МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Щелчков Кирилл Александрович

КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОНФЛИКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Петров Николай Никандрович

Ижевск 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\|x\|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^k$;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^k$;

$\mathrm{Int}A$ — внутренность множества A;

$\mathrm{co}A$ — выпуклая оболочка множества A;

∂A — граница множества A;

$\rho(a, X)$ — расстояние от точки a до множества X;

$O_\varepsilon(x)$ — ε-окрестность точки x;

$D_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x;

$h(A, B)$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, которой предполагает наличие двух или более сторон с противоположными или несовпадающими целями, способных воздействовать на процесс. Динамические процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми.

Предлагаемая работа посвящена дифференциальным играм преследования-убегания представленных одним преследователем, группой или двумя группами преследователей с одной стороны, и как одного убегающего, так и группы убегающих, с другой. Потребность изучения таких задач возникает при решении ряда прикладных задач из механики, экономики, военного дела, радиоэлектроники, биологии и некоторых других областей.

Одной из первых работ в этой области следует считать работу Г. Штейнгауза, опубликованную в 1925 году, в которой он формулирует задачу преследования как дифференциальную игру преследования. Становление теории дифференциальных игр связано с исследованиями Р. Айзекса, А. Брайсона, У. Флеминга, Б.Н. Пшеничного, Л.А. Петросяна.

Первой отечественной диссертаций по дифференциальным играм была кандидатская диссертация Л.А. Петросяна «Об одном классе игр преследования», в которой рассматриваются некоторые задачи преследования, в том числе и группового.

Дифференциальные игры двух лиц в настоящее время представляют содержательную математическую теорию [5, 15, 16, 42, 50, 61, 64, 69, 76, 92, 98, 101, 104]. Были разработаны методы решения различных классов игровых задач: метод Айзекса, основанный на анализе определенного уравнения в частных производных и его характеристик, метод экстремального прицеливания Красовского, метод Понтрягина и другие.

Фундаментальный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли школы Н.Н. Красовского и Л.С. Понтрягина.

В работах Н.Н. Красовского и его учеников [16, 17, 64] развит позиционный подход к дифференциальным играм, в основе которого лежит понятие максимального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. Однако эффективное построение таких мостов для исследования реальных конфликтно управляемых процессов, в первую очередь нелинейных дифференциальных игр, весьма затруднительно или даже невозможно. Удобнее строить мосты, не являющиеся максимальными, но обладающие свойством стабильности и дающие эффективно реализуемые процедуры управления для отдельных классов игр, обладающих дополнительными свойствами.

Идею рассматривать дифференциальную игру с двух точек зрения предложил и развил Л.С. Понтрягин [50]. При таком подходе на первый план выдвигается один из игроков.

Достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейном примере Л.С. Понтрягина получены в [22]. В работе [54] представлены достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейной дифференциальной игре при некоторых дополнительных условиях на вектограмму системы и терминальное множество. Построение стабильных мостов приближенно в нелинейных дифференциальных играх, в том числе численно, рассматривается, в частности в работах [11, 67].

В работах [65, 66] построение стабильных мостов для линейных систем используется при синтезе гарантированного управления системой, в которой второй игрок выступает в качестве неконтролируемой помехи.

Основополагающие результаты по решению линейных дифференциальных игр убегания принадлежат Л.С. Понтрягину и Е.Ф. Мищенко [48, 49]. Они получили условия на параметры процесса, достаточные для разрешимости задачи уклонения на всем бесконечном полуинтервале времени. Метод Л.С. Понтрягина - Е.Ф. Мищенко получил название метод маневра обхода. Нелинейная задача уклонения рассматривалась в работах [9, 20, 53, 61, 74, 93, 97, 102, 103, 111], где были предложены новые подходы и методы ее решения. В частности, в работах [20, 111] был предложен метод решения задачи уклонения, получивший название метод уклонения по направлению. Достаточно тонкие условия убегания дает метод инвариантных подпространств. Плодотворным оказался метод Ф.Л. Черноусько [93, 97, 102, 103].

Естественным обобщением игр преследования-убегания двух лиц являются задачи конфликтного взаимодействия группы преследователей с одним или несколькими убегающими [5, 42, 58, 76]. Эти игры интересны с теоретической точки зрения, так как не могут быть решены при помощи теории игр для двух лиц. Одна из причин этого состоит в том, что объединение множеств достижимости всех преследователей и объединение целевых множеств представляют собой множества, не являющиеся выпуклыми и, более того, не являющиеся связными.

В работе [57] Б.Н. Пшеничного рассматривалась задача простого преследования группой преследователей одного убегающего, при условии, что скорость убегающего и преследователей по норме не превосходят единицы. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

Ф.Л. Черноусько в работе [70] рассматривалась задача уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследующих точек, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Был построен такой способ управления, который обеспечивает уклонение от всех преследователей на конечное расстояние, причём движение уклоняющейся точки остаётся в фиксированной окрестности заданного движения.

Указанные работы, по существу, были первыми, посвящёнными задаче группового преследования группой преследователей одного убегающего.

В работе [97] обобщаются результаты предыдущей работы на линейный нестационарный случай.

Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх из любых начальных положений на полубесконечном интервале времени впервые была поставлена и решена в линейном случае Л. С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко [48–51].

В работе [4] Н.Л. Григоренко получены необходимые и достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от нескольких преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением, и множество управлений каждого из игроков — один и тот же выпуклый компакт.

Работа [2] обобщает результат Б.Н. Пшеничного на случай I-поимки. В работе [68] Б. К. Хайдаров рассмотрел задачу позиционной I-поимки одного убегающего группой преследователей при условии, что каждый из игроков обладает простым движением.

В работах [13, 59] получены условия оптимальности времени преследования в дифференциальной игре одного убегающего и нескольких преследователей, движение которых является простым.

В работе [18] предложен квазиоптимальный способ управления убегающего в дифференциальной игре с двумя слабыми преследователями и одним убегающим, приведены результаты численного моделирования.

В работе [99] исследуются множества уровня функции цены и их численное построение в линейной дифференциальной игре с двумя преследователями и одним убегающим.

В работе [14] Р.П. Иванов рассмотрел задачу простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий не покидает пределы выпуклого компакта с непустой внутренностью. Было доказано, что если число преследователей меньше размерности множества, то будет уклонение, иначе — поимка и получена оценка времени поимки.

Работа [40] Н.Н. Петрова обобщает результат Р.П. Иванова на случай, когда убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью.

Задачи простого преследования с «линией жизни» рассмотрены Л.А. Петросяном в [42].

Задача уклонения от группы преследователей в различных других постановках рассматривалась в работах [1, 3, 30, 63].

Одной из первых работ, посвящённой задаче преследования группой преследователей группы убегающих, была работа [38]. В данной работе рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что скорости всех участников по норме не превосходят единицы и целью преследователей является поимка всех убегающих. Были получены достаточные условия уклонения от встречи и получены оценки сверху и снизу минимального числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

Работа [78] обобщает результаты предыдущей работы на линейные дифференциальные игры.

В работе [32] рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что скорости всех участников по норме не превосходят единицы, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а убегающие в начальный момент времени выбирают своё управление на интервал $[0, +\infty)$. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

В работе [63] Н.Ю. Сатимов и М.Ш. Маматов рассмотрели задачу преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что преследователи и убегающие обладают простым движением с единичной по норме максимальной скоростью и, убегающие, кроме того, используют одно и то же управление (жёстко скоординированные убегающие). Цель группы преследователей — поймать хотя бы одного убегающего. Были приведены достаточные условия поимки.

Работы Д.А. Вагина и Н.Н. Петрова [3, 39] дополняют предыдущую работу.

На сегодняшний день разработано достаточно много идейно различных методов и маневров уклонения от встречи: например, метод маневра обхода [48–51] и его модификации [7–10, 25, 26, 53, 56], методы постоянных и переменных направлений [20, 55, 62, 71, 72, 74, 75, 77, 79–82], метод инвариантных подпространств [52, 60, 81], методы, использующие исчисление Микусинского [23, 24, 100], рекурсивные методы [6, 12, 69, 73, 94–96, 110, 112, 113] и многие другие. Между этими методами, безусловно, существуют глубокие связи, многие из которых до сих пор не выяснены.

Обобщением задачи простого преследования является пример Понтрягина [50]. Данному примеру посвящена обширная литература, так как он является модельным для анализа полученных различных условий поимки и убегания.

В работе [31] Н.Н. Петров рассмотрел задачу преследования группой преследователей одного убегающего в примере Понтрягина с равными динамическими возможностями игроков. Были получены достаточные условия поимки.

Наибольшую трудность для исследований представляет задача уклонения с участием нескольких лиц с терминальным множеством сложной структуры. Специфика этих задач требует создания новых методов их исследования. Весьма актуальной представляются проблемы выяснения возможности уклонения группы убегающих от многих преследователей и переноса критериев разрешимости задач преследования-убегания на нестационарный случай. В нелинейных дифференциальных играх значимой является задача построения разрешающих воздействий и их аналитический вывод. Решению этих вопросов и посвящена настоящая диссертация.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является изучение задач преследования-убегания, представленных одним преследователем, группой или двумя группами преследователей с одной стороны, и как одного убегающего, так и группы убегающих, с другой, и нахождение условий разрешимости в этих задачах. Исследованы и найдены условия разрешимости следующих задач: 1) задача убегания одного убегающего от двух групп преследователей при наличии фазовых ограничений для убегающего; 2) задача убегания группы убегающих от двух групп преследователей; 3) задача простого преследования убегающего группой преследователей; 4) задачи преследования и убегания в нелинейных дифференциальных играх двух лиц.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и снабжены полными доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации дополняют теорию дифференциальных игр преследования-убегания.

Развитый в работе геометрический подход к исследованию нелинейных дифференциальных игр преследования-убегания двух лиц может быть использован при рассмотрении нелинейных задач группового преследования.

Методология и методы исследования. При решении поставленных задач использованы методы теории дифференциальных игр, аппарат математического анализа и теории дифференциальных уравнений, методы выпуклого анализа, а также элементы теории управления динамическими системами.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Исследована задача убегания одного убегающего от группы преследователей в линейных нестационарных дифференциальных играх в предположении, что среди преследователей имеются как участники, у которых множество допустимых управлений, являющееся шаром с центром в нуле, совпадает с множеством допустимых управлений убегающего, так и преследователи с меньшими возможностями, причем убегающий не покидает пределы некоторого множества. Доказано, что если число преследователей, возможности которых совпадают с возможностями убегающего, меньше размерности пространства, то преследователи с меньшими возможностями не влияют на разрешимость задачи уклонения.

2. В задаче убегания группы убегающих от группы преследователей в нестационарных дифференциальных играх при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых не уступают возможностям убегающих, так и участники с меньшими возможностями, показано, что если в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи хотя бы одного убегающего на бесконечном промежутке времени, то при добавлении «слабых» преследователей уклонение будет происходить на любом конечном промежутке времени.

3. Для задачи простого преследования группой преследователей одного убегающего получены как необходимые так и достаточные условия поимки,

зависящие от структуры множества значений управлений и числа преследователей.

4. Получены новые достаточные условия разрешимости задач преследования-уклонения в нелинейных дифференциальных играх двух лиц.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов подтверждена строгостью математических доказательств. Результаты диссертации обсуждались на Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям и математической теории управления (руководитель семинара — профессор Н.Н. Петров, 2016–2019 гг.), на семинаре отдела динамических систем Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (руководители — член-корреспондент РАН В.Н. Ушаков, профессор А.М. Тарасьев, 2019 г.), а также на следующих конференциях:

- Международная (45-я Всероссийская) молодежная школа-конференция, посв. 75-летию В.И. Бердышева, «Современные проблемы математики и её приложений», г. Екатеринбург, 2014 г., [91].

- Международная конференция «Колмогоровские чтения - VII. Общие проблемы управления и их приложения», г. Тамбов, 2015 г., [35].

- Международная конференция «Системный анализ: моделирование и управление», посвященная памяти академика А. В. Кряжимского, г. Екатеринбург, 2016 г., [108].

- Международная (48-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений», г. Екатеринбург, 2018 г., [84].

- 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018), г. Екатеринбург, 2018 г., [107].

- XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», г. Москва, 2018 г., [88].

- Научная конференция «Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам», г. Суздаль, 2018 г., [89].
- Международная (49-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений», г. Екатеринбург, 2018 г., [86].
- Международная (50-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений», г. Екатеринбург, 2019 г., [90].

Публикации. Основные результаты опубликованы в 20 научных работах [21,27,34–37,83–91,105–109]. Из них 8 работ [21,27,34,36,37,83,85,87] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК. Еще 3 работы [105,106,109] опубликованы в зарубежных рецензируемых журналах, приравненных к изданиям из перечня ВАК. При этом работы [21, 34, 36, 85, 87, 106, 109] проиндексированы в международной реферативной базе данный Web of Science, а работы [34, 36, 84, 85, 87, 105, 106, 109] — в базах данных Scopus.

В работах, выполненных в соавторстве, научному руководителю Н.Н. Петрову принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю К.А. Щелчкову — точные формулировки и доказательства результатов. Соавтору А.Я. Нарманову принадлежит идея использования положительного базиса в соответствующей работе. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00346, 18-51-41005, 17-38-50118).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, списка использованных обозначений, четырех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на 13 параграфов, которые имеют сквозную нумерацию. Нумерация формул в параграфах двойная — первая цифра означает номер главы, вторая — номер формулы в главе. Такая же нумерация принята для определений, лемм, теорем, замечаний, предположений и примеров. Полный объём диссертации составляет 98 страниц. Список литературы содержит 113 наименований.

Краткое содержание диссертации. В первой главе рассматриваются две нестационарные задачи уклонения одного убегающего от группы преследователей. Предполагается, что среди преследователей имеются как участники, у которых множество допустимых управлений, являющееся шаром с центром нуле, совпадает с множеством допустимых управлений убегающего, так и преследователи с меньшими возможностями и убегающий не покидает пределы некоторого множества. В первом параграфе рассматривается нестационарная задача с простой матрицей и убегающий не покидает пределы некоторого выпуклого множества с непустой внутренностью. Во втором параграфе рассматривается линейная нестационарная задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что матрица системы является произведением функции на единичную матрицу и убегающий не покидает пределы выпуклого конуса с вершиной в нуле и с непустой внутренностью. Доказано, что если число преследователей, возможности которых совпадают с возможностями убегающего, меньше размерности пространства, то преследователи с меньшими возможностями не влияют на разрешимость задачи уклонения.

Во второй главе рассматривается задача уклонения с участием группы преследователей и группы убегающих при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых не уступают возможностям убегающих, так и участники с меньшими возможностями. Цель группы преследователей — «переловить» всех убегающих. Цель группы убегающих — помешать этому, т. е. предоставить возможность по крайней мере одному из убегающих уклониться от встречи. Преследователи и убегающие используют кусочно-программные стратегии. В третьем параграфе приведена постановка основной задачи и получены вспомогательные результаты. В четвертом рассмотрена задача, в которой динамика преследователей описывается нелинейными стационарными дифференциальными уравнениями, динамика убегающих — линейными нестационарными дифференциальными уравнениями. В пятом параграфе рассмотрена линейная нестационарная задача с простой матрицей, в которой управление убегающего, разрешающее задачу убегания, построено аналитически. В шестом параграфе рассмотрен нестационарный пример Понтрягина. В рассмотренных задачах показано, что если в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи хотя бы одного убегающего на бесконечном промежутке времени, то при добавлении «слабых» преследователей уклонение будет происходить на любом конечном промежутке времени.

В третьей главе рассматриваются задачи простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что множество значений управлений всех игроков одинаково и является компактом с непустой внутренностью. Убегающий использует кусочно-программную стратегию, преследователи — кусочно-программные контрстратегии. В седьмом параграфе приведена общая постановка задачи. В восьмом параграфе получены необходимые и достаточные условия поимки в случае, если множеством значений управлений является многогранником. В девятом параграфе получены необходимые и достаточные условия для существования начальных положений игроков из которых происходит поимка при условии, что количество преследователей равняется двум. В десятом параграфе получены необходимые условия поимки, которые зависят от количества преследователей.

В четвертой главе рассматриваются дифференциальная игра двух лиц, описываемые системой вида $\dot{x} = f(x, u) + g(x, v)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $u \in U$, $v \in V$. В одиннадцатом параграфе рассмотрена задача точной поимки, то есть приведение системы в ноль за конечное время. Множеством значений управлений преследователя является конечное множество, убегающего — компакт. Убегающий использует кусочно-постоянную стратегию, преследователь — кусочно-постоянную контрстратегию. Получены достаточные условия поимки. В двенадцатом параграфе рассмотрена задача поимки, в которой целью преследователя является приведение системы за конечное время в любую заданную окрестность начала координат. Множеством значений управлений преследователя является конечное множество, убегающего — компакт. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию, управление убегающего — произвольная измеримая по времени функция со значениями во множестве значений управлений. Получены достаточные условия поимки. В тринадцатом параграфе рассмотрены две задачи уклонения. Первая — задача уклонения на бесконечном промежутке времени, вторая — на конечном. Множеством значений управлений убегающего является конечное множество, преследователя — компакт. Убегающий использует кусочно-постоянную стратегию, управление преследователя — произвольная измеримая по времени функция со значениями во множестве значений управлений. В обеих задачах получены достаточные условия поимки.

В заключении излагаются итоги выполнения исследования, рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы.

Глава 1

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ОДНОГО УБЕГАЮЩЕГО ОТ ГРУППЫ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрены две линейные нестационарные задачи уклонения одного убегающего от группы преследователей с фазовыми ограничениями и простой матрицей. Предполагается, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых совпадают с возможностями убегающего, так и участники с меньшими возможностями. Доказано, что если число преследователей, возможности которых совпадают с возможностями убегающего, меньше размерности пространства, то преследователи с меньшими возможностями не влияют на разрешимость задачи уклонения.

§1 Нестационарная задача с простой матрицей

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = b(t)u_i, \ \|u_i\| \leqslant \alpha_i,$$

причем $\alpha_j = 1$ для всех $j = 1, \ldots, m < n$ и $\alpha_j < 1$ для всех $j = m+1, \ldots, n$.

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = b(t)v, \ \|v\| \leqslant 1.$$

При $t = t_0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и начальное положение убегающего y^0, причем $x_i^0 \neq y^0, i = 1, \ldots, n$.

Здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция.

Дополнительно предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает выпуклого множества D ($D \subset \mathbb{R}^k$) с непустой внутренностью.

Под разбиением σ промежутка $[t_0, \infty)$ будем понимать последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, не имеющую конечных точек сгущения и такую, что $t_0 = \tau_0 <$

$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q < \dots$. Под разбиением σ промежутка $[t_0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\eta = T$.

Определение 1.1. *Кусочно-программной стратегией* V убегающего E, заданной на $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$) называется пара (σ, V_σ), где σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), а V_σ — семейство отображений $c^r (r = 0, 1, \dots)$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_1(t_l), \dots, x_n(t_l), y(t_l))$$

измеримую функцию $v = v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $\|v_l(t)\| \leqslant 1,\ y(t) \in D,\ t \in [t_l, t_{l+1})$.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n)$.

Определение 1.2. В игре $\Gamma(n)$ *происходит уклонение от встречи на* $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), если существует кусочно-программная стратегии V убегающего E такая, что для любых траекторий $x_s(t)$ преследователей P_s, $y_q(t) \neq x_s(t)$ для всех s и всех $t \in [t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$).

Обозначим через $\mathrm{Int}D$ внутренность множества D.

Теорема 1.1. Пусть $y^0 \in \mathrm{Int}D$, b — функция, ограниченная на любом компакте и $m < k$. Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$ из любых начальных позиций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $y^0 \in \mathrm{Int}D$, то существует $D_r(q)$ — шар радиуса r с центром в точке q такой, что $y^0 \in \mathrm{Int}D_r(q) \subset D$. Пусть далее ε — расстояние от y^0 до границы $D_r(q)$, $I_l = [t_0 + l - 1, t_0 + l)$, $b_l > 0$ такое, что $|b(t)| \leqslant b_l$ для всех $t \in I_l$ $(l = 1, 2, \dots)$

$$\Omega_j(\tau) = \left\{t > \tau\ :\ \int_\tau^t |b(s)|ds = \frac{\varepsilon}{j+1}\right\},\ j = 1, 2, \dots.$$

Отметим, что если $t \in \Omega(\tau)$ и $\tau, t \in I_l$ при некотором l, то

$$\frac{\varepsilon}{j+1} = \int_\tau^t |b(s)|ds \leqslant b_l(t - \tau).$$

Поэтому

$$t - \tau \geqslant \frac{\varepsilon}{b_l(j+1)}. \tag{1.1}$$

Для каждого отрезка I_l определим разбиение σ_l данного отрезка и натуральное число m_l следующим образом. Рассмотрим отрезок I_1. Пусть $\tau_0^1 = t_0$, и для $j = 1, 2 \dots,$

$$\tau_j^1 = \begin{cases} \inf\{t > \tau_{j-1}^1,\ t \in \Omega_j(\tau_{j-1}^1)\}, \text{ если } \tau_j^1 < t_0 + 1 \text{ и } \Omega_j(\tau_{j-1}^1) \neq \emptyset, \\ t_0 + 1 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Далее полагаем $m_1 = \min\{j : \tau_j^1 = t_0 + 1\}$, $\sigma_1 = \{\tau_0^1, \dots, \tau_{m_1}^1\}$. Рассмотрим теперь отрезок I_2. Пусть $\tau_0^2 = t_0 + 1$. Для всех $j = 1, 2 \dots,$ полагаем

$$\tau_j^2 = \inf\{t > \tau_{j-1}^2,\ t \in \Omega_{j+m_1}(\tau_{j-1}^2)\},$$

если

$$\tau_j^2 < t_0 + 2 \text{ и } \Omega_{j+m_1}(\tau_{j-1}^2) \neq \emptyset$$

и $\tau_j^2 = t_0 + 2$, если соответствующие условия не выполняются.

Далее полагаем

$$m_2 = m_1 + \min\{j : \tau_j^2 = t_0 + 2\},\ \sigma_2 = \{\tau_0^2, \dots, \tau_{m_2 - m_1}^2\}.$$

Предположим, что уже определены разбиение σ_{l-1} отрезка I_{l-1} и число m_{l-1}. Рассмотрим отрезок I_l. Пусть $\tau_0^l = t_0 + l - 1$. Для всех $j = 1, 2 \dots,$ полагаем

$$\tau_j^l = \inf\{t > \tau_{j-1}^2,\ t \in \Omega_{j+m_{l-1}}(\tau_{j-1}^l)\},$$

если

$$\tau_j^l < t_0 + l \text{ и } \Omega_{j+m_{l-1}}(\tau_{j-1}^l) \neq \emptyset$$

и $\tau_j^l = t_0 + l$, если соответствующие условия не выполняются.

Далее полагаем

$$m_l = m_{l-1} + \min\{j : \tau_j^l = t_0 + l\},\ \sigma_l = \{\tau_0^l, \dots, \tau_{m_l - m_{l-1}}^2\}.$$

Отметим, что в силу (1.1) числа m_l существуют для всех l. В качестве разбиения σ промежутка $[t_0, \infty)$ возьмем такое разбиение, что сужение σ на любой отрезок I_l совпадает с σ_l. Пусть $\sigma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_r < \dots\}$.

Введем следующие обозначения

$$M_j(t) = \int_{t_j}^{t} |b(s)| ds,$$

$$\delta_j = \min_i \Big(\sqrt{\|x_i(t_j) - y(t_j)\|^2 + M_j(t_{j+1})} - M_j(t_{j+1}) \Big),$$

$$\Delta_j = r - \frac{\varepsilon}{j+1} - \sqrt{\Big(r - \frac{\varepsilon}{j}\Big)^2 + \Big(\frac{\varepsilon}{j+1}\Big)^2},$$

$$\gamma_j = \frac{1}{2}\min\{\delta_j, \Delta_j\}, \ a_i(t_j) = x_i(t_j) - y(t_j).$$

Отметим, что $\Delta_j > 0$. Также $\delta_j > 0$, если $x_i(t_j) \neq y(t_j)$.

Задаем стратегию V убегающего E на $[t_j, t_{j+1})$ следующим образом. Пусть v_j — вектор, удовлетворяющий системе

$$\langle v_j, x_l(t_j) - y(t_j) \rangle = 0, \quad l = 1, \ldots, m, \quad \langle v_j, y(t_j) - q \rangle \leqslant 0, \quad \|v_j\| = 1.$$

Так как $m < k$, то система имеет решение.

Пусть далее $v_j(t, t_j, v_j, \gamma_j)$ — управление убегающего E, гарантирующее ему уклонение от преследователей $P_{m+1}, \ldots, P_n$ на $[t_j, t_{j+1})$ и такое, что

$$\|y(t) - \overline{y}(t)\| < \gamma_j \text{ для всех } t \in [t_j, t_{j+1}),$$

где $\overline{y}(t) = y(t_j) + v_j \int_{t_j}^{t} |b(s)| ds$, $y(t)$ — траектория убегающего E, отвечающая управлению $v_j(t, t_j, v_j, \gamma_j)$. В силу [70, 97] такое управление убегающего E существует. Полагаем управление убегающего E в игре $\Gamma(n)$ на $[t_j, t_{j+1})$ равным $v_j^0(t) = v_j(t, t_j, v_j, \gamma_j)$.

