На правах рукописи

Акопян Роман Размикович

Оптимальное восстановление аналитических функций по приближенно заданным граничным значениям

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург – 2021

Работа выполнена в ФГАОУ ВО “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина”, Институте естественных наук и математики, на кафедре математического анализа.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Арестов Виталий Владимирович.
Официальные оппоненты:	Иванов Валерий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО “ТулГУ”, г. Тула; Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Белорусь; Осипенко Константин Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общих проблем управления ФГБОУ ВО “МГУ им. М. В. Ломоносова”, г. Москва.
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского”, г. Саратов.

Защита состоится ____ ____ 2021 г. в ____ часов ____ минут на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 при ФГБУН “Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН” по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН: http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.04/.

Автореферат разослан "____" ____________________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.04
кандидат физико-математических наук К.С.Кобылкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Предметом изучения диссертации являются задачи оптимального восстановления аналитических (голоморфных) в области функций и их производных по некасательным предельным значениям функций на части границы области, заданным с погрешностью, взаимосвязанные с ними точные неравенства для аналитических функций и соответствующие задачи Стечкина наилучшего приближения неограниченных операторов ограниченными. Помимо того в диссертации изучается задача оптимального восстановления аналитической в полуплоскости функции и производных по сужению её спектральной функции и связанная задача наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа.

Множеством единственности для функций, аналитических в области $G \subset \mathbb{C}$ ограниченной спрямляемой кривой Жордана, является подмножество γ положительной меры границы области. Это утверждение известно как теорема единственности И. И. Привалова (1919), см., например, [11, гл.X, §2]. Первый результат о методе восстановления аналитической функции по её (точным) значениям на части границы получил Т. Карлеман (1926) для некоторого специального вида областей. Г. М. Голузин и В. И. Крылов [12] (1933) обобщили идею Т. Карлемана. Для функции f, представимой в односвязной области G интегралом Коши, метод восстановления по её (точным) граничным значениям на γ даёт следующая формула Карлемана – Голузина – Крылова [12, 1]

$$f(z) = \lim_{\sigma \to -\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)} \right)^\sigma d\zeta, \quad z \in G,$$

где ϕ – произвольная аналитическая и ограниченная в G функция, удовлетворяющая условиям $|\phi(\zeta)| = 1,\ \zeta \in \partial G \setminus \gamma;\ |\phi(z)| > 1,\ z \in G$. Формулам Карлемана – Голузина – Крылова и их обобщениям посвящено множество работ – см., например, [1; 26,§3; 27,§2] и приведённую там библиографию. Об их применениях в различных задачах теории функций, теории управления, теоретической и математической физике, обработке сигналов см. [1, 8, 15] и приведённую там библиографию.

Задача восстановления аналитической функции в области по её предельным значениям, заданным с погрешностью, на части границы (аналитического продолжения с части границы области) является неустойчивой (некорректно поставленной). Методы её регуляризации исследовались М. М. Лаврентьевым [15, гл.II, §1].

Целью первой и второй глав диссертации является построение наилучших (оптимальных) методов восстановления, соответственно, функции и её производной для некоторых классов (корректности) аналитических функций. Рассматриваемые задачи являются конкретными случаями следующей задачи оптимального восстановления оператора на классе элементов банахова пространства по неточной информации.

Пусть X, Y – банаховы пространства; $A : X \to Y$ – некоторый оператор с областью определения $D(A) \subset X$; Q — класс элементов X, принадлежащий $D(A)$. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$ рассматривают множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, Y)$ всех однозначных отображений X в Y, множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ линейных, или $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов из X в Y. Величина погрешности восстановления оператора A на классе Q по элементам, заданным с погрешностью δ, $\delta \geq 0$, методом $T \in \mathcal{R}$ определяется равенством

$$\mathcal{U}(T, \delta) = \sup\left\{\|Af - Tg\|_Y \,:\, f \in Q,\, g \in X, \|f - g\|_X \leq \delta\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta; A, Q) = \inf\left\{\mathcal{U}(T, \delta) \,:\, T \in \mathcal{R}\right\} \tag{1}$$

есть величина *оптимального восстановления значений оператора* A на классе Q по элементам, заданным с известной погрешностью δ, с помощью множества методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta), \delta \geq 0$, и построении оптимального метода восстановления — экстремального оператора (последовательности операторов), на котором в (1) достигается нижняя грань.

Задача (1) есть вариант задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации об элементах; общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [3, 4, 17, 30, 32].

Задачи оптимального восстановления на классах аналитических функций исследовали К. Ю. Осипенко, Ш. Мичелли, Т. Ривлин, С. Д. Фишер, К. Вилдероттер, Б. Боянов, М. И. Стесин, О. Г. Парфенов, М. П. Овчинцев и др., см. [32, 33] и приведённую там библиографию. Оптимальное восстановление по заданным с погрешностью предельным значениям на части границы ранее не изучалось.

В первой и второй главах изучаются конкретные варианты задачи оптимального восстановления (1) на классах аналитических функций. В дальнейшем G – конечносвязная область комплексной плоскости, граница Γ которой является жордановой спрямляемой кривой или объединением таких непересекающихся кривых. Пусть γ_1 – измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 – дополнение γ_1 до Γ, т.е. $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$. Далее будет существенно использоваться понятие гармонической меры подмножеств границы области см., например, [11]. Пусть $w(z) = w(z, \gamma, G)$ есть гармоническая в области G функция, имеющая почти всюду на γ граничные значения, равные единице, и на $\Gamma \setminus \gamma$ равные нулю. Значение этой функции в точке z называется *гармонической мерой* множества γ относительно области G и точки z. Производная классической функции Грина по внутренней нормали является плотностью гармонической меры; будем для неё использовать обозначение $P(z, \zeta)$. Следовательно, гармоническая мера измеримого подмножества γ спрямляемой границы Γ относительно области G в точке z представима по формуле $w(z, \gamma, G) = \int_\gamma P(z, \zeta)\,|d\zeta|$. Через $N_*(G)$ обозначим класс Смирнова (универсальный класс Харди) аналитических в G функций f, для которых гармоническая мажоранта функции $\ln^+ |f|$ существует и представима по формуле Грина. Функции класса $N_*(G)$ имеют почти всюду на Γ некасательные (угловые) предельные граничные значения. Удобно обозначать функцию и её граничные значения одним и тем же символом. Обозначим через φ_k неотрицательные измеримые функции на γ_k, $k = 0, 1$. Будем предполагать суммируемость функций $\ln \varphi_k$ с плотностью гармонической меры. Эти функции в дальнейшем называем *весовыми функциями* или *весами*. Введем класс $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$, $r, q \geq 1$, аналитических в области G функций из $N_*(G)$ таких, что их некасательные предельные граничные значения на γ_k, $k = 0, 1$, имеют конечные, соответственно, L^r и L^q-нормы с весом φ_k. Отметим, что частным случаем класса $\mathcal{H}$ является класс Харди $H^q(G)$ аналитических в области G функций f, обладающих свойством: субгармоническая функция $|f|^q$ имеет в области G гармоническую мажоранту. В $\mathcal{H}$ выделим класс $Q = Q^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ функций f, которые удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)} \leq 1$. Обозначим тем же символом Q множество функций – предельных значений на части γ_1 границы области функций класса Q; имеем $Q \subset L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$.

Рассматриваемые в первых двух главах диссертации задачи, являются следующей конкретизацией задачи восстановления (1). В качестве пространства X и класса Q выступают $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ и $Q^{r,q}(G;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$. Пусть K – подмножество области G. В качестве Y рассматривается некоторое банахово пространство $B = B(K)$ функций, определённых на множестве K такое, что имеет место вложение $Q \subset B(K)$. В первой главе A есть оператор Υ^0_K, который граничным значениям функции f на γ_1 ставит в соответствие её значение на подмножестве K области G, во второй главе – оператор Υ^1_K, сопоставляющий значениям на γ_1 функции f её производную f' на K.

Величина (1) исследуется одновременно с взаимосвязанными задачами о модуле непрерывности восстанавливаемого оператора и наилучшего приближения этого оператора линейными ограниченными операторами.

Функцию переменной $\delta \geq 0$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; A, Q) = \sup\left\{\|Af\|_Y \,:\, f \in Q,\, \|f\|_X \leq \delta\right\}, \tag{2}$$

называют *модулем непрерывности оператора* A на классе Q.

Из определения (2) следует, что для оператора Υ^s_K и функций из $\mathcal{H}$ справедливо точное неравенство

$$\|\Upsilon^s_K f\|_B \leq \|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}\, \omega\left(\frac{\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}}{\|f\|_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}}\right) \tag{3}$$

аналогичное неравенствам в известных теоремах Адамара о трёх кругах и братьев Неванлинна о двух константах. Оценки аналитической функции в области через её предельные граничные значения исследовали Г. Сегё, Э. Ландау, К. Каратеодори и Л. Фейер, Ф. Рисс, И. Шур, С. Какей, Ф. Неванлинна и Р. Неванлинна, Г. Пик, С. Такенака, Г. М. Голузин, Н. И. Ахиезер, Я. Л. Геронимус, А. И. Макинтайр, В. В. Рогозинский, Г. С. Шапиро, С. Я. Хавинсон (в случае, когда область есть круг или односвязная область); М. Хейнс и Р. М. Робинсон (круговое кольцо), Г. Грунский, Л. Альфорс, С. Я. Хавинсон, З. Нехари, П. Р. Гарабедян, Х. Уидом (многосвязная область) и многие др. Об исследованиях задач, близких к (3), см. работы [26, 29] и приведённую там библиографию. В работе получены некоторые новые точные неравенства вида (3), вообще говоря, с различными $L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)$ и $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ -нормами на произвольных измеримых подмножествах границы области γ_k, $k = 0, 1$.

