.** О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 3–28.

[4] **Арестов В. В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.

[5] **Арестов В. В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.

[6] **Арестов В. В.** Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Сб. тр. Всесоюзной школы по теории функций (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР. Т. 189. С. 3–20.

[7] **Арестов В. В., Габушин В. Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Матем. 1995. № 11. С. 42–68.

[8] **Арестов В. В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.

[9] **Арестов В. В.** Наилучшее приближение одного класса функций многих переменных другим и родственные экстремальные задачи // Матем. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 3. С. 323–340.

[10] **Арестов В. В.** Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L2 операторами // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 34–56.

[11] **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: ГТТИ. 1947. М.: Наука. 1965. 406 с.

[12] **Ахиезер Н. И.** Элементы теории эллиптических функций. 2-е изд., перераб.(Физико-математическая библиотека инженера). М.: Наука. 1970. 304 с.

[13] **Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.** Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наук. думка. 2003. 591 с.

[14] **Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи // Матем. заметки. 2014. Т. 95, вып. 1. С. 3–17.

[15] **Бабенко К. И.** О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 22. № 55. С. 631–640.

[16] **Барашарт Л., Леблон Ж., Сейферт Ф.** Экстремальные задачи с ограничениями в H2 и формулы Карлемана // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 7. С. 4–43.

[17] **Барт В. А., Хавин В. П.** Теоремы Сеге – Колмгорова – Крейна о весовой тригонометрической аппроксимации // Укр. матем. журн. 1994. Т. 46, № 1–2. С. 100–127.

[18] **Бахвалов Н. С.** Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычис. матем. и матем. физики. 1971. Т. 11, № 4. С. 1014–1016.

[19] **Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.** О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.

[20] **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука. 1971. 512 с.

[21] **Габушин В. Н.** Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Матем. заметки. 1970. Т. 8, вып. 5. С. 551–562.

[22] **Голузин Г. М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Матем. сб. 1934. Т. 41, №2. С. 246–276.

[23] **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.,Л.: ГИТТЛ. 1952. М.: Наука. 1966. 628 с.

[24] **Голузин Г. М., Крылов В. И.** Обобщенная формула Carleman'а и приложение ее к аналитическому продолжению функций // Матем. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.

[25] **Дубинин В. Н.** Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, вып. 4(406). С. 3–88.

[26] **Ибрагимов И. И.** Теория приближения целыми функциями. Баку: ЭЛМ. 1979. 465 с.

[27] **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 206 с.

[28] **Калмыков С. И.** Принципы мажорации и некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2008. Т. 357. С. 143–157.

[29] **Кузина Т. С.** Экстремальные задачи для аналитических функций классов Харди – Соломенцева в многосвязных областях // Изв. вузов. Матем. 1987. № 8. С. 30–39.

[30] **Кусис П.** Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир. 1984. 368 с.

[31] **Лаврентьев М. М.** О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.

[32] **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. 1980. М.: Наука. 286 с.

[33] **Левитан Б. М.** (B. M. Lewitan) Über eine Verallgemeinerung von S. Bernstein und H. Bohr. // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. С. 169–172.

[34] **Лукашов А. Л.** Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 3. С. 115–138.

[35] **Лукашов А. Л.** Оценки производных рациональных функций и четвертая задача Золотарева // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 2. С. 122–130.

[36] **Магарил-Ильяев Г. Г.** Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 11. С. 1635–1656.

[37] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. Т. 50, №6. С. 85–93.

[38] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 3. С. 79–100.

[39] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прилож. 2003. Т. 37, № 3. С. 51–64.

[40] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 67–82.

[41] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 3. С. 76–79.

[42] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 59–67.

[43] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций // Фундамент. и прикл. матем. 2013. Т. 18, № 5. С. 155–174.

[44] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** О восстановлении сигналов по спектру. Труды Международной летней математической Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций. Душанбе: Полиграфия ООО "Офсет". 2016. С. 151–160.

[45] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 201—216/

[46] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.** Оптимальное восстановление и теория экстремума // Докл. РАН. 2001. Т. 379, № 2. С. 161–164.

[47] **Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В.М., Осипенко К. Ю.** Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления // Пробл. передачи информ. 2003. Т. 39, вып 1. С. 18–133.

[48] **Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.** Наилучшее приближение функций, заданных в конечном числе точек // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 3. С. 359–368.

[49] **Марчук А. Г.** Оптимальные по точности методы решения линейных задач восстановления // Препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск. 1976. 29 с.

[50] **Осипенко К. Ю.** Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди – Соболева // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 2. С. 67–86.

[51] **Осипенко К. Ю.** О наилучших квадратурных формулах на классах Харди – Соболева // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65. С. 73–90.

[52] **Осипенко К. Ю.** Неравенство Харди – Литтлвуда – Полиа для аналитических функций из пространств Харди – Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 15–34.