Покажем, что V является стратегией уклонения. Рассмотрим отрезок $[t_j, t_{j+1}]$. Пусть $u_i(t)$ — произвольное управление преследователя P_i. Определим функции

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{M_j(t)} \int_{t_j}^{t} b(s) u_i(s) ds, \text{ если } M_j(t) \neq 0, \\ 0, \text{ если } M_j(t) = 0. \end{cases}$$

Тогда $\|\hat{u}_i(t)\| \leqslant 1$ для всех $t \in [t_j, t_{j+1})$.

По неравенству треугольника имеем

$$\|x_i(t) - y(t)\| \geqslant \|x_i(t) - \overline{y}(t)\| - \|y(t) - \overline{y}(t)\|.$$

Оценим первое слагаемое.

$$\|x_i(t)-\overline{y}(t)\| = \|x_i(t_j)-y(t_j)-M_j(t)v_j+M_j(t)\hat{u}_i(t)\| \geqslant$$
$$\geqslant \|a_i(t_j)-M_j(t)v_j\|-M_j(t) =$$
$$= \sqrt{\|a_i(t_j)\|^2-2M_j(t)\left\langle a_i(t_j),v_j\right\rangle+M_j^2(t)}-M_j(t) =$$
$$= \sqrt{\|a_i(t_j)\|^2+M_j^2(t)}-M_j(t) \geqslant \delta_j.$$

Так как
$$\|y(t)-\overline{y}(t)\| \leqslant \gamma_j \leqslant \frac{1}{2}\delta_j,$$
то
$$\|x_i(t)-y(t)\| \geqslant \delta_j-\frac{1}{2}\delta_j = \frac{1}{2}\delta_j.$$
Из последнего неравенства следует, что если поимка не происходит до момент t_j, то она не произойдет и на $[t_j,t_{j+1})$. Так как $x_i^0 \neq y^0$ для всех i, то $y(t) \neq x_i(t)$ для всех $i, t \geqslant t_0$.

Покажем, что убегающий E не покидает пределы множества D. Докажем, что если справедливо неравенство $\|y(t_j)-q\| \leqslant r-\frac{\varepsilon}{j}$, то
$$\|y(t)-q\| \leqslant r-\frac{\varepsilon}{j+1} \text{ для всех } t \in [t_j,t_{j+1}).$$
Действительно,
$$\|y(t)-q\| \leqslant \|y(t)-\overline{y}(t)\|+\|\overline{y}(t)-q\|.$$
Так как $\|y(t)-\overline{y}(t)\| < \gamma_j$ и
$$\|\overline{y}(t)-q\| = \|y(t_j)+M_j(t)v_j-q\| =$$
$$= \sqrt{\|y(t_j)-q\|^2+2\left\langle v_j,y(t_j)-q\right\rangle M_j(t)+M_j^2(t)} \leqslant \sqrt{\left(r-\frac{\varepsilon}{j}\right)^2+M_j^2(t)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\left(r-\frac{\varepsilon}{j}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{j+1}\right)^2},$$
то
$$\|y(t)-q\| \leqslant \gamma_j+\sqrt{\left(r-\frac{\varepsilon}{j}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{j+1}\right)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_j+\sqrt{\left(r-\frac{\varepsilon}{j}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{j+1}\right)^2} = r-\frac{\varepsilon}{j+1}.$$

Тем самым доказано, что $y(t) \in D_r(q) \subset D$ для всех $t \geqslant t_0$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1.1. Отметим, что случай $m = n$, то есть без добавления второй группы преследователей, рассматривался в работе [28], где был предложен другой подход к выбору параметров.

Пусть теперь

$$D = \{z \in \mathbb{R}^k \mid (p_j, z) \leqslant \mu_j,\ j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа такие, что $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$.

Лемма 1.1. Пусть $z, v, \in \mathbb{R}^k, \|v\| = 1,\ \langle z, v\rangle \geqslant 0, \tau > t_0$, $u(\cdot)$ — измеримая функция, $\|u(t)\| \leqslant 1$ для всех $t \in [t_0, \tau]$. Тогда

$$\min\left\{\left\|z + v\int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds - \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\, ds\right\| \;\middle|\; t \in [t_0, \tau]\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\|z\|^2 + \left(\int_{t_0}^{\tau} |b(s)|\, ds\right)^2} - \int_{t_0}^{\tau} |b(s)|\, ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливы неравенства

$$\left\|z + v\int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds - \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\, ds\right\| \geqslant \left\|z + v\int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds\right\| - \int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds =$$

$$= \sqrt{\|z\|^2 + 2\langle z, v\rangle \int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds + \left(\int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds\right)^2} - \int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\|z\|^2 + \left(\int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds\right)^2} - \int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\|z\|^2 + \left(\int_{t_0}^{\tau} |b(s)|\, ds\right)^2} - \int_{t_0}^{\tau} |b(s)|\, ds.$$

Последнее неравенство верно, так как функция

$$f(t) = \sqrt{\|z\|^2 + \left(\int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds\right)^2} - \int_{t_0}^{t} |b(s)|\, ds$$

не возрастает на $[t_0, \tau]$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 1.2. Пусть $0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_1^0 - y^0, \ldots, x_m^0 - y^0, p_1, \ldots, p_r\}$. Тогда в игре $\Gamma(n)$ происходит уклонение на любом отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство. Будем считать, что y^0 — внутренняя точка множества D. Если y^0 является граничной точкой, то первоначально убегающий переходит за достаточно малое время в какую-либо внутреннюю точку. Из условия теоремы следует, что существует вектор v_0, $\|v_0\| = 1$, такой, что

$$\left\langle x_l^0 - y^0, v_0 \right\rangle \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad l = 1, \ldots, m,$$
$$\langle p_s, v_0 \rangle \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad s = 1, \ldots, r.$$

Пусть $z_i^0 = x_i^0 - y^0$, $T > t_0$ — произвольное число. Определим управление убегающего $v_0(t) = v_0 \operatorname{sign}(b(t))$, $t \in [t_0, T]$. Отсюда $y_0(t) = y^0 + v_0 \int_{t_0}^t |b(s)|\, ds$. Тогда

$$\langle p_s, y_0(t) \rangle \leqslant \left\langle p_s, y^0 \right\rangle + \langle p_s, v_0 \rangle \int_{t_0}^t |b(s)|\, ds \leqslant \mu_s,$$

и поэтому $y_0(t) \in D$ для всех $t \geqslant 0$. Кроме того, используя лемму (1.1), имеем

$$\|x_i(t) - y_0(t)\| = \left\| x_i^0 + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\, ds - y^0 - v_0 \int_{t_0}^t |b(s)|\, ds \right\| \geqslant$$
$$\geqslant \left\| z_i^0 - v_0 \int_{t_0}^t |b(s)|\, ds \right\| - \int_{t_0}^t |b(s)|\, ds =$$
$$= \sqrt{\|z_i^0\|^2 - 2\left\langle z_i^0, v_0 \right\rangle \int_{t_0}^t |b(s)|\, ds + \left(\int_{t_0}^t |b(s)|\, ds \right)^2} - \int_{t_0}^t |b(s)|\, ds \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{\|z_i^0\|^2 + \left(\int_{t_0}^t |b(s)|\, ds \right)^2} - \int_{t_0}^t |b(s)|\, ds \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{\|z_i^0\|^2 + \left(\int_{t_0}^T |b(s)|\, ds \right)^2} - \int_{t_0}^T |b(s)|\, ds, \quad \text{для всех } t \in [t_0, T].$$

Определим число

$$\delta = \min\left\{\mu_1, \mu_2\right\},$$

где

$$\mu_1 = \min_{i \in 1, \ldots, m} \left(\sqrt{\|z_i^0\|^2 + \left(\int_{t_0}^T |b(s)|\, ds \right)^2} - \int_{t_0}^T |b(s)|\, ds \right),$$
$$\mu_2 = \min_{t \in [0, T]} \rho(y_0(t), \partial D).$$

Тогда $\delta > 0$. Обозначим через $v(t, v_0, \delta/2)$ стратегию уклонения для убегающего E от преследователей $P_{m+1}, \dots, P_n$ такую, что $\|y(t) - y_0(t)\| < \delta/2$ для всех $t \geqslant t_0$, где $y(t)$ — траектория убегающего E, порожденная $v(t, v_0, \delta/2)$. В силу [70, 97] такое управление убегающего существует. Тогда $y(t) \in D$ для всех $t \in [t_0, T]$ и, кроме того, для всех $i = 1, \dots, n$

$$\|x_i(t) - y(t)\| = \|x_i(t) - y_0(t) + y_0(t) - y(t)\| \geqslant$$
$$\geqslant \|x_i(t) - y_0(t)\| - \|y_0(t) - y(t)\| \geqslant \delta - \delta/2 > 0$$

для всех $t \in [t_0, T]$. Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n)$ на отрезке $[t_0, T]$ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана. $\square$

Справедливо следующее следствие из этой теоремы.

Следствие 1.1. Пусть $D = R^k$ и $y^0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{x_1^0, \dots, x_m^0\}$. Тогда в игре $\Gamma(n)$ происходит уклонение на любом отрезке $[t_0, T]$.

Замечание 1.2. Условие теоремы 1.2 не гарантирует уклонение от встречи на всем промежутке $[t_0, \infty)$. Действительно, пусть $t_0 = 0$, $b(t) \equiv 1$, $k = 2$, $m = 3$, $n = 4$,

$$x_1^0 = (-1, 0),\ x_2^0 = (1, 0),\ x_3^0 = (0, -1),\ x_4^0 = (0, 2),\ y^0 = (0, 0),$$
$$D = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2 \geqslant 0\}.$$

См. рис. 1.

Тогда условие теоремы выполнено, $v_0 = (1, 0)$, уклонения от встречи на $[0, \infty)$ нет.

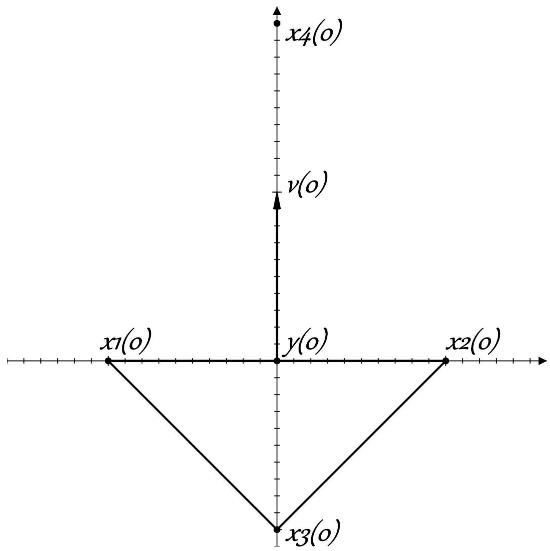

Рис. 1: Замечание 1.2, начальные положения

§2 Задача уклонения в конусе

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается следующая дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = a(t)x_i + u_i, \ \|u_i\| \leqslant \alpha_i, \tag{1.2}$$

причем $\alpha_j = 1$ для всех $j = 1, \ldots, m < n$ и $\alpha_j < 1$ для всех $j = m+1, \ldots, n$.

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = a(t)y + v, \ \|v\| \leqslant 1. \tag{1.3}$$

При $t = t_0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и начальное положение убегающего y^0, причем $x_i^0 \neq y^0, i = 1, \ldots, n$.

Здесь $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция.

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого конуса

$$D = \{y : \ y \in \mathbb{R}^k, \ \ (p_j, y) \leqslant 0, j = 1, \ldots r\},$$

где $p_1, \ldots p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$ такие, что $\mathrm{Int} D \neq \emptyset$.

Убегающий использует кусочно-программные стратегии.

Теорема 1.3. Пусть $y^0 \in \mathrm{Int}D$, a — функция, ограниченная на любом компакте и $m < k$. Тогда в игре $\Gamma(n)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$ из любых начальных позиций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отрезок $I_l = [t_0 + l - 1, t_0 + l], t_l = t_0 + l - 1, l = 1, 2, \ldots,$ В системах (1.2), (1.3) сделаем замену переменных

$$x_i = e^{\int_{t_l}^t a(s)ds} w_i^l, \quad y = e^{\int_{t_l}^t a(s)ds} z^l.$$

Получим системы

$$\dot{w}_i^l = e^{-\int_{t_l}^t a(s)ds} u_i, \quad \dot{z}^l = e^{-\int_{t_l}^t a(s)ds} v. \tag{1.4}$$

Отметим, что $x_i(\tau) = y(\tau)$ при некоторых $i, \tau \in I_l$ тогда и только тогда, когда $w_i^l(\tau) = z^l(\tau)$. Кроме того, $y(t) \in D$ тогда и только тогда, когда $z^l(t) \in D$. Пусть далее

$$b_l(t) = e^{-\int_{t_l}^t a(s)ds}, K_l = e^{-\int_{t_l}^{t_{l+1}} a(s)ds},$$

$D_r(q)$ – шар радиуса r с центром в точке q такой, что $y^0 \in D_r(q) \subset D$, ε – расстояние от y^0 до границы $D_r(q)$, $q_1 = K_1 q, r_1 = K_1 r, \varepsilon_1 = K_1 \varepsilon$,
$q_l = K_l q_{l-1},\ r_l = K_l r_{l-1},\ l \geqslant 2$. Отметим, что $b_l(t) > 0$ для всех $t \in I_l$.

Для отрезка I_1 по ε_1, и функции b_1 определим число m_1 и разбиение σ_1 по схеме §1. Для отрезка I_2 по $\varepsilon_2 = \frac{K_2 \varepsilon_1}{m_1 + 2}$ и функции b_2 определим число m_2 и разбиение σ_2 и так далее. Для отрезка I_l по $\varepsilon_l = \frac{K_l \varepsilon_{l-1}}{m_{l-1} + 2}$ и функции b_l определим число m_l и разбиение σ_l. В качестве разбиения σ промежутка $[t_0, \infty)$ возьмем такое разбиение σ, сужение которого на любой отрезок I_l совпадает с σ_l.

Рассмотрим отрезок I_l и отвечающее ему разбиение
$\sigma_l = \{t_l = \tau_0^l < \tau_1^l < \cdots < \tau_s^l = t_{l+1}\}$. Пусть $\tau_j^l, \tau_{j+1}^l \in I_l,\ v_j^l$ — вектор, удовлетворяющий системе

$$\left\langle v_j^l, z^l(\tau_j^l) - w_i^l(\tau_j^l) \right\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \left\langle v_j^l, q_l - z^l(\tau_j^l) \right\rangle \geqslant 0,\ \|v_j^l\| = 1.$$

Так как $m < k$, то v_j^l всегда существует. Пусть далее $v_j^l(t, \tau_j^l, v_j^l, \gamma_j)$ управление убегающего E на отрезке $[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l)$, гарантирующее ему уклонение на данном отрезке от преследователей $P_{m+1}, \ldots, P_n$ в игре, описываемой (1.4) и такое, что

$$\|z_j^l(t) - \overline{z}_j^l(t)\| < \gamma_j \text{ для всех } t \in [\tau_j^l, \tau_{j+1}^l],$$

где $\overline{z}_j^l(t) = z_j^l(t_j^l) + v_j^l \cdot \int_{t_j^l}^t b(s)ds$, $z_j^l(t)$ — траектория убегающего E, отвечающая управлению $v_j^l(t, \tau_j, v_j^l, \gamma_j)$. В силу [70, 97] такое управление существует.

Полагаем управление убегающего E в игре $\Gamma(n)$ на $[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l)$ равным $v_j^0(t) = v_i^l(t, \tau_j^l, v_j^l, \gamma_j)$.

Покажем, что для всех натуральных l и всех $t \in I_l$ справедливы неравенства

$$\|z^l(t) - q_l\| \leqslant r_l - \frac{\varepsilon_l}{j+1}, \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}). \tag{1.5}$$

Рассмотрим отрезок $I_1 = [t_0, t_1]$ и разбиение σ_1 данного отрезка. Тогда

$$\|z^1(t_0) - q_1\| = \|K_1 y_0 - q_1\| = \|K_1 y_0 - K_1 q\| =$$
$$= K_1(r - \varepsilon) = r_1 - \varepsilon_1.$$

Пусть $t \in [\tau_0^1, \tau_1^1]$. Обозначим

$$M_j^l(t) = \int_{\tau_j^l}^t b_l(s)ds, \ a_i^l(\tau_j^l) = z^l(\tau_j^l) - w_i^l(\tau_j^l).$$

Тогда

$$\|\overline{z}^1(t) - q_1\| = \|\overline{z}^1(t_0) + M_1^1(t)v_1^1 - q_1\| =$$
$$= \sqrt{\|\overline{z}(t_0) - q_1\|^2 + 2M_1^1(t)\left\langle \overline{z}(t_0) - q_1, v_1^1\right\rangle + \left(M_1^1(t)\right)^2} \leqslant \sqrt{(r_1 - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2}.$$

Поэтому

$$\|z^1(t) - q_1\| \leqslant \|z^1(t) - \overline{z}^1(t)\| + \|\overline{z}^1(t) - q_1\| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_j + \sqrt{(r_1 - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_j + \sqrt{(r_1 - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2} = r_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Дальнейшее доказательство неравенства (1.5) для I_1 проводится аналогично доказательству соответствующего неравенства из предыдущего раздела.

Предположим, что неравенство (1.5) доказано для всех $I_l, l \leqslant s$. Докажем данное неравенство для отрезка I_{s+1}. В силу предположения справедливо

неравенство
$$\|z^s(t_s)-q_s\|\leqslant r_s-\frac{\varepsilon_s}{m_s+2}.$$
Тогда
$$\|z^{s+1}(t_s)-q_{s+1}\|=\|K_{s+1}(z(t_s)-q_s)\|=K_{s+1}\|z^s(t_s)-q_s\|\leqslant$$
$$\leqslant K_{s+1}\big(r_s-\frac{\varepsilon_s}{m_s+2}\big)=r_{s+1}-\varepsilon_{s+1}.$$
Поэтому доказательство неравенства (1.5) для I_{s+1} аналогично доказательству неравенства (1.5) для I_1. Следовательно, $z^l(t)\in D_{r_l}(q_l)$ для $t\in I_l$ и для всех l.

Докажем, что $D_{r_l}(q_l)\subset D$. Отметим, что
$$q_l=k_lq_{l-1}=K_lK_{l-1}q_{l_2}=\dots=K_l\cdot K_{l-1}\cdot\ldots K_1q=e^{-\int_{t_0}^{t_{l+1}}a(s)ds}q.$$
Аналогично, $r_l=e^{-\int_{t_0}^{t_{l+1}}a(s)ds}r$. Пусть $c\in D_{r_l}(q_l)$. Представим c в виде $c=\hat{c}e^{-\int_{t_0}^{t_{l+1}}a(s)ds}$. Тогда
$$\|c-q_l\|=e^{-\int_{t_0}^{t_{l+1}}a(s)ds}\|\hat{c}-q\|\leqslant e^{-\int_{t_0}^{t_{l+1}}a(s)ds}\cdot r.$$
Следовательно, $\hat{c}\in D_r(q)\subset D$. Так как D конус, то $c\in D$. Значит
$D_{r_l}(q_l)\subset D$ для всех l.

Покажем, что стратегия V гарантирует уклонение от встречи.

Для этого докажем, что $z^l(t)\neq w_i^l(t)$ для всех $i,t\in I_l$. Пусть $\tau_j^l,\tau_{j+1}^l\in\sigma_l$. Из систем (1.4) имеем
$$z^l(t)=z^l(\tau_j^l)+\int_{\tau_j^l}^t b_l(s)ds\cdot v_j^l,$$
$$w_i^l(t)=w_i^l(\tau_j^l)+\int_{\tau_j^l}^t b_l(s)u_i(s)ds.$$
Поэтому для всех $t\in[\tau_j^l,\tau_{j+1}^l)$
$$\|z^l(t)-w_i^l(t)\|\geqslant\|z^l(\tau_j^l)+M_j^l(t)v_j^l-w_i^l(\tau_j^l)\|-M_j^l(t)=$$
$$=\sqrt{(a_i^l(\tau_j^l))^2+2M_j^l(t)\left\langle v_j^l,a_i^l(\tau_j^l)\right\rangle+(M_j^l(t))^2}-M_j^l(t)=$$
$$=\sqrt{(a_i^l(\tau_j^l))^2-(M_j^l(t))^2}-M_j^l(t)>0\text{ если }a_i^l(\tau_j^l)\neq0.$$

Поэтому, если поимка не произошла до момента τ_j^l, то она не произойдет и на отрезке $[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l]$. Так как $z^0 \neq w_i^0$ для всех i, то доказано, что $z^l(t) \neq w_i^l(t)$ для всех $i, l, t \in I_l$.

Поэтому стратегия V является стратегией уклонения. Теорема доказана. $\square$

Глава 2

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ГРУППЫ УБЕГАЮЩИХ ОТ ДВУХ ГРУПП ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Рассматривается задача уклонения с участием группы преследователей и группы убегающих при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых не уступают возможностям убегающих, так и участники с меньшими возможностями. Цель группы преследователей — «переловить» всех убегающих. Цель группы убегающих — помешать этому, т. е. предоставить возможность по крайней мере одному из убегающих уклониться от встречи. Преследователи и убегающие используют кусочно-программные стратегии. Показано, что если в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи хотя бы одного убегающего на бесконечном промежутке времени, то при добавлении «слабых» преследователей уклонение будет происходить на любом конечном промежутке времени.

§3 Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей P_i и m убегающих E_j с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i), \quad u_i \in U_i(t),$$
$$\dot{y}_j = A_j(t)y_j + v_j, \quad v_j \in V_j(t),$$
$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j(t_0) = y_j^0.$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено иначе $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $x_i, y_j \in \mathbb{R}^k$ — фазовые переменные, $u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия, $A_i(t)$ — квадратные матрицы, непрерывно зависящие от t, f_i — функции, удовлетворяющие стандартным условиям существования, единственности решения задачи Коши и продолжимости решения на промежуток $[t_0, \infty)$. Множества $V_j(t)$ и $U_i(t)$ для всех $i, j, t \geqslant t_0$ — выпуклые компакты с непустой внутренностью, непрерывные по t в метрике Хаусдорфа и такие, что существуют выпуклые компакты V_j^0, U_i^0, для которых $V_j(t) \subset V_j^0, U_i(t) \subset U_i^0$ для всех $t \geqslant t_0, i, j$. Также предполагается, что для всех $t \geqslant t_0$, для всех $x \in \mathbb{R}^k$ и для каждого j выполнено включение

$$f_i(x, U_i(t)) \subset A_j(t)x + \mathrm{Int} V_j(t),$$

$$i = l+1, \dots, n, \quad f_i(x, U_i) = \{f_i(x, u) \mid u \in U_i\},$$

где l — заданное натуральное число, $l < n$. Обозначим

$$Z_0^s = (x_1^0, \dots, x_s^0, y_1^0, \dots, y_m^0).$$

Под разбиением σ промежутка $[t_0, \infty)$ будем понимать последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, не имеющую конечных точек сгущения и такую, что
$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q < \dots$

Под разбиением σ отрезка $[t_0, T]$ будем понимать совокупность попарно различных чисел

$$\{t_0, T, \tau_q \in (t_0, T), q = 1, \dots, r\}$$

занумерованных в порядке возрастания.

Определение 2.1. *Кусочно-программной стратегией* Q_j убегающего E_j, заданной на $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$) называется пара (σ, Q_σ^j), где σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), а Q_σ^j — семейство отображений $c_j^r (r = 0, 1, \dots)$, ставящих в соответствие величинам

$$\left(t_r, x_i(t_r), y_j(t_r), \min_{t \in [t_0, t_r]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\|\right)$$

измеримую функцию v_j^r, определенную на $[t_r, t_{r+1})$ и, такую, что $v_j^r(t) \in V_j(t)$ для всех $t \in [t_r, t_{r+1})$.

Аналогично определяются кусочно-программные стратегии S_i преследователей P_i.

Здесь и всюду далее в данной главе $s = 1, \dots, l$. Игру, в которой участвуют преследователи P_s и убегающие E_j, обозначим через $\Gamma(l, m, Z_0^l)$, а в которой участвуют преследователи P_i и убегающие E_j — $\Gamma(n, m, Z_0^n)$.

Определение 2.2. В игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ *происходит уклонение от встречи на* $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), если существуют кусочно-программные стратегии Q_j

убегающих E_j, такие, что для любых траекторий $x_s(t)$ преследователей P_s найдется, такой номер q, что $y_q(t) \neq x_s(t)$ для всех s и всех $t \in [t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$).

Пусть $T > t_0$. Рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру $\Gamma(l, m, T, Z_0^l)$ между нарядом преследователей P_s и нарядом убегающих E_j в классе кусочно-программных стратегий с функцией выигрыша

$$H(S_1, \ldots, S_l, Q_1, \ldots, Q_m) = \sum_{j=1}^{m} \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1,\ldots l} \|x_s(t) - y_j(t)\|.$$

Определение 2.3. Ситуация $(S_1, \ldots, S_l, Q_1, \ldots, Q_m)$ называется *седловой точкой* в игре $\Gamma(l, m, T, Z_0^l)$, если для любых кусочно-программных стратегий $U_1, \ldots, U_l$ преследователей $P_1, \ldots, P_l$ и для любых кусочно-программных стратегий $W_1, \ldots, W_m$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ справедливо неравенство

$$H(S_1, \ldots, S_l, W_1, \ldots, W_m) \leqslant H(S_1, \ldots, S_l, Q_1, \ldots, Q_m) \leqslant$$

$$\leqslant H(U_1, \ldots, U_l, Q_1, \ldots, Q_m).$$

Предположение 2.1. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $Z \in O_{\delta_0}(Z_0^l)$ для каждого $T > t_0$ в игре $\Gamma(l, m, T, Z_0^l)$ существует седловая точка.