Задача наилучшего приближения линейного неограниченного оператора A множеством $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(N; X, Y)$ линейных ограниченных операторов из X в Y, норма которых не превосходит числа $N > 0$, на классе элементов банахова пространства Q появилась в работе С. Б. Стечкина в 1965 году. В статье [21] 1967 года была дана постановка задачи и получены первые принципиальные результаты. Точная постановка задачи следующая. Для оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ величина

$$U(T) = \sup\left\{\|Af - Tf\|_Y \,:\, f \in Q\right\}$$

является уклонением T от оператора A на классе Q. Величина

$$E(N) = E(N; A, Q) = \inf\left\{U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N)\right\} \tag{4}$$

есть *наилучшее приближение оператора* A множеством операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$, $N > 0$, и найти экстремальный оператор (последовательность операторов), на котором в (4) достигается нижняя грань. Этой задаче к настоящему времени посвящено большое число исследований С. Б. Стечкина, В. В. Арестова, В. И. Бердышева, А. П. Буслаева, В. Н. Габушина, Ю. Н. Субботина, Л. В. Тайкова, О. А. Тимошина, В. Г. Тимофеева, М. А. Филатовой и др., см. обзорную работу [4], а также [14, 6, 28] и приведенную в них библиографию. В частности, известна взаимосвязь задачи Стечкина с задачей оптимального восстановления оператора и модулем непрерывности оператора. Эта взаимосвязь существенно используется в данном исследовании и выражается следующим образом. Введем обозначения

$$\Delta(N) = \sup\left\{\omega(\delta) - N\delta \,:\, \delta \ge 0\right\}, \;\; N > 0;$$

$$\ell(\delta) = \inf\left\{E(N) + N\delta \,:\, N > 0\right\}, \;\; \delta \ge 0.$$

Следующее утверждение, оценивающее наилучшее приближение (4) оператора через его модуль непрерывности (2) содержится в статье С. Б. Стечкина [21].

Теорема А. *Если A – однородный оператор, Q – выпуклый уравновешенный класс, то имеют место неравенства*

$$E(N) \ge \Delta(N), \quad N > 0; \qquad \omega(\delta) \le \ell(\delta), \quad \delta \ge 0. \tag{5}$$

В следующей теореме приведено уточнение неравенства (5), связывающее задачу о модуле непрерывности оператора и задачу Стечкина с задачами оптимального восстановления (см. [4]).

Теорема B. *Если A – однородный оператор, Q – выпуклый уравновешенный класс, то имеют место неравенства*

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \leq \ell(\delta), \qquad \delta \geq 0.$$

Известно (см. [9, 10, 17; 4, 32] и приведённую там библиографию), что в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом уравновешенном классе с помощью множества $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный ограниченный функционал и величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала, таким образом, справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \omega(\delta). \tag{6}$$

Кроме того, для задач (1) и (4) взаимосвязь (см. [20, 10; 4; 32] и приведённую там библиографию) выражается в следующих соотношениях

$$E(N) = \Delta(N); \quad \omega(\delta) = \ell(\delta).$$

В настоящее время в задаче Стечкина (4) кроме общих результатов, получены точные решения ряда задач для конкретных операторов в классических функциональных пространствах. Наиболее полно исследовано наилучшее приближение операторов дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций $(0 \leq k < n)$ в пространствах L^p на числовой оси и полуоси. Для функций многих переменных задачи исследованы заметно меньше; однако, и здесь имеется ряд точных, интересных результатов (см. [4] и приведённую там библиографию). Задача Стечкина на классах аналитических функций решена лишь в некоторых случаях. В первых двух главах рассматриваются задачи наилучшего приближения операторов Υ^s_K, $s = 0, 1,$ множеством линейных ограниченных операторов на классе $Q = Q^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$.

Известны двойственная взаимосвязь задачи о модуле непрерывности неограниченного оператора на классе с соответствующей задачей наилучшего приближения одного класса другим в сопряжённых пространствах и взаимосвязь задачи Стечкина приближения неограниченного оператора ограниченными операторами на классе с соответствующей задачей наилучшего линейного приближения одного класса другим [2]. Наиболее обстоятельно исследована взаимосвязь задачи Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными операторами с задачей наилучшего приближения одного класса дифференцируемых функций вещественной переменной другим классом более гладких функций (подробнее см. [2; 4, §7; 6, §7.5-7.6]).

Пусть в линейном пространстве два класса Q_j, $j = 1, 2$, и банахово пространство B удовлетворяют условию: для любого $f_1 \in Q_1$ существует элемент $f_2 \in Q_2$, что $f_1 - f_2 \in B$. *Наилучшим приближением класса* Q_1 *классом* Q_2 *по норме пространства* B называется величина

$$\mathrm{E}\,(Q_1, Q_2)_B = \sup \left\{ \mathrm{E}\,(f_1, Q_2)_B \,:\, f_1 \in Q_1 \right\}, \tag{7}$$

где наилучшее приближение f_1 классом Q_2 задаётся равенством

$$\mathrm{E}\,(f_1, Q_2)_B = \inf \left\{ \|f_1 - f_2\|_B \,:\, f_2 \in Q_2 \right\}.$$

Обозначим $Q^p(D_R, N)$ класс функций f из класса Харди $H^p(D_R)$, аналитических в круге $D_R = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R\}$, чьи предельные граничные значения на окружности $l_R = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = R\}$ удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p(l_R)} \le N$; и $\partial Q^p(D_R)$ – класс, состоящий из производных функций класса $Q^p(D_R, 1)$, т.е. $\partial Q^p(D_R) = \{g' \colon g \in Q^p(D_R, 1)\}$. Введем аналогичные классы функций, аналитических в кольце $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z| < R\}$, $0 < r < R$. В параграфе 1.6 исследуется задача наилучшего приближения класса $Q^p(D_\rho) = Q^p(D_\rho, 1)$ классом $Q^p(D_R, N)$, $N > 0$, по норме пространства $L^p(l_r)$, $0 < r < \rho < R$, $1 \le p \le \infty$, обобщаются результаты Л. В. Тайкова [23]. Исследуется аналогичная задача приближения класса $Q^p(C_{r,\rho})$ классом $Q^p(C_{r,R}, N)$. В параграфе 2.4 рассматривается задача наилучшего приближения класса $\partial Q^p(D_\rho)$ классом $Q^p(D_R, N)$, $N > 0$, по норме пространства $L^p(l_r)$, $0 < r < \rho < R$, $1 \le p \le \infty$, и аналогичная задача для колец. В работе двойственность явно не используется. Однако при построении методов наилучшего приближения класса классом применяется конструкции экстремальных операторов в задаче Стечкина.

Третья глава посвящена исследованию двух экстремальных задач на классах функций, аналитических в полуплоскости. Одной из них является конкретная задача оптимального восстановления, отличная от задачи (1). А именно, задача оптимального восстановления функции и её производных на классе Харди – Соболева по точной (но не полной) информации о функции – сужению её спектральной функции на интервал.

Пусть $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$, $1 \le p \le \infty$, – пространство аналитических в верхней полуплоскости Π_+ функций f, для которых существует $M = M(f)$, что $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le M$, для всех $y > 0$. Пространство $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ наделено нормой $\|f\|_{\mathcal{H}^p(\Pi_+)} = \sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \,:\, y > 0\right\}$, которая, как известно, совпадает с L^p-нормой предельных граничных значений на вещественной прямой. Для целого неотрицательного n введем класс $Q_n^p = Q_n^p(\Pi_+)$ функций из $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$, для которых производная порядка n также принадлежит $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и её норма ограничена единицей.

Обозначим через I_σ, $\sigma > 0$, информационный оператор, который сопоставляет функции f из $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ сужение её спектральной (вообще говоря, обобщённой) функции на интервал $(-\varepsilon, \sigma)$, $\sigma > 0, \varepsilon > 0$. Спектральная функция имеет носитель в $[0, +\infty)$ и, следовательно, её сужение не зависит от ε. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$ рассматриваем либо множество $\mathcal{F}$ всех возможных, либо $\mathcal{L}$ – линейных отображений, определённых на $\mathrm{I}_\sigma Q_n^p$, в пространство Y. В качестве пространства Y рассматриваются $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и $L^p(\mathbb{R} + iy)$, $y > 0$. Для $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$ и метода $T \in \mathcal{R}$ величина погрешности восстановления значений оператора дифференцирования порядка m (функции, при $m = 0$) на классе Q_n^p по информации I_σ с помощью метода T определяется равенством

$$\mathcal{U}[T, m, \sigma, n]_Y = \sup\left\{\|f^{(m)} - T(\mathrm{I}_\sigma f)\|_Y \,:\, f \in Q_n^p\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}[m, \sigma, n]_Y = \inf\left\{\mathcal{U}[T, m, \sigma, n]_Y \,:\, T \in \mathcal{R}\right\} \tag{8}$$

есть величина *оптимального восстановления значений оператора* дифференцирования порядка m (функции, при $m = 0$) на классе Q_n^p по информации I_σ с помощью множества методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины (8) и построении оптимального метода восстановления – экстремального оператора (последовательности операторов), на котором в (8) достигается нижняя грань.

Восстановление функции (сигнала, передаточной функции системы) по информации о её частотных характеристиках – одна из основных проблем во многих прикладных задачах. Задачи оптимального восстановления функции и производных по информации о её спектре изучались в цикле работ Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко, см. [18,19] и ссылки там. Близкой к задаче (8) является задача оптимального восстановления функции f и её производных на классе Харди – Соболева функций, аналитических в единичном круге, по коэффициентам Тейлора функции f, см. [30, 32] и приведённую там библиографию.