[53] **Осипенко К. Ю.** Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 10. С. 77–106.

[54] **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука. 1978. Т. 1. 398 с.

[55] **Привалов И. И.** Граничные свойства аналитических функций. М.Л.: ГИТТЛ. 1950. 336 с.

[56] **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. М.: Наука. 1981. 800 с.

[57] **Смирнов В. И.** Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent // Изв. АН. Сер. матем. 1932. С. 337–372.

[58] **Смоляк С. А.** Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ. 1965.

[59] **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир. 1974. 332с.

[60] **Стечкин С. Б.** Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Sci. Math. 1965. Т. 26. № 3–4. С. 225–230.

[61] **Стечкин С. Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.

[62] **Тайков Л. В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 155–162.

[63] **Тайков Л. В.** Аналитическое продолжение функций с ошибкой // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 61–64.

[64] **Тихомиров В. М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.

[65] **Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.** Классы аналитических функций в многосвязных областях, представимые по формулам Коши и Грина // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, вып. 2(80). С. 215–221.

[66] **Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.** О существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданным модулем граничных значений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, вып. 4. С. 543–562.

[67] **Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.** Исследование свойств экстремальных функций с помощью соотношений двойственности в экстремальных задачах для классов аналитических функций в многосвязных областях // Матем. сб. Т. 46(88), № 2. 1958. С. 195–228.

[68] **Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.** Классы аналитических функций в многосвязных областях. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексн. переменного». М.: Физматгиз. 1960. С. 45–77.

[69] **Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.** Качественные свойства решений экстремальных задач некоторых типов. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексн. переменного». М.: Физматгиз. 1960. С. 77–95.

[70] **Фарков Ю. А.** О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, вып. 5. С. 185–212.

[71] **Фок В. А., Куни Ф. М.** О введении «гасящей» функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 6. С. 1195–1198.

[72] **Хавинсон С. Я.** Аналитические функции ограниченного вида (граничные и экстремальные свойства) // Итоги науки. Мат. анал. 1963. ВИНИТИ, М. 1965. С. 5–80.

[73] **Хавинсон С. Я.** Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным услови-

ям внутри области // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 2(110). С. 25–98.

[74] **Хавинсон С. Я.** О представлении экстремальных функций в классах Eq через функции Грина и Неймана // Матем. заметки. 1974. Т. 16, № 5. С. 707–716.

[75] **Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.** Неравенства (с доп. Левина В. И. и Стечкина С. Б.). М.: Гос. изд-во иностр. лит. 1948. 456 с.

[76] **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир. 1986. 464 с.

[77] **Шведенко С. В.** Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1985. Т. 23. С. 3–124.

[78] **Arestov V., Filatova M.** Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis // J. Approx. Theory. 2014. V. 187, № 1. P. 65–81.

[79] **Babenko Yu., Skorokhodov D.** Stechkin's Problem for differential operators and functionals of first and second orders // J. Approx. Theory. 2013. V. 167. P. 173–200.

[80] **Baratchart L., Leblond J.** Hardy approximation to L_p functions on subsets of the circle with $1 \le p < \infty$ // Constr. Approx. 1998. V. 14. P. 41–56.

[81] **Boas R. P. Jr.** Entire Functions. N. Y.: Academic Press Inc. 1954. 276 p.

[82] **Carleman T.** Les fonctions quasi-analytiques. Paris: 1926. 116 p.

[83] **DeGraw A.** Optimal recovery of holomorphic functions from inaccurate information about radial integration // Amer. J. Comput. Math. 2012. V. 2, № 4. P. 258–268.

[84] **Garnett J.B., Marshall D. E.** Harmonic Measure. New York: Cambridge University Press. 2005. 571 p.

[85] **Gonzalez-Vera P., Stessin M. I.** Joint spectra of Toeplitz operators and optimal recovery of analytic functions // Constr. Approx. 2012. V. 36, № 1. P. 53–82.

[86] **Hörmander L.** A new proof and a generalization of an inequality of Bohr // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 33–45.

[87] **Khavinson S. Ya., Kuzina T. S.** The Structural Formulae for Extremal Functions in Hardy Classes on Finite Riemann Surfaces // Operator Theory: Advances and Applications. 2005. V. 158. P. 37–57.

[88] **Khavinson D.** Factorization theorems for different classes of analytic functions in multiply connected domains // Pacific journal of mathematics. 1983. V. 108, № 2. P. 295–318.

[89] **Macintyre A. I., Rogosinsky W. W.** Extremum problems in the theory of analytic functions // Acta Math. 1952. V. 82. P. 275–325.

[90] **Micchelli Ch. A., Rivlin Th. J.** A survey of optimal recovery. In: *Optimal estimation in approximation theory.* N.Y. etc.: Plenum Press. 1977. P. 1–54.