Лемма 2.1. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$ и выполнено предположение 2.1. Тогда для любого $T > t_0$ существуют $\delta(T) > 0$, разбиение σ отрезка $[t_0, T]$, кусочно-программные стратегии $Q_1, \ldots, Q_m$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ такие, что для любого $Z = (x_s, y_j)$, удовлетворяющего неравенствам

$$\|x_s - x_s^0\| < \delta(T), \ \|y_j - y_j^0\| < \delta(T),$$

в игре $\Gamma(l, m, T, Z)$ справедливо неравенство

$$A = \inf_{U_1,\ldots,U_l} H(U_1, \ldots, U_l, Q_1, \ldots, Q_m) > 0. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T > t_0$. Из условия леммы и известных результатов работы [41] следует, что в игре $\Gamma(l, m, T, Z_0^l)$ существует цена игры $V(Z_0^l, T)$, причем $V(Z_0^l, T) > 0$. Пусть $(S_1, \ldots, S_l, Q_1, \ldots, Q_m)$ — ситуация равновесия в игре $\Gamma(l, m, T, Z_0^l)$, σ — разбиение отвечающее данной ситуации равновесия. Тогда

$$0 < V(Z_0^l, T) = H(S_1, \dots, S_l, Q_1, \dots, Q_m) \leqslant H(U_1, \dots, U_l, Q_1, \dots, Q_m). \quad (2.2)$$

В силу непрерывности функции $V(Z_0^l, T)$ по Z_0^l [41], существует $\delta_1(T) > 0$ такое, что для всех Z таких, что $\|x_i - x_i^0\| < \delta_1(T)$, $\|y_j - y_j^0\| < \delta_1(T)$ выполнено неравенство $V(Z, T) > 0$. Из неравенства (2.2) и теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от начальных данных следует, что существует $\delta_2(T) > 0$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{m} \min_{t \in [t_0, T]} \min_i \|\overline{x}_i(t) - \overline{y}_j(t)\| > \frac{1}{2} V(Z_0^l, T) > 0 \quad (2.3)$$

для всех Z таких, что $\|x_i - x_i^0\| < \delta_2(T)$, $\|y_j - y_j^0\| < \delta_2(T)$, где
$\overline{x}_i(t) = x_i(t, x_i, u_i(t))$, $\overline{y}_j(t) = y_j(t, y_j, v_j^0)$ — траектории игроков
$P_1, \dots, P_l, E_1, \dots, E_m$ в ситуации $(U_1, \dots, U_l, Q_1, \dots, Q_m)$. Отметим, что неравенство (2.3) справедливо для всех ситуаций $(U_1, \dots, U_l, Q_1, \dots, Q_m)$. Полагая $\delta(T) = \min\{\delta_1(T), \delta_2(T)\}$, получаем требуемое. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $T > t_0$, $\delta(T)$, σ, $Q_1, \dots, Q_m$ таковы, что справедлива лемма 2.1. Тогда существует $\gamma > 0$ такое, что для любой ситуации
$(U_1, \dots, U_l, W_1, \dots, W_m)$, для которой $\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \gamma$ для всех $t \in [t_0, T]$, справедливо неравенство

$$\inf_{(U_1, \dots, U_l, W_1, \dots, W_m)} H(U_1, \dots, U_l, W_1, \dots, W_m) > 0,$$

где $y_j(t)$ — траектория E_j в ситуации $(U_1, \dots, U_l, Q_1, \dots, Q_m)$, $\overline{y}_j(t)$ — траектория E_j в ситуации $(U_1, \dots, U_l, W_1, \dots, W_m)$.

Справедливость данной леммы следует из леммы 1 и условия того, что для любой измеримой функции, заданной на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, существует сходящаяся к ней последовательность кусочно-постоянных функций.

§4 Основной результат

Теорема 2.1. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$ и выполнено предположене 2.1. Тогда в игре $\Gamma(n, m, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи на любом отрезке $[t_0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathbf{1^0}$. Возьмем $T > t_0$. В силу леммы 2.1 существуют $\delta(T) > 0$, разбиение σ отрезка $[t_0, T]$, кусочно-программные стратегии Q_j убегающих E_j, такие, что для любого $Z = (x_s, y_j)$, удовлетворяющего неравенствам

$$\|x_s - x_s^0\| < \delta(T), \ \|y_j - y_j^0\| < \delta(T),$$

в игре $\Gamma(l, m, T, Z)$ справедливо неравенство (2.1). Пусть разбиение σ имеет вид

$$\sigma = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_r < t_{r+1} = T\}.$$

$\mathbf{2^0}$. Покажем, что управление $v_q^r(t)$ отвечающее стратегии Q_q убегающего E_q можно считать экстремальным [19] на каждом интервале $[t_r, t_{r+1})$ разбиения σ отрезка $[t_0, T]$. Предположим, что существуют q, r для которых $v_0(t) = v_q^r(t)$ для $t \in [t_r, t_{r+1})$ и $v_0(t)$ не является экстремальным управлением на данном интервале (индекс q в данном пункте фиксирован и поэтому опускаем).

Введем следующие обозначения: $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{y}_q = A_q(t) y_q$; $D(\tau, t, z)$ — множество достижимости данного убегающего E_q к моменту времени t с начальным условием $y(\tau) = z$. Пусть L— некоторое натуральное число. Полагаем $\Delta = (t_{r+1} - t_r)/L$, $\tau_p = t_r + \Delta \cdot p$. Выберем L так, чтобы для всех $p = 0, \ldots, L-1$ и для любой измеримой функции v со значениями в $V_q(t)$ выполнялись неравенства

$$\max_{t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]} \|X(t, \tau_p)\| < \frac{3}{2}, \quad \Big\| \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s) v(s) ds \Big\| < \frac{\gamma}{4}, \tag{2.4}$$

где γ из леммы 2.2. Определим множества ($t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$)

$$W(t) = \int_{\tau_p}^{t} X(\tau_{p+1}, s)(V_q(s) - v_0(s))\, ds,$$

$$\overline{W}(t) = \int_{t}^{\tau_{p+1}} X(t_{p+1}, s)(V_q(s) - v_0(s))\, ds,$$

функции $\lambda_1, \lambda_2 : [\tau_p, \tau_{p+1}) \to \mathbb{R}^1$ полагая

$$\lambda_1(t) = \sup\{\|z\|, z \in W(t)\},\ \lambda_2(t) = \sup\{\|z\|, z \in -\overline{W}(t)\}.$$

Отметим, что функции λ_1, λ_2 непрерывны. Так как

$$W(\tau_p) = \overline{W}(\tau_{p+1}) = \{0\}, 0 \in \mathrm{Int}\overline{W}(\tau_p), 0 \in \mathrm{Int}W(\tau_{p+1}),$$

то

$$\lambda_1(\tau_p) = \lambda_2(\tau_{p+1}) = 0, \lambda_1(\tau_{p+1}) > 0, \lambda_2(\tau_p) > 0.$$

Поэтому существует момент τ, такой, что $\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau)$.

Докажем, что

$$\partial W(\tau) \cap \partial(-\overline{W}(\tau)) \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Предположим, что данное пересечение пусто. Пусть

$$\xi_1 \in W(\tau),\ \xi_2 \in (-\overline{W}(\tau)),\ \xi_0 \in \partial W(\tau)$$

таковы, что

$$\lambda_1(\tau) = \|\xi_1\|, \lambda_2(\tau) = \|\xi_2\|, \xi_0 = \lambda\xi_2$$

при некотором $\lambda \in [0, 1]$. Такой вектор ξ_0 существует так как $0 \in W(\tau)$. Если ξ_1 или $\xi_0 \in \partial(-\overline{W}(\tau))$, то (2.5) доказано. Считаем, что $\xi_1, \xi_0 \notin \partial(-\overline{W}(\tau))$. Тогда $\xi_1 \notin (-\overline{W}(\tau))$, так как $\|\xi_1\| = \lambda_2(\tau)$. Кроме того, $\xi_0 \in \mathrm{Int}(-\overline{W}(\tau))$, так как $\xi_0 \in (-\overline{W}(\tau))$ в силу выпуклости $(-\overline{W}(\tau))$. Пусть $\varepsilon > 0$, такое, что

$$O_\varepsilon(\xi_1) \cap (-\overline{W}(\tau)) = \emptyset,\ O_\varepsilon(\xi_0) \subset (-\overline{W}(\tau)),$$

$$\min\{\|a - b\|\ :\ a \in \partial W(\tau),\ b \in (-\partial\overline{W}(\tau))\} \geq \varepsilon. \tag{2.6}$$

Так как множество $W(\tau)$ — выпуклый компакт, то существует многогранник M, такой, что $h(W(\tau), M) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому, в силу известного результата [47] $h(\partial W(\tau), \partial M) < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем точки

$$z_1 \in \partial M \cap O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_1),\ z_2 \in \partial M \cap O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_0)$$

и рассмотрим непрерывную кривую $l : [0, 1] \to \partial M$ такую, что $l(0) = z_1$, $l(1) = z_2$. Так как

$$l(0) \notin (-\overline{W}(\tau)),\ l(1) \in \mathrm{Int}(-\overline{W}(\tau)),$$

то существует $\alpha \in (0,1)$, что $l(\alpha) \in \partial(-\overline{W}(\tau))$. Тогда существует точка $z \in \partial W(\tau)$ для которой $\|z - l(\alpha)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, что противоречит (2.6). Таким образом (2.5) доказано. Пусть ξ принадлежит данному пересечению.

Следовательно, существуют измеримые функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$, соответствующие выбранному вектору ξ, для которых выполнено равенство:

$$\xi = \int_{\tau_p}^{\tau} X(\tau_{p+1}, s)(w_1(s) - v_0(s))\,ds = -\int_{\tau}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s)(w_2(s) - v_0(s))\,ds.$$

Покажем, что функция $\overline{v}(t)$ вида

$$\overline{v}(t) = \begin{cases} \omega_1(t), \ t \in [\tau_p, \tau), \\ \omega_2(t), \ t \in [\tau, \tau_{p+1}] \end{cases}$$

такова, что функции ω_1, ω_2 экстремальны на соответствующих интервалах и при этом решение $\overline{y}(t)$ удовлетворяет условию $\overline{y}(\tau_{p+1}) = y(\tau_{p+1})$. Действительно, справедливы равенства

$$D(\tau_p, \tau, y(\tau_p)) = X(\tau, \tau_p)y(\tau_p) + \int_{\tau_p}^{\tau} X(\tau, s)v_0(s)\,ds + X(\tau, \tau_{p+1})W(\tau),$$

$$D(\tau, \tau_{p+1}, z) = X(\tau_{p+1}, \tau)z + \int_{\tau}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s)v_0(s)\,ds + \overline{W}(\tau).$$

Поэтому, из определения ξ и предыдущих равенств следуют включения

$$z_1 = X(\tau, \tau_p)y(\tau_p) + \int_{\tau_p}^{\tau} X(\tau_{p+1}, s)w_1(s)\,ds \in \partial D(\tau_p, \tau, y(\tau_p)),$$

$$z_2 = X(\tau_{p+1}, \tau)z_1 + \int_{\tau}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s)w_2(s)\,ds \in \partial D(\tau, \tau_{p+1}, z_1).$$

При этом

$$z_2 = X(\tau_{p+1}, \tau_p)y(\tau_p) + \int_{\tau_p}^{\tau} X(\tau_{p+1}, s)w_1(s)\,ds + \int_{\tau}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s)w_2(s)\,ds =$$

$$= X(\tau_{p+1}, \tau_p)y(\tau_p) + \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s)v_0(s)\,ds = y(\tau_{p+1}).$$

Таким образом доказано, что функция $\overline{v}(t)$ удовлетворяет требуемому свойству. Кроме того, из (2.4) сразу следует, что $\|y(t) - \overline{y}(t)\| \leqslant \gamma/2$ для всех $t \in [t_p, t_{p+1})$.

Поэтому, заменив при определении стратегии Q_q функцию v_q на промежутке $[t_r, t_{r+1})$ функцией $\overline{v}(t)$, мы получим стратегию $\overline{Q}_q$ обладающую требуемым свойством.

3^0. Используя результаты [97], построим кусочно-программные стратегии Q_j^0 убегающих E_j в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$. Определим числа $\varepsilon_q = \gamma/2^{r-2+q}$. Рассмотрим отрезок $[t_q, t_{q+1}]$. В силу пункта 2 на $[t_q, t_{q+1})$ управление $v_j^q(t)$ убегающего E_j в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ является экстремальным. Пусть $v_j(t, t_q, v_j^q, \varepsilon_q)$ — управление убегающего E_j гарантирующее ему уклонение от преследователей $P_{l+1}, \ldots, P_n$ на $[t_q, t_{q+1})$ и такое, что

$$\|\overline{y}_j(t) - (X(t, t_q)y_j(t_q) + \int_{t_q}^{t} X(t, r)v_j^s(r)\, dr)\| < \frac{\varepsilon_{q-1}}{2},$$

$$t \in [t_q, t_{q+1})\ ,\ q = 1, \ldots, r \tag{2.7}$$

и

$$\|\overline{y}_j(t) - (X(t, t_0)y_j(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t, r)v_j^0(r)\, dr)\| < \varepsilon_0, \quad t \in [t_0, t_1),$$

где $\overline{y}_j(t)$ — траектория E_j, порожденная $v_j(t, t_q, v_j^q, \varepsilon_q)$. В силу [97], такое управление убегающего E_j существует. Полагаем управление убегающего E_j в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ на $[t_q, t_{q+1})$ равным $\overline{v}_j^q(t) = v_j(t, t_q, v_j^q, \varepsilon_q)$. Докажем, что в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи. Предварительно докажем, что для всех $q \geqslant 1$ и всех $t \in [t_q, t_{q+1})$ справедливо следующее свойство: если

$$\|y_j(t_q) - \overline{y}_j(t_q)\| < \varepsilon_{q-1}, \text{ то } \|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \varepsilon_q,\ t \in [t_q, t_{q+1}). \tag{2.8}$$

Действительно, исходя из (2.7) и (2.8) получаем

$$\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \frac{3}{2}\varepsilon_{q-1} + \frac{\varepsilon_{q-1}}{2} = \varepsilon_q,\ t \in [t_q, t_{q+1}).$$

Поэтому, из неравенств (2.7), (2.8) и определения ε_q следует, что $\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \gamma/2$, $t \in [t_0, T]$. Следовательно, по лемме 2.2 в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи. $\square$

§5 Линейная задача уклонения с простой матрицей

Рассмотрим далее в пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) дифференциальную игру $\Gamma(n, m)$ $n + m$ лиц: n преследователей P_i и m убегающих E_j с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\dot{x}_i = a(t)x_i + u_i, \ \|u_i\| \leqslant \alpha_i, \quad \dot{y}_j = a(t)y_j + v_j, \ \|v_j\| \leqslant 1,$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j(t_0) = y_j^0,$$

где $x_i, y_j \in \mathbb{R}^k$ — фазовые переменные, $u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия, $\alpha_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, l$, $l < n$ и $\alpha_i < 1$ для всех $i = l + 1, \ldots, n$, $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ — измеримая функция.

В данном параграфе используются определения из §3.

Теорема 2.2. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$, a — функция, ограниченная на любом компакте. Тогда в игре $\Gamma(n, m, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи на любом отрезке $[t_0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathbf{1^0}$. Возьмем $T > 0$. В силу леммы 2.1 существуют $\delta(T) > 0$, разбиение σ отрезка $[t_0, T]$, кусочно-постоянные кусочно-программные стратегии $Q_1, \ldots, Q_m$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ такие, что для любого $Z = (x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)$, удовлетворяющего неравенствам

$$\|x_i - x_i^0\| < \delta(T), \ \|y_j - y_j^0\| < \delta(T),$$

в игре $\Gamma(l, m, T, Z)$ справедливо неравенство (2.9). Пусть разбиение σ имеет вид

$$\sigma = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_r < t_{r+1} = T\}.$$

Считаем, что разбиение σ выбрано так, что на каждом промежутке $[t_s, t_{s+1})$ функции v_j^s постоянны.

$\mathbf{2^0}$. Покажем, что можно считать, что $\|v_j^s(t)\| = 1$ для всех $t \in [t_0, T]$. Предположим, что существуют j, q для которых $v_j^q(t) = v_j$ для $t \in [t_q, t_{q+1})$ и $\|v_j\| < 1$. Обозначим $M = \sup\limits_{t \in [t_q, t_{q+1}]} a(t)$. Выберем b, d — натуральные числа такие, что

$$e^{M \frac{t_{q+1} - t_q}{b}} < 1.5, \quad \left| \frac{e^{M \frac{t_{q+1} - t_q}{d}} - 1}{M} \right| < \frac{\gamma}{4}, \tag{2.10}$$

если $M \neq 0$. Если $M = 0$, то выберем $b = 1$, а d из неравенства

$$\frac{t_{q+1} - t_q}{d} < \frac{\gamma}{4}.$$

Здесь γ из леммы 2.2. Обозначим $p = \max\{b, d\}, \Delta = \frac{t_{q+1}-t_q}{p}$. Для каждого отрезка $[t_q + \Delta\eta, t_q + \Delta(\eta + 1)]$, $\eta = 0, \ldots, p - 1$, определим число $t_\eta \in (t_q + \Delta\eta, t_q + \Delta(\eta + 1))$ из равенства

$$e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^{t_q+\Delta(\eta+1)} a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_\eta} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^{s} a(r)\,dr}\,ds =$$

$$= e^{\int_{t_\eta}^{t_q+\Delta(\eta+1)} a(s)\,ds} \int_{t_\eta}^{t_q+\Delta(\eta+1)} e^{-\int_{t_\eta}^{s} a(r)\,dr}\,ds =: A.$$

Такое t_η существует в силу выполнения условий: левая и правая части равенства непрерывны относительно t_η; в точке $t_\eta = t_q + \Delta\eta$ — левая часть равенства обращается в 0, правая часть положительна; в точке $t_\eta = t_q + \Delta(\eta + 1)$ — левая часть равенства положительна, правая часть обращается в 0.

Определим векторы w и h следующим образом. Если $v_j = 0$, тогда w — любой единичный вектор, $h = -w$. Пусть $v_j \neq 0$. Определим вектор g следующим образом (достаточно определить вектор g для случая, когда все координаты вектора v_j ненулевые):

$$g_i = \begin{cases} \dfrac{(-1)^i}{v_j^i}, & \text{если } v_j^i \neq 0, \\ 0, & \text{если } v_j^i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, k - 1,$$

здесь v_j^i — i-я координата вектора v_j.

$$g_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{v_j^k}, & \text{если } k \text{ — четное}, \\ 0, & \text{если } k \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Тогда $(v_j, g) = 0$. Определим число λ из равенства $\|v_j\|^2 + \|\lambda g\|^2 = 1$. Отсюда $\lambda = \sqrt{1 - \|v_j\|^2}/\|g\|$. Далее полагаем $w = v_j + \lambda g,\ h = v_j - \lambda g$. Имеем $\|w\| = \|h\| = 1,\ w + h = 2v_j$. Поэтому

$$Aw + Ah = 2Av_j =$$

$$= v_j(e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^{t_q+\Delta(\eta+1)} a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_\eta} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^{s} a(r)\,dr}\,ds+$$

$$+e^{\int_{t_\eta}^{t_q+\Delta(\eta+1)} a(s)\,ds} \int_{t_\eta}^{t_q+\Delta(\eta+1)} e^{-\int_{t_\eta}^{s} a(r)\,dr}\,ds) =$$

$$= v_j e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^{t_q+\Delta(\eta+1)} a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_q+\Delta(\eta+1)} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^{s} a(r)\,dr}\,ds. \tag{2.11}$$

Рассмотрим функцию $\overline{v}_j^q(t)$ вида

$$\overline{v}_j^q(t) = \begin{cases} w, t \in [t_q + \Delta\eta, t_\eta), \\ h, t \in [t_\eta, t_q + \Delta(\eta+1)), \end{cases} \qquad \eta = 0, \ldots, p-1.$$

Получим, что $\overline{v}_j^q(t)$ — кусочно-постоянная на $[t_q, t_{q+1})$ функция, $\|\overline{v}_j^q(t)\| = 1$ для всех $t \in [t_q, t_{q+1})$ и, кроме того, $\overline{y}_j(t_q + \Delta(\eta+1)) = y_j(t_q + \Delta(\eta+1))$, для всех $\eta = 0, \ldots, p-1$, в силу (2.11), то есть $\overline{y}_j(t_{q+1}) = y_j(t_{q+1})$. Кроме того, выполнено неравенство $\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \gamma/4$ для всех $t \in [t_q, t_{q+1})$, где

$$y_j(t) = e^{\int_{t_q}^{t} a(s)\,ds}(y_j(t_q) + v_j \int_{t_q}^{t} e^{-\int_{t_q}^{s} a(r)\,dr}\,ds),$$

$$\overline{y}_j(t) = e^{\int_{t_q}^{t} a(s)\,ds}(y_j(t_q) + \int_{t_q}^{t} e^{-\int_{t_q}^{s} a(r)\,dr}\overline{v}_j^q(s)\,ds).$$

Покажем справедливость данного неравенства. Рассмотрим интервал $[t_q + \Delta\eta, t_q + \Delta(\eta+1))$, $\eta \in \{0, \ldots, p-1\}$. Тогда выполнены равенства: $\overline{y}_j(t_q + \Delta(\eta)) = y_j(t_q + \Delta(\eta))$, $\overline{y}_j(t_q + \Delta(\eta+1)) = y_j(t_q + \Delta(\eta+1))$. Тогда, в силу (2.11), определения $\overline{v}_j^q(t)$, при $t \in [t_q + \Delta\eta, t_\eta)$ имеем

$$\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| = \left\| v_j e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^{t} a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^{s} a(r)\,dr}\,ds - \right.$$

$$\left. -w e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^{t} a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^{s} a(r)\,dr}\,ds \right\| <$$

$$< e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^{t} a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^{s} a(r)\,dr}\,ds =$$

$$= \int_{t_q+\Delta\eta}^{t} e^{\int_s^t a(r)\,dr}\,ds \leqslant \int_{t_q+\Delta\eta}^{t} e^{\int_s^t M\,dr}\,ds < \frac{\gamma}{4},$$

что выполнено в силу (2.10). При $t \in [t_\eta, t_q + \Delta(\eta+1))$ получаем

$$\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| = \Big\| v_j e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^t e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^s a(r)\,dr} ds -$$

$$-(w e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_\eta} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^s a(r)\,dr} ds + h e^{\int_{t_\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_\eta}^t e^{-\int_{t_\eta}^s a(r)\,dr} ds) \Big\| =$$

$$= \Big\| (\frac{w}{2} + \frac{h}{2})(e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_\eta} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^s a(r)\,dr} ds + e^{\int_{t_\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_\eta}^t e^{-\int_{t_\eta}^s a(r)\,dr} ds) -$$

$$-(w e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_\eta} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^s a(r)\,dr} ds + h e^{\int_{t_\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_\eta}^t e^{-\int_{t_\eta}^s a(r)\,dr} ds) \Big\| =$$

$$= \Big\| (\frac{h}{2} e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_\eta} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^s a(r)\,dr} ds + \frac{w}{2} e^{\int_{t_\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_\eta}^t e^{-\int_{t_\eta}^s a(r)\,dr} ds) -$$

$$-(\frac{w}{2} e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_\eta} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^s a(r)\,dr} ds + \frac{h}{2} e^{\int_{t_\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_\eta}^t e^{-\int_{t_\eta}^s a(r)\,dr} ds) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^{t_\eta} e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^s a(r)\,dr} ds + e^{\int_{t_\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_\eta}^t e^{-\int_{t_\eta}^s a(r)\,dr} ds =$$

$$= e^{\int_{t_q+\Delta\eta}^t a(s)\,ds} \int_{t_q+\Delta\eta}^t e^{-\int_{t_q+\Delta\eta}^s a(r)\,dr} ds =$$

$$= \int_{t_q+\Delta\eta}^t e^{\int_s^t a(r)\,dr} ds \leqslant \int_{t_q+\Delta\eta}^t e^{\int_s^t M\,dr} ds < \frac{\gamma}{4},$$

что выполнено в силу (2.10). Поэтому, заменив при определении стратегии Q_j функцию v_j на промежутке $[t_q, t_{q+1})$ функцией $\overline{v}_j^q(t)$ мы получим стратегию $\overline{Q}_j$, обладающую требуемым свойством.