В третьей главе также рассматривается связанная с (8) задача наилучшего приближения класса Харди – Соболева Q_n^p и класса $\partial^m Q_n^p$, состоящего из производных порядка m функций из Q_n^p, пространством A_σ^p целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, и принадлежащих пространству $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$. Приближения рассматриваются по норме пространств $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и $L^p(\mathbb{R}+iy)$, $y>0$.

Целые функции экспоненциального типа являются классическим аппаратом приближения функций как вещественной, так и комплексной переменной. Таким приближениям посвящена обширная литература (см., например, монографии [5, 13] и приведённую там библиографию). Хорошо известны результаты о наилучшем приближении на числовой оси классов Соболева пространством A_σ целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ. Для некоторых классов пространство целых функций является наилучшим аппаратом приближения. В работе Г. Г. Магарил-Ильяева [16] были введены средние поперечники классов. В частности, в [16] исследованы средние ν-поперечники классов Соболева в $L^p(\mathbb{R})$; в случаях $p=1,2,\infty$, поперечники реализуются на подпространстве $A_\sigma \bigcap L^p(\mathbb{R})$, $\sigma=\pi\nu$.

Близкая к исследуемой задача для функций, аналитических в круге, хорошо изучена. Пусть $Q_n^p(D)$ – класс Харди – Соболева функций из пространства Харди $H^p(D)$, аналитических в единичном круге D, у которых производная порядка n также принадлежит $H^p(D)$ и её норма ограничена единицей. Для наилучшего приближения по норме пространства $H^p(D)$ класса $Q_n^p(D)$ пространством $\mathcal{P}_{\mathrm{N}-1}$ алгебраических многочленов степени не более $\mathrm{N}-1$ справедливо равенство

$$\mathrm{E}(Q_n^p(D),\mathcal{P}_{\mathrm{N}-1})_{H^p(D)}=(\mathrm{N}-n)!/\mathrm{N}!,\quad n<\mathrm{N},\,1\le p\le\infty. \qquad (9)$$

В случае $p=\infty$ это доказано в работе К. И. Бабенко [7]; в случае $1\le p<\infty$ – в работе Л. В. Тайкова [22]. Более того, в статьях В. М. Тихомирова [24] ($p=\infty$) и Л. В. Тайкова [22] ($1\le p<\infty$) показано, что величина (9) является N-мерным поперечником класса $Q_n^p(D)$ в пространстве $H^p(D)$, $1 \le p \le \infty$. Результаты, относящиеся к поперечникам классов аналитических функций, см. [32, гл. 4; 25], и ссылки там.

В работе для класса Харди – Соболева $Q_n^p(\Pi_+)$, $1 \le p \le \infty$, аналитических в полуплоскости Π_+ функций получены аналоги описанных выше результатов для класса Харди – Соболева $Q_n^p(D)$ функций, аналитических в круге D. Точнее, найдено наилучшее приближение класса $Q_n^p(\Pi_+)$ пространством A_σ^p, построен линейный метод наилучшего приближения; вычислены средние поперечники по Колмогорову и Бернштейну, средний линейный поперечник класса.

Цель работы. Исследование задач оптимального восстановления аналитической функции и её производной по приближённо заданным предельным значениям функции на части границы, взаимосвязанных с ними точных неравенств для аналитических функций и задач наилучшего приближения неограниченных операторов линейными ограниченными операторами. Решение задачи оптимального восстановления аналитической в полуплоскости функции и производных класса Харди – Соболева по сужению её спектральной функции и связанной с ней задачи наилучшего приближения класса целыми функциями экспоненциального типа.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа и теории функций, в частности – теории функций комплексного переменного, теории приближений.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

1. Исследована задача оптимального восстановления аналитической в области функции по значениям на измеримой части границы области, заданным с весовой L^q-погрешностью, на классе функций с ограниченной весовой L^r-нормой значений на дополнительной части границы, и взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения оператора аналитического продолжения функции с части границы линейными ограниченными операторами. Получены оптимальные методы восстановления: (а) в точке односвязной области, при $1 \le q, r \le \infty$, для естественного широкого класса весов; (б) на подмножестве односвязной области при $q = r = \infty$; (в) на внутренней прямой полосы по значениям на граничной прямой на классе функций с ограниченной нормой на другой граничной прямой, для L^q-норм, $1 \le q \le \infty$, на трёх прямых; (г) на внутренней окружности кольца по значениям, заданным с погрешностью δ_n, целой

степенью отношения радиусов граничных окружностей, на граничной окружности, на классе функций с ограниченной нормой на другой граничной окружности, для L^q-норм, $1 \le q \le \infty$, на трёх окружностях. Получено неравенство между значением аналитической функции в конечносвязной области и её весовыми нормами граничных значений на двух измеримых подмножествах границы области при $0 < q, r \le \infty$ – аналог теоремы братьев Неванлинна о двух константах.

2. Исследована задача оптимального восстановления производной аналитической в области функции по значениям функции, заданным с L^p-погрешностью на измеримой части границы, на классе функций с ограниченной L^p-нормой значений на дополнительной части границы, и взаимосвязанная задача Стечкина наилучшего приближения оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами. Получены оптимальные методы восстановления: (а) в точке односвязной области при $p = \infty$; (б) на внутренней прямой полосы по заданным с погрешностью δ значениям функции на граничной прямой, на классе функций с ограниченной нормой на другой граничной прямой, для L^p-норм, $1 \le p \le \infty$, на трёх прямых и достаточно большого $|\ln\delta|$; (в) на внутренней окружности кольца по значениям функции на одной граничной окружности, заданным с погрешностью δ_n, целой степенью отношения радиусов граничных окружностей с достаточно большим $|\ln\delta_n|$, на классе функций с ограниченной нормой на другой граничной окружности, для L^p-норм, $1 \le p \le \infty$, на трёх окружностях.

3. На классах Харди – Соболева функций, аналитических в полуплоскости, с ограниченной $\mathcal{H}^p$-нормой, $1 \le p \le \infty$, производной порядка n, решена задача оптимального восстановления производной порядка k, $0 \le k \le n$, по сужению спектральной функции на интервал. Решена связанная задача наилучшего приближения класса Харди – Соболева пространством целых функций конечного экспоненциального типа. Вычислены средние поперечники класса.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при проведении исследований задач оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации об элементах, экстремальных задач на классах аналитических функций и приложений.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [34]–[48] (без соавторов); в том числе 14 в изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на Международных летних школах по теории функций С. Б. Стечкина (Миасс, 2006, 2008, 2010 – 2015, 2017; Алексин, 2007; Пекин, 2009; Душанбе, 2016; Кыштым, 2018, 2019; Екатеринбург, 2020); Международных Саратовских зимних школах «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018); Международных Казанских летних научных школах-конференциях «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 2007, 2013, 2015); Международной Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функции и смежные проблемы» (Воронеж, 2017); Международных симпозиумах «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 2006, 2012, 2014, 2016, 2018); Международных конференциях «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (Екатеринбург, 2008, 2011; Челябинск, 2014); Международных конференциях «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, 2006 – 2008, 2011, 2012); Семинарах по анализу Фурье и смежным областям (Будапешт, 2015; Печ, 2017); Международной конференции «Теория приближений», посвященной 90-летию со дня рождения С. Б. Стечкина (Москва, 2010); Крымской международной математической конференции (Судак, 2013); Международной конференции «Комплексный анализ и теория приближения», посвященной 80-летию проф. Е. П. Долженко (Москва, 2014); Международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященной 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (Москва, 2015); Международной школе-конференции: Соболевские чтения (Новосибирск, 2016); Международной конференции «Analysis Mathematica» (Будапешт, 2019); на семинаре «Геометрическая теория функций комплексного переменного» под рук. проф. Д. В. Прохорова (Саратов, 2019); на семинаре «Вопросы оптимального восстановления линейных операторов» под рук. проф. Г. Г. Магарил-Ильяева, проф. К. Ю. Осипенко, проф. В. М. Тихомирова (МГУ, Москва, 2021); на семинаре отдела некорректных задач анализа и приложений ИММ УрО РАН под рук. чл.-корр. РАН В. В. Васина (Екатеринбург, 2021); на совместных семинарах отделов аппроксимации и приложений, теории приближения функций ИММ УрО РАН под рук. д.ф.-м.н. Н. Ю. Антонова, д.ф.-м.н. А. Г. Бабенко (многократно); на научных семинарах кафедры математического анализа УрФУ под рук. проф. В. В. Арестова (многократно).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Общий объем работы – 229 страниц. Список литературы содержит 116 наименований.

Основное содержание работы

В **главе 1** исследуется задача оптимального восстановления аналитической в области G функции по некасательным предельным значениям функции, заданным с погрешностью на части границы γ_1, на классе $Q = Q^{r,q}(G;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$. Явная постановка задачи следующая. Для числа $\delta>0$ и метода восстановления $T\in\mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T,\delta)=\sup\left\{\|f-Tg\|_{B(K)}\,:\,f\in Q,\,g\in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1),\,\|f-g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\le\delta\right\}$$

является погрешностью восстановления на множестве K функции класса Q по её граничным значениям на γ_1, заданным с погрешностью δ по норме $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$, методом T. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)=\inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta)\,:\,T\in\mathcal{R}\right\}\tag{10}$$

есть *величина оптимального восстановления* на множестве K функции (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ^0_K) класса Q по её δ-приближённым граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (10) достигается нижняя грань.

