Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Башкирский государственный университет»

На правах рукописи

Хакимова Айгуль Ринатовна

ОБОБЩЕННЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор И.Т. Хабибуллин

Уфа – 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Нелинейные дифференциальные и дискретные уравнения представляют собой важный инструмент решения различных проблем математики и других разделов естествознания (см., например, монографии В.Е. Захарова, С.В. Манакова, С.П. Новикова, Л.П. Питаевского [10], Н.Х. Ибрагимова [13], Л.А. Тахтаджяна, Л.Д. Фаддеева [28], М. Абловица, Х. Сигура [1] и А. Ньюэлла [22]). Такие уравнения с большим успехом используются при изучении широкого класса моделей математической физики и прикладных дисциплин (см., например, монографии Н.А. Кудряшова [17], А.Б. Борисова, В.В. Киселева [4], М.А. Шамсутдинова, И.Ю. Ломакиной, В.Н. Назарова, А.Т. Харисова, Д.М. Шамсутдинова [41] и В.Г. Марихина [18]). Например, при изучении локализованных структур в магнетиках, при решении задач связанных с передачей информации, при исследовании структуры белковых молекул, различных задач компьютерного моделирования и др.

В современной теории интегрируемости, основанной на методе обратной задачи рассеяния, ключевым свойством уравнения является существование для этого уравнения пары операторов Лакса. Представление Лакса – это эффективное средство изучения нелинейных уравнений, позволяющее находить интегралы движения, высшие симметрии, точные и асимптотические решения и т.д. Первый пример представления Лакса появился в пионерской работе П.Д. Лакса [68]. Проблеме построения пар Лакса посвящено множество исследований начиная с метода одевания Захарова–Шабата (см. [11, 12]) и структур продолжения Уолквиста и Эстабрука (см. [89]) до метода теста Пенлеве (см. [76, 91]) и подхода, основанного на свойстве 3D–совместности (см. [47, 78, 79]). Отметим здесь также работы Н.Х. Ибрагимова и А.Б. Шабата [14], А.В. Михайлова [20], Р.И. Ямилова [42], П. Ксенитидиса [92], В.Э. Адлера и В.В. Постникова [44], в которых были найдены новые пары Лакса. Способ построения пары Лакса исходя из структуры алгебры Каца–Муди можно найти в работах [8, 67, 90]. Несмотря на то, что проблема построения пары Лакса для заданного интегрируемого уравнения интенсивно изучается в течение последних пятидесяти лет многими авторами, она до сих пор остается нерешенной. В подтверждение приведем цитату из статьи известного специалиста в этой области А.В. Михайлова и его учеников (см. [39]): «В настоящее время не существует общего метода нахождения представления Лакса для заданного уравнения». Поэтому задача разработки эффективных методов построения пар Лакса является актуальной.

Другие атрибуты интегрируемых уравнений, такие как, симметрии и локальные законы сохранения компактно описываются с помощью оператора рекурсии. Задаче построения оператора рекурсии посвящено множество работ, в которых большинство авторов использует определяющее уравнение [81]

$$\frac{d}{dt}R = [F^*, R]\,,$$

где R – оператор рекурсии, F^* – оператор линеаризации рассматриваемого интегрируемого уравнения. Среди специалистов, использующих такой подход построения оператора рекурсии, следует упомянуть Н.Х. Ибрагимова и А.Б. Шабата (см. [14]), С.И. Свинолупова и Р.И. Ямилова (см. [23, 87, 93]), И.С. Красильщика [65]. Другой подход, применяющийся для построения рекурсионного оператора основывается на представлении Лакса. Он используется в работах К. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала и Р. Миуры [54], А.С. Фокаса, Р.Л. Андерсона и П.М. Сантини (см. [48, 49, 51, 52]), А.П. Форди и Д. Гиббонса (см. [53]), М. Гюрсеса, А. Карасу и В.В. Соколова (см. [59]). Для построения рекурсионного оператора также используется мульти–гамильтонов подход (см. [2, 7, 21, 40, 73, 80, 84]). В рамках этого подхода используется представление оператора рекурсии в виде отношения $R = H_2 H_1^{-1}$ двух гамильтоновых операторов H_1 и H_2. Развитию такого подхода посвящены работы Ф. Магри (см. [72]), А.С. Фокаса и Б. Фухштайнера (см. [50]), В.В. Соколова (см. [26]), А.В. Михайлова, Ф. Ханизаде и Дж.П. Ванг (см. [39]). В диссертации мы предлагаем метод, который принципиально отличается от перечисленных выше. Он основан на понятии симметрии и обобщенного инвариантного многообразия. Существует большое количество интегрируемых уравнений, для которых оператор рекурсии неизвестен. К ним относятся нелинейные цепочки и полностью дискретные уравнения, в частности, дискретные системы, соответствующие аффинным алгебрам Ли [56]. Отсюда ясна необходимость поиска новых способов построения рекурсионных операторов.