3^0. Используя результаты работы [97], построим кусочно-программные стратегии $Q_1^0, \ldots, Q_m^0$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$. Определим числа $\varepsilon_s = \gamma/2^{r+2-s}$. Рассмотрим отрезок $[t_s, t_{s+1}]$. В силу пункта 2 на $[t_s, t_{s+1})$ управление убегающего E_j в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ является постоянным вектором v_j^s, причем $\|v_j^s\| = 1$. Пусть $v_j(t, t_s, v_j^s, \varepsilon_s)$ — управление убегающего E_j гарантирующее ему уклонение от преследователей $P_{l+1}, \ldots, P_n$ на $[t_s, t_{s+1})$ и такое, что

$$\|\overline{y}_j(t) - e^{\int_{t_s}^t a(r)\,dr}(y_j(t_s) + v_j^s \int_{t_s}^t e^{-\int_{t_s}^r a(g)\,dg} dr)\| < \frac{\varepsilon_{s-1}}{2},$$

$$t \in [t_s, t_{s+1}) \ , \ s = 1, \ldots, r, \tag{2.12}$$

и

$$\|\overline{y}_j(t) - e^{\int_{t_0}^t a(r)\,dr}(y_j(t_0) + v_j^0 \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^r a(g)\,dg} dr)\| < \varepsilon_0, \quad t \in [t_0, t_1).$$

В силу [97] такое управление убегающего E_j существует. Полагаем управление убегающего E_j в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ на $[t_s, t_{s+1})$ равным $\overline{v}_j^s(t) = v_j(t, t_s, v_j^s, \varepsilon)$. Докажем, что в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи. Предварительно докажем, что для всех $s \geqslant 1$ и всех $t \in [t_s.t_{s+1})$ справедливо следующее свойство: если

$$\|y_j(t_s) - \overline{y}_j(t_s)\| < \varepsilon_{s-1}, \text{ то } \|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \varepsilon_s, \ t \in [t_s, t_{s+1}). \tag{2.13}$$

Действительно, исходя из (2.10) и (2.12) получаем

$$\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < 1.5\varepsilon_{s-1} + \frac{\varepsilon_{s-1}}{2} = \varepsilon_s, \ t \in [t_s, t_{s+1}).$$

Поэтому, из неравенств (2.12), (2.13) и определения ε_s следует, что $\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \gamma/2, t \in [t_0, T]$. Следовательно, по лемме 2.2 в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи. $\square$

§6 Убегание в примере Понтрягина

Рассмотрим далее в пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) дифференциальную игру $\Gamma(n, m)$ $n + m$ лиц: n преследователей P_i и m убегающих E_j с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{gathered} x_i^{(q)} + a_{q-1}(t)x_i^{(q-1)} + \cdots + a_1(t)x_i = u_i, \quad u_i \in U_i(t), \\ y_j^{(q)} + a_{q-1}(t)y_j^{(q-1)} + \cdots + a_1(t)y_j = v_j, \quad v_j \in V_j(t), \\ x_i^{(\alpha)}(t_0) = x_{i\alpha}^0, \ y_j^{(\alpha)}(t_0) = y_{j\alpha}^0, \ \alpha = 0, \ldots, q-1. \end{gathered}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $a_1(t), \ldots, a_{q-1}(t) \in \mathbb{R}^1$, — непрывные на $[t_0, \infty)$ функции, $U_i(t), V_i(t)$ — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$ с непустой внутренностью, непрерывные по t в метрике Хаусдорфа и такие, что существуют выпуклые компакты V_j^0, U_i^0, для которых $V_j(t) \subset V_j^0, U_i(t) \subset U_i^0$ для всех $t \geqslant t_0, i, j$, q — натуральное число, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Дополнительно предполагается, что для всех $t \geqslant t_0$, $j \in J$ выполнены включения

$$U_i(t) \subset \mathrm{Int} V_j(t),\ i = l+1, \dots, n,$$

где l — заданное натуральное число, $l < n$.

В данном параграфе используются определения из §3.

Так как данные системы дифференциальных уравнений порядка q могут быть приведены к эквивалентным линейным нестационарным системам первого порядка, то в данном случае также применимы леммы 2.1, 2.2.

Используя функцию Коши $X(t,s)$ для системы вида

$$x_i^{(q)} + a_{q-1}(t) x_i^{(q-1)} + \dots + a_1(t) x_i = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$, $\zeta_i(t)$ — решение данной системы с начальными условиями, приведенными в постановке задачи, получим

$$x_i(t) = \zeta_i(t) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,s) u_i(s)\, ds, \quad i = 1, \dots m.$$

Следовательно, в силу определения $U_i(\cdot)$, множество достижимости для x_i будет выпуклым компактом с непустой внутренностью.

Теорема 2.3. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$. Тогда в игре $\Gamma(n, m, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи на любом отрезке $[t_0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathbf{1^0}$. Возьмем $T > t_0$. В силу леммы 1 существуют $\delta(T) > 0$, разбиение σ отрезка $[t_0, T]$, кусочно-программные стратегии Q_j убегающих E_j, такие, что для любого $Z = (x_s, y_j)$, удовлетворяющего неравенствам

$$\|x_s - x_s^0\| < \delta(T),\ \|y_j - y_j^0\| < \delta(T),$$

в игре $\Gamma(l, m, T, Z)$ справедливо неравенство (2.1).

Пусть разбиение σ имеет вид

$$\sigma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = T\}.$$

2^0. Покажем, что управление $v_q^r(t)$ отвечающее стратегии Q_q убегающего E_q можно считать экстремальным [19] на каждом интервале $[t_r, t_{r+1})$ разбиения σ отрезка $[t_0, T]$. Предположим, что существуют q, r для которых $v_0(t) = v_q^r(t)$ для $t \in [t_r, t_{r+1})$ и $v_0(t)$ не является экстремальным управлением на данном интервале (индекс q в данном пункте фиксирован и поэтому опускаем).

Введем следующие обозначения: $\zeta_q(\cdot)$ — решение системы

$$y_q^{(\iota)} + a_1(t)y_q^{(\iota-1)} + \cdots + a_\iota y_q = 0$$

с начальньми условиями, приведенными в постановке задачи; $D(\tau, t, z)$ — множество достижимости данного убегающего E_q на рассматриваемом интервале времени к моменту времени t из точки $y(\tau) = z$. Заметим, что решение представимо в виде

$$y_q(t) = \zeta_q(t) + \int\limits_{t_r}^{t} X(t,s)v_0(s)ds. \tag{2.14}$$

Пусть L — некоторое натуральное число. Полагаем $\Delta = (t_{r+1} - t_r)/L$, $\tau_p = t_r + \Delta \cdot p$. Выберем L так, чтобы для всех $p = 0, \ldots, L-1$ и для любой измеримой функции v со значениями в $V_q(\cdot)$ выполнялись неравенства

$$\max_{t\in[\tau_p,\tau_{p+1}]} \|X(t,\tau_p)\| < \frac{3}{2}, \quad \Big\|\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1},s)v(s)ds\Big\| < \frac{\gamma}{4}, \tag{2.15}$$

где γ из леммы 2.2. Определим множества ($t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$)

$$W(t) = \int\limits_{\tau_p}^{t} X(\tau_{p+1},s)(V_q(s) - v_0(s))\,ds,$$

$$\overline{W}(t) = \int\limits_{t}^{\tau_{p+1}} X(t_{p+1},s)(V_q(s) - v_0(s))\,ds,$$

функции $\lambda_1, \lambda_2 : [\tau_p, \tau_{p+1}) \to \mathbb{R}^1$ полагая

$$\lambda_1(t) = \sup\{\|z\|, z \in W(t)\}, \;\; \lambda_2(t) = \sup\{\|z\|, z \in -\overline{W}(t)\}.$$

Отметим, что функции λ_1, λ_2 непрерывны. Так как

$$W(\tau_p) = \overline{W}(\tau_{p+1}) = \{0\}, \quad 0 \in \mathrm{Int}\overline{W}(\tau_p), \quad 0 \in \mathrm{Int}W(\tau_{p+1}),$$

то

$$\lambda_1(\tau_p) = \lambda_2(\tau_{p+1}) = 0, \quad \lambda_1(\tau_{p+1}) > 0, \quad \lambda_2(\tau_p) > 0.$$

Поэтому существует момент τ, такой, что $\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau)$.

Докажем, что

$$\partial W(\tau) \cap \partial(-\overline{W}(\tau)) \neq \emptyset. \tag{2.16}$$

Предположим, что данное пересечение пусто. Пусть

$$\xi_1 \in W(\tau), \quad \xi_2 \in (-\overline{W}(\tau)), \quad \xi_0 \in \partial W(\tau)$$

таковы, что

$$\lambda_1(\tau) = \|\xi_1\|, \quad \lambda_2(\tau) = \|\xi_2\|, \quad \xi_0 = \lambda \xi_2$$

при некотором $\lambda \in [0, 1]$. Такой вектор ξ_0 существует так как $0 \in W(\tau)$. Если ξ_1 или $\xi_0 \in \partial(-\overline{W}(\tau))$, то (2.16) доказано. Считаем, что $\xi_1, \xi_0 \notin \partial(-\overline{W}(\tau))$. Тогда $\xi_1 \notin (-\overline{W}(\tau))$, так как $\|\xi_1\| = \lambda_2(\tau)$. Кроме того, $\xi_0 \in \mathrm{Int}(-\overline{W}(\tau))$, так как $\xi_0 \in (-\overline{W}(\tau))$ в силу выпуклости $(-\overline{W}(\tau))$. Пусть $\varepsilon > 0$, такое, что

$$O_\varepsilon(\xi_1) \cap (-\overline{W}(\tau)) = \emptyset, \quad O_\varepsilon(\xi_0) \subset (-\overline{W}(\tau)),$$

$$\min\{\|a - b\| \;:\; a \in \partial W(\tau), \quad b \in (-\partial \overline{W}(\tau))\} \geqslant \varepsilon. \tag{2.17}$$

Так как множество $W(\tau)$ — выпуклый компакт, то существует многогранник M, такой, что $h(W(\tau), M) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому, в силу известного результата [22] $h(\partial W(\tau), \partial M) < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем точки

$$z_1 \in \partial M \cap O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_1), \quad z_2 \in \partial M \cap O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_0)$$

и рассмотрим непрерывную кривую $l : [0, 1] \to \partial M$ такую, что $l(0) = z_1$, $l(1) = z_2$. Так как

$$l(0) \notin (-\overline{W}(\tau)), \quad l(1) \in \mathrm{Int}(-\overline{W}(\tau)),$$

то существует $\alpha \in (0, 1)$, что $l(\alpha) \in \partial(-\overline{W}(\tau))$. Тогда существует точка $z \in \partial W(\tau)$ для которой $\|z - l(\alpha)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, что противоречит (2.17). Таким образом (2.16) доказано. Пусть ξ принадлежит данному пересечению.

Следовательно, существуют измеримые функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$, соответствующие выбранному вектору ξ, для которых выполнено равенство:

$$\xi = \int\limits_{\tau_p}^{\tau} X(\tau_{p+1}, s)(w_1(s) - v_0(s))\, ds = -\int\limits_{\tau}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s)(w_2(s) - v_0(s))\, ds.$$

Покажем, что функция $\overline{v}(t)$ вида

$$\overline{v}(t) = \begin{cases} \omega_1(t), \ t \in [\tau_p, \tau), \\ \omega_2(t), \ t \in [\tau, \tau_{p+1}] \end{cases}$$

такова, что функции ω_1, ω_2 экстремальны на соответствующих интервалах и при этом решение $\overline{y}(t)$ удовлетворяет условию $\overline{y}(\tau_{p+1}) = y(\tau_{p+1})$. Действительно, справедливы равенства

$$D(\tau_p, \tau, y(\tau_p)) = \zeta_q(\tau) + \int\limits_{\tau_p}^{\tau} X(\tau, s) v_0(s)\, ds + W(\tau),$$

$$D(\tau, \tau_{p+1}, z) = \zeta_q(\tau_{p+1}) + \int\limits_{\tau_p}^{\tau} X(\tau, s) w(s)\, ds + \int\limits_{\tau}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s) v_0(s)\, ds + \overline{W}(\tau),$$

где $w(\cdot)$ — некоторая измеримая функция со значениями в V_q и

$$z = \zeta_q(\tau) + \int\limits_{\tau_p}^{\tau} X(\tau, s) w(s)\, ds.$$

Поэтому, из определения ξ и предыдущих равенств следуют включения

$$z_1 = \zeta_q(\tau) + \int\limits_{\tau_p}^{\tau} X(\tau_{p+1}, s) w_1(s)\, ds \in \partial D(\tau_p, \tau, y(\tau_p)),$$

$$z_2 = \zeta_q(\tau_{p+1}) + \int\limits_{\tau_p}^{\tau} X(\tau_{p+1}, s) w_1(s) + \int\limits_{\tau}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s) w_2(s)\, ds \in \partial D(\tau, \tau_{p+1}, z_1).$$

При этом

$$z_2 = \zeta_q(\tau_{p+1}) + \int\limits_{\tau_p}^{\tau} X(\tau_{p+1}, s) w_1(s)\, ds + \int\limits_{\tau}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s) w_2(s)\, ds =$$

$$= \zeta_q(\tau_{p+1}) + \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} X(\tau_{p+1}, s) v_0(s)\, ds = y(\tau_{p+1}).$$

Таким образом доказано, что функция $\overline{v}(t)$ удовлетворяет требуемому свойству. Кроме того, из (2.15) сразу следует, что $\|y(t) - \overline{y}(t)\| \leqslant \gamma/2$ для всех $t \in [t_p, t_{p+1})$.

Поэтому, заменив при определении стратегии Q_q функцию v_q на промежутке $[t_r, t_{r+1})$ функцией $\overline{v}(t)$ мы получим стратегию $\overline{Q}_q$, обладающую требуемым свойством.

$\mathbf{3^0}$. В силу представления (2.14) имеем для каждого $j = 1, \ldots, m$, $i = l+1, \ldots, n$,

$$\dot{\zeta}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial X(t,s)}{\partial t} U_i(s)\, ds \subset \mathrm{Int} \left(\dot{\zeta}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial X(t,s)}{\partial t} V_j(s)\, ds \right).$$

Следовательно выполнены условия из [97] для существования стратегии уклонения от преследователей $P_{l+1}, \ldots P_n$. Данные стратегии, соответственно, могут быть использованы и относительно эквивалентных систем (1.4).

Поэтому, используя результаты [97], построим кусочно-программные стратегии Q_j^0 убегающих E_j в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$. Определим числа $\varepsilon_q = \gamma/2^{r+2-q}$. Рассмотрим отрезок $[t_q, t_{q+1}]$. В силу пункта 2 на $[t_q, t_{q+1})$ управление $v_j^q(t)$ убегающего E_j в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ является экстремальным. Пусть $v_j(t, t_q, v_j^q, \varepsilon_q)$ — управление убегающего E_j, гарантирующее ему уклонение от преследователей $P_{l+1}, \ldots, P_n$ на $[t_q, t_{q+1})$ и, такое, что

$$\|\overline{y}_j(t) - (X(t, t_q) y_j(t_q) + \int_{t_q}^{t} X(t, r) v_j^s(r)\, dr)\| < \frac{\varepsilon_{q-1}}{2},$$

$$t \in [t_q, t_{q+1})\ ,\ q = 1, \ldots, r \tag{2.18}$$

и

$$\|\overline{y}_j(t) - (X(t,t_0)y_j(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,r)v_j^0(r)\,dr)\| < \varepsilon_0, \quad t \in [t_0, t_1),$$

где $\overline{y}_j(t)$ — траектория E_j, порожденная $v_j(t, t_q, v_j^q, \varepsilon_q)$. В силу вышеописанного в начале данного пункта, такое управление убегающего E_j существует. Полагаем управление убегающего E_j в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ на $[t_q, t_{q+1})$ равным $\overline{v}_j^q(t) = v_j(t, t_q, v_j^q, \varepsilon_q)$. Докажем, что в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи. Предварительно докажем, что для всех $q \geqslant 1$ и всех $t \in [t_q, t_{q+1})$ справедливо следующее свойство: если

$$\|y_j(t_q) - \overline{y}_j(t_q)\| < \varepsilon_{q-1}, \text{ то } \|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \varepsilon_q, \ t \in [t_q, t_{q+1}) \tag{2.19}$$

Действительно, исходя из (2.18) и (2.19) получаем

$$\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \frac{3}{2}\varepsilon_{q-1} + \frac{\varepsilon_{q-1}}{2} = \varepsilon_q, \ t \in [t_q, t_{q+1}).$$

Поэтому, из неравенств (2.18), (2.19) и определения ε_q следует, что $\|y_j(t) - \overline{y}_j(t)\| < \gamma/2, t \in [t_0, T]$. Следовательно, по лемме 2.2 в игре $\Gamma(n, m, T, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи. $\square$

Глава 3

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ОДНОГО УБЕГАЮЩЕГО ГРУППОЙ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Рассматриваются две задачи простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что все игроки обладают равными возможностями. Задачи различаются конструкцией множества значений допустимых управлений и ограничениями на количество преследователей. Получены необходимые и достаточные условия на начальные положения игроков для осуществления поимки. Также получены необходимые условия поимки, зависящие от количества преследователей.

§7 Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i,\ u_i \in U,\ x_i(0) = x_i^0.$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v,\ v \in U,\ y(0) = y^0,$$

где U — выпуклый компакт с непустой внутренностью. Обозначим $z_i^0 = x_i^0 - y^0$, $z^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0\}$. Считаем, что $z_i^0 \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть σ — некоторое разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s < \ldots$ промежутка $[0, +\infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

Определение 3.1. *Кусочно-программной стратегией* V убегающего E называется пара (σ, V_σ), где σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, а V_σ — семейство отображений $\{c_l\}_{l=0}^{\infty}$ ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

измеримую функцию $v_l : [t_l, t_{l+1}) \to U$.

Определение 3.2. *Кусочно-программной контрстратегией* U_i преследователя P_i называется пара (σ, U^i_σ), где σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, а U^i_σ — семейство отображений $\{b^l_i\}_{l=0}^{\infty}$ ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

и функции $v_l(t), t \in [t_l, t_{l+1})$, измеримую функцию $u^l_i : [t_l, t_{l+1}) \to U$.

Обозначим данную игру $\Gamma(n, z^0)$.

Определение 3.3. В игре $\Gamma(n, z^0)$ *происходит уклонение от встречи,* если существует кусочно-программная стратегия V убегающего E такая, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ выполнено $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \geqslant 0$ и всех $i = 1, \ldots, n$, где $y(t)$ — траектория E, порожденная стратегией V.

Определение 3.4. В игре $\Gamma(n, z^0)$ *происходит поимка* если существует $T > 0$ такое, что для любой кусочно-программной стратегии V убегающего E, найдутся кусочно-программные контрстратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, для которых $x_p(\tau) = y(\tau)$ при некоторых $p, \tau \in [0, T]$.

В работе [4] доказано, что в игре $\Gamma(n, z^0)$ происходит поимка тогда и только тогда , когда $\delta(z^0) > 0$, где

$$\delta(z^0) = \min_{v \in U} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v), \quad \lambda_i(v) = \sup\{\lambda \mid \lambda \geqslant 0,\ -\lambda z^0_i \in -v + U\}.$$

§8 Задача преследования в случае, когда U — многогранник

Пусть многогранник $U = \mathrm{co}\{A_1, \ldots, A_m\}$, причём для всех j точки A_j являются крайними. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ определим следующие множества:

$$L_i = \left\{ \xi \mid \xi = \sum_{j=1,\ldots,m,\ j \neq i} \alpha_j (A_j - A_i), \sum_{j=1,\ldots,m,\ j \neq i} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \in [0,1] \right\},$$

и

$$C_i = \{\gamma L_i \mid \gamma \geqslant 0\}.$$

Лемма 3.1. Для любого i верно равенство $U = \overline{L}_i = \{\gamma L_i \mid \gamma \in [0,1]\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v \in U$. Тогда $v = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j A_j$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geqslant 0$. Поэтому

$$v - A_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j A_j - (1 - \alpha_i) A_i.$$

Если $\alpha_i = 1$ то $v - A_i = 0$. Пусть $\alpha_i \neq 1$. Тогда

$$v - A_i = \frac{1}{1 - \alpha_i} \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j (A_j - A_i) \right) (1 - \alpha_i) = (1 - \alpha_i) \sum_{j \neq i} \lambda_j (A_j - A_i),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j \neq i} \lambda_j = 1$. Точка $\sum\limits_{j \neq i} \lambda_j (A_j - A_i) \in L_i$, поэтому $(1 - \alpha_i) \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j (A_j - A_i) \in \overline{L}_i$. Значит $U - A_i \in \overline{L}_i$.

Пусть теперь $v \in \overline{L}_i$. Значит $v = \beta \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j (A_j - A_i)$, $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j \neq i} \lambda_j = 1$, $\beta \in [0, 1]$. Если $v = 0$, то $v \in U - A_i$. Пусть $v \neq 0$. Тогда

$$v = \beta \sum_{j \neq i} \lambda_j (A_j - A_i) + A_i - A_i = A_i (1 - \beta) + \beta \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j - A_i.$$

Так как $1 - \beta + \beta \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j = 1$, то $\overline{v} = A_i (1 - \beta) + \beta \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j A_j \in U$. Поэтому $v = \overline{v} - A_i \in U - A_i$.

Лемма доказана. □

Теорема 3.1. Для того, чтобы в игре $\Gamma(n, z^0)$ происходила поимка необходимо и достаточно, чтобы существовали множества $J_1, \ldots, J_n$, такие что

$$-z_i^0 \in \bigcap_{j \in J_i} C_j, \; i = 1, \ldots, n,$$

$$J_1 \cup \cdots \cup J_n = \{1, \ldots, m\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем необходимость. Пусть существует такой номер l, что $-z_j^0 \notin C_l$, $j = 1, \ldots, n$. Заметим, что по определению множество C_l является выпуклым конусом с вершиной в 0. В силу леммы 3.1 справедливо включение $U \subset C_l + A_l$. Тогда, для любого $\alpha > 0$ выполнено: $-\alpha z_j^0 + A_l \notin U$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно $\lambda_j(A_l) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Поэтому $\delta(z^0) = 0$, то есть происходит уклонение. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Рассмотрим произвольную вершину многогранника U и одну из прилегающих к ней граней. Без ограничения общности можно рассмотреть вершину A_1, и прилегающую к ней грань, которая определяется вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_s$ (обозначим её G_1). Так же, без ограничения общности можно считать, что $-z_1^0 \in C_1$. Для каждого $\beta \in (0,1)$ определим множества $Q_1(\beta) = \{v \mid v \in G_1 \cap \{\xi + A_1 \mid \xi \in \gamma L_1,\ \gamma \in [0,\beta]\}\}$. Пусть $\theta > 0$ такое, что $-\theta z_1^0 \in L_1$. Данное θ существует в силу условия теоремы. В силу определения множества $Q_1(\beta)$, любая точка $v \in Q_1(\beta)$ представима в виде $v = \gamma w + A_1$, где $w \in L_1$, $\gamma \in [0,\beta]$. Тогда верно включение $(1-\gamma)(-\theta z_1^0) + v - A_1 = (1-\gamma)(-\theta z_1^0) + \gamma w \in L_1$. Следовательно $(1-\gamma)(-\theta z_1^0) + v \in U$. То есть $\lambda_1(v) \geqslant (1-\gamma)\lambda_1(A_1)$. Поэтому $\min\limits_{v \in Q_1(\beta)} \lambda_1(v) \geqslant (1-\beta)\lambda_1(A_1)$. Так как $z_1^0 \neq 0$ и $-z_1^0 \in C_1$, то существует $\lambda > 0$ такое, что $-\lambda z_1^0 \in L_1$, и поэтому $\lambda_1(A_1) > 0$.

Аналогично определим множества $Q_2(\beta), \ldots, Q_s(\beta)$ для вершин $A_2, \ldots, A_s$ соответственно. На данных множествах соответствующие функции $\lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_s}$ принимают значения не меньшие, чем $(1-\beta)\lambda_{i_2}(A_2), \ldots, (1-\beta)\lambda_{i_s}(A_s)$ соответственно. Докажем, что $Q_1(1-1/s) \cup \cdots \cup Q_s(1-1/s) = G_1$. Возьмем произвольную точку $v \in G_1$. $v = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s$, где $\alpha_j \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = 1$. Тогда существует индекс q такой, что $\alpha_q \geqslant 1/s$. Следовательно $v \in Q_q(1-1/s)$ Поэтому, для любой точки $v \in G_1$ существует такое $j \in \{1, i_2, \ldots, i_s\}$, что $\lambda_j(v) \geqslant (1-(1-1/s))\lambda_j(A_j) = \lambda_j(A_j)/s > 0$.

Аналогично рассмотрев остальные грани и вершины множества U получим, что для некоторого $\beta > 0$ для любой точки $v \in \partial U$ существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $\lambda_j(v) > 0$. Достаточно рассматривать граничные точки, так как функции λ_j вогнутые (см. [5]). Действительно, пусть $\min\limits_{v \in U} \max\limits_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v)$ достигается в некоторой точке $\overline{v} \in \partial U$. Тогда данная точка $\overline{v}$ принадлежит некоторой грани G_η. В силу построений, описаных выше для грани G_1, существует такой индекс $\overline{j} \in \{1, \ldots, m\}$, что $\lambda_{\overline{j}}(v) \geqslant \lambda_{\overline{j}}(A_{\overline{i}})/\overline{s} > 0$. Здесь $A_{\overline{i}}$ — одна из точек, образующих грань G_η, $\overline{s}$ — количество точек, образующих данную грань, $z_{\overline{j}} \in C_{\overline{i}}$. Следовательно, $\delta(z^0) > 0$, то есть происходит поимка.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.2. Пусть $m = k+1$. Для того, что бы в игре $\Gamma(k+1, z^0)$ происходила поимка необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$-z_i^0 \in C_{i_j},\ j = 1, \ldots, m,$$

$$\{i_1\} \cup \cdots \cup \{i_{k+1}\} = \{1, \ldots, m\}.$$

При этом

$$\delta(z^0) = \min_{j=1,\ldots,k+1} \frac{\lambda_j(A_{i_j})}{k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость и достаточность поимки в данном случае следует из теоремы 3.1 и того, что $C_i \cap C_j = \emptyset$, для любых $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$.