Задача оптимального восстановления исследуется одновременно с взаимосвязанными задачами о модуле непрерывности (2) оператора Υ^0_K на классе Q и наилучшего приближения (4) оператора Υ^0_K множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)=\mathcal{B}(N;L^q_{\varphi_1}(\gamma_1),B(K))$ на классе Q. Модулем непрерывности оператора Υ^0_K на классе Q является функция

$$\omega(\delta)=\sup\left\{\|f\|_{B(K)}\,:\,f\in Q,\,\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\le\delta\right\},\quad\delta>0.\tag{11}$$

Величина
$$U(T) = \sup\left\{\|f - Tf\|_{B(K)} \,:\, f \in Q\right\}$$
представляет собой уклонение оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ от оператора Υ_K^0 на классе функций Q. Величина
$$E(N) = \inf\left\{U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N)\right\} \tag{12}$$
есть *наилучшее приближение оператора* Υ_K^0 множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и построении экстремального оператора, на котором в (12) достигается нижняя грань.

В параграфе **1.1** получено решение задач для функционала $\Upsilon_{z_0}^0$, сопоставляющего предельным граничным значениям функции на γ_1 её значение в точке z_0 односвязной области G.

Класс Q является выпуклым и уравновешенным. Как обсуждалось выше, в задаче оптимального восстановления линейного функционала $\Upsilon_{z_0}^0$ на классе Q с помощью множества $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный ограниченный функционал и величина уклонения равна модулю непрерывности (11) функционала $\Upsilon_{z_0}^0$, т.е. справедливы равенства (6).

По весовым функциям φ_k, $k = 0, 1$, для $\delta > 0$ определим на границе Γ области G функцию ψ_δ по формуле
$$\psi_\delta(\zeta) = \begin{cases} \left(\frac{P(z_0,\zeta)}{\beta\varphi_0(\zeta)}\right)^{1/r}, & \zeta \in \gamma_0, \\ \delta\left(\frac{P(z_0,\zeta)}{\alpha\varphi_1(\zeta)}\right)^{1/q}, & \zeta \in \gamma_1, \end{cases}$$
в которой $P(z_0, \zeta)$ – плотность гармонической меры относительно области G в точке z_0; величины α и β, соответственно, равны гармонической мере γ_1 и γ_0 относительно области G в точке z_0. Здесь и в дальнейшем, если r и/или q равны бесконечности, то считаем, что величины $1/r$ и/или $1/q$, соответственно, равны нулю.

Определим функцию s_δ по функции ψ_δ равенством
$$s_\delta(z) = \exp\left(u_\delta(z) + iv_\delta(z)\right), \quad z \in G, \tag{13}$$
где функция $u_\delta(z) = \int_\Gamma P(z,\zeta)\,\ln\psi_\delta(\zeta)\,|d\zeta|$, $\quad z \in G$, является гармонической в области G, а v_δ – функция, гармонически сопряжённая к

u_δ. Функция v_δ однозначная, в силу односвязности области G, и единственная с точностью до вещественной аддитивной константы, выбор значения которой нам не важен.

На пространстве $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$ определим функционал T_δ формулой

$$T_\delta g = \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)}\, g(\zeta)\,|d\zeta|, \quad g \in L^q_{\varphi_1}(\gamma_1).$$

Далее будет использоваться величина $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{q,r}(z_0;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, определяемая равенствами

$$\begin{gathered}\mathcal{C} = \varepsilon^{1/q}(\gamma_1,\varphi_1)\,\varepsilon^{1/r}(\gamma_0,\varphi_0)\,\alpha^{-\alpha/q}\beta^{-\beta/r},\\ \varepsilon(\gamma_k,\varphi_k) = \exp\int_{\gamma_k} P(z_0,\zeta)\ln\frac{P(z_0,\zeta)}{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta|, \quad k=0,1.\end{gathered} \tag{14}$$

Основными в параграфе 1.1 являются следующие утверждения.

Теорема 1.1.1. *При произвольных $q,r,\ 1 \le q,r \le \infty$, весовых функциях $\varphi_k,\ k=0,1$, и $\delta > 0$ для величины оптимального восстановления (10) функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ на классе Q имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha.$$

При этом экстремальными в (11) являются функции вида $cs_\delta,\ |c|=1$; линейный ограниченный функционал T_δ является оптимальным методом восстановления в задаче (10).

Для функций класса $\mathcal{H}$ справедливо точное неравенство

$$|f(z_0)| \le \mathcal{C}\,\|f\|^\alpha_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)}\,\|f\|^\beta_{L^r_{\varphi_0}(\gamma_0)}. \tag{15}$$

На функциях $cs_\delta,\ \delta>0,\ c\in\mathbb{C}$ неравенство обращается в равенство.

В случае $q=r=\infty$ величина (11) и, соответственно, неравенство (15) следуют из хорошо известной теоремы братьев Неванлинна о двух константах (см. [31; 11, гл.VIII, §4]). В этом случае $\mathcal{C}=1$.

Теорема 1.1.2. *При произвольных $q,r,\ 1 \le q,r \le \infty$, весовых функциях $\varphi_k,\ k=0,1$, и $N>0$ для величины наилучшего приближения (12) функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ на классе Q справедливо равенство*

$$E(N) = \mathcal{C}^{1/\beta}\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta}.$$

Функционал T_δ, с параметром δ, определённым равенством $\delta = \mathcal{C}^{1/\beta}\alpha^{1/\beta}N^{-1/\beta}$, является функционалом наилучшего приближения.

Обозначим через $\mathcal{H} = \mathcal{H}^p(G,\varphi)$, $1 \le p \le \infty$, класс функций $f \in N_*(G)$ с граничными значениями из $L^p_\varphi(\Gamma)$ с весом φ. Класс $\mathcal{H}^p(G,\varphi)$ совпадает с классом $\mathcal{H}^{p,p}(G;\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, в котором показатели совпадают и равны p, а весовые функции φ_k являются сужениями функции φ на γ_k, $k=0,1$. Пусть $Q = Q^p(G,\gamma_1,\varphi)$ – подкласс функций $f \in \mathcal{H}$ таких, что $\|f\|_{L^p_\varphi(\gamma_0)} \le 1$.

В параграфе **1.2** рассмотрены два случая: область G есть Π_+ – верхняя полуплоскость, множество γ_1 – промежуток (интервал или полупрямая) граничной прямой; область G является кругом, а γ_1 – дуга граничной окружности. На классе $Q^p(G,\gamma_1,\varphi)$ в задаче оптимального восстановления (10) значения функции в точке $z_0 \in G$ по её приближённо заданным предельным граничным значениям на γ_1 по норме $L^p_\varphi(\gamma_1)$ и во взаимосвязанной задаче (12) наилучшего приближения функционала $\Upsilon^0_{z_0}$ линейными ограниченными функционалами явно выписаны решения: экстремальные функция и функционал в теоремах 1.1.1 и 1.1.2. В частности, вычислена константа $\mathcal{C}$ неравенства (15).

Пусть $\widetilde{\mathcal{H}}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ – множество функций $f \in N_*(G)$, для которых нормы $\|f\|_{L^\infty_{\varphi_k}(\gamma_k)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(\zeta)|\varphi_k(\zeta) : \zeta \in \gamma_k\}$, $k=0,1$, предельных граничных значений конечны. Класс $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ состоит из функций $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$, для которых справедливо неравенство $\|f\|_{L^\infty_{\varphi_0}} \le 1$. В параграфе **1.3** в случае односвязной области G на классе $Q = \widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0,\varphi_0;\gamma_1,\varphi_1)$ для произвольной функциональной банаховой решётки $B = B(K)$, $K \subset G$, $Q \subset B(K)$, изучаются: задача оптимального восстановления (10) оператора Υ^0_K по заданным с $L^\infty_{\varphi_1}$-погрешностью значениям функции на γ_1, задача Стечкина (12) наилучшего приближения оператора Υ^0_K множеством $\mathcal{B}(N; L^\infty_{\varphi_1}(\gamma_1), B(K))$ и задача о модуле непрерывности оператора Υ^0_K.

Определим на границе Γ односвязной области G функцию ψ_δ равенством $\psi_\delta(\zeta) = \delta^k/\varphi_k(\zeta)$, $\zeta \in \gamma_k$, $k=0,1$. Функция s_δ задаётся формулой (13) по функции ψ_δ. Для $\alpha \in (0,1)$ через γ_α обозначим подмножество точек z области G, в которых гармоническая мера $w(z) = w(z,\gamma_1,G)$ множества γ_1 относительно области G в точке z принимает значение α: $\gamma_\alpha = \{z \in G : w(z,\gamma_1,G) = \alpha\}$.

Определим оператор T_δ на пространстве $L^\infty_{\varphi_1}(\gamma_1)$ формулой

$$(\mathrm{T}_\delta g)(z) = \int\limits_{\gamma_1} P(z,\zeta)\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(\zeta)}\, g(\zeta)\,|d\zeta|, \quad z \in K.$$

Результатами параграфа 1.3 являются следующие утверждения.

Теорема 1.3.3. *При произвольных* $K \subset G$, *весовых функциях* φ_k, $k = 0, 1$, *и* $\delta > 0$ *для величин оптимального восстановления* (10) *и модуля непрерывности* (11) *оператора* Υ^0_K *на классе* $\widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \|s_1\delta^w\|_B.$$

Оптимальным методом восстановления является метод T_δ.

В случае $K \subset \gamma_\alpha$ *равенства примут вид* $\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathrm{C}\delta^\alpha$, *с коэффициентом* $\mathrm{C} = \|s_1\|_B$.

Теорема 1.3.4. *При произвольных* $K \subset \gamma_\alpha$, *весовых функциях* φ_k, $k = 0, 1$, *и* $N > 0$ *для величины наилучшего приближения* (12) *оператора* Υ^0_K *на классе* $\widetilde{Q}^{\infty,\infty}(\gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ *справедливо равенство*

$$E(N) = \mathrm{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}, \quad \mathrm{C} = \|s_1\|_B.$$

При этом оператором наилучшего приближения является оператор T_δ *с параметром* δ, *задаваемым равенством* $\delta = \mathrm{C}^{1/\beta}\alpha^{1/\beta}N^{-1/\beta}$.