В работе [60] было введено понятие обобщенного инвариантного многообразия и замечено, что оно является важным с точки зрения построения таких объектов как рекурсионный оператор и пара Лакса. Кратко поясним суть понятия обобщенного инвариантного многообразия. В литературе широко известен метод построения решений нелинейных уравнений в частных производных, основанный на применении метода дифференциальных связей (или инвариантных многообразий) (см. [25, 43]). Идея метода состоит в том, что к заданному уравнению добавляется совместное с ним уравнение, как правило, более простое. Такой прием позволяет найти частные решения исследуемого уравнения. Мы используем некоторое обобщение этого метода, накладывая дифференциальную связь не к самому рассматриваемому уравнению, а к его линеаризации. Эту дифференциальную связь мы и называем обобщенным инвариантным многообразием.

Цели и задачи диссертационной работы. Основной целью настоящей диссертации является дальнейшее развитие идеи работы [60]: разработка эффективных методов построения пар Лакса и операторов рекурсии с помощью обобщенных инвариантных многообразий, апробирование алгоритмов на известных примерах и их применение к уравнениям, для которых такие объекты как пара Лакса и оператор рекурсии ранее не были построены.

Методология и методы исследования. При решении поставленных задач используется метод дифференциальных связей, на основе которого разработаны методы построения операторов рекурсии и пар Лакса для нелинейных интегрируемых уравнений.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. В диссертации разработаны новые эффективные методы построения пар Лакса и рекурсионных операторов для нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных, а также их дискретных вариантов. Отметим, что эти два понятия, пара Лакса и рекурсионный оператор, являются базовыми в теории интегрируемости. Традиционные способы построения рекурсионного оператора используют мульти-гамильтоновы структуры, поиск которых представляет значительные трудности. Предлагаемые в диссертации методы основаны на понятии классической и высшей симметрии, для поиска которых существуют простые алгоритмы. Эти методы могут найти приложение при изучении нелинейных моделей математической физики.

Результаты диссертации позволяют прояснить суть понятия пары Лакса. Установлено, что пара Лакса рассматриваемого нелинейного уравнения порождается двумя основными объектами, такими как линеаризованное уравнение и рекурсионный оператор. В диссертации показано, что переход от этой пары объектов к общепринятой паре Лакса осуществляется путем понижения порядка.

Положения, выносимые на защиту. В диссертационной работе представлены следующие результаты:

1. Дано полное описание обобщенных инвариантных многообразий второго порядка для уравнения Кортевега-де Фриза и для одного интегрируемого уравнения третьего порядка из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова (см. [24]).
2. Разработан метод построения пары Лакса при помощи обобщенных инвариантных многообразий. Построены пары Лакса для двух уравнений из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова (см. [24]) и для одной системы дифференциально–разностных уравнений.
3. Разработан симметрийный метод построения оператора рекурсии для интегрируемых моделей. Построен рекурсионный оператор для одной системы дифференциально–разностных уравнений.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов диссертации гарантируется строгостью математических доказательств и апробированием на многочисленных примерах.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. XXII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ» (Москва, 2015 г.);
2. Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (Уфа, 2015 г.);
3. Уфимская математическая конференция с международным участием (Уфа, 2016 г.);