Докажем равенство для $\delta(z^0)$. Без ограничения общности можно считать $i_1, \ldots, i_{k+1}$ из условия теоремы равными $1, \ldots, k+1$ соответственно. Рассмотрим вершину A_1 и грань, определяемую вершинами $A_1, \ldots, A_k$ (обозначим её G_1). Определим, как и в теореме 1, множество $Q_1(\beta)$. Так как множество L_1 является частью гиперплоскости, то для любого $v \in Q_1(\beta)$ будет выполнено $\lambda_1(v) = (1-\gamma)\lambda_1(A_1)$ (см. доказательство теоремы 3.1). Далее, заметим, что при $\beta < 1/k$, $Q_1(\beta) \cup \cdots \cup Q_k(\beta) \neq G_1$. Действительно, так как множество

$$Q_i(\beta) = \left\{ \xi \mid \xi = (1-\gamma)A_i + \gamma \sum_{j \neq i} \alpha_j A_j,\ \sum_{j \neq i} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geqslant 0,\ \gamma \in [0, \beta] \right\}$$

то, например, точка $A_1/k + \cdots + A_k/k \notin Q_j(\beta)$ для любого $j = 1, \ldots, k$ при $\beta < 1 - 1/k$. При $\beta = 1/k$ для любой точки $v = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$, $\alpha_j \geqslant 0$, существует $j \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что $\alpha_j \geqslant 1 - 1/k$, то есть $v \in Q_j(1 - 1/k)$.

Таким образом, для любой точки $v \in \partial U$, $\lambda_i(v) \geqslant \lambda_i(A_i)/k$, $i = 1, \ldots, k+1$. Пусть $\lambda_q(A_q) \geqslant \min\{\lambda_1(A_1), \ldots, \lambda_{k+1}(A_{k+1})\}$. Тогда существует такое $\beta \in (1 - 1/k, 1)$, что $\min\limits_{w \in Q_q(\beta)} \lambda_q(w) = (1-\beta)\lambda_q(A_q) = \min\{\lambda_1(A_1)/k, \ldots, \lambda_{k+1}(A_{k+1})/k\}$, где $Q_q(\beta)$ определено для любой грани, смежной с вершиной A_q.

Теорема доказана. $\square$

§9 Поимка двумя преследователями

Для каждого $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$ определим множество $W(p)$ следующим образом: $w \in W(p)$ если выполнены следующие условия
1) $w \in \partial U$;
2) существуют вектор $\|q\| = 1$, $(q, p) = 0$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $v \in U$, $(v, q) \leqslant \alpha$, $(w, q) = \alpha$.

Введём следующие обозначения:

$$D_{max}(p, w) = w + p \cdot \max\{\gamma \in \mathbb{R}^1 \mid \gamma p + w \in \partial U\},$$

$$D_{min}(p, w) = w + p \cdot \min\{\gamma \in \mathbb{R}^1 \mid \gamma p + w \in \partial U\}.$$

Теорема 3.3. Для существования начальных положений z_1^0 и z_2^0, из которых в данной игре происходит поимка, необходимо и достаточно существование такого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, что для любой точки $w \in W(p)$ выполнено $\|D_{max}(p, w) - D_{min}(p, w)\| > 0$. При этом поимка будет гарантирована, если $z_1^0 = \alpha p$, $z_2^0 = -\beta p$ для некоторых $\alpha, \beta > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем необходимость. Предположим противное. Пусть для любого вектора $p \in \mathbb{R}_k$, $\|p\| = 1$ существует такой вектор $w \in W(p)$, что $\|D_{max}(p, w) - D_{min}(p, w)\| = 0$.

Рассмотрим случай, когда векторы z_1^0, z_2^0 не лежат на одной прямой, то есть существует такой вектор l, что $(-z_1^0, l) > 0$ и $(-z_2^0, l) > 0$. Так как U — выпуклый компакт, то существует точка $\overline{v} \in \partial U$ и число α такие, что для любого $v \in U$, $(v, l) \leqslant \alpha$, $(\overline{v}, l) = \alpha$. Поэтому $-\gamma z_1^0 + \overline{v} \notin U$ и $-\gamma z_2^0 + \overline{v} \notin U$ для любого $\gamma > 0$. То есть $\lambda_1(\overline{v}) = \lambda_2(\overline{v}) = 0$, следовательно $\delta(z^0) = 0$.

Пусть векторы z_1^0, z_2^0 лежат на одной прямой, то есть $z_1^0 = \alpha_1 l$, $z_2^0 = -\alpha_2 l$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\|l\| = 1$ В силу предположения существует $w \in W(l)$, что $\|D_{max}(p, w) - D_{min}(p, w)\| = 0$, то есть существуют вектор $\|\overline{q}\| = 1$, $(\overline{q}, l) = 0$ и число α такие, что $(w, q) = \alpha$ и для любого $v \in U$, $v \neq w$ выполнено $(v, q) < \alpha$. Следовательно $-\gamma z_1^0 + w \notin U$ и $-\gamma z_2^0 + w \notin U$ для любого $\gamma > 0$. То есть $\lambda_1(w) = \lambda_2(w) = 0$, следовательно $\delta(z^0) = 0$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Возьмём точку $\overline{v} \in \partial U$ такую, что $\delta(z^0) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(\overline{v})$. Если $\overline{v} \in W(p)$, то, в силу определения, точка v лежит на отрезке соединяющем точки $D_{max}(p,\overline{v})$ и $D_{min}(p,\overline{v})$. Тогда, либо $\lambda_1(\overline{v}) \geqslant \|D_{max}(p,\overline{v}) - D_{min}(p,\overline{v})\|/(2\|z_1^0\|)$, либо $\lambda_2(\overline{v}) \geqslant \|D_{max}(p,\overline{v}) - D_{min}(p,\overline{v})\|/(2\|z_2^0\|) > 0$. Это выполнено в силу определенных в условии теоремы z_1^0, z_2^0.

Рассмотрим случай, когда $\overline{v} \in \partial U$ и $\overline{v} \notin W(p)$. Предположим, что $\lambda_1(\overline{v}) = \lambda_2(\overline{v}) = 0$, следовательно $(\overline{v} + l(p)) \cap U = \overline{v}$, где $l(p) = \{\xi \mid \xi = \gamma p,\ \gamma \in \mathbb{R}\}$. Докажем, что существует опорная гиперплоскость к множеству U в точке $\overline{v}$ с внешней нормалью q, которая содержит прямую $\overline{v} + l(p)$, то есть $(q,p) = 0$. $\overline{v} + l(p)$ и $\mathrm{Int}U$ ($\mathrm{Int}U$ — внутренность множества U) отделимы, так как данные множества являются выпуклыми и не пересекаются. В силу того, что $\overline{v} + l(p)$ пересекает границу множества U, то отделяющая гиперплоскость будет проходить через $\overline{v} + l(p)$. Следовательно существует вектор $\overline{q} \neq 0$, такой, что $(l,\overline{q}) = 0$ и $(w,\overline{q}) < 0$, где $l \in l(p)$ и $w \in \mathrm{Int}U - \overline{v}$. Тогда, для любого $v \in U$ будет выполнено неравенство $(v - \overline{v}, q) \leqslant 0$, то есть данная отделяющая гиперплоскость является искомой опорной гиперплоскостью. Тогда, из определения множества $W(p)$ следует, что $\overline{v} \in W(p)$. Таким образом получили противоречие с предположением $\overline{v} \notin W(p)$. Поэтому, если $\overline{v} \notin W(p)$, то $\max\limits_{i=1,2} \lambda_i(\overline{v}) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1(\overline{v}) > 0$. Докажем включение $U \subset coW(p) + l(p)$, где $coW(p)$ — выпуклая оболочка множества $W(p)$,. Для этого достаточно доказать, что $coW(p) + l(p)$ есть пересечение опорных полупространств множеству U в точках $W(p)$. Обозначим $M(q)$ — опорное полупространство к множеству U с нормальным вектором q; $\alpha(q)$ — соответствующее число, определяемое опорную гиперплоскоть,

$$M(W(p)) = \bigcap_{(p,q)=0,\|q\|=1} M(q).$$

Заметим, что $U \subset M(W(p))$. Предположим противное. Пусть существует такая точка $v \in U$, что $v \notin coW(p) + l(p)$. Следовательно точка $v + l \notin coW(p) + l(p)$, где $l \in l(p)$. Тогда существует гиперплоскость
$\hat{M} = \{x | (x,\hat{q}) = \hat{\alpha}, (\hat{q},p) = 0\}$, которая не пересекает множество $coW(p)$. Так как $v + l(p) \subset M(W(p))$, то для любой токи $w \in \hat{M}$ выполнено неравенство $(w,\hat{q}) \leqslant \alpha(\hat{q})$. Но существует точка $\xi \in W(p)$, такая, что $(\xi,\hat{q}) = \alpha(\hat{q})$, что

противоречит определению множества $\hat{M}$. Следовательно $U \subset coW(p) + l(p)$. Следовательно существует вектор $w_1 \in coW(p)$ и число $\alpha > 0$ такие, что $w_1 + \alpha p = v$ (либо $-\alpha$ и далее для функции λ_2), где $v \in U$, $v \notin W(p)$. Поэтому $\lambda_1(v) \geqslant \|D_{max}(p, w) - D_{min}(p, w)\|/(2\|z_1^0\|)$, для некоторого $w \in W(p)$. Отсюда следует, что $\delta(z^0) > 0$ и достигается на $W(p)$, то есть происходит поимка.

Теорема доказана. $\square$

§10 Необходимые условия поимки

Обозначим $L_m(p_1, \ldots, p_m)$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^k$, определяемое линейно независимыми векторами $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^k$, $\|p_j\| = 1$. $L_m^{\perp}(p_1, \ldots, p_m)$ — ортогональное дополнение к $L_m(p_1, \ldots, p_m)$.

Теорема 3.4. Для осуществления поимки необходимо, чтобы $0 \in \mathrm{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.

Доказательство. Предположим, что $0 \notin co\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. Тогда существует вектор $q \in \mathbb{R}^k$, $\|q\| = 1$, такой что $(-z_i^0, q) > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Для данного вектора q существует число $\alpha \in \mathbb{R}$ и точка $\overline{v} \in \partial U$ такие, что $(v, q) \leqslant \alpha$ для любого $v \in U$ и $(\overline{v}, q) = \alpha$. Тогда $(-\lambda z_i^0, q) > \alpha$, для любого $\lambda > 0$ и любого $i = 1, \ldots, n$. Следовательно $\lambda_i(\overline{v}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $\delta(z^0) = 0$, то есть происходит уклонение.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.5. Пусть $n \leqslant k$. Тогда, для осуществления поимки необходимо существование такого $L_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1})$, что для любой точки $v \in \partial U$, в которой существует опорная гиперплоскость с внешней нормалью $q \in L_{n-1}^{\perp}(p_1, \ldots, p_{n-1})$, $\|q\| = 1$, было выполнено

$$((L_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1}) + v) \setminus \{v\}) \cap U \neq \emptyset.$$

Доказательство. Предположим, что такое $L_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1})$ не существует. Из теоремы 4 следует необходимая принадлежность $z_1^0, \ldots, z_n^0 \in L_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1})$, где $L_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1})$ — некоторое линейное подпространство, которое мы можем выбрать сами. Но для любого $L_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1})$, в силу предположения противного, существует $\overline{v} \in \partial U$, такой что $((L_{n-1}(p_1,\dots,p_{n-1})+\overline{v})\setminus\{\overline{v}\})\cap U=\emptyset$. Следовательно $-\lambda z_i^0+\overline{v}\notin U$ для любого $\lambda>0$, $i=1,\dots,n$. Поэтому $\max\limits_{i=1,\dots,n}\lambda_i(\overline{v})=\delta(z^0)=0$, то есть происходит уклонение.

Теорема доказана. $\square$

Пример 3.1. Рассмотрим игру в $\mathbb{R}^3$, $n=3$,U — выпуклый многогранник с вершинами в точках $A_1,\dots,A_7$, где $A_1=(0,0,0)$, $A_2=(1,0,0)$, $A_3=(0,1,0)$, $A_4=(0,0,2)$, $A_5=(1,0,2)$, $A_6=(0,1,2)$, $A_7=(3,3,1)$.

В данном случае $L_2((1,0,0),(0,1,0))$ удовлетворяет теореме 3.5. Для того, что бы $\max\limits_{i=1,2,3}\lambda_i(v)\neq 0$ для любого v принадлежащей верхней или нижней грани (они параллельны друг другу и $L_2((1,0,0),(0,1,0))$), необходимо, чтобы

$$-z_1^0\in\{\xi\mid\xi=\gamma(\alpha(A_2-A_1)+(1-\alpha)(A_3-A_1)),\alpha\in[0,1],\gamma>0\};$$

$$-z_2^0\in\{\xi\mid\xi=\gamma(\alpha(A_1-A_2)+(1-\alpha)(A_3-A_2)),\alpha\in[0,1],\gamma>0\};$$

$$-z_3^0\in\{\xi\mid\xi=\gamma(\alpha(A_1-A_3)+(1-\alpha)(A_2-A_3)),\alpha\in[0,1],\gamma>0\}.$$

Заметим, что z_i^0 можно поменять местами. Необходимость принадлежности данным конусам следует из следствия теоремы 1.

Таким образом выполнены условия теорем 3.4 и 3.5. Более того, на гранях параллельных $L_2((1,0,0),(0,1,0))$ максимум функций λ_i положителен. Так же максимум функций λ_i не обращается в 0 и на гранях A_1,A_2,A_4,A_5 и A_1,A_3,A_4,A_6.

Но в точке A_7 необходимо, что бы хотя бы один из $-z_i^0$ принадлежал конусу

$$\{\xi\mid\xi=\gamma(\alpha(A_2-A_7)+(1-\alpha)(A_3-A_7)),\alpha\in[0,1],\gamma>0\},$$

который не пересекается с конусами определенными выше. Следовательно, в данном примере для любых начальных положений происходит уклонение исходя из теоремы 1.

Замечание 3.1. Если U в примере 3.1 определяется только вершинами $A_1,\dots,A_6$, то условие теоремы 3.5 будет так же и достаточным для существования начальных положений, из которых будет происходить поимка.

Глава 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ-УКЛОНЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассматриваются дифференциальные игры преследования и уклонения двух лиц, описываемые системой вида $\dot{x} = f(x, u) + g(x, v)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $u \in U$, $v \in V$. Множеством значений управлений игрока, со стороны которого рассматривается задача, является конечное подмножество фазового пространства. Получены достаточные условия разрешимости рассматриваемых задач.

§11 Задача о точной поимке

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0, \tag{4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовая переменная, $u, v \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $V \in \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ — для каждого $u \in U$ непрерывно дифференцируема по x во всем пространстве $\mathbb{R}^k$. Функция $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}^k$ — для каждого $v \in V$ непрерывно дифференцируема по x во всем пространстве $\mathbb{R}^k$. При этом считаем, что функция $f(\cdot, \cdot)$ — для каждого $u \in U$ липшицева по x, функция $g(\cdot, \cdot)$ — липшицева по совокупности переменных, то есть существуют положительные числа $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m$, L_2 такие, что

$$\|f(x^1, u_i) - f(x^2, u_i)\| \leqslant \overline{L}_i \|x^1 - x^2\|, \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\|g(x^1, v^1) - g(x^2, v^2)\| \leqslant L_2(\|x^1 - x^2\| + \|v^1 - v^2\|), \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad v^1, v^2 \in V.$$

Под разбиением σ промежутка $[0, \infty)$ будем понимать последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, не имеющую конечных точек сгущения и такую, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_q < \ldots$.

Определение 4.1. *Кусочно-постоянной стратегией* Q убегающего E называется пара (σ, Q_σ), где σ — разбиение промежутка $[0, \infty)$, а Q_σ — семейство отображений $c_r, r = 0, 1, \ldots,$ ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $v_r(t) \equiv v_r \in V$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Определение 4.2. *Кусочно-постоянной контрстратегией* W преследователя P называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0, \infty)$, а W_σ — семейство отображений $d_r, r = 0, 1, \ldots,$ ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ и постоянному управлению $v_r(t)$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$ кусочно-постоянную функцию $u_r : [\tau_r, \tau_{r+1}) \to U$ с конечным количеством переключений.

Обозначим данную игру $\Gamma(x_0)$.

Определение 4.3. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любой кусочно-постоянной стратегии Q убегающего E существует кусочно-постоянная контрстратегия W преследователя P такая, что $x(\tau) = 0$ для некоторого $\tau \in (0, T)$.

Определение 4.4. ([33]) Совокупность векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом* если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1, \ldots, \mu_n \geqslant 0$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i$.

Теорема 4.1 Пусть $f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)$ образует положительный базис и $-g(0, V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}\{f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)\})$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in O_\varepsilon(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathbf{1^0}$. Докажем, что существуют $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что для любых точки $x \in O_\varepsilon(0)$ и вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$ найдётся $i \in \{1, \ldots, m\}$, что для любого $v \in V$ выполнено

$$\langle f(x, u_i) + g(x, v), p \rangle \geqslant \alpha. \tag{4.2}$$

Так как функция $f(x, u)$ для каждого $u \in U$ является липшицевой по x во всем пространстве $\mathbb{R}^k$, то существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всех $x \in O_{\varepsilon_1}(0)$ набор векторов $\{f(x, u_1), \ldots, f(x, u_m)\}$ является положительным базисом. В силу того, что функция $g(x, v)$ является липшицевой по совокупности переменных на любом компактном подмножестве множества $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$, множество $g(x, V)$ является компактом для любого $x \in \mathbb{O}_{\varepsilon_1}(0)$. Кроме того существует $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ такое, что для любого $x \in O_{\varepsilon_2}(0)$ выполнено $-g(x, V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}\{f(x, u_1), \ldots, f(x, u_m)\})$. Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$. Тогда, для любого $x \in D_{\varepsilon_3}(0)$ и любого $v \in V$ выполнено включение $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{co}\{f(x, u_1) + g(x, v), \ldots, f(x, u_m) + g(x, v)\})$. Следовательно, по свойству положительных базисов (см. например [33]), набор векторов $\{f(x, u_1) + g(x, v), \ldots, f(x, u_m) + g(x, v)\}$ является положительным базисом.

Пусть $x \in D_{\varepsilon_3}(0)$. Так как функции f, g являются липшицевыми по первому аргументу на данном шаре, то функции $f(x, u_1), \ldots, f(x, u_m)$ непрерывны по x, компактное множество $g(x, V)$ непрерывно по x в метрике Хаусдорфа.

Тогда на шаре $D_{\varepsilon_3}(0)$ достигается следующий минимум

$$\min_{x \in D_{\varepsilon_3}(0)} \min_{\|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{i=1,\ldots,m} \langle f(x, u_i) + g(x, v), p \rangle = \langle f(\hat{x}, u_j) + g(\hat{x}, \hat{v}), \hat{p} \rangle, \qquad (4.3)$$

где $\hat{x} \in D_{\varepsilon_3}$, $\|\hat{p}\| = 1$, $\hat{v} \in V$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Так как набор векторов $\{f(\hat{x}, u_1) + g(\hat{x}, \hat{v}), \ldots, f(\hat{x}, u_m) + g(\hat{x}, \hat{v})\}$ является положительным базисом, то, в силу (4.3) и свойств положительных базисов (см. например [33]), имеет место неравенство

$$\alpha_1 = \langle f(\hat{x}, u_j) + g(\hat{x}, \hat{v}), \hat{p} \rangle > 0.$$

Таким образом, ε_3 является искомым ε, а α_1 является искомым α. Неравенство (4.2) доказано.

Из свойств функций f, g следует, что существует $D > 0$ такое, что для всех $x \in D_\varepsilon(0)$, любого $v \in V$ и любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ имеет место следующее неравенство

$$\|f(x, u_i) + g(x, v)\| \leqslant D. \qquad (4.4)$$

Оценка справедлива в силу ограниченности функций f, g в данном шаре.

$\mathbf{2^0}$. Пусть задана некоторая стратегия Q убегающего E, то есть задано разбиение $\{\overline{\tau}_q\}_{q=0}^{\infty}$ и соответствующая ему последовательность значений управления $\{v_q\}_{q=0}^{\infty}$, $v_i \in V$, $i = 0, 1, \ldots$. Пусть числа ε, α соответствуют (4.2) и $x_0 \in O_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$. В силу (4.2) для любого $v_0 \in V$ существует такой индекс

$j \in \{1, \dots, m\}$, что выполнено неравенство

$$\left\langle f(x_0, u_j) + g(x_0, v_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \alpha.$$

Также, в силу (4.2) и липшицевости функций f, g по x, существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in D_\delta(x_0)$, любого $v \in V$ выполнено неравенство

$$\left\langle f(x, u_j) + g(x, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0. \tag{4.5}$$

Так как для любого $x \in (O_\varepsilon(0) \cap D_\delta(x_0))$ и любого $v \in V$ выполнена неравность $f(x, u_j) + g(x, v) \neq 0$, то справедливо следующее неравенство

$$\left\langle \frac{f(x, u_j) + g(x, v)}{\|f(x, u_j) + g(x, v)\|}, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2\|f(x, u_j) + g(x, v)\|}.$$

Так как $\|f(x, u_j) + g(x, v)\| \leqslant D$ в силу (4.4), то справедливо следующее неравенство

$$1 \geqslant \left\langle \frac{f(x, u_j) + g(x, v)}{\|f(x, u_j) + g(x, v)\|}, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2D}.$$

Возьмём вектор $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$ и такой, что

$$\left\langle p, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = \frac{\alpha}{2D}. \tag{4.6}$$

Тогда существует такое число $\gamma > 0$, что $\|x_0 + \gamma p\| = \|x_0\|$, то есть точка $x_0 + \gamma p$ является вторым концом хорды шара $D_{\|x_0\|}(0)$. Следовательно, имеет место следующее равенство

$$\min_{\beta \in [0,1]} \|x_0 + \beta\gamma p\| = \left\| x_0 + \frac{\gamma}{2} p \right\|.$$

Без ограничений общности можно считать, что $\delta \leqslant \gamma/2$. Определим момент времени $t_1 = \gamma/(2D)$. Тогда, существует такой номер n, что $\overline{\tau}_n \leqslant t_1$, $\overline{\tau}_{n+1} > t_1$. Зададим первую часть разбиения $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$ для стратегии преследователя: $\tau_0 = 0, \tau_1 = \overline{\tau}_1, \dots, \tau_n = \overline{\tau}_n, \tau_{n+1} = t_1$ и на каждом интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \dots, n$, определим соответствующие управления $u_{j_0}, \dots, u_{j_n}$ преследователя P. Выбираем u_{j_i} для интервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$ таким, что для данного вектора выполнено (4.5) при $x_0 = x(\tau_i)$, $v = v_i$. Номера j_i выбираются такие, на которых достигается максимум из (4.5) при $v = v_i$.

Рассмотрим точку $x(t_1) = x_0 + \int_{\tau_0}^{t_1}(f(x(s),u(s)) + g(x(s),v(s)))\,ds \doteq x_1$. Для данного x_1 выполнены следующие свойства: $\|x_1 - x_0\| \leqslant \gamma/2$, в силу выбора t_1;

$$\left\langle \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2D},$$

в силу (4.6). Докажем, что $\|x_1\| \leqslant \nu\|x_0\|$ для некоторого $\nu \in [0,1)$. Оценим $\|x_1\|^2$.

$$\|x_1\|^2 = \|x_0\|^2 + \left\| \int_{\tau_0}^{t_1} (f(x(s),u(s)) + g(x(s),v(s)))ds \right\|^2 +$$

$$+2\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{t_1} (f(x(s),u(s)) + g(x(s),v(s)))ds \right\rangle.$$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{t_1} (f(x(s),u(s)) + g(x(s),v(s)))ds \right\rangle =$$

$$= \int_{\tau_0}^{t_1} \langle x_0,\ f(x(s),u(s)) + g(x(s),v(s))\rangle\ ds \leqslant$$

$$\leqslant -\int_{\tau_0}^{t_1} \frac{\alpha\|x_0\|}{2}\,ds = -\frac{\alpha\|x_0\|}{2}\cdot\frac{\gamma}{2D}.$$

Заметим, что

$$\left\| \int_{\tau_0}^{t_1} (f(x(s),u(s)) + g(x(s),v(s)))ds \right\|^2 \leqslant \frac{\gamma^2}{4}.$$

В силу (4.2), (4.4) имеет место неравенство $\alpha < D$. Тогда, в силу (4.6) и определения γ, имеет место равенство $\gamma = \alpha\|x_0\|/D$. Следовательно справедлива оценка

$$\left\| \int_{\tau_0}^{t_1} (f(x(s),u(s)) + g(x(s),v(s)))ds \right\|^2 +$$

$$+2\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{t_1} (f(x(s),u(s)) + g(x(s),v(s)))ds \right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma^2}{4} - 2\cdot\frac{\alpha\|x_0\|}{2}\cdot\frac{\gamma}{2D} = \frac{\alpha^2\|x_0\|^2}{4D^2} - \frac{\alpha^2\|x_0\|^2}{2D^2} = -\frac{\alpha^2\|x_0\|}{4D^2}.$$

Тогда
$$\|x_1\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 - \frac{\alpha^2\|x_0\|}{4D^2}.$$
Отсюда, искомое $\nu = \sqrt{1-\alpha^2/(4D^2)}$.

Далее, считая начальной точку x_1, производим вышеописанную процедуру. Определим момент времени t_2 из равенства $t_2 - t_1 = \gamma_1/(2D)$, где γ_1 — длина хорды шара радиуса $\|x_1\|$, соответствующая вектору p. Вектор p, с помощью которого находится γ_1 соответствует (4.6) при $x_0 = x_1$. Далее, аналогично первому шагу, определим точки точки разбиения $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, которые пренадлежат интервалу $[t_1, t_2)$, и соответствующие векторы управления. Получим, что для $x_2 = x(t_2)$ будет выполнено неравенство $\|x_2\| \leqslant \nu\|x_1\|$, где ν остаётся неизменным с предыдущего шага.