Пусть $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$, $1 \le p \le \infty$, – класс функций f, аналитических в полосе $\Pi_Y = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < Y\}$, след которых на каждой прямой $\mathbb{R} + i\eta$, $0 < \eta < Y$, принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R} + i\eta)$ и для которых $\sup\left\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} : 0 < \eta < Y\right\} < +\infty$. В $\mathcal{H}^p(\Pi_Y)$ выделим класс $Q = Q^p(\Pi_Y)$ функций f, чьи граничные значения на прямой $\mathbb{R} + iY$ удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iY)} \le 1$. В параграфе **1.4** изучается конкретный вариант задачи (10) – задача оптимального восстановления на прямой $\mathbb{R} + iy$, $0 < y < Y$, аналитической в полосе Π_Y функции (оптимального восстановления оператора $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$) относительно $L^p(\mathbb{R} + iy)$ нормы на классе $Q = Q^p(\Pi_Y)$ по граничным значениям функции на вещественной оси $\mathbb{R}$, заданным с δ-погрешностью относительно $L^p(\mathbb{R})$ нормы. То есть вариант задачи (10), в котором областью G является полоса Π_Y, множество K – прямая $\mathbb{R} + iy$ и $B(K) = L^p(\mathbb{R} + iy)$, подмножества γ_k границы – прямые $\mathbb{R} + i(1-k)Y$, $k = 0, 1$; показатели совпадают и равны p, $1 \le p \le \infty$, а весовые функции тождественно равны единице. А также связанные задачи о модуле непрерывности (11) и наилучшего приближения (12) оператора $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$ линейными ограниченными операторами из $\mathcal{B}(N; L^p(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}+iy))$ на классе $Q^p(\Pi_Y)$. Прямая $\mathbb{R}+iy$ является линией уровня γ_α гармонической меры $\mathbb{R}$ относительно Π_Y при $\alpha = (Y-y)/Y$; соответственно, $\beta = y/Y$.

На $L^p(\mathbb{R})$ определим оператор $\mathrm{T}_\delta = \mathrm{T}_\delta[y, Y]$ формулами

$$(\mathrm{T}_\delta f)(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_\delta\left((x+iy)-t\right) f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

$$\mathrm{T}_\delta(z) = \frac{1}{2Y}\frac{e^{i\sigma z}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\left(z/Y - i\beta\right)\pi + \cos\alpha\pi}, \quad \sigma = Y^{-1}\ln\delta.$$

Основными результатами параграфа являются следующие две теоремы.

Теорема 1.4.1. *При произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *и* $\delta > 0$ *для величин оптимального восстановления* (10) *и модуля непрерывности* (11) *оператора* $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$ *на классе* $Q^p(\Pi_Y)$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \delta^\alpha,$$

Оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный оператор T_δ, *определённый равенством* (16).

Теорема 1.4.2. *При произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *и* $N > 0$ *для величины наилучшего приближения* (12) *оператора* $\Upsilon^0_{\mathbb{R}+iy}$ *на классе* $Q^p(\Pi_Y)$ *справедливо равенство*

$$E(N) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Оператором наилучшего приближения является оператор T_δ, *определённый равенством* (16), *в котором* $\delta = \alpha^{1/\beta}\,N^{-1/\beta}$.

В параграфе **1.5** рассматривается задачи для конечносвязной области. Показано, что неравенство (15) справедливо для функций класса $\mathcal{H}^{r,q}(G; \gamma_0, \varphi_0; \gamma_1, \varphi_1)$ в случае произвольной конечносвязной области G комплексной плоскости с границей Γ, которая является объединением спрямляемых жордановых непересекающихся кривых, и для произвольных r, q, $0 < r, q \le \infty$. Обсуждаются случаи, когда для двусвязной области G справедливы аналоги теорем 1.1.1 и 1.1.2. А именно, показано, что утверждение теоремы 1.1.1 справедливо, если параметр δ является элементом последовательности $\delta_\nu = \delta_0\, \mathfrak{r}^{2\pi\nu/\mu}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, а утверждение теоремы 1.1.2 справедливо, если параметр N является элементом последовательности $N_\nu = \alpha\, \delta_\nu^{-\beta}$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Элемент δ_0 определяется равенством $\delta_0 = \exp\left\{1/\mu \int_0^{2\pi} (\ln \psi_1(\mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{r}e^{it})) - \ln \psi_1(\mathfrak{g}^{-1}(e^{it})))\, dt\right\}$, в котором $\mathfrak{g}$ – функция, реализующая однолистное конформное отображение двусвязной области G на кольцо $C_{\mathfrak{r},1} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathfrak{r} < |z| < 1\}$, $\mathfrak{r}$ — модуль двусвязной области G; $\mu = \mu(e_{\mathfrak{r}}) - \mu(e_1)$, где $\mu(e_\rho)$ – мера Лебега множества $e_\rho = \left\{t \in [0, 2\pi] \,:\, \rho e^{it} = \mathfrak{g}(\zeta), \zeta \in \gamma_1\right\}$, $\rho = \mathfrak{r}, 1$.

В пространстве Харди $H^p(C_{r,R})$, $1 \le p \le \infty$, аналитических в кольце $C_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z| < R\}$ функций выделим класс $Q = Q^p(C_{r,R})$ функций f, чьи граничные значения на окружности l_R удовлетворяют неравенству $\|f\|_{L^p_{\phi_R}(l_R)} \le 1$, $\phi_R \equiv (2\pi R)^{-1}$. В параграфе **1.6** исследуется вариант задач (10) и (12) для оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$, сопоставляющего предельным значениям функции на граничной окружности l_r её сужение на окружность l_ρ, $0 < r < \rho < R$, на классе $Q^p(C_{r,R})$. Точнее, вариант задач, в котором областью G является кольцо $C_{r,R}$, множество K — окружность l_ρ, $B(K) = L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$, $\phi_\rho \equiv (2\pi\rho)^{-1}$, подмножества границы – граничные окружности: $\gamma_0 = l_R$, $\gamma_1 = l_r$; показатели совпадают и равны p, $1 \le p \le \infty$, а весовые функции тождественно равны величинам, обратным к длинам окружностей. Окружность l_ρ является линией уровня γ_α гармонической меры: $w(z, l_r, C_{r,R}) = \alpha$, $z \in \gamma_\alpha$, её радиус ρ и величина α связаны равенством $\alpha = (\ln R - \ln \rho)/(\ln R - \ln r)$.

Из известной теоремы Адамара о трёх кругах для модуля непрерывности оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ на классе $Q^p(C_{r,R})$ следует оценка сверху: $\omega(\delta) \le \delta^\alpha$. В случае, когда параметр δ является элементом последовательности $\delta_\nu = (r/R)^\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, функция $R^{-\nu} z^\nu$ даёт оценку снизу, совпадающую с оценкой сверху. В этих случаях получено решение задачи оптимального восстановления оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ на классе $Q^p(C_{r,R})$. При этом для каждого δ_ν приводится семейство оптимальных методов восстановления.

Определим оператор $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} = \mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}[r, \rho, R]$ формулами

$$(\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta} f)\,(\rho e^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{\tau}_{\nu,\eta}(x - t)\, f(re^{it})\, dt, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$\mathrm{\tau}_{\nu,\eta}(x) = \rho^\nu r^{-\nu}\, e^{i\nu x}\, [\eta + \Lambda_1(x)]\,, \quad \Lambda_1(x) = \lambda_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \cos kx,$$

$$\lambda_0=\alpha=\frac{\ln R-\ln\rho}{\ln R-\ln r},\quad \lambda_k=\left(\frac{r}{\rho}\right)^k\frac{1-\rho^{2k}R^{-2k}}{1-r^{2k}R^{-2k}},\ \ k\in\mathbb{N}.$$

На отрезке $[0,2\pi]$ зададим функцию $\mathrm{u}_{\nu,\eta}$ равенствами

$$\mathrm{u}_{\nu,\eta}(x)=\rho^\nu R^{-\nu}\,e^{i\nu x}\left[-\eta+\Lambda_0(x)\right],\quad \Lambda_0(x)=\mu_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k\cos kx,$$

$$\mu_0=\beta=\frac{\ln\rho-\ln r}{\ln R-\ln r},\quad \mu_k=\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\frac{1-r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}R^{-2k}},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Введем обозначение: $\eta_k=\min\left\{\Lambda_k(x)\,:\,x\in[0,2\pi]\right\},\ k=0,1.$

Теорема 1.6.1. *При произвольных* $p,\ 1\le p\le\infty,$ *и целых* ν *для величин оптимального восстановления* (10) *и модуля непрерывности* (11) *оператора* $\Upsilon^0_{l_\rho}$ *на классе* $Q^p(C_{r,R})$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta_\nu)=\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_\nu)=\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_\nu)=\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta_\nu)=\delta_\nu^\alpha.$$

Оптимальными методами восстановления являются линейные ограниченные операторы $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta},$ *определённые равенством* (17) *при любом* $\eta\in[-\eta_1,\eta_0],$ *и экстремальные функции имеют вид* $cR^{-\nu}z^\nu,\ |c|=1.$

В следующей теореме сформулированы соответствующие результаты в задаче наилучшего приближения оператора $\Upsilon^0_{l_\rho}$ множеством $\mathcal{B}(N;L^p_{\phi_r}(l_r),L^p_{\phi_\rho}(l_\rho))$ на классе $Q^p(C_{r,R})$. При этом семейство экстремальных операторов $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta},$ соответствующих в теореме 1.6.1 одному значению параметра $\delta_\nu,$ в задаче наилучшего приближения $\Upsilon^0_{l_\rho}$ дают решение для некоторого отрезка значений параметра $N.$ На каждом из этих отрезков зависимость наилучшего приближения $E(N)$ от N линейная.