[91] **Nevanlinna F., Nevanlinna R.** Über die Eigenschaften einer analytischen Funktionen in der Umgebung einer singularen Stille oder Linie // Acta Soc. sci. fenn. 1922. V. 50, № 5. P. 1–46.

[92] **Osipenko K. Yu.** Optimal Recovery of Analytic Functions. Huntington: NOVA Science Publ.Inc. 2000. 229 p.

[93] **Osipenko K.Y., Stessin M.I.** Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // Constr. Approx. 2010. V. 31. P. 37–67.

[94] **Patil D. J.** Representation of H_p-functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78, № 4. P. 617–620.

[95] **Plancherel M., Polya G.** Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples // Comment. Math. Helv. 1937. V. 9. P. 224–248; 1938. V. 10. P. 110–163.

[96] **Rahman Q. I., Schmeisser G.** L^p inequalities for entire functions of exponential type // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 320, № 1. P. 91–103.

[97] **Robinson R. M.** Analytic functions in circular rings // Duke Math. J. 1943. V. 10, № 2. P. 341–354.

[98] **Rogosinsky W. W., Shapiro H.** On certain extremum problems for analytic functions // Acta Math. 1954. V.90, № 3. P. 287–318.

[99] **Szegö G.** Über die Randwerte einer analytischen Funktion// Math. Ann. 1921. V. 84. P. 232–244.

[100] **Zarantonello S. E.** A representation of H_p-functions with $0 < p < \infty$ // Pacif. J. Math. 1978. V. 79, № 1. P. 271–282.

[101] **Zayed A. I.** Recoverability of some classes of analytic functions from their boundary values // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 86, № 1. P. 97–102.

Публикации автора по теме диссертации

[102] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитических в полуплоскости функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 3–12. (Перевод на англ.: **Akopyan R. R.** Optimal recovery of functions analytical in a half-plane // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. V. 259, № 2. P. 1–11.)

[103] **Акопян Р. Р.** Приближение класса Харди – Соболева аналитических в полуплоскости функций целыми функциями экспоненциального типа // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 18–30.

[104] **Акопян Р. Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 46–54.

[105] **Акопян Р. Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 3–13.

[106] **Акопян Р. Р.** Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 9–16. (Перевод на англ.: **Akopyan R. R.** Best approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in a strip // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 288, Suppl. 1. P. 5–12.)

[107] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции в двусвязной области по ее приближенно заданным граничным значениям // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 14–19. (Перевод на англ.: **Akopyan R. R.** Optimal recovery of an analytic function in a doubly connected domain from its approximately given boundary values // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V. 296, № 1. P. 13–18.)

[108] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитической в круге функции по ее неточно заданным значениям на части границы // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 29–42. (Перевод на англ.: **Akopyan R. R.** Optimal recovery of a function analytic in a disk from its approximately given values on a part of the boundary // Proc. Steklov Inst. Math. 2018. V. 300, Suppl. 1. P. 25–37.)

[109] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 163–170. (Перевод на англ.: **Akopian R. R.** Optimal recovery of analytic functions from boundary conditions specified with error // Math. Notes. 2016. V. 99, № 2. P. 177–182.)

[110] **Akopyan R. R.** Approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in an annulus // Ural Math. J. 2017. V. 3, № 2. P. 6–13.

[111] **Akopyan R. R.** Optimal recovery of a derivative of an analytic function from values of the function given with an error on a part of the boundary // Analysis Math. 2018. V. 44, Iss. 1. P. 3–19.

[112] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитической в полуплоскости функции по приближенно заданным значениям на части граничной прямой // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 19–33.

[113] **Акопян Р. Р.** Приближение производных аналитических функций одного класса Харди другим классом Харди // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 21–29. (Перевод на англ.: **Akopyan R. R.** Approximation of derivatives of analytic functions from one Hardy class by another Hardy class // Proc. Steklov Inst. Math. 2020. V. 308, Suppl. 1. P. 1–8.)

[114] **Акопян Р. Р.** Аналог теоремы о двух константах и оптимальное восстановление аналитических функций // Матем. сб. 2019. Т. 210, № 10. С. 3–36. (Перевод на англ.: **Akopyan R. R.** An analogue of the two-constants theorem and optimal recovery of analytic functions // Sb. Math. 2019. V. 210, Iss. 10. P. 1348–1360.)

[115] **Akopyan R. R.** Optimal recovery of a derivative of an analytic function from values of the function given with an error on a part of the boundary, II // Analysis Math. 2020. V. 46, Iss. 3. P. 409–424.

[116] **Акопян Р.Р.** Аналог теоремы Адамара и связанные экстремальные задачи на классе аналитических функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 32–47.