4. XXIV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ» (Москва, 2017 г.);
5. Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2017 г.);
6. Международная научная конференция «Современные методы в теории обратных задач и смежные вопросы», посвященная 80-летию А.Б. Шабата (Теберда, 2017 г.);
7. Международная научная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы» (Уфа, 2018 г.);
8. Семинар кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем УГАТУ под руководством проф. Р.К. Газизова (Уфа, 2017 г.);
9. Семинар отдела математической физики ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, 2016 г., 2017 г.);
10. Семинар лаборатории теории нелинейных явлений Института физики металлов имени М.Н. Михеева Уральского отделения РАН под руководством чл.-корр. РАН, проф. А.Б. Борисова (Екатеринбург, 2018 г.);
11. XXVII научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике, Институт Океанологии им. П.П. Ширшова РАН (Москва, 2018 г.);
12. Международная научная конференция, посвященная 80-летию академика В.А. Садовничего «Современные проблемы математики и механики», МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2019 г.).

Публикации. По теме диссертации имеется 14 публикаций [29–38, 60–62, 83], из них статьи [29, 30, 35, 60–62, 83] опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus и таким образом приравненных к изданиям из Перечня ВАК.

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [29, 30, 35, 60–62, 83]. В работе [60], выполненной совместно с И.Т. Хабибуллиным и М.Н. Попцовой, диссертанту принадлежат результаты касающиеся обобщенных инвариантных многообразий для гиперболических уравнений (разделы 3, 4). В опубликованных совместно с научным руководителем работах [29,30,61,62] И.Т. Хабибуллину принадлежат постановка задачи и общее руководство, диссертанту - точные формулировки и доказательства результатов. В работе [83], выполненной совместно с И.Т. Хабибуллиным и Е.В. Павловой, диссертантом построены законы сохранения для дискретных цепочек (разделы 3, 4). Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 94 наименования. Объем диссертации составляет 115 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Первая глава посвящена разработке новых эффективных методов построения пар Лакса и операторов рекурсии для интегрируемых дифференциальных уравнений эволюционного типа. В первом параграфе вводится понятие обобщенного инвариантного многообразия (ОИМ). Отметим, что для заданного интегрируемого уравнения существует широкий класс обобщенных инвариантных многообразий. В диссертации показано, что для построения пар Лакса и операторов рекурсии следует выбирать ОИМ минимального порядка, которые содержат по крайней мере, две произвольные постоянные, не удаляемые посредством замен переменных. Изучаются свойства таких ОИМ.

Во втором и третьем разделах первой главы решена задача полного описания обобщенных инвариантных многообразий второго порядка для уравнения Кортевега-де Фриза и для двух интегрируемых уравнений третьего порядка из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова (см. [24]). Далее, при помощи этих многообразий построены как пары Лакса, так и операторы рекурсии для указанных уравнений. Интересно отметить, что при построении пары Лакса и оператора рекурсии используется одно и тоже ОИМ, представленное в различной координатной форме. Причем для построения пары Лакса больше подходит нелинейное обобщенное инвариантное многообразие, а для оператора рекурсии его линейное представление, имеющее более высокий порядок. Как только подходящее нелинейное ОИМ найдено, мы получаем предварительную пару Лакса, где в качестве одного из уравнений используется линеаризация рассматриваемого интегрируемого уравнения, а в качестве другого – найденное ОИМ. В диссертации показано, что при помощи подходящей замены переменных нелинейная пара Лакса приводится к линейному виду. Следует отметить, что для упомянутых уравнений С.И. Свинолупова и В.В. Соколова пары Лакса ранее не были известны. В качестве приложения полученных пар Лакса построены серии локальных законов сохранения.

Во **второй главе** методы построения пар Лакса и операторов рекурсии для уравнений в частных производных адаптируются на случай дифференциально-разностных уравнений. Эффективность методов иллюстрируется в §6, где в качестве примера рассмотрено уравнение Вольтерра, известное своими приложениями в математической биологии. Седьмой параграф второй главы посвящен исследованию системы дифференциально-разностных уравнений, являющейся симметрией дискретного уравнения на квадратном графе, соответствующей аффинной алгебре Ли $A_1^{(1)}$. Для этой системы построены пара Лакса и оператор рекурсии. Ранее эти объекты не были известны.