Теорема 1.6.2. *При произвольном* $p,\ 1\le p\le\infty,$ *для числа* $N_{\nu,\eta}=\rho^\nu r^{-\nu}(\alpha+\eta),$ *где* ν *– целое и* $\eta\in[-\eta_1,\eta_0],$ *для наилучшего приближения* (12) *оператора* $\Upsilon^0_{l_\rho}$ *на классе* $Q^p(C_{r,R})$ *справедливо равенство*

$$E(N_{\nu,\eta})=(\beta-\eta)\,(\alpha+\eta)^{\alpha/\beta}\,N_{\nu,\eta}^{-\alpha/\beta}=(\rho/R)^\nu-(r/R)^\nu\,N_{\nu,\eta}.$$

Оператором наилучшего приближения является оператор $\mathrm{T}_{\delta_\nu,\eta}.$

Для $0<r<R$ и $N>0$ введем класс функций из $H^p(C_{r,R})$ равенством $Q^p(C_{r,R},N)=\Big\{f\colon f\in H^p(C_{r,R}),\|f\|_{L^p_{\phi_R}(l_R)}\le N\Big\}.$ В последней части параграфа рассматривается задача (7) наилучшего приближения класса $Q^p(C_{r,\rho})$ классом $Q^p(C_{r,R},N)$, $N>0$.

Определим оператор $\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}=\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}[r,\rho,R]$ формулой

$$(\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}f)(Re^{ix})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}_{-\nu,\eta}(t-x)\;f(\rho e^{it})\,dt. \tag{18}$$

Теорема 1.6.3. *При произвольном* p, $1\le p\le\infty$, *для числа* $N=\rho^{-\nu}R^{\nu}(\beta-\eta)$, *где* ν *– целое и* $\eta\in[-\eta_1,\eta_0]$, *справедливо равенство*

$$\mathrm{E}(Q^p(C_{r,\rho}),Q^p(C_{r,R},N))_{L^p_{\phi_r}(l_r)}=(\alpha+\eta)\,(\beta-\eta)^{\beta/\alpha}\,N^{-\beta/\alpha}.$$

При этом линейный метод $\widetilde{\mathrm{U}}_{\nu,\eta}$, *определённый равенством* (18), *доставляет наилучшее приближение класса классом.*

В **главе 2** исследуется оптимальное восстановление производной аналитической в области G функции (оператора Υ^1_K) по некасательным предельным значениям функции, заданным с погрешностью на части границы γ_1, на классе $Q=Q^p(G;\gamma_1,\varphi)$. Явная постановка задачи такова. Для числа $\delta>0$ и метода восстановления $T\in\mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T,\delta)=\sup\left\{\|f'-Tg\|_{B(K)}\;:f\in Q,\,g\in L^p_{\varphi_1}(\gamma_1),\,\|f-g\|_{L^p_{\varphi_1}(\gamma_1)}\le\delta\right\}$$

является погрешностью восстановления на множестве K производной функции класса Q по её граничным значениям на γ_1, заданным с погрешностью δ по норме $L^p_{\varphi_1}(\gamma_1)$, методом T . Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)=\inf\{\mathcal{U}(T,\delta)\;:\;T\in\mathcal{R}\} \tag{19}$$

есть *величина оптимального восстановления* на множестве K производной функции класса Q (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ^1_K) по её δ-приближённым граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (19) достигается нижняя грань.

Задача оптимального восстановления исследуется одновременно с взаимосвязанными задачами о модуле непрерывности (2) оператора Υ^1_K на классе Q, и наилучшего приближения (4) оператора Υ^1_K множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(N; L^p_{\varphi_1}(\gamma_1), B(K))$ на классе Q. Функция переменной $\delta > 0$, определяемая равенством

$$\omega(\delta) = \sup\left\{\|f'\|_{B(K)} \,:\, f \in Q,\, \|f\|_{L^p_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta\right\}, \tag{20}$$

есть *модуль непрерывности оператора* Υ^1_K на классе Q. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|f' - Tf\|_{B(K)} \,:\, f \in Q\right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{B}(N)$ от оператора Υ^1_K на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N)\right\} \tag{21}$$

есть *наилучшее приближение оператора* Υ^1_K множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и построении экстремального оператора, на котором в (21) достигается нижняя грань.

В параграфе **2.1** рассматривается класс Харди $H^\infty(G)$ аналитических и ограниченных функций в односвязной области G. На классе $Q = Q^\infty(G; \gamma_1, 1)$ получено решение трёх взаимосвязанных экстремальных задач (19), (20), (21) для функционала $\Upsilon^1_{z_0}$, который сопоставляет граничным значениям на γ_1 функции f значение её производной $f'(z_0)$ в точке $z_0 \in G$. В этом случае, как и в § 1.1, имеют место равенства (6).

Обозначим через w гармоническую в области G функцию переменной z, значение которой в точке z равно гармонической мере γ_1 относительно области G и точки z. Будем использовать обозначения $\alpha = w(z_0)$ и $\beta = 1 - w(z_0)$ для величин гармонической меры γ_1 и γ_0 относительно области G в точке z_0; $\kappa = \kappa(z_0)$, $\overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0)$ и $t = t(z_0)$ соответственно для длины, направления и аргумента градиента функции w в точке z_0, т.е. определённых равенствами $\overline{\nu}(z_0) = \nabla w(z_0)/|\nabla w(z_0)| = (\cos t, \sin t)$, $\kappa(z_0) = |\nabla w(z_0)|$. Пусть g – функция, задающая однолистное отображение области G на единичный круг, удовлетворяющая условиям: $g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) > 0$. Обозначим через $\eta(z_0)$ положительную величину $\eta(z_0) = 2g'(z_0)/\kappa(z_0)$, если $\kappa(z_0) \ne 0$, и равную $+\infty$, если $\kappa(z_0) = 0$. Пусть s_δ – функция, задаваемая равенством (13) по функции ψ_δ, определённой на границе Γ формулой $\psi_\delta(\zeta) = \delta^k$, $\zeta \in \gamma_k$, $k = 0, 1$, т.е. аналитическая в области G функция $s_\delta(z) = \exp\{\ln \delta (w(z) + iv(z))\}$.

Для $\delta > 0$ и точки $z_0 \in G$, удовлетворяющих неравенству

$$| \ln \delta | \geq \eta(z_0), \tag{22}$$

определим функционал T_δ^1 на пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ равенствами

$$T_\delta^1 f = e^{-it} \int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta) \, \frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(\zeta)} \, f(\zeta) \, |d\zeta|, \tag{23}$$

$$J_{z_0}(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0, \zeta) + \ln \delta \, \kappa(z_0) \, P(z_0, \zeta).$$

Для $\delta > 0$ и точки $z_0 \in G$, удовлетворяющих неравенству

$$| \ln \delta | < \eta(z_0), \tag{24}$$

обратному к (22), определим в области G функцию F_δ формулой

$$F_\delta(z) = \frac{g(z) - g_0}{1 - g(z) \, \overline{g_0}} \, s_\delta(z), \quad g_0 = -e^{it} \frac{\kappa(z_0) \, \ln \delta}{2g'(z_0)} = -e^{it} \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)}.$$

В случае (24) определим функционал T_δ^1 равенствами

$$T_\delta^1 f = e^{-it} \int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta) \, \frac{s_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)} \, f(\zeta) \, |d\zeta|, \tag{25}$$

$$I_{z_0}(\zeta) = \frac{\ln \delta}{\eta(z_0)} \, \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0, \zeta) + \kappa(z_0) \, \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)} \right) \, P(z_0, \zeta).$$

Основными результатами параграфа являются две теоремы.

Теорема 2.1.1. *Для величины* (19) *справедливы утверждения.*

(I) *В случае* $| \ln \delta | \geq \eta(z_0)$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \kappa(z_0) \, \delta^\alpha \, | \ln \delta |.$$

Экстремальными в (20) *являются функции вида* $c s_\delta$, $|c| = 1$, *а оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал* T_δ^1, *определённый равенством* (23).

(II) *В случае* $| \ln \delta | < \eta(z_0)$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \kappa(z_0) \, \delta^\alpha \; \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)} \right).$$

Экстремальными в (20) *являются функции вида* cF_δ, $|c| = 1$, *а оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал* T^1_δ, *определённый равенством* (25).

Теорема 2.1.2. *Для величины* (21) *наилучшего приближения функционала* $\Upsilon^1_{z_0}$ *справедливы следующие утверждения.*

(I *) *Если* $N > 0$ *представимо в виде*

$$N = \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,|\alpha\ln\delta + 1|, \quad |\ln\delta| \ge \eta(z_0),$$

то справедливо равенство

$$E(N) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,|\beta\ln\delta - 1|.$$

Функционал T^1_δ, *определённый формулой* (23), *является функционалом наилучшего приближения.*

(II *) *Если* $N > 0$ *представимо в виде*

$$N = \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,\left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) + \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right], \quad |\ln\delta| < \eta(z_0),$$

то справедливо равенство

$$E(N) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,\left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right].$$

Функционал T^1_δ, *определённый формулой* (25), *является функционалом наилучшего приближения.*

Случаи (I *) и (II *) исчерпывают все возможные значения $N > 0$.