Продолжая данную процедуру получим две последовательности $\{t_q\}_{q=0}^{\infty}$, $\{x_q\}_{q=0}^{\infty}$, где $t_0 = 0$. Рассмотрим предел норм элементов последовательности $\{x_q\}_{q=0}^{\infty}$:
$$\lim_{q\to\infty}\|x_q\| \leqslant \lim_{q\to\infty}\|x_0\|\nu^q = 0.$$
Рассмотрим предел последовательности $\{t_q\}_{q=0}^{\infty}$:
$$\lim_{q\to\infty} t_q = \lim_{q\to\infty}\sum_{\eta=0}^{\eta=q-1}(t_{\eta+1} - t_\eta) \leqslant \sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{\|x_\eta\|}{2D} \leqslant \sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{\|x_0\|\nu^\eta}{2D} = \frac{\|x_0\|}{2D(1-\nu)}.$$
Таким образом $\lim\limits_{q\to\infty} t_q = T < +\infty$. Следовательно, без ограничений можно считать, что $T \in (\overline{\tau}_\eta, \overline{\tau}_{\eta+1})$, для некоторого натурального η.

$\mathbf{3^0}$. Пусть выполнены построения пункта 2. Рассмотрим интервал $(\overline{\tau}_\eta, \overline{\tau}_{\eta+1})$. На данном интервале динамика игры описывается следующей системой дифференциальных уравнений
$$\dot{x} = f(x,u) + g(x, v_\eta), \quad u \in U. \tag{4.7}$$
Начальным положением считаем точку $\overline{x} = x(\tau_\mu)$, где $\tau_\mu \in \{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$ и $\tau_\mu \in (\overline{\tau}_\eta, T)$. Так как v_η — постоянный вектор на данном интервале, то правая часть зависит только от x, u. Тогда, в силу результатов [29], на интервале $(\overline{\tau}_\eta, \overline{\tau}_{\eta+1})$ данная управляемая система (4.7) является N-локально управляемой. То есть, для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует $\hat{\delta}(\hat{\varepsilon}) > 0$ такое, что для любого

$\overline{x} \in O_{\hat{\delta}}(0)$ существует разбиение $\tau_\mu = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \cdots < \hat{t}_m < (\tau_\mu + \hat{\varepsilon})$ такое, что существует кусочно-постоянное управление, соответствующее данному разбиению, которое переводит систему в 0. Каждому интервалу $[\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i)$ соответствует постоянное управление u_i (см. [33]).

В силу построений из пункта 2, можем выбрать такую точку разбиения $\tau_\mu \in (\overline{\tau}_\eta, T)$, что для $\hat{\delta} = \|x(\tau_{\mu-1})\|$ соответствующее $\hat{\varepsilon} < (\overline{\tau}_{\eta+1} - T)$. Так как $\overline{x} = \|x(\tau_\mu)\| < \|x(\tau_{\mu-1})\|$, то для начального положения $\|\overline{x}\|$ существует кусочно-постоянное управление, соответсвующее точкам переключения $\tau_\mu = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \cdots < \hat{t}_m < (\tau_\mu + \hat{\varepsilon})$, такое, что $x(\hat{t}_m) = 0$, при этом $\hat{t}_m < \overline{\tau}_{\eta+1}$.

Таким образом, до выше определённого момента τ_μ кусочно-постоянное управление преследователя строится по процедуре пункта 2, получая моменты переключения управления $\{\tau_q\}_{q=0}^{\mu}$. Далее, соответственно результатам [33], строится кусочно-постоянное управление, переводящее систему в 0, соответствующее точкам переключения $\tau_\mu = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \cdots < \hat{t}_m$. Причем, на каждом интервале $[\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i)$ управление равно вектору $u_i \in U$, так как совокупность векторов $\{f(0, u_1) + g(0, v_\eta), \ldots, f(0, u_m) + g(0, v_\eta)\}$ образует положительный базис в силу условий теоремы.

Таким образом, стратегия преследователя строится в два этапа. На первом этапе осуществляется приближение к 0 достаточно близко за конечное время для того, чтобы было возможно использовать свойство N-локальной управляемости системы (4.7). На втором этапе используется данное свойство для приведения системы в 0.

Теорема доказана. $\square$

Пример 4.1. Рассмотрим систему (4.1) в $\mathbb{R}^2$, где

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} 2\cos(x_1 + u_1) \\ u_2 e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad g(x,v) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 + v_1) \\ v_2 e^{x_2}/2 \end{pmatrix}.$$

Пусть множество $U = \{(\pi/2, 1), (\pi, -1), (0, -1)\}$, множество $V = [-1, 1] \times [0, 1]$. Функции f, g являются липшицевыми по совокупности переменных. $f(0, U) = \{(0, 1), (-2, -1), (2, -1)\}$, $g(0, V) = [\sin(-1), \sin(1)] \times [0, 1/2]$. Отсюда, выполнено включение $-g(0, V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co} f(0, U))$. Следовательно выполнены условия теоремы, то есть существует окрестность нуля, из которой происходит поимка.

§12 Задача ε-поимки

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, $u, v \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ — для каждого $u \in U$ липшицева по x. Функция $g : \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ — липшицева по совокупности переменных. То есть существуют положительные числа $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m$, L_2 такие, что

$$\|f(x^1, u_i) - f(x^2, u_i)\| \leqslant \overline{L}_i \|x^1 - x^2\|, \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\|g(x^1, v^1) - g(x^2, v^2)\| \leqslant L_2(\|x^1 - x^2\| + \|v^1 - v^2\|), \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad v^1, v^2 \in V.$$

Под разбиением σ промежутка $[0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\eta = T$.

Определение 4.5. *Кусочно-постоянной стратегией* W преследователя P называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0, T]$, а W_σ — семейство отображений d_r, $r = 0, 1, \ldots, \eta$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v : [0, \infty) \to V$, не известную преследователю P. Обозначим данную игру $\Gamma(x_0)$.

Определение 4.6. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит ε-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \varepsilon$ для некоторого $\tau \in [0, T]$.

Теорема 4.2. Пусть $f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)$ образуют положительный базис и $-g(0, V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)\})$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathbf{1^0}$. Докажем, что существуют $\alpha > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любых точки $x \in O_{\varepsilon_0}(0)$ и вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$ найдётся $i \in \{1, \ldots, m\}$, что для любого $v \in V$ выполнено

$$\langle f(x, u_i) + g(x, v), p \rangle \geqslant \alpha. \tag{4.8}$$

Так как функция $f(x, u)$ для каждого $u \in U$ является липшицевой по x во всем пространстве $\mathbb{R}^k$, то существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всех $x \in O_{\varepsilon_1}(0)$ набор векторов $\{f(x, u_1), \ldots, f(x, u_m)\}$ является положительным базисом. В силу того, что функция $g(x, v)$ является липшицевой по совокупности переменных на своей области определения, множество $g(x, V)$ является компактом для любого $x \in \mathbb{R}^k$. Кроме того существует $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ такое, что для любого $x \in O_{\varepsilon_2}(0)$ выполнено $-g(x, V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}\{f(x, u_1), \ldots, f(x, u_m)\})$. Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$. Тогда, для любого $x \in D_{\varepsilon_3}(0)$ и любого $v \in V$ выполнено включение $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{co}\{f(x, u_1) + g(x, v), \ldots, f(x, u_m) + g(x, v)\})$. Следовательно, по свойству положительных базисов (см. например [33]), набор векторов $\{f(x, u_1) + g(x, v), \ldots, f(x, u_m) + g(x, v)\}$ является положительным базисом.

Пусть $x \in D_{\varepsilon_3}(0)$. Так как функции f, g являются липшицевыми по первому аргументу на данном шаре, то функции $f(x, u_1), \ldots, f(x, u_m)$ непрерывны по x, компактное множество $g(x, V)$ непрерывно по x в метрике Хаусдорфа.

Тогда на шаре $D_{\varepsilon_3}(0)$ достигается следующий минимум

$$\min_{x \in D_{\varepsilon_3}(0)} \min_{\|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{i=1,\ldots,m} \langle f(x, u_i) + g(x, v), p \rangle = \langle f(\hat{x}, u_j) + g(\hat{x}, \hat{v}), \hat{p} \rangle, \tag{4.9}$$

где $\hat{x} \in D_{\varepsilon_3}$, $\|\hat{p}\| = 1$, $\hat{v} \in V$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Так как набор векторов $\{f(\hat{x}, u_1) + g(\hat{x}, \hat{v}), \ldots, f(\hat{x}, u_m) + g(\hat{x}, \hat{v})\}$ является положительным базисом, то, в силу (4.9) и свойств положительных базисов (см. например [33]), имеет место неравенство

$$\alpha_1 = \langle f(\hat{x}, u_j) + g(\hat{x}, \hat{v}), \hat{p} \rangle > 0.$$

Таким образом, ε_3 является искомым ε_0, а α_1 является искомым α. Неравенство (4.8) доказано.

Из свойств функций f, g следует, что существует $D > 0$ такое, что для всех $x \in D_{\varepsilon}(0)$, любого $v \in V$ и любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ имеет место следующее неравенство

$$\|f(x,u_i)+g(x,v)\| \leqslant D. \tag{4.10}$$

Оценка справедлива в силу ограниченности функций f,g в данном шаре.

$\mathbf{2^0}$. Пусть числа ε_0, α соответствуют (4.8) и $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)\setminus\{0\}$. Выберем вектор $\overline{u}_0 \in U$ такой, что

$$\max_{u\in U}\left\langle f(x_0,u), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle = \left\langle f(x_0,\overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle. \tag{4.11}$$

Совокупность векторов $f(x_0,u_1),\dots,f(x_0,u_m)$ образует положительный базис. Следовательно

$$\left\langle f(x_0,\overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle > 0.$$

Пусть вектор $\overline{v}\in V$ такой, что

$$\min_{v\in V}\left\langle f(x_0,\overline{u}_0)+g(x_0,v), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle = \left\langle f(x_0,\overline{u}_0)+g(x_0,\overline{v}), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle. \tag{4.12}$$

Так как $-g(x_0,\overline{v}) \in \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x_0,u_1),\dots,f(x_0,u_m)\})$, то существуют такие $\lambda_1,\dots,\lambda_m \geqslant 0$, что $\lambda_1+\dots+\lambda_m = 1$ и $\lambda_1 f(x_0,u_1)+\dots+\lambda_m f(x_0,u_m) = -g(x_0,\overline{v})$. Отсюда

$$\left\langle f(x_0,\overline{u}_0)+g(x_0,\overline{v}), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle = \left\langle f(x_0,\overline{u}_0) - \sum_{j=1,\dots,m}\lambda_j f(x_0,u_j), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle.$$

Заметим, что в силу выбора $\overline{u}_0$ и $-g(x_0,\overline{v}) \in \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x_0,u_1),\dots,f(x_0,u_m)\})$ существует такой индекс $j\in\{1,\dots,m\}$, что $\lambda_j>0$ и

$$\left\langle f(x_0,\overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle > \left\langle f(x_0,u_j), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle.$$

Иначе для каждого j такого, что $\lambda_j>0$ выполнено равенство

$$\left\langle f(x_0,u_j), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle = \left\langle f(x_0,\overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle.$$

Следовательно, в силу (4.11), вектор $-g(x_0,\overline{v})$ будет принадлежать границе множества $\operatorname{co}\{f(x_0,u_1),\dots,f(x_0,u_m)\}$. Так как $\overline{u}_0\in U$, то существует такой индекс $\nu \in \{1, \ldots, m\}$, что $\overline{u}_0 = u_\nu$. Поэтому

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0) - \sum_{j=1,\ldots,m} \lambda_j f(x_0, u_j), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle >$$

$$> \left\langle (1-\lambda_\nu) f(x_0, \overline{u}_0) - f(x_0, \overline{u}_0) \sum_{j=1,\ldots,m, j\neq\nu} \lambda_j, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle =$$

$$= \left\langle (1-\lambda_\nu) f(x_0, \overline{u}_0) - f(x_0, \overline{u}_0)(1-\lambda_\nu), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = 0.$$

Отсюда

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0) + g(x_0, \overline{v}), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle > 0. \tag{4.13}$$

Так как минимум в (4.12) достигается на $\overline{v}$ для любого $\overline{u}_0 \in U$, то, в силу (4.11) и (4.13), для всех $u \in U$ имеет место следующее неравенство

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0) + g(x_0, \overline{v}), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \left\langle f(x_0, u) + g(x_0, \overline{v}), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle.$$

Следовательно, в силу (4.8), для любого $v \in V$ имеет место оценка

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0) + g(x_0, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \alpha.$$

Также, в силу (4.8) и липшицевости функций f, g по x, существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in D_\delta(x_0)$, любого $v \in V$ выполнено неравенство

$$\left\langle f(x, \overline{u}_0) + g(x, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{4.14}$$

Заметим, что δ можно взять общее для всех $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0) \setminus \{0\}$.

$$\left\langle f(x, \overline{u}_0) + g(x, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle =$$

$$= \left\langle f(x, \overline{u}_0) + f(x_0, \overline{u}_0) - f(x_0, \overline{u}_0) + g(x, v) + g(x_0, v) - g(x_0, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle =$$

$$= \left\langle f(x_0, \overline{u}_0) + g(x_0, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle + \left\langle f(x, \overline{u}_0) - f(x_0, \overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle g(x, v) - g(x_0, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \alpha - L_f\|x - x_0\| - L_g\|x - x_0\|.$$

Здесь L_f, L_g — константы Липшица функций f и g соответственно. Отсюда видно, что достаточно, что бы $\delta \leqslant \alpha/(2L_f + 2L_g)$.

$\mathbf{3^0}$. Построим стратегию $W = (\sigma, W_\sigma)$ преследователя P для произвольного управления убегающего, $\sigma = \{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\tau_0 = 0$. Пусть далее числа ε_0, α соответствуют (4.8), $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0) \setminus \{0\}$, δ соответствует (4.14).

Построим первый отрезок разбиения и управление преследователя на нем. Определим управление $\overline{u}_0$ на первом отрезке разбиения как в пункте 2. Тогда, в силу (4.14), для любого $v \in V$ имеем

$$\left\langle f(x, \overline{u}_0) + g(x, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2}.$$

В силу того, что $f(x, \overline{u}_0) + g(x, v) \neq 0$, для любого $x \in (O_{\varepsilon_0}(0) \cap D_\delta(x_0))$ и любого $v \in V$ выполнено следующее неравенство:

$$\left\langle \frac{f(x, \overline{u}_0) + g(x, v)}{\|f(x, \overline{u}_0) + g(x, v)\|}, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2\|f(x, \overline{u}_0) + g(x, v)\|}.$$

Так как $\|f(x, \overline{u}_0) + g(x, v)\| \leqslant D$ в силу (4.10), справедливо следующее неравенство:

$$1 \geqslant \left\langle \frac{f(x, \overline{u}_0) + g(x, v)}{\|f(x, \overline{u}_0) + g(x, v)\|}, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2D}.$$

Возьмем произвольный вектор $p_0 \in \mathbb{R}^k$, $\|p_0\| = 1$ такой, что

$$\left\langle p_0, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = \frac{\alpha}{2D}. \tag{4.15}$$

Тогда существует такое число $\gamma_0 > 0$, что $\|x_0 + \gamma_0 p_0\| = \|x_0\|$, то есть точка $x_0 + \gamma_0 p_0$ является вторым концом хорды шара $D_{\|x_0\|}(0)$. Следовательно имеет место следующее равенство

$$\min_{\beta \in [0,1]} \|x_0 + \beta\gamma_0 p_0\| = \left\| x_0 + \frac{\gamma_0}{2} p_0 \right\|. \tag{4.16}$$

Выберем $\delta_0 = \min\{\delta, \gamma_0/2\}$. Далее полагаем $\tau_1 = \delta_0/D$, $u(t) = \overline{u}_0$, $t \in [0, \tau_1)$.

Рассмотрим точку

$$x(\tau_1) = x_0 + \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(x(s), s)))\, ds \doteq x_1.$$

Для данного x_1 выполнены следующие свойства: $\|x_1 - x_0\| \leqslant \delta_0/2$, в силу выбора τ_1;

$$\left\langle \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2D},$$

в силу (4.16). Докажем, что $\|x_1\| \leqslant \nu \|x_0\|$ для некоторого $\nu \in [0, 1)$. Рассмотрим $\|x_1\|^2$:

$$\|x_1\|^2 = \|x_0\|^2 + \left\| \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\|^2 +$$

$$+2 \left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\rangle.$$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\rangle =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \langle x_0,\ f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)) \rangle\, ds \leqslant$$

$$\leqslant - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\alpha \|x_0\|}{2}\, ds = -\frac{\alpha \|x_0\|}{2} \cdot \frac{\delta_0}{D}.$$

Заметим, что

$$\left\| \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\|^2 \leqslant {\delta_0}^2.$$

В силу (4.8), (4.10) имеет место неравенство $\alpha < D$. Тогда, в силу (4.15) и определения γ_0, имеет место равенство $\gamma_0 = \alpha \|x_0\|/D$. Поэтому, $\delta_0 = \mu \gamma_0/2$, где

$$\mu = \frac{\min\{\alpha \|x_0\|/(2D), \delta\}}{\alpha \|x_0\|/(2D)}.$$

Отсюда, $0 < \mu \leqslant 1$ и $\mu = 1$ при $\|x_0\| \leqslant \delta 2D/\alpha$. Следовательно справедлива оценка

$$\left\|\int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds\right\|^2 +$$

$$+2\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds\right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant {\delta_0}^2 - 2\cdot\frac{\alpha\|x_0\|}{2}\cdot\frac{\delta_0}{D} = \frac{\mu^2\gamma_0^2}{4} - \frac{\alpha\|x_0\|\mu\gamma_0}{2D} =$$

$$= \frac{\mu^2\alpha^2\|x_0\|^2}{4D^2} - \frac{\alpha^2\|x_0\|^2\mu}{2D^2} = \frac{\alpha^2(\mu^2 - 2\mu)}{4D^2}\cdot\|x_0\|^2 < 0.$$

Тогда

$$\|x_1\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 - \frac{\alpha^2\mu(2-\mu)}{4D^2}\cdot\|x_0\|^2.$$

Отсюда, искомое $\nu = \sqrt{1 - \alpha^2\mu(2-\mu)/(4D^2)}$.

Далее, считая начальной точку x_1 вместо x_0, повторяем вышеописанную процедуру. Найдем вектор $\overline{u}_1 \in U$, удовлетворяющий (4.11). Затем в соответствии с (4.15) и (4.16) находим число γ_1, которое является длиной соответствующей хорды шара $D_{\|x_1\|}(0)$. Так как число δ не зависит от x_1, то аналогично возьмем число $\delta_1 = \min\{\delta, \gamma_1/2\}$. Далее полагаем $\tau_2 = \tau_1 + \delta_1/D$, $u(t) = \overline{u}_1$, $t \in [\tau_1, \tau_2)$. Определим конец второго отрезка разбиения как $\tau_2 - \tau_1 = \delta_1/D$. Тогда, аналогично оценкам для $\|x_1\|^2$, получим и оценку для $x_2 \doteq x(\tau_2) \leqslant \nu\|x_1\|$.

Продолжив данную процедуру получим последовательности левых концов $\{\tau_j\}_{j=0}^{\infty}$ отрезков разбиения, управлений $\{\overline{u}_j\}_{j=0}^{\infty}$ преследователя на соответствующих отрезках, состояний $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ системы в момент начала отрезков разбиения.

В силу вышеописанной процедуры имеет место оценка $\|x_j\| \leqslant \nu\|x_{j-1}\|$. Следовательно, так как $0 < \nu < 1$, для любого $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0) \setminus \{0\}$ справедливо

$$\lim_{j\to\infty} \|x_j\| \leqslant \lim_{j\to\infty} \nu^j\|x_0\| \leqslant \lim_{j\to\infty} \nu^j\varepsilon_0 = 0. \tag{4.17}$$

Оценим сумму длин отрезков разбиения:

$$\lim_{j\to\infty}\tau_j = \lim_{j\to\infty}\sum_{q=1}^{j}(\tau_q - \tau_{q-1}) = \lim_{j\to\infty}\sum_{q=1}^{j}\frac{\delta_{j-1}}{D} \leqslant \lim_{j\to\infty}\sum_{q=1}^{j}\frac{\gamma_{j-1}}{2D} = \lim_{j\to\infty}\sum_{q=1}^{j}\frac{\alpha x_{j-1}}{2D^2} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{j\to\infty}\sum_{q=1}^{j}\frac{\alpha\nu^{j-1}\|x_0\|}{2D^2} < \lim_{j\to\infty}\sum_{q=1}^{j}\frac{\alpha\nu^{j-1}\varepsilon_0}{2D^2} =$$

$$= \lim_{j\to\infty}\frac{\alpha\varepsilon_0}{2D^2}\cdot\frac{1-\nu^j}{1-\nu} = \frac{\alpha\varepsilon_0}{2D^2(1-\nu)}. \qquad (4.18)$$

Обозначим $T = \alpha\varepsilon_0/(2D^2(1-\nu))$. В силу (4.17) и (4.18) полученные ε_0 и T есть искомые величины, соответствующие условию теоремы. Действительно, для любой начальной точки $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)\backslash\{0\}$ и произвольного управления убегающего существует стратегия преследователя, гарантирующая сколь угодно близкое приближение к нулю состояния системы за конечное время, не превосходящее T, то есть происходит ε-поимка.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 4.1. Пусть числа ε_0 и T соответствуют условию теоремы, $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)\backslash\{0\}$ — начальное положение. Тогда, в силу (4.18), поимка происходит гарантированно за время $T(x_0) = \alpha\|x_0\|/(2D^2(1-\nu))$. То есть $T(x_0) \to 0$ при $x_0 \to 0$. Таким образом, в данной дифференциальной игре построено управление для преследователя, которое обеспечивает свойство игры, аналогичное N-локальной управляемости из теории управления.

Пример 4.2. Рассмотрим систему (4.8) в $\mathbb{R}^2$, где

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} -a(x_1-b/d)+c(x_1-b/d)(x_2-c/a)u_1 \\ b(x_2-c/a)-d(x_1-b/d)(x_2-c/a)u_2 \end{pmatrix},$$

$$g(x,v) = \begin{pmatrix} c(x_1-b/d)(x_2-c/a)v_1 \\ -d(x_1-b/d)(x_2-c/a)v_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь, $a,b,c,d>0$. Пусть

$$U = \{(1-a^2/c^2,0),(-1-a^2/c^2,0),(-1-a^2/c^2,-2),(1-a^2/c^2,-2)\},$$

$$V = [-\alpha,\alpha]\times[-\alpha,\alpha], \quad \alpha\in(0,1).$$

Функции f,g являются липшицевыми по совокупности переменных.

$$f(0,U) = \left\{\left(\frac{bc^2}{ad},\frac{-bc}{a}\right),\left(\frac{-bc^2}{ad},\frac{-bc}{a}\right),\left(\frac{-bc^2}{ad},\frac{bc}{a}\right),\left(\frac{bc^2}{ad},\frac{bc}{a}\right)\right\},$$

$$g(0,V) = [-\alpha bc^2/(ad),\alpha bc^2/(ad)]\times[-\alpha bc/a,\alpha bc/a].$$

Отсюда, выполнено включение $-g(0,V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}f(0,U))$. Следовательно выполнены условия теоремы, то есть существует окрестность нуля, из которой происходит поимка.

§13 Задача уклонения

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\dot{x} = f(x,v) + g(x,u), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, $u, v \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $v_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $U \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ — для каждого $v \in V$ липшицева по x. Функция $g : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ — липшицева по совокупности переменных. То есть существуют положительные числа $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m$, L_2 такие, что

$$\|f(x^1, v_i) - f(x^2, v_i)\| \leqslant \overline{L}_i \|x^1 - x^2\|, \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\|g(x^1, u^1) - g(x^2, u^2)\| \leqslant L_2(\|x^1 - x^2\| + \|u^1 - u^2\|), \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad u^1, u^2 \in \mathbb{U}.$$

Под разбиением σ промежутка $[0, \infty)$ будем понимать последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, не имеющую конечных точек сгущения и такую, что
$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_q < \ldots$. Под разбиением σ промежутка $[0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\eta = T$.

Определение 4.7. *Кусочно-постоянной стратегией* W убегающего E называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0, \infty)([0, T])$, а W_σ — семейство отображений d_r, $r = 0, 1, \ldots, \eta$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $\overline{v}_r(t) \equiv \overline{v}_r \in V$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под управлением преследователя будем понимать произвольную измеримую функцию $u : [0, \infty) \to U$. Обозначим данную игру $\Gamma(x_0)$.

Определение 4.8. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит уклонение от встречи*, если существует $\varepsilon > 0$ и кусочно-постоянная стратегия W убегающего E такие, что для любого допустимого управления преследователя $u(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| > \varepsilon$ для любого $\tau \in [0, \infty)([0, T])$.

Введём следующие обозначения:

$$H(q) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, q) \leqslant \|q\|^2\};$$

$$H(Q) = \bigcap_{q \in Q} H(q); \quad d(Q) = \max_{a \in Q} \|q\|, \text{ где } Q\text{— компакт.}$$

Теорема 4.3. Пусть $f(0, v_1), \ldots, f(0, v_m)$ образуют положительный базис и $-g(0, U) \subset \mathrm{Int} H(f(0, V))$. Тогда в игре $\Gamma(x_0)$ происходит уклонение от встречи для любого $x_0 \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathbf{1^0}$. В данном пункте строится некоторый набор конусов, который будет использоваться в дальнейшем.