Глава 3 посвящена исследованию обобщенных инвариантных многообразий для интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. В отличие от уравнений эволюционного типа, здесь предварительная нелинейная пара Лакса состоит из трех уравнений: обобщенного инвариантного многообразия, его следствия и, соответственно, линеаризации рассматриваемого уравнения. На конкретном примере пояснено, как из этой тройки получить подходящую пару Лакса.

В **четвертой главе** диссертации предлагается симметрийный метод построения операторов рекурсии для нелинейных интегрируемых дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Доказано, что слабо нелокальный оператор рекурсии может быть представлен в виде отношения двух дифференциальных (соответственно, двух дискретных, в случае дифференциально-разностных уравнений) операторов. Поэтому поиск оператора рекурсии сводится к построению пары дифференциальных (дискретных) операторов L_1 и L_2. Показано, что ядро оператора L_1 состоит из генераторов нескольких простейших классических и высших симметрий заданного интегрируемого уравнения. Поэтому L_1 определяется простой формулой. Для отыскания оператора L_2 по известному L_1 в диссертации найден эффективный алгоритм. Метод проиллюстрирован на конкретных примерах.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору И.Т. Хабибуллину за предложенную тему исследований, постоянное внимание, неоценимую помощь и всестороннюю поддержку в процессе работы над диссертацией.

Глава 1. Обобщенные инвариантные многообразия для дифференциальных уравнений эволюционного типа.

§1. Основные определения.

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных вида

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_k), \quad u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}. \tag{1.1}$$

Определение 1.1. *Обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$u_n = g(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{n-1}) \tag{1.2}$$

называется инвариантным многообразием для уравнения (1.1), *если оно совместно с* (1.1), *т.е. если выполняется следующее условие*

$$D_x^n f - D_t g|_{(1.1),(1.2)} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь D_x и D_t операторы полного дифференцирования по x и соответственно, по t. Отметим, что условие (1.3) равносильно некоторому уравнению в частных производных на искомую функцию g. Иногда это уравнение можно решить явно, хотя в общем случае задача отыскания функции g является весьма сложной.

Ситуация заметно меняется, если искать обыкновенное дифференциальное уравнение совместное не с самим нелинейным уравнением (1.1), а с его линеаризацией

$$U_t = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_x} D_x + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} D_x^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k} D_x^k\right) U. \tag{1.4}$$

Далее будем рассматривать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_m = F(x, t, U, U_x, U_{xx}, \dots, U_{m-1}; u, u_x, u_{xx}, \dots, u_n), \tag{1.5}$$

где $U = U(x,t)$ искомая функция, а функция $u = u(x,t)$, являющаяся некоторым решением уравнения (1.1), входит в (1.5) в качестве функционального параметра.

Замечание 1.1. *Предполагается, что в равенстве* (1.5) *переменные* x, t, U, U_x, U_{xx}, $\dots$, U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, $\dots$, u_n, u_{n+1}, $\dots$ *являются свободными переменными, принимающими произвольные значения.*

Определение 1.2. *Уравнение* (1.5) *определяет обобщенное инвариантное многообразие (ОИМ) для уравнения* (1.1), *если условие*

$$D_x^m U_t - D_t U_m|_{(1.1),(1.4),(1.5)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $\{u_j\}$ *и* $U, U_x, \dots, U_{m-1}$.

Здесь переменные u_t, U_t и их производные по x заменяются в силу уравнений (1.1) и (1.4), а переменные $U_m, U_{m+1}, \dots$ - в силу равенства (1.5). Поскольку переменные x, t, U, U_x, U_{xx}, $\dots$, U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, $\dots$, u_n, u_{n+1}, $\dots$ в уравнении (1.5) являются независимыми, задача отыскания функции $F(x, t, U, U_x, \dots, U_{m-1}; u, u_x, \dots, u_n)$ является переопределенной и эффективно решается.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + u u_x. \tag{1.6}$$

Покажем, что обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_x = \frac{u_{xx}}{u_x} U \tag{1.7}$$