В параграфе **2.2** рассматривается случай, аналогичный изучаемому в параграфе 1.4, но для оператора $\Upsilon^1_{\mathbb{R}+iy}$, сопоставляющего предельным граничным значениям на $\mathbb{R}$ функции, аналитической в полосе Π_Y, её производную на прямой $\mathbb{R}+iy$, $0 < y < Y$. Изучаются, задачи (19), (20) и (21) для оператора $\Upsilon^1_{\mathbb{R}+iy}$ на классе $Q = Q^p(\Pi_Y)$, в которых область G – полоса Π_Y, $\gamma_k = \mathbb{R} + iY(1-k)$, $k = 0, 1$, весовые функции равны единице, $K = \mathbb{R} + iy$ и $B(K) = L^p(\mathbb{R} + iy)$, $1 \le p \le \infty$.

Определим оператор $\mathrm{T}^1_\delta = \mathrm{T}^1_\delta[y, Y]$ из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$ формулами

$$\left(\mathrm{T}^1_\delta f\right)(x + iy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{T}^1_\delta\,(x - t)\; f(t)\,dt, \tag{26}$$

$$\mathrm{T}^1_\delta(x) = \frac{1}{2Yi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{\sigma(ix-y)}\,\sin\alpha\pi}{\mathrm{ch}(x\pi/Y)+\cos\alpha\pi}\right], \quad \sigma = \frac{\ln\delta}{Y}.$$

Основными результатами параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 2.2.1. *При произвольных* p, $1\le p\le\infty$, *и* $\delta>0$, *удовлетворяющего условию*

$$|\ln\delta| \ge \pi/\sin\alpha\pi, \tag{27}$$

для величин оптимального восстановления (19) *и модуля непрерывности* (20) *оператора* $\Upsilon^1_{\mathbb{R}+iy}$ *на классе* $Q^p(\Pi_Y)$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = 1/Y\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|\,.$$

При этом оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный оператор T^1_δ, *определённый равенством* (26).

Условие (27) совпадает с неравенством (22) в рассматриваемом случае.

Теорема 2.2.2. *При произвольных* p, $1\le p\le\infty$, *и* $N>0$, *представимого в виде* $N = e^{-\sigma y}\,|\alpha\sigma + 1/Y|\,,\ |\sigma|\ge\pi/(Y\sin\alpha\pi)$, $\sigma\in\mathbb{R}$, *для наилучшего приближения* (21) *оператора* $\Upsilon^1_{\mathbb{R}+iy}$ *на классе* $Q^p(\Pi_Y)$ *справедливо равенство*

$$E(N) = e^{\sigma(Y-y)}\,|\beta\sigma - 1/Y|\,.$$

Оператором наилучшего приближения является T^1_δ, *определённый равенством* (26), *с параметром* δ, *заданным соотношением* $\ln\delta = \sigma Y$.

В параграфе **2.3** рассматривается случай, аналогичный изучаемому в параграфе 1.6, но для оператора $\Upsilon^1_{l_\rho}$, сопоставляющего предельным граничным значениям на окружности l_r функции, аналитической в кольце $C_{r,R}$, её производную на окружности l_ρ, $0<r<\rho<R$. Точнее, исследуются задачи (19), (20) и (21) для оператора $\Upsilon^1_{l_\rho}$ на классе $Q = Q^p(C_{r,R})$, в которых область G – кольцо $C_{r,R}$, $\gamma_0 = l_R$, $\gamma_1 = l_r$, весовые функции тождественно равны величинам, обратным к длинам окружностей, $K = l_\rho$ и $B(K) = L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$, $\phi_\rho \equiv (2\pi\rho)^{-1}$, $1\le p\le\infty$.

Определим оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta} = \mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}[\rho,r]$ из $L^p_{\phi_r}(l_r)$ в $L^p_{\phi_\rho}(l_\rho)$ формулой

$$(\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}f)(\rho e^{ix}) = e^{-ix}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Lambda^1_{\nu,\eta}(x-t)f(re^{it})\,dt, \quad \nu\in\mathbb{Z},\ \eta\in\mathbb{R}, \tag{28}$$

с ядром $\Lambda^1_{\nu,\eta}(t) = r^{-\nu}e^{i\nu t}\left(\lambda^1_\nu(t)+\eta\right)$, $\lambda^1_\nu(t) = (\rho^\nu\Lambda_1(t))'_\rho$. Введём обозначения $\mu^1_\nu(t) = (\rho^\nu\Lambda_0(t))'_\rho$; $\eta^-_\nu = \max\{\min\{-\lambda^1_\nu(t), \mu^1_\nu(t)\} \,:\, t\in[0,2\pi]\}$, $\eta^+_\nu = \min\{\max\{-\lambda^1_\nu(t), \mu^1_\nu(t)\} \,:\, t\in[0,2\pi]\}$ и $S_\nu = [\eta^-_\nu, \eta^+_\nu]$.

Следующие теоремы являются основными результатами параграфа.

Теорема 2.3.1. *При произвольных* p, $1\le p\le\infty$, *и* $\delta_\nu = (r/R)^\nu$, *где* $\nu\in\mathbb{Z}$ *удовлетворяет условию*

$$|\nu| \ge \frac{\pi}{\ln(R/r)}\,\sin^{-1}\left(\frac{\ln(R/\rho)}{\ln(R/r)}\pi\right), \tag{29}$$

для величин оптимального восстановления (19) *и модуля непрерывности* (20) *оператора* $\Upsilon^1_{l_\rho}$ *на классе* $Q^p(C_{r,R})$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta_\nu) = \mathcal{E}_\mathcal{F}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_\mathcal{L}(\delta_\nu) = \mathcal{E}_\mathcal{B}(\delta_\nu) = |\nu|\rho^{\nu-1}/R^\nu.$$

В этом случае линейный ограниченный оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,0}$, *определённый равенством* (28), *является оптимальным методом восстановления, а функция* $s_{\delta_\nu}(z) = cz^\nu R^{-\nu}$, $|c|=1$, *экстремальной в* (20).

В случае, когда $\nu\in\mathbb{Z}$ удовлетворяет (29), при $\delta=\delta_\nu$ оптимальный метод восстановления не единственный. А именно, для произвольного $\eta\in S_\nu$ оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}$, определённый формулой (28), также является методом оптимального восстановления.

Теорема 2.3.3. *При произвольных* p, $1\le p\le\infty$, *параметра* N, *имеющего представление*

$$N_{\nu,\eta} = \frac{1}{r^\nu}\left|\rho^{\nu-1}\,\frac{\nu\ln(\rho/R)+1}{\ln(r/R)} + \eta\right|,$$

где $\nu\in\mathbb{Z}$ *удовлетворяет* (29) *и* $\eta\in S_\nu$, *для наилучшего приближения* (21) *оператора* $\Upsilon^1_{l_\rho}$ *на классе* $Q^p(C_{r,R})$ *справедливо равенство*

$$E(N_{\nu,\eta}) = \frac{1}{R^\nu}\left|\rho^{\nu-1}\,\frac{\nu\ln(r/\rho)-1}{\ln(R/r)} - \eta\right|.$$

В этом случае оператор $\mathrm{T}^1_{\delta_\nu,\eta}$, *определённый равенством* (28), *является оператором наилучшего приближения.*

В параграфе **2.4** рассматривается задача (7) наилучшего приближения класса $\partial Q^p(D_\rho)$, состоящего из производных функций класса Харди в круге D_ρ, другим классом Харди $Q^p(D_R, N)$, $N > 0$, функций, аналитических в круге D_R большего радиуса по норме пространства $L^p_{\phi_r}(l_r)$, $0 < r < \rho < R$, $1 \le p \le \infty$. Для произвольной аналитической в кольце $C_{r_0,\rho} = \{z \in \mathbb{C}\colon r_0 < |z| < \rho\}$, $0 < r_0 < r$, функции f, представимой в $C_{r_0,\rho}$ рядом Лорана, и целого числа ν определим функцию F формулой

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{v}_k\, f_k\, z^{k-1}, \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k z^k,$$

$$\mathrm{v}_\nu = \frac{\nu \ln \rho - \nu \ln r - 1}{\ln R - \ln r}, \quad \mathrm{v}_{\nu+k} = \frac{(\nu - k)\rho^{2k} - (\nu + k) r^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}}, \quad k \ne 0.$$

Определим оператор $\widetilde{V}^1_{\nu,\eta}$ равенством

$$(\widetilde{V}^1_{\nu,\eta} f)(z) = F(z) - \eta f_\nu z^{\nu-1}.$$

Теорема 2.4.1. *При произвольном* p, $1 \le p \le \infty$, *справедливы следующие утверждения.*

1. *Имеет место порядковое равенство*

$$\mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N)\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)} \asymp N^{-\beta/\alpha} \ln^{1/\alpha} N, \ \ \text{при } N \to +\infty,$$

в котором $\alpha = (\ln R - \ln \rho)/(\ln R - \ln r)$, $\beta = 1 - \alpha$.

2. *Если положительное число* N *представимо в виде*

$$N_{\nu,\eta} = \frac{R^{\nu-1}}{\rho^\nu} \left(\frac{\nu \ln \rho - \nu \ln r - 1}{\ln R - \ln r} - \eta \right), \tag{30}$$

где $\nu \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет* (29) *и* $\eta \in S_\nu$, *то имеет место равенство*

$$\mathrm{E}\left(\partial Q^p(D_\rho), Q^p(D_R, N_{\nu,\eta})\right)_{L^p(l_r)} = \frac{r^{\nu-1}}{\rho^\nu} \left(\frac{\nu \ln R - \nu \ln \rho + 1}{\ln R - \ln r} + \eta \right). \tag{31}$$

Линейный оператор $\widetilde{V}^1_{\nu,\eta}$ *является методом наилучшего приближения.*

Аналогичное (31) равенство справедливо для величины $\mathrm{E}\left(\partial Q^p(C_{r_0,\rho}), H^p(C_{r,R}, N_{\nu,\eta})\right)_{L^p_{\phi_r}(l_r)}$, где величина $N_{\nu,\eta}$ определяется формулой (30), в которой $\nu \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет (29), и $\eta \in S_\nu$.