Без ограничения общности можно считать, что все точки $f(0, v_1), \ldots, f(0, v_m)$ являются попарно различными вершинами выпуклого многогранника $\mathrm{co}\{f(0, v_1), \ldots, f(0, v_m)\}$. Отсюда и из свойств положительного базиса (см. например [33]) следует, что $f(0, v_j) \neq 0$ для всех j. Пусть L_2 — константа Липшица функции $g(\cdot, \cdot)$, $L_1 = \max\limits_{j=1,\ldots,m} \overline{L}_j$, где $\overline{L}_j$ — константа Липшица для функции $f(\cdot, v_j)$, $j = 1, \ldots, m$.

В силу свойств положительного базиса [33], для любого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$ существует индекс $j = 1, \ldots, m$ такой, что $\langle f(0, v_j), p \rangle > 0$. По теореме Вейерштрасса, существует $\alpha_1 > 0$ такое, что

$$\alpha_1 = \min_{\|p\|=1} \max_{j=1,\ldots,m} \langle f(0, v_j), p \rangle.$$

Для каждого $j = 1, \ldots, m$ определим множество C_j следующим образом:

$$C_j = \left\{ \lambda p \,\middle|\, \lambda \geqslant 0,\, p \in \mathbb{R}^k,\, \|p\| = 1,\, \left\langle \frac{f(0, v_j)}{\|f(0, v_j)\|}, p \right\rangle \geqslant \frac{\alpha_1}{d(f(0, V))} \right\}.$$

Отметим, что множества C_j, $j = 1, \ldots, m$, являются выпуклыми конусами и

$$\bigcup_{j=1,\ldots,m} C_j = \mathbb{R}^k. \qquad (4.19)$$

Действительно, пусть $x \in \mathbb{R}^k$, $x \neq 0$. Тогда для точки $p = x/\|x\|$ существует индекс $j = 1, \ldots, m$ такой, что $\langle f(0, v_j), p \rangle \geqslant \alpha_1$. При этом $\langle f(0, v_j)/\|f(0, v_j)\|, p \rangle \geqslant \alpha_1/\|f(0, v_j)\| \geqslant \alpha_1/d(f(0, V))$. Поэтому, $x \in C_j$, и равенство (4.19) доказано.

2^0. В данном пункте явно определим числа $\varepsilon_1 > 0$, $\mu_1 \in (0,1)$, для которых включение $-g(x,U) \subseteq H(\mu_1 f(0,V))$ выполнено для любого $x \in D_{\varepsilon_1}(0)$.

Так как множество $g(0,U)$ — компакт и, в силу условий теоремы, справедливо включение $-g(0,U) \subset \mathrm{Int} H(f(0,V))$, то имеет место следующее неравенство:

$$\min_{u\in U,\, q\in \partial H(f(0,V))} \|q-(-g(0,u))\| = h > 0.$$

Обозначим точки, на которых данный минимум достигается, $\overline{u} \in U$ и $q_\iota \in \partial H(f(0,v_\iota))$, где $\iota \in \{1,\dots,m\}$. Отметим, что q_ι является проекцией точки $-g(0,\overline{u})$ на гиперплоскость $\partial H(f(0,v_\iota))$, следовательно

$$\left\langle \frac{f(0,v_\iota)}{\|f(0,v_\iota)\|}, \frac{q_\iota-(-g(0,\overline{u}))}{\|q_\iota+g(0,\overline{u})\|} \right\rangle = 1.$$

Пусть

$$\mu_1 = \frac{d(f(0,V))-2h/3}{d(f(0,V))}, \quad H(\mu_1 f(0,V)) = \bigcap_{v\in V} H(\mu_1 f(0,v)).$$

Оценим величину $\mu_1\|f(0,v_j)\|$ для произвольного $j=1,\dots,m$.

$$\mu_1\|f(0,v_j)\| = \left(\frac{d(f(0,V))-2h/3}{d(f(0,V))}\right)\|f(0,v_j)\| = \|f(0,v_j)\| - \frac{\|f(0,v_j)\|2h/3}{d(f(0,V))} \geqslant$$

$$\geqslant \|f(0,v_j)\| - \frac{d(f(0,V))2h/3}{d(f(0,V))} = \|f(0,v_j)\| - 2h/3.$$

Пусть $q \in \partial H(\mu_1 f(0,v_j))$, $j=1,\dots,m$, и $u\in U$. Отметим, что

$$\left\langle q+(1-\mu_1)f(0,v_j), \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|}\right\rangle =$$

$$= \left\langle q, \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|}\right\rangle + \left\langle (1-\mu_1)f(0,v_j), \frac{f(0,v_j)}{\|f(0,v_j)\|}\right\rangle =$$
$$= \|\mu_1 f(0,v_j)\| + (1-\mu_1)\|f(0,v_j)\| = \|f(0,v_j)\|.$$

Поэтому, по определению, $q+(1-\mu_1)f(0,v_j) \in \partial H(f(0,v_j))$. Тогда

$$\|q-(-g(0,u)\| = \|q+(1-\mu_1)f(0,v_j) - (-g(0,u)-(1-\mu_1)f(0,v_j)\| \geqslant$$

$$\geqslant \|q + (1-\mu_1)f(0,v_j) - (-g(0,u)\| - \|(1-\mu_1)f(0,v_j)\| \geqslant$$
$$\geqslant h - \|f(0,v_j)\| + (\|f(0,v_j)\| - 2h/3) = h/3.$$

Из неравенства

$$\left\langle -g(0,u), \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|} \right\rangle =$$
$$= \left\langle q, \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|} \right\rangle - \left\langle q - (-g(0,u)), \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|} \right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \|\mu_1 f(0,v_j)\| - \|q - (-g(0,u))\| < \|\mu_1 f(0,v_j)\|,$$

получаем включение $-g(0,U) \subset \mathrm{Int} H(\mu_1 f(0,v_j))$. Поэтому

$$-g(0,U) \subset \mathrm{Int} H(\mu_1 f(0,V)).$$

Отметим, что

$$\min_{u\in U,\, q\in \partial H(\mu_1 f(0,V))} \|q - (-g(0,u))\| \geqslant \frac{h}{3} > 0. \tag{4.20}$$

Определим число $\varepsilon_1 = h/(3L_2)$. Тогда, в силу (4.20) и липшицевости функции $g(\cdot,\cdot)$, для любого $x \in D_{\varepsilon_1}(0)$ справедливо неравенство $\|g(0,u) - g(x,u)\| \leqslant L_2\|x\| \leqslant L_2 h/(3L_2) = h/3$ для любого $u \in U$, и поэтому

$$-g(x,U) \subseteq H(\mu_1 f(0,V)). \tag{4.21}$$

3^0. В данном пункте укажем число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in D_\varepsilon(0)$ справедливо включение

$$-g(x,U) \subseteq H(f(x,V)).$$

Пусть $\mu_2 = \big(d(f(0,V)) - h/3\big)/\big(d(f(0,V))\big)$. Так как $\mu_2 > \mu_1$, то справедливо включение $-g(x,U) \subseteq H(\mu_2 f(0,V))$ для любого $x \in D_{\varepsilon_1}(0)$.

Определим число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для любого $x \in D_{\varepsilon_2}(0)$ справедливо включение

$$-g(x,U) \subseteq H(\mu_2 f(0,V)) \subseteq H(f(x,V)). \tag{4.22}$$

Возьмем произвольную гиперплоскость $\partial H(\mu_2 f(0,v_j))$ и вектор $\xi \in H(\mu_2 f(0,v_j))$. Рассмотрим следующее неравенство:

$$\langle \xi, f(x,v_j)\rangle \leqslant \|f(x,v_j)\|^2. \tag{4.23}$$

Оценим правую часть неравенства (4.23):

$$\|f(x,v_j)\|^2 = \|f(0,v_j) + f(x,v_j) - f(0,v_j)\|^2 \geqslant \|f(0,v_j)\|^2 - L_1^2\|x\|^2. \tag{4.24}$$

Оценим левую часть неравенства (4.23):

$$\begin{aligned}\langle \xi, f(x,v_j)\rangle &= \langle \xi, f(x,v_j) - f(0,v_j) + f(0,v_j)\rangle \leqslant \\ &\leqslant \|\mu_2 f(0,v_j))\|^2/\mu_2 + \|\xi\|\|f(x,v_j) - f(0,v_j))\| \leqslant \\ &\leqslant \mu_2\|f(0,v_j)\|^2 + d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big)L_1\|x\|.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Докажем, что $H(\mu_2 f(0,V)) = \mu_2 H(f(0,V))$. Пусть $w \in H(f(0,V))$, тогда для любого $j = 1,\ldots,m$ справедлива следующая оценка:

$$\langle \mu_2 w, \mu_2 f(0,v_j)\rangle \leqslant \mu_2^2\|f(0,v_j)\| = \|\mu_2 f(0,v_j)\|^2.$$

Поэтому, по определению, $\mu_2 w \in H(\mu_2 f(0,V))$, то есть $\mu_2 H(f(0,V)) \subset H(\mu_2 f(0,V))$. Докажем включение в обратную сторону. Пусть $w \in H(\mu_2 f(0,V))$, тогда для любого $j = 1,\ldots,m$ справедливо неравенство

$$\langle w, \mu_2 f(0,v_j)\rangle \leqslant \|\mu_2 f(0,v_j)\|^2 = \mu_2^2\|f(0,v_j)\|.$$

Отсюда, точка $(1/\mu_2)w \in H(f(0,V))$. Следовательно, точка $\mu_2(1/\mu_2)w = w \in \mu_2 H(f(0,V))$, то есть $H(\mu_2 f(0,V)) \subset \mu_2 H(f(0,V))$. Таким образом, доказано равенство $H(\mu_2 f(0,V)) = \mu_2 H(f(0,V))$.

Тогда, из (4.24) и (4.25) получаем следующее неравенство:

$$d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big)L_1\|x\| + \mu_2\|f(0,v_j))\|^2 \leqslant \|f(0,v_j)\|^2 - L_1^2\|x\|^2.$$

Рассмотрим функцию

$$p(\|x\|) = L_1^2\|x\|^2 + d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big)L_1\|x\| + (\mu_2 - 1)\|f(0,v_j))\|^2.$$

Тогда $p(0) < 0$. Так как коэффициент при $\|x\|^2$ положительный, то квадратный трехчлен имеет два корня: один отрицательный, второй положительный. Положительный корень имеет вид:

$$\chi_2 = \frac{-d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big)L_1 + \sqrt{L_1^2 d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big)^2 - 4L_1^2(\mu_2 - 1)\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1^2}.$$

Отметим, что $\mu_2 < 1$ и оценим χ_2 снизу:

$$\chi_2 = \frac{-d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big) + \sqrt{\mu_2^2 d\big(H(f(0,V))\big)^2 + 4(1-\mu_2)\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{-d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big) + \sqrt{\mu_2^2 d\big(H(f(0,V))\big)^2 + 4(1-\mu_2)\min\limits_{i=1,\dots,m}\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1} > 0.$$

Таким образом, (4.23) справедливо при

$$\|x\| \leqslant \frac{-d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big) + \sqrt{\mu_2^2 d\big(H(f(0,V))\big)^2 + 4(1-\mu_2)\min\limits_{i=1,\dots,m}\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1}.$$

Возьмем

$$\varepsilon_2 = \frac{-d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big) + \sqrt{\mu_2^2 d\big(H(f(0,V))\big)^2 + 4(1-\mu_2)\min\limits_{i=1,\dots,m}\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1}.$$

В силу того, что $\xi \in H(\mu_2 f(0,v_j))$, выполняется включение (4.22), то данное ε_2 является искомым.

Обозначим $d_{min} = (\mu_2 - \mu_1)\min\limits_{j=1,\dots,m}\|f(0,v_j)\|$. Докажем, что справедливо следующее неравенство:

$$\min_{v\in V,\, u\in U,\, x\in D_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(0)} \|f(x,v) + g(x,u)\| \geqslant d_{min}. \tag{4.26}$$

Так как выполнены включения (4.21), (4.22), $H(\mu_1 f(0,V)) \subset \operatorname{Int}\big(H(\mu_2 f(0,V))\big)$ и для любого $\lambda > 0$ справедливо равенство $H(\lambda f(0,V)) = \lambda H(f(0,V))$, то

$$\|f(x,v) + g(x,u)\| \geqslant \min_{w\in\partial H(\mu_2 f(0,V)),\, q\in\partial H(\mu_1 f(0,V))} \|w - q\|.$$

В силу того, что $H(\lambda f(0,V)) \subset H(\lambda f(0,v_j))$ для любого $j = 1,\dots,m$, то достаточно оценить норму разности между точками $w \in \partial H(\mu_2 f(0,v_j))$, $q \in \partial H(\mu_1 f(0,v_j))$ для каждого $j = 1,\dots,m$.

$$\|w-q\| \geqslant \left\langle w-q, \frac{f(0,v_j)}{\|f(0,v_j)\|} \right\rangle = \mu_2\|f(0,v_j)\| - \mu_1\|f(0,v_j)\|.$$

Отсюда, (4.26) доказано.

Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, d_{min}/(2L_1)\}$. Тогда, для любого $x \in D_\varepsilon(0)$ справедливо следующее неравенство:

$$\|f(x,v_j) - f(0,v_j)\| \leqslant L_1\|x\| \leqslant L_1\varepsilon = \frac{d_{min}}{2}. \tag{4.27}$$

Далее, определим $d_{max} = d\big(H(f(0,V))\big) + d\big(H(\mu_1 f(0,V))\big) + L_1\varepsilon$. Отсюда, для любого $x \in D_\varepsilon(0)$ выполнено

$$\max_{v\in V,\, u\in U,\, x\in D_\varepsilon(0)} \|f(x,v)+g(x,u)\| \leqslant d_{max}. \tag{4.28}$$

Так как ε_2 соответствует (4.22), то искомой величиной в данном пункте считаем определенное выше ε.

$\mathbf{4^0}$. В данном пункте строится выигрышная стратегия убегающего.

Пусть выполнены все построения и введены соответствующие обозначения предыдущих пунктов. Зафиксируем начальное положение $x_0 \neq 0$. В силу (4.19), существует индекс $j = 1,\dots,m$ такой, что $x_0 \in C_j$.

Определим число Δ из следующего равенства:

$$\frac{d_{min}}{2}\cdot\Delta + 2\Delta d_{max} = \varepsilon. \tag{4.29}$$

Отсюда, $\Delta = \varepsilon/(2d_{max} + d_{min}/2)$.

Далее, введем разбиение $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ вида $\tau_0 = 0$, $\tau_i = \Delta i$, $i = 1,2\dots,\infty$. Зададим управление убегающего, в соответствии с данным разбиением, следующим образом: если $x(\tau_i) \in C_j$, тогда $v(t) = v_j$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0,1,\dots,\infty$.

Пусть $x \in D_\varepsilon(0)$. Имеем

$$f(x,v_j) + g(x,u) = f(x,v_j) - f(0,v_j) + f(0,v_j) + g(x,u).$$

Представим $g(x,u)$ в виде

$$g(x,u) = g_j(x,u) + g_j^{\perp}(x,u).$$

Здесь $-g_j(x,u) = \lambda(x) f(0,v_j)$, $g_j^{\perp}(x,u) \in \partial\big(H(\mu_1 f(0,v_j)) - \mu_1 f(0,v_j)\big) = H$. Такое представление возможно так как H — линейное подпространство, а его ортогональное дополнение $H^{\perp}$ имеет вид $H^{\perp} = \{\lambda f(0,v_j), \lambda \in \mathbb{R}^1\}$. Так как $-g(x,U) \subset H(\mu_1 f(0,v_j))$, то справедлива оценка

$$\left\langle -g_j(x,u) - g_j^{\perp}(x,u), \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|} \right\rangle = \lambda(x)\|f(0,v_j))\| \leqslant \|\mu_1 f(0,v_j))\|.$$

Поэтому, $\lambda(x) \leqslant \mu_1$.

Пусть $u(\cdot)$ — произвольное управление преследователя. Рассмотрим точку $x(\tau_1)$:

$$x(\tau_1) = x_0 + \int_0^{\tau_1} \big(f(x(t),v_j) + g(x(t),u(t))\big)\,dt =$$
$$= x_0 + \int_0^{\tau_1} g_j^{\perp}(x(t),u(t))\,dt +$$
$$+ \int_0^{\tau_1} \big(f(0,v_j) + g_j(x(t),u(t))\big)\,dt + \int_0^{\tau_1} (f(x(t),v_j) - f(0,v_j))\,dt.$$

Далее, оценим следующее скалярное произведение:

$$\left\langle x_0 + \int_0^{\tau_1} g_j^{\perp}(x(t),u(t))\,dt + \int_0^{\tau_1} (f(0,v_j) + g_j(x(t),u(t)))\,dt,\ f(0,v_j) \right\rangle =$$
$$= \langle x_0, f(0,v_j)\rangle + \int_0^{\tau_1} \left\langle g_j^{\perp}(x(t),u(t)), f(0,v_j)\right\rangle\,dt +$$
$$+ \int_0^{\tau_1} \big(1 - \lambda(x(t))\big)\,\langle f(0,v_j), f(0,v_j)\rangle\,dt =$$
$$= \langle x_0, f(0,v_j)\rangle + 0 + \|f(0,v_j)\|^2 \int_0^{\tau_1} \big(1 - \lambda(x(t))\big)\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \langle x_0, f(0,v_j)\rangle + (1-\mu_1)\Delta\|f(0,v_j)\|^2 >$$
$$> \langle x_0, f(0,v_j)\rangle \geqslant \frac{\alpha_1\|x_0\|\|f(0,v_j)\|}{d(f(0,V))}. \tag{4.30}$$

При этом $\langle 0, f(0,v_j)\rangle < \langle x_0, f(0,v_j)\rangle$, то есть точка 0 и точка

$$z = x_0 + \int_0^{\tau_1} g_j^{\perp}(x(t),u(t))\,dt + \int_0^{\tau_1} (f(0,v_j) + g_j(x(t),u(t)))\,dt \tag{4.31}$$

строго отделимы гиперплоскостью $\partial\big(H(\mu_1 f(0,v_j)) - \mu_1 f(0,v_j) + x_0\big)$. Следовательно, в силу (4.30) и (4.26), можем оценить расстояние от нуля до точки z из (4.31):

$$\|z\| \geqslant \left\langle z, \frac{f(0,v_j)}{\|f(0,v_j)\|} \right\rangle = \left\langle x_0, \frac{f(0,v_j)}{\|f(0,v_j)\|} \right\rangle + 0+$$

$$+ \left\langle \int_0^{\tau_1} (f(0,v_j) + g_j(x(t),u(t)))\,dt, \frac{f(0,v_j)}{\|f(0,v_j)\|} \right\rangle \geqslant \left\langle x_0, \frac{f(0,v_j)}{\|f(0,v_j)\|} \right\rangle + d_{min}\Delta.$$

Поэтому, если $x_0 \in D_r(0)$, $r = \Delta d_{min}/2 + \Delta d_{max}$, то в силу (4.27) имеем следующую оценку:

$$\|x(\tau_1)\| \geqslant \langle x_0, f(0,v_j)/\|f(0,v_j)\|\rangle + \Delta d_{min} - \Delta \cdot \frac{d_{min}}{2} =$$

$$= \langle x_0, f(0,v_j)/\|f(0,v_j)\|\rangle + \Delta \cdot \frac{d_{min}}{2}. \tag{4.32}$$

Если же $\|x_0\| > r$, то, в силу оценки нормы скорости (4.28) и выбора длины отрезка разбиения из (4.29), имеем $\|x(\tau_1)\| \geqslant r - \Delta d_{max} = \Delta d_{min}/2$.

При рассмотрении произвольного интервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$ производится вышеописанная процедура, считая начальной точку $x(\tau_i)$.

Таким образом, в силу (4.32) и (4.30), радиус искомой $\overline{\varepsilon}$-окрестности нуля, ближе которой состояние системы не может оказаться при описанной выше стратегии убегающего, имеет следующий вид:

$$\overline{\varepsilon} = \min \left\{ \frac{\alpha_1 \|x_0\| \min\limits_{j=1,\ldots,m} \|f(0,v_j)\|}{d(f(0,V))}, \frac{\Delta d_{min}}{2} \right\}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 4.2. Теорема 4.3 является конструктивной, представлен прямой алгоритм нахождения необходимых величин и множеств. Расстояние между соседними точками разбиения фиксировано и аналитически выписано (см. (4.29)).

Пример 4.3. Пусть $a, b, c, d > 0$,

$$f(x,v) = \begin{pmatrix} -a(x_1 - b/d) + c(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)v_1 \\ b(x_2 - c/a) - d(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)v_2 \end{pmatrix},$$

$$g(x,u) = \begin{pmatrix} c(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)u_1 \\ -d(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)u_2 \end{pmatrix},$$

$$V = \{(1 - a^2/c^2, -1), (-1 - a^2/c^2, -1), (-a^2/c^2, -2), (-a^2/c^2, 0)\},$$

$$U = [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha], \quad \alpha \in (0,1).$$

Функция $f(\cdot, v_j)$ является локально липшицевой для каждого $j = 1,2,3,4$. Функция $g(\cdot,\cdot)$ является локально липшицевой по совокупности переменных. Кроме того,

$$f(0,V) = \{(bc^2/(ad), 0), (-bc^2/(ad), 0), (0, bc/a), (0, -bc/a)\},$$

$$H(f(0,V)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leqslant bc^2/(ad),\ x \geqslant -bc^2/(ad),\ y \leqslant bc/a,\ y \geqslant -bc/a\},$$

$$g(0,U) = [-\alpha bc^2/(ad), \alpha bc^2/(ad)] \times [-\alpha bc/a, \alpha bc/a].$$

Следовательно выполнено включение $-g(0,U) \subset \mathrm{Int} H(f(0,V))$. Поэтому выполнены условия теоремы, то есть существует окрестность нуля, из которой происходит поимка.

Теорема 4.4. Пусть $f(0,v_1), \ldots, f(0,v_m)$ образуют положительный базис и $-g(0,U) \subseteq H(f(0,V))$. Тогда для любого $T > 0$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит уклонение от встречи на отрезке $[0,T]$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что все точки $f(0,v_1)$, …, $f(0,v_m)$ являются попарно различными вершинами выпуклого многогранника $\mathrm{co}\{f(0,v_1), \ldots, f(0,v_m)\}$. Пусть L_1, L_2 — константы Липшица функций $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$ соответственно. Так же, определим число α_1 и множества C_j, $j = 1, \ldots, m$, как и в теореме 4.3. Заметим, что в силу условий теоремы для любого $u \in U$ справедливо следующее неравенство

$$\langle f(0,v_j) + g(0,u), p\rangle \geqslant 0,$$

где единичный вектор p выбран так, что выполнено неравенство
$\langle f(0,v_j), p\rangle \geqslant \alpha_1$.

Без ограничения общности считаем, что начальное положение
$x_0 \in D_{\alpha_1/(2(L_1+L_2))}(0)$. Введем разбиение $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ интервала $[0,\infty)$, где $\tau_i =$

$\dfrac{i}{4(L_1+L_2)}$, $i=0,1,\dots,\infty$. Обозначим шаг разбиения $\delta = \dfrac{1}{4(L_1+L_2)}$. Управление убегающего на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ данного разбиения будем выбирать следующим образом: $v(t)=v_j$, $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$, если $x(\tau_i)\in C_j$.

Пусть $x_i = x(\tau_i)$, $x_i \in D_{\alpha_1/(2(L_1+L_2))}(0)$, $u(\cdot)$ — произвольное управление преследователя. Тогда

$$\|x_i\| = \left\langle x_i, \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\rangle \geqslant \left\langle x_i, \frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle =$$

$$= \left\langle x_{i-1} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \big(f(x(t),v_j) + g_j(x(t),u(t))\big)\,dt, \frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle =$$

$$= \left\langle x_{i-1} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \big(f(0,v_j) + g_j(0,u(t))\big)\,dt, \frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle +$$

$$+ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left\langle f(x(t),v_j) - f(0,v_j) + g_j(x(t),u(t)) - g_j(0,u(t)), \frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle dt \geqslant$$

$$\geqslant \left\langle x_{i-1}, \frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle - \delta(L_1+L_2)2\|x_{i-1}\| = \|x_{i-1}\| - \frac{\|x_{i-1}\|}{2} = \frac{\|x_{i-1}\|}{2}.$$

Оценка $\|x(t)\|$, $t\in(\tau_{i-1},\tau_i)$ производится аналогично.

$$\|x(t)\| \geqslant \left\langle x_{i-1}, \frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle - \overline{\delta}(L_1+L_2)2\|x_{i-1}\| > \|x_{i-1}\| - \frac{\|x_{i-1}\|}{2} = \frac{\|x_{i-1}\|}{2},$$

где $\overline{\delta} = t - \tau_{i-1} < \delta$.

Таким образом, $\|x_1\| \geqslant \dfrac{\|x_0\|}{2}$, $\|x_2\| \geqslant \dfrac{\|x_1\|}{2} \geqslant \dfrac{\|x_0\|}{4}$, $\|x_3\| \geqslant \dfrac{\|x_2\|}{2} \geqslant \dfrac{\|x_1\|}{4} \geqslant \dfrac{\|x_0\|}{8}$, и так далее. Следовательно, для любого $\tau\in[0,T]$, $x(\tau) \geqslant \dfrac{\|x_0\|}{2^j}$, где индекс j такой, что $T\in(\tau_{j-1},\tau_j]$. Следовательно, поимки на любом отрезке $[0,T]$ не происходит.