определяет обобщенное инвариантное многообразие уравнения (1.6). В силу определения, уравнение (1.7) должно быть совместно с линеаризацией уравнения (1.6)

$$U_t = U_{xxx} + uU_x + u_x U, \tag{1.8}$$

т.е. должно выполняться следующее условие

$$D_x U_t - D_t U_x \big|_{(1.6)-(1.8)} = 0.$$

Перепишем последнее равенство в более развернутом виде

$$\begin{aligned} &U_{xxxx} + 2u_x U_x + uU_{xx} + u_{xx} U \\ &\qquad - \left(\frac{u_{xx,t}}{u_x} - \frac{u_{xx} u_{x,t}}{u_x^2} \right) U - \frac{u_{xx}}{u_x} U_t \Big|_{(1.6)-(1.8)} = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

В уравнении (1.9) переменные u_t, $u_{x,t}$, $u_{xx,t}$ заменяем в силу (1.6), U_x, U_{xx}, U_{xxxx} в силу (1.7), U_t в силу (1.8) и получаем, что оно тождественно равно нулю.

Многообразие (1.7) также может быть получено при помощи классической симметрии $u_\tau = u_x$ уравнения КдФ. Найдем решение уравнения (1.7). Для этого перепишем его в виде

$$\frac{U_x}{U} = \frac{u_{xx}}{u_x}.$$

Проинтегрируем последнее равенство и получим решение

$$\log U = \log u_x + \log c(t),$$

из которого имеем

$$U = c(t) u_x. \tag{1.10}$$

Подставим (1.10) в линеаризованное уравнение (1.8), поскольку U является решением данного уравнения, и найдем, что $c(t) = c$ – произвольная постоянная. Таким образом, общее решение уравнения (1.7) выражается в виде

$$U = cu_x.$$

Построим теперь обобщенное инвариантное многообразие второго порядка для уравнения (1.8) при помощи двух симметрий $u_\tau = u_x$ и $u_{\tau_1} = u_t$. В этом случае общее решение линеаризованного уравнения задается в виде следующей линейной комбинации

$$U = c_1 u_x + c_2 u_t, \tag{1.11}$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные. Поделим обе части равенства (1.11) на u_x и продифференцируем по x:

$$\frac{U_x}{u_x} - \frac{U u_{xx}}{u_x^2} = c_2 \left(\frac{u_{t,x} u_x - u_t u_{xx}}{u_x^2} \right). \tag{1.12}$$

Умножим (1.12) на $\frac{u_x^2}{u_{t,x} u_x - u_t u_{xx}}$, продифференцируем по переменной x и заменим u_t и ее производные по x в силу уравнения (1.6). В итоге получим

$$U_{xx} = \frac{3u_1^2 u_2 + u_1 u_5 - u_3^2}{u_1 u_4 + u_1^3 - u_2 u_3} U_x + \frac{u_3(u_1^2 + u_4) - u_2 u_5 - 3u_1 u_2^2}{u_1 u_4 + u_1^3 - u_2 u_3} U, \quad u_n = \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x,t). \tag{1.13}$$

Легко проверить, что (1.13) определяет обобщенное инвариантное многообразие для уравнения (1.6).

Определение 1.3. *Пусть обобщенное инвариантное многообразие M определяется уравнением* (1.5). *Пару чисел* (m, n) *назовем порядком многообразия* M. *Многообразие M назовем тривиальным, если произвольное решение уравнения* (1.5) *имеет вид*

$$U = \varphi(x, t, u, u_x, \ldots, u_s), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_s} \neq 0.$$

Примеры (1.7) и (1.13) показывают, что тривиальные обобщенные инвариантные многообразия легко можно построить при помощи классических и высших симметрий рассматриваемого уравнения. Однако по таким многообразиям, по-видимому, невозможно построить пары Лакса и рекурсионные операторы. Более интересными объектами являются нетривиальные обобщенные инвариантные многообразия. Среди которых в данной работе будут рассматриваться следующие два класса:

- $H_1 := \sum_{i,j=0}^{s} \alpha_{ij}(\lambda, u, u_1, \dots) U_i U_j + c = 0;$
- $H_2 := \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\lambda, u, u_1, \dots) U_j = 0,$

где c, λ – произвольные постоянные. Отметим, что обобщенные инвариантные многообразия линейного вида связаны с операторами рекурсии, а нелинейные могут быть использованы для построения пар Лакса. Ниже мы более подробно обсудим конкретные примеры обобщенных инвариантных многообразий.

§2. Полное описание обобщенных инвариантных многообразий второго порядка для уравнения КдФ. Приложения.