Глава 3 посвящена исследованию двух экстремальных задач на классах функций, аналитических в полуплоскости Π_+.

В параграфе **3.1** рассматривается задача наилучшего приближения класса Харди–Соболева Q_n^p и класса $\partial^m Q_n^p$ производных порядка m функций класса Харди пространствами A_σ целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, и $A_\sigma^p = A_\sigma \bigcap \mathcal{H}^p(\Pi_+)$. Приближения рассматриваются по норме пространств $\mathcal{H}^p(\Pi_+)$ и $L^p(\mathbb{R}+iy)$, $y > 0$.

Пусть функция l чётная, имеет носитель $[-\sigma, \sigma]$ и на отрезке $[0, \sigma]$ задаётся равенством $l(t) = 1 - t^{n-m}(2\sigma - t)^{m-n} e^{-2y(\sigma - t)}$; $\widehat{l}$ — преобразование Фурье функции l. Определим оператор $L^{(m)}$ равенством

$$(L^{(m)} f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{l}^{(m)}(z - \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \quad z = x + iy.$$

Значение $L^{(m)} f$ оператора $L^{(m)}$ зависит только от сужения φ_σ спектральной функции f на интервал $(-\varepsilon, \sigma)$, $\varepsilon > 0$. Обозначим через Ψ отображение, определяемое равенством $\Psi \varphi_\sigma = L^{(m)} f$.

Полученные в теоремах 3.1.1, 3.1.2 и 3.1.4 результаты сформулированы в следующем утверждении.

Теорема 3.1.(1,2,4). *Для произвольных* $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le m \le n$, *справедливы равенства*

$$\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma}, \quad y > 0,$$
$$\mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma)_{\mathcal{H}^p} = \mathrm{E}(\partial^m Q_n^p, A_\sigma^p)_{\mathcal{H}^p} = \sigma^{m-n}.$$

Линейный оператор $L^{(m)}$ *есть метод наилучшего приближения.*

В диссертации показано, что пространство A_σ^p и метод $L^{(0)}$ реализуют средние поперечники по Колмогорову, Бернштейну и средний линейный поперечник класса Q_n^p по норме пространства $L^p(\mathbb{R} + iy)$, $y \ge 0$.

В параграфе **3.2** исследуется задача (8) оптимального восстановления аналитической в полуплоскости Π_+ функции и её производных на прямой $\mathbb{R} + iy$, $y > 0$, сужению её спектральной функции на $(-\varepsilon, \sigma)$. В качестве априорной информации рассматривается принадлежность функции классу $Q_n^p = Q_n^p(\Pi_+)$.

Следующее утверждение содержит результаты теорем 3.2.1 и 3.2.2.

Теорема 3.2.(1,2). *Пусть* $m, n \in \mathbb{Z}_+, 0 \le m \le n$, $\sigma, y > 0$ *и* $1 \le p \le \infty$. *Тогда для величины оптимального восстановления* (8) *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m, \sigma, n]_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{m-n}\, e^{-y\sigma}, \tag{32}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}[m,\sigma,n]_{\mathcal{H}^p} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}[m,\sigma,n]_{\mathcal{H}^p} = \sigma^{m-n}.$$

Оптимальным методом восстановления является метод Ψ.

В Теореме 3.2.3 для случая $0 \le n < m$ и $y > 0$ показано существование такого $\sigma_0 = \sigma_0(m-n)$, что для произвольных $\sigma \ge \sigma_0$ для величины оптимального восстановления (8) справедливы равенства (32). Оптимальным методом восстановления является метод Ψ.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Виталию Владимировичу Арестову за постоянное многолетнее внимание к работе, полезные обсуждения и поддержку.

Литература

[1] **Айзенберг Л. А.** Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука. 1990. 248 с.

[2] **Арестов В.В.** Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 29–42.

[3] **Арестов В. В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.

[4] **Арестов В. В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.

[5] **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: ГТТИ, 1947. М.: Наука, 1965. 406 с.

[6] **Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.** Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наук. думка. 2003. 591 с.

[7] **Бабенко К. И.** О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 22. № 55. С. 631–640.

[8] **Барашарт Л., Леблон Ж., Сейферт Ф.** Экстремальные задачи с ограничениями в H2 и формулы Карлемана // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 7. С. 4–43.

[9] **Бахвалов Н. С.** Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычис. матем. и матем. физики. 1971. Т. 11, № 4. С. 1014-1016.

[10] **Габушин В. Н.** Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Матем. заметки. 1970. Т. 8, вып. 5. С. 551–562.

[11] **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.,Л.: ГИТТЛ 1952. М.: Наука, 1966. 628 с.

[12] **Голузин Г. М., Крылов В. И.** Обобщенная формула Carleman'а и приложение ее к аналитическому продолжению функций // Матем. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.

[13] **Ибрагимов И. И.** Теория приближения целыми функциями. Баку: ЭЛМ, 1979. 465 с.

[14] **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 206 с.

[15] **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. 1980. М.: Наука. 286 с.

[16] **Магарил-Ильяев Г. Г.** Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 11. С. 1635—1656.

[17] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки, 1991. Т. 50, №6. С. 85–93.

[18] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 59—67.

[19] **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 201—216/

[20] **Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.** Наилучшее приближение функций, заданных в конечном числе точек // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 3. С. 359–368.

[21] **Стечкин С. Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 137–148.

[22] **Тайков Л. В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 155–162.

[23] **Тайков Л. В.** Аналитическое продолжение функций с ошибкой // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 61–64.

[24] **Тихомиров В. М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.

[25] **Фарков Ю. А.** О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 5. С. 185—212.

[26] **Хавинсон С. Я.** Аналитические функции ограниченного вида (граничные и экстремальные свойства) // Итоги науки. Мат. анал. 1963. ВИНИТИ, М. 1965. С. 5–80.

[27] **Шведенко С. В.** Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1985. Т. 23. С. 3–124.

[28] **Arestov V., Filatova M.** Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis // J. Approx. Theory. 2014. V. 187, № 1. P. 65–81.

[29] **Khavinson S. Ya., Kuzina T. S.** The structural formulae for extremal functions in Hardy classes on finite Riemann surfaces // Operator Theory: Advances and Applications. 2005. V. 158. P. 37—57.

[30] **Micchelli Ch. A., Rivlin Th. J.** A survey of optimal recovery. In: *Optimal estimation in approximation theory.* N.Y. etc.: Plenum Press. 1977. P. 1–54.

[31] **Nevanlinna F., Nevanlinna R.** Über die Eigenschaften einer analytischen Funktionen in der Umgeburg einer singularen Stille oder Linie // Acta Soc. sci. fenn. 1922. V. 50, № 5. P. 1–46.

[32] **Osipenko K. Yu.** Optimal Recovery of Analytic Functions. Huntington: NOVA Science Publ.Inc. 2000. 229 p.

[33] **Osipenko K.Y., Stessin M.I.** Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // Constr. Approx. 2010. V. 31. P. 37–67.

Публикации автора по теме диссертации

[34] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитических в полуплоскости функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 3–12. (Перевод на англ.: Proc. Steklov Inst. Math. 2007. V. 259, № 2. P. 1–11.)

[35] **Акопян Р. Р.** Приближение класса Харди–Соболева аналитических в полуплоскости функций целыми функциями экспоненциального типа // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 18–30.

[36] **Акопян Р. Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 46–54.

[37] **Акопян Р. Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 3–13.

[38] **Акопян Р. Р.** Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 9–16. (Перевод на англ.: Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 288, Suppl. 1. P. 5–12.)

[39] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции в двусвязной области по ее приближенно заданным граничным значениям // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 14–19. (Перевод на англ.: Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V. 296, № 1. P. 13–18.)

[40] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитической в круге функции по ее неточно заданным значениям на части границы // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 29–42. (Перевод на англ.: Proc. Steklov Inst. Math. 2018. V. 300, Suppl. 1. P. 25–37.)

[41] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 163–170. (Перевод на англ.: Math. Notes. 2016. V. 99, № 2, P. 177–182.)

[42] **Akopyan R. R.** Approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in an annulus // Ural Math. J. 2017. V. 3, № 2. P. 6–13.

[43] **Akopyan R. R.** Optimal recovery of a derivative of an analytic function from values of the function given with an error on a part of the boundary // Analysis Math. 2018. V. 44, Iss. 1. P. 3–19.

[44] **Акопян Р. Р.** Оптимальное восстановление аналитической в полуплоскости функции по приближенно заданным значениям на части граничной прямой // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 19–33.

[45] **Акопян Р. Р.** Приближение производных аналитических функций одного класса Харди другим классом Харди // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 21–29. (Перевод на англ.: Proc. Steklov Inst. Math. 2020. V. 308, Suppl. 1. P. 1–8.)

[46] **Акопян Р. Р.** Аналог теоремы о двух константах и оптимальное восстановление аналитических функций // Матем. сб. 2019. Т. 210, № 10. С. 3–36. (Перевод на англ.: Sb. Math. 2019. V. 210, Iss. 10. P. 1348–1360.)

[47] **Akopyan R. R.** Optimal recovery of a derivative of an analytic function from values of the function given with an error on a part of the boundary, II // Analysis Math. 2020. V. 46, Iss. 3. P. 409–424.

[48] **Акопян Р. Р.** Аналог теоремы Адамара и связанные экстремальные задачи на классе аналитических функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 32–47.

Подписано в печать ____________________
Формат 60x84/16. Объем 2 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № ________
Размножение с готового оригинал-макета в типографии
____