Теорема доказана. □

Пример 4.4. Рассмотрим задачу в $\mathbb{R}^2$, где

$$f(x,v) = \begin{pmatrix} e^{x_1^2+x_2^2}v_1 \\ e^{x_1^2}v_2 \end{pmatrix}, \quad g(x,u) = \begin{pmatrix} -e^{2(x_1^2+x_2^2)}u_1 \\ -e^{x_2^2}u_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x(0) = (1, 0)$,

$$V = \{(-1, -1), (0, 1), (1, -1)\},$$

$$U = \mathrm{co}\{(0, -2), (-3, 1), (3, 1)\}.$$

Функция $f(\cdot, v_j)$ является локально липшицевой для каждого $j = 1, 2, 3, 4$. Функция $g(\cdot, \cdot)$ является локально липшицевой по совокупности переменных. Выполнено равенство $-g(0, U) = H(f(0, V))$ Отметим, что для справедливости теоремы 4.4 достаточно локальной липшицеовсти функций f, g, в силу доказательства. Таким образом в данной задаче происходит уклонение на любом отрезке $[0, T]$, $T > 0$.

Покажем, что уклонения на $[0, \infty)$ не происходит. Пусть задано $0 < \varepsilon < 1$ и разбиение $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots$ интервала $[0, \infty)$ для стратегии убегающего. Определим управление преследователя следующим образом

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = v_2, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Следовательно $\dot{x}_2 = 0$ для всех $t \geqslant 0$ и

$$\dot{x}_1 = e^{x_1^2}(v_1 - u_1 e^{x_1^2}).$$

Поэтому, если $x_1 > \varepsilon$, то

$$\dot{x}_1 < e^{\varepsilon^2}(v_1 - u_1 e^{\varepsilon^2}) < 0.$$

Отсюда

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t e^{x_1(s)^2}(v_1 - u_1 e^{x_1(s)^2})\, ds < 1 + t e^{\varepsilon^2}(v_1 - u_1 e^{\varepsilon^2}).$$

Таким образом, для некоторого положительного $\tau \leqslant \dfrac{1 - \varepsilon}{-e^{\varepsilon^2}(v_1 - u_1 e^{\varepsilon^2})}$ выполнено неравенство $x_1(\tau) < \varepsilon$. Так как $x_2(t) = 0$, $t \geqslant 0$, то $\|x(t)\| = |x_1(t)|$. Следовательно, по определению, уклонения на $[0, \infty)$ не происходит.

Пример 4.5. В работе [74] рассматривается аналогичная данной задача уклонения. Динамика игры описывается нелинейной стационарной системой дифференциальных уравнений и убегающий использует кусочно-постоянное управление. Построим пример, который будет удовлетворять как нашей постановке задачи, так и задаче уклонения из [66], при этом теорема 4.3 будет гарантировать уклонение, а теорема из [66] гарантировать уклонения не будет.

Рассмотрим задачу в $\mathbb{R}^2$. Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — липшицевы и непрерывно дефференцируемы по x. Обозначим $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$. Динамика игры описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (f_1(x) - f_1(0) + 1)v_1 - (g_1(x) - g_1(0) + 1)u_1, \\ \dot{x}_2 = (f_2(x) - f_2(0) + 1)v_2 - (g_2(x) - g_2(0) + 1)u_2. \end{cases}$$

Здесь

$$V = \{(-1,-1), (0,1), (1,-1)\},$$

$$U = \mathrm{co}\{(0,-1.5), (-2.5, 0.9), (2.5, 0.9)\}.$$

Целевое множество для преследователя $M = \{(0,0)\}$.

Справедливо включение $-g(0,U) \subset \mathrm{Int} H(f(0,V))$, следовательно справедлива теорема 4.3. То есть уклонение происходит из любого начального положения кроме начала координат. Более того, согласно доказательству, для каждого начального положения может быть предоставлен шар с центром в нуле, за границами которого убегающий может удерживать фазовые координаты.

Данная постановка задачи удовлетворяет постановке из [74]. При этом условия, накладываемые теоремой из [74] на вектограмму скоростей системы, здесь не выполняются (см. пункт б теоремы из [74], условия со скалярным произведением).

Таким образом теорема из [74] не гарантирует в данной задаче уклонения, в то время как теорема 4.3 гарантирует уклонение на интревале $[0, \infty)$ из любого начального положения кроме нулевого.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены дифференциальные игры преследования-убегания представленных одним преследователем, группой или двумя группами преследователей с одной стороны, и как одного убегающего, так и группы убегающих, с другой.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Получены достаточные условия разрешимости задачи убегания в двух нестационарных задачах уклонения одного убегающего от группы преследователей при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых совпадают с возможностями убегающего, так и преследователи с меньшими возможностями и убегающий не покидает пределы некоторого множества: нестационарная задача с простой матрицей и убегающий не покидает пределы некоторого выпуклого множества с непустой внутренностью; линейная нестационарная задача преследования при условии, что матрица системы является произведением функции на единичную матрицу и убегающий не покидает пределы выпуклого конуса с вершиной в нуле и с непустой внутренностью.

2. Получены достаточные условия убегания группы убегающих от группы преследователей при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых не уступают возможностям убегающих, так и участники с меньшими возможностями, в трех задачах: задача, в которой динамика преследователей описывается нелинейными стационарными дифференциальными уравнениями, динамика убегающих — линейными нестационарными дифференциальными уравнениями; линейная нестационарная задача с простой матрицей, в которой разрешающее управление убегающего построено аналитически; нестационарный пример Понтрягина.

3. Получены необходимые и достаточные условия поимки в задаче простого преследования с различными условиями: множество значений управлений является выпуклым многогранником; количество преследователей

равно двум. Также в данной задаче получены дополнительные необходимые условия поимки, зависящие от количества преследователей.

4. Получены новые достаточные условия разрешимости задач преследования и убегания в нелинейных дифференциальных играх двух лиц.

В задаче убегания одного или нескольких убегающих (задачи первой и второй глав) от группы преследователей интерес представляет перенос результатов на нелинейный случай. В задаче третьей главы перспективным является поиск достаточных условий поимки одного убегающего группой преследователей, если их число не превосходит размерности фазового пространства. Для нелинейных задач преследования и убегания (глава 4) с одним убегающим и одним преследователем интерес представляет перенос данных результатов на случай группового преследования, в том числе с фазовыми ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников, А.С. Нестационарная задача группового преследования / А.С. Банников // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 5. — С. 3–12.
2. Васильева, Л.Г. Об одной дифференциальной игре убегания / Л.Г. Васильева // Дифференциальные, бескоалиционные, кооперативные и статистические игры. Калинин.: Изд-во Калининск. ун-та. — 1979. — С. 26–33.
3. Вагин, Д.А. Задача преследования групп жестко скоординированных убегающих / Д.А. Вагин, Н.Н. Петров // Изв. РАН. ТиСУ. — 2001. — № 5. — С. 75–79.
4. Григоренко, Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего / Н.Л. Григоренко // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и киберн. — 1983. — № 1. — С. 41–47.
5. Григоренко, Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами / Н.Л. Григоренко. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. — 197 с.
6. Губарев, Е.В. Убегание от группы преследователей / Е.В. Губарев // Автоматика. — 1992. — № 5. — С. 66–70.
7. Гусятников, П.Б. Дифференциальная игра убегания / П.Б. Гусятников // Кибернетика. — 1978. — № 4. — С. 72–77.
8. Гусятников, П.Б. Дифференциальная игра убегания m лиц / П.Б. Гусятников // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1978. — № 6. — С. 22–32.
9. Гусятников, П.Б. Теория дифференциальных игр / П.Б. Гусятников. — М: МФТИ, 1982. — 99 с.
10. Гусятников, П.Б. Убегание одного нелинейного объекта от нескольких более инертных преследователей / П.Б. Гусятников // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12, № 2. — С. 1316–1324.
11. Двуреченский, П.Е. Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх / П.Е. Двуреченский, Г.Е. Иванов // Журнал вычислительной математики и математической

физики. — 2014. — Т. 54, № 2. — С. 224–255.
DOI: 10.7868/S0044466914020057.

12. Зак, В.Л. Об одной задаче уклонения от многих преследователей / В.Л. Зак // Прикладная математика и механика. — 1979. — Т. 43, № 3. — С. 57–71.
13. Иванов, Р.П. Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простым движением / Р.П. Иванов, Ю.С. Ледяев // Труды математическ. ин-та АН СССР. — 1981. — Т. 158. — С. 87–97.
14. Иванов, Р.П. Простое преследование-убегание на компакте / Р.П. Иванов // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254, № 6. — С. 1318–1321.
15. Красовский, Н.Н. Игровые задачи о встрече движений / Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
16. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
17. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1985. — 516 с.
18. Кумков, С.С. Два слабых преследователя в игре против одного убегающего / С.С. Кумков, В.С. Пацко, С.Ле Менек // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 10. — 73–96.
19. Ли, Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. — М.: Наука, 1972. — 576 с.
20. Мищенко, Е.Ф. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц / Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольский, Н.Ю. Сатимов // Тр. МИАН СССР. — 1985. — Т. 143. — С. 105–128.
21. Нарманов, А.Я. Задача уклонения в нелинейной дифференциальной игре с дискретным управлением / А.Я. Нарманов, К.А. Щелчков // Изв. ИМИ УдГУ. — 2018. — Т. 52. — С. 75–85. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-06
22. Никольский, М.С. Одна нелинейная задача преследования / М.С. Никольский // Кибернетика. — 1973. — № 2. — С. 92–94.

23. Никольский, М.С. О квазилинейной задаче убегания / М.С. Никольский // ДАН СССР. — 1975. — Т. 221, № 3. — С. 539–542.

24. Никольский, М.С. О линейной задаче убегания / М.С. Никольский // ДАН СССР. — 1974. — Т. 218, № 5. — С. 1024–1027.

25. Остапенко, В.В. Задача уклонения от встречи / В.В. Остапенко // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 4. — С. 16–23.

26. Остапенко, В.В. О нелинейной задаче убегания / В.В. Остапенко // Кибернетика. — 1978. — № 3. — С. 106–112.

27. Петров, Н.Н. К задаче Черноусько / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — № 4. — С. 62–67.

28. Петров, Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями / Н.Н. Петров // МТИП. — 1968. — Т. 2, № 4. — С. 74–83.

29. Петров, Н.Н. Локальная управляемость автономных систем / Н.Н. Петров // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 7. — С. 1218–1232.

30. Петров, Н.Н. Мягкая поимка инерционных объектов / Н.Н. Петров // ПММ. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 437–445.

31. Петров, Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями / Н.Н. Петров // Математика. Изв. вузов. — 1994. — №4 (383). — С. 24–29.

32. Петров, Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих / Н.Н. Петров, В.А. Прокопенко // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 724–726.

33. Петров, Н.Н. Об управляемости автономных систем / Н.Н. Петров // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 4. — С. 606–617.

34. Петров, Н.Н. Об «эквивалентности» двух задач уклонения со многими убегающими / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Известия Российский академии наук. Теория и системы управления. — 2014. — № 6. — С. 45–49. DOI: 10.7868/S0002338814060092

Переводная версия:

Petrov, N.N. On the “equivalence” of two evasion problems with multiple evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2014. — Vol. 53, issue 6. — P. 819–823. DOI: 10.1134/S1064230714060094

35. Петров, Н.Н. О взаимосвязи двух задач уклонения со многими убегающими / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1353–1355.

36. Петров, Н.Н. О взаимосвязи двух задач уклонения со многими убегающими / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Прикладная математика и механика. — 2016. — Т. 80, № 4. — С. 473–479.

Переводная версия:

Petrov, N.N. On the interrelationship of two problems on evasion with many evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2016. — Vol. 80, issue 4. — P. 333–338. http://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.09.008.

37. Петров, Н.Н. О взаимосвязи двух линейных стационарных задач уклонения со многими убегающими / Н.Н. Петров, К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2014. — № 3. — С. 52–58.

38. Петров, Н.Н. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» / Н.Н. Петров, Н.Никандр. Петров // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 8. С. — 1366–1374.

39. Петров, Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих / Н.Н. Петров // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 12. — С. 89–95.

40. Петров, Н.Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений / Н.Н. Петров // Деп. в ВИНИТИ 20 марта 1984 г. — № 1684. — 14 с.

41. Петров, Н.Н. Существование значения игры преследования со многими участниками / Н.Н. Петров // ПММ. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 22–29.

42. Петросян, Л.А. Дифференциальные игры преследования / Л.А. Петросян. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 222 с.

43. Петросян, Л.А. Дифференциальные игры на выживание со многими участниками / Л.А. Петросян // Доклады академии наук СССР. — 1965. — Т. 161, № 2. — С. 285–287.

44. Петросян, Л.А. Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве R^n / Л.А. Петросян // Доклады академии наук СССР. — 1965. — Т. 161, № 1. — С. 52–54.

45. Петросян, Л.А. Одна игра преследования на полуплоскости / Л.А. Петросян // Доклады академии наук Армянской ССР. — 1965. — Т. 40, № 5. — С. 265–269.

46. Петросян, Л.А. О сведении решения одной игры преследования на выживание к решению задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка / Л.А. Петросян // Доклады академии наук Армянской ССР. — 1965. — Т. 40, № 4. — С. 193–196.

47. Половинкин, Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. — М.: Физматлит, 2014. — 524 с.

48. Понтрягин, Л.С. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх / Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко // Дифференциальные уравнения. — 1971. — Т. 7, № 3. — С. 436–445.

49. Понтрягин, Л.С. Задача убегания одного управляемого объекта от другого / Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 189, № 4. — С. 721–723.

50. Понтрягин, Л.С. Избранные научные труды. Т.2 / Л.С. Понтрягин. — М.: Наука, 1988. — 575 с.

51. Понтрягин, Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания / Л.С. Понтрягин // Труды математического ин-та АН СССР. — 1971. — Т. 112. — С. 30–63.

52. Пшеничный, Б.Н. Дифференциальная игра уклонения / Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 3–9.

53. Пшеничный, Б.Н. Дифференциальные игры / Б.Н. Пшеничный, В.В. Остапенко. — Киев: Наукова Думка, 1992. — 261 с.
54. Пшеничный, Б.Н. Достаточные условия конечности времени преследования / Б.Н. Пшеничный, Н.Б. Шишкина // Прикладная математика и механика. — 1985. — Т. 49, № 4. — С. 517–523.
55. Пшеничный, Б.Н. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх / Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий // ЖВМ И МФ. — 1974. — Т. 14, № 6. — С. 416–427.
56. Пшеничный, Б.Н. О задаче убегания / Б.Н. Пшеничный // Кибернетика. — 1975. — № 4. — С. 120–127.
57. Пшеничный, Б.Н. Простое преследование несколькими объектами / Б.Н. Пшеничный // Кибернетика. — 1976. — №3. — С. 145–146.
58. Рихсиев, Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями / Б.Б. Рихсиев. — Ташкент: Фан, 1990. — 232 с.
59. Рихсиев, Б.Б. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх многих лиц с простым движением / Б.Б. Рихсиев // Известия АН УзбССР. Серия физ-мат. наук. — 1984. — № 4. — С. 37–39.
60. Сатимов, Н.Ю. Задача убегания в дифференциальных играх с нелинейными управлениями / Н.Ю. Сатимов // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 5. — С. 26–33.
61. Сатимов, Н.Ю. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления / Н.Ю. Сатимов, Б.Б. Рихсиев. — Ташкент: Фан, 2000. — 176 с.
62. Сатимов, Н.Ю. Об одном способе уклонения в дифференциальных играх / Н.Ю. Сатимов // Мат. сб. — 1976. — 99(141), № 3. — С. 432–444.
63. Сатимов, Н. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих / Н. Сатимов, М.Ш. Маматов // ДАН Уз.ССР. — 1983. — № 4. — С. 3–6.
64. Субботин, А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления / А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. — М.: Наука, 1981. — 288 с.

65. Ухоботов, В.И. Синтез гарантированного управления на основе аппроксимационной схемы / В.И. Ухоботов // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2000. — Т. 6, № 1. — С. 239–246.

66. Ухоботов, В.И. Моделирование гарантированного управления с многогранной областью значений / В.И. Ухоботов, О. Ю. Титов // Вестник ЧелГУ. — 2002. — № 1. — С. 155–165.

67. Ушаков, В.Н. К решению задачи управления с фиксированным моментом окончания / В.Н. Ушаков, А.А. Ершов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26, № 4. — С. 543–564. DOI: 10.20537/vm160409.

68. Хайдаров, Б.К. Позиционная I-поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей / Б.К. Хайдаров // Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48, № 4. — С. 574–579.

69. Черноусько, Ф.Л. Игровые задачи управления и поиска / Ф.Л. Черноусько, А.А. Меликян. — М.: Наука, 1978. — 270 с.

70. Черноусько, Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей / Ф.Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. — 1976. — Т. 40, № 1. — С. 14–24.

71. Чикрий, А.А. Достаточные условия в нелинейных дифференциальных играх / А.А. Чикрий // ДАН СССР. - 1978. — Т. — 241, № 3. — С. 547–551.

72. Чикрий, А.А. Достаточные условия в нелинейных дифференциальных играх нескольких лиц / А.А. Чикрий // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1978. — № 6. — С. 14–21.

73. Чикрий, А.А. Достаточные условия разрешимости глобальной задачи убегания для нелинейных дифференциальных игр / А.А. Чикрий, Е.В. Губарев // — Киев. 1992. — 38 с.

74. Чикрий, А.А. Задача уклонения в нелинейных дифференциальных играх / А.А. Чикрий // Кибернетика. — 1975. — № 3. — С. 65–68.

75. Чикрий, А.А. Задача уклонения в нестационарных дифференциальных играх / А.А. Чикрий // Прикладная математика и механика. — 1975. — № 5. — С. 780–787.

76. Чикрий, А.А. Конфликтно-управляемые процессы / А.А. Чикрий. — Киев: Наук.думка, 1992. — 380 с.
77. Чикрий, А.А. Линейная задача убегания от многих преследователей / А.А. Чикрий // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика — 1976. — 4. — С. 46–50.
78. Чикрий, А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп управляемых объектов / А.А. Чикрий, П.В. Прокопович // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 12–21.
79. Чикрий, А.А. Метод переменных направлений в нелинейных дифференциальных играх нескольких лиц / А.А. Чикрий // Кибернетика. — 1984. — 1. — С. 48–54.
80. Чикрий, А.А. Нелинейные дифференциальные игры убегания / А.А. Чикрий // ДАН СССР. — 1979. — Т. 246, № 5. — С. 1051–1055.
81. Чикрий, А.А. Об одном способе убегания от нескольких преследователей/ А.А. Чикрий // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 8. — С. 33–38.
82. Чикрий, А.А. О задаче уклонения в линейной дифференциальной игре / А.А. Чикрий // Автоматика и телемеханика. — 1977. — № 9. — С. 24–29.
83. Щелчков, К.А. К задаче группового преследования на плоскости / К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — № 3. — С. 383–387.
84. Щелчков, К.А. К задаче простого преследования / К.А. Щелчков // Современные проблемы математики и ее приложений: материалы 48-й Междунар. молодежной школы-конф., Екатеринбург, 5-11 февр. 2017 г. / Институт математики и механики УрО РАН. под ред.: А. Махнева, С. Правдина. Екатеринбург. — 2017. — С. 71–78.
85. Щелчков, К.А. К нелинейной задаче преследования с дискретным управлением / К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27, № 3. — С. 389-395. DOI: 10.20537/vm170308
86. Щелчков, К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным временем / К.А. Щелчков // Современные проблемы математики и

её приложений: тез. Междунар. (49-й Всерос.) молодежной школы-конф., 4–10 февр. 2018 г. / Ин-т математики и механики УрО РАН; отв. ред. А.А. Махнев; отв. за вып.: С. Ф. Правдин, П. А. Чистяков. — Екатеринбург, 2018. — С. 45.

87. Щелчков, К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией / К.А. Щелчков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, № 1. — С. 111–118. DOI: 10.20537/vm180110

88. Щелчков, К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с неполной информацией / К.А. Щелчков // Гагаринские чтения — 2018: XLIV Междунар. молодёж. науч. конф.: сб. тез. докл. — Москва: Моск. авиац. ин-т (нац. исслед. ун-т), 2018. — Т. 2. — С. 350.

89. Щелчков, К.А. О нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией / К.А. Щелчков // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тез. докл., Суздаль, 6–11 июля 2018 г. / Матем. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, Владимирский гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова; отв. ред. В.В. Козлов. — Владимир: Аркаим, 2018. — С. 224.

90. Щелчков, К.А. О нелинейной задаче уклонения с дискретным управлением / К.А. Щелчков // Современные проблемы математики и её приложений: тез. Междунар. (50-й Всерос.) молодежной школы-конф., 3–9 февр. 2019 г. / Ин-т математики и механики УрО РАН; отв. ред. А.А. Махнев; отв. за вып.: С.Ф. Правдин, П.А. Чистяков. — Екатеринбург, 2019. — С. 53.

91. Щелчков, К.А. Уклонения от многих преследователей в нестационарных дифференциальных играх с простой матрицей и фазовыми ограничениями / К.А. Щелчков // Современные проблемы математики и её приложений: тез. Междунар. (45-й Всерос.) молодежной школы-конф., посв. 75-летию В.И. Бердышева, 2–8 февр. 2014 г. / Ин-т математики и механики УрО РАН; отв. ред. А.А. Махнев; отв. за вып.: Л.В. Камнева,

Н.В. Маслова, М.С. Кошелева, С.Ф. Правдин. — Екатеринбург, 2014. — С. 99–101.

92. Blaquiere, A. Quantitative and qualitative differential games / A. Blaquiere, F. Gerard, G Leitmann. — New York: Academic Press, 1969. — 172 p.
93. Brooks, R.R. Game and information theory analysis of electronic countermeasures in pursuit-evasion games / R.R. Brooks, Jing-En Pang, C. Griffin // IEEE Trans. on Syst. — 2008. — Vol. 38, Issue 6. — P. 1281–1294. DOI: 10.1109/TSMCA.2008.2003970.
94. Chodun, W. Avoidance of many pursuers in differential games described by differential inclusions / W. Chodun // J. Math. Anal, and Appl. — 1988. — P. 135.
95. Chodun, W. Avoidance of many pursuers in differential games described by k-order differential equations / W. Chodun // J. Math. Anal, and Appl. — 1988. — P. 76.
96. Chodun, W. Differential game of evasion with many pursuers / W. Chodun // J. Math. Anal, and Appl. — 1989. — Vol. 142, № 2. — P. 370–389.
97. Chernousko, F.L. On differential games of evasion from many pursuers / F.L. Chernousko, V.L. Zak // J. Optimiz. Theory Appl. — 1985. — Vol. 46, № 4. — P. 461–470.
98. Friedman, A. Differential games / A. Friedman. — New York: John Wiley and Sons, 1971. — 350 p.
99. Ganebny, S.A. Differential Game Model with Two Pursuers and One Evader / S.A. Ganebny, S.S. Kumkov, S.Le Menec, V.S. Patsko // Contributions to Game Theory and Management. — 2012. — Vol. 5. — P. 83–96.
100. Gamkrelidze, R.V. A differential game of evasion with nonlinear control / R.V. Gamkrelidze, G.L. Kharatishvili // SIAM. J. Control. — 1974. — Vol. 12, № 2. — P. 332349.
101. Hajek, O. Pursuit games / O. Hajek. — New York: Academic Press, 1975. — 266 p.

102. Ibragimov G.I. Pursuit and evasion differential games in Hilbert space / G.I. Ibragimov, R.M. Hasim // International Game Theory Review. — 2010. — Vol. 12, № 3. — P. 239–251. DOI: 10.1142/S0219198910002647.

103. Kumkov, S.S. Games of many objects: survey of publications / S.S. Kumkov, S.L. Menec, V.S. Patsko // Dynamic Games and Applications. — 2017. — Vol. 7, Issue 4. — P. 609–633. DOI: 10.1007/s13235-016-0210-6.

104. Leitmann, G. Cooperative and noncooperative many-player differential games / G. Leitmann. — Austria. Vienna: Springer–Verlag, 1974. — 77 p.

105. Petrov, N.N. About the problem of group persecution in linear differential games with a simple matrix and state constraints / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 92, № 1. — P. 13–26.

106. Petrov, N.N. Interrelationship of Linear Nonstationary Evasion Problems with Many Evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, issue 32. — P. 499–502. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.470

107. Petrov, N. Interrelationship of Linear Nonstationary Evasion Problems with Many Evaders / N. Petrov, K. Shchelchkov // 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018): Book of Abstracts and Program, Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018 / IFAC. — Yekaterinburg: IMM UB RAS, 2018. — P. 29.

108. Petrov, N.N. On a conflict controlled process with multiple evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // Systems Analysis: Modeling and Control: Abstracts of the International Conference in memory of Academician Arkady Kryazhimskiy, Ekaterinburg, Russia, 3–8 October 2016. — Ekaterinburg, 2016. — P. 91–93.

109. Petrov, N.N. On the Interrelation of Two Linear NonStationary Problems with Multiply Evaders / N.N. Petrov, K.A. Shchelchkov // International Game Theory Review. — 2015. — Vol. 17, issue 4 (11 pages).

110. Rzymowski, W. Avoidence of one pursuer / W. Rzymowski // J. Math. Anal, and Appl. — 1986. — P. 120.

111. Rzymowski, W. Method of construction of the evasion strategy for differential game with many evaders / W. Rzymowski. Rozprawy Matematyczne no. in series: 247. — Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1986. — 48p.

112. Rzymowski, W. Method of construction of the evasion strategy for differential games with many pursuers / W. Rzymowski // Dissertationes Math. CCXLVII. — 1986. — P. 3–44.

113. Rzymowski, W. On the game of n + 1 cars / W. Rzymowski // J. Math. Anal, and Appl. — 1984. — P. 99.