Рассмотрим уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} + uu_x. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть уравнение $U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x, u_{xx})$ определяет обобщенное инвариантное многообразие для уравнения КдФ (2.1), тогда оно имеет вид*

$$U_{xx} = \frac{u_x}{2(u+c_1)} U_x - \frac{2}{3}(u+c_1)U + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_1)(U^2+6c_2)}}{6(u+c_1)},$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся определением обобщенного инвариантного многообразия. Линеаризуем уравнение (2.1)

$$U_t = U_{xxx} + uU_x + u_xU \tag{2.2}$$

и будем искать обобщенное инвариантное многообразие в виде

$$U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x, u_{xx}) \tag{2.3}$$

из условия

$$D_x^2U_t - D_tF\big|_{(2.1),(2.2),(2.3)} = 0. \tag{2.4}$$

Общий случай (2.3) распадается на три не пересекающихся случая:

1) $U_{xx} = F(U, U_x, u)$,

2) $U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x)$, где $\frac{\partial}{\partial u_x}F \neq 0$,

3) $U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x, u_{xx})$, где $\frac{\partial}{\partial u_{xx}}F \neq 0$.

Ниже мы подробно изложим рассмотрение случая 2), поскольку остальные случаи исследуются аналогично.

Положим $U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x)$ и перепишем равенство (2.4) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}&(U_{xxxxx} + uU_{xxx} + 3u_xU_{xx} + 3u_{xx}U_x + u_{xxx}U\\ &\quad -F_UU_t - F_{U_x}U_{x,t} - F_uu_t - F_{u_x}u_{x,t})|_{(2.1),(2.2),(2.3)} = 0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

В равенстве (2.5) переменные u_t и $u_{x,t}$ заменяем в силу уравнения (2.1), U_t и $U_{x,t}$ в силу (2.2), а U_{xxx} и U_{xxxxx} в силу (2.3). В итоге получаем:

$$\begin{aligned}&\alpha_1(U, U_x, u, u_x)u_{xxx}u_{xx} + \alpha_2(U, U_x, u, u_x)u_{xxx}\\ &\quad+\alpha_3(U, U_x, u, u_x)u_{xx}^3 + \alpha_4(U, U_x, u, u_x)u_{xx}^2\\ &\qquad+\alpha_5(U, U_x, u, u_x)u_{xx} + \alpha_6(U, U_x, u, u_x) = 0,\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 3F_{u_x u_x},\\
\alpha_2 &= U + 3U_x F_{U u_x} + 3F F_{U_x u_x} + 3u_x F_{u u_x},\\
\alpha_3 &= F_{u_x u_x u_x},\\
\alpha_4 &= U_x F_{U u_x u_x} + F_{u u_x} + F_{U_x u_x} F_{u_x} + F F_{U_x u_x u_x} + u_x F_{u u_x u_x},\\
\alpha_5 &= 3U_x F_{U U_x} F_{u_x} + 3U_x F_{U u} + 3u_x^2 F_{u u u_x} + 3u_x F_{U_x u_x} F_u\\
&\quad +3F F_{U_x u} + 3U_x F_U F_{U_x u_x} + 3U_x^2 F_{U U u_x} + 3U_x + 3F F_{u_x} F_{U_x U_x}\\
&\quad +6U_x F F_{U U_x u_x} + 6u_x U_x F_{U u u_x} + 6u_x F F_{U_x u u_x} + 3F F_{U_x} F_{U_x u_x}\\
&\quad +3F^2 F_{U_x U_x u_x} + 3u_x F_{uu} - U F_{U_x} + 3F F_{U u_x} + 3u_x F_{u_x} F_{U_x u},\\
\alpha_6 &= 3u_x F + 3F^2 F_{U U_x} + 3u_x F F_{U u} + 3U_x^2 F_U F_{U U_x} + 3u_x^2 F_u F_{U_x u}\\
&\quad +3u_x F^2 F_{U_x U_x u} + 3u_x^2 U_x F_{U u u} + 3u_x^2 F F_{U_x u u} + 3U_x^2 F F_{U U U_x} - u_x^2 F_{u_x}\\
&\quad +3U_x F F_{UU} + F^3 F_{U_x U_x U_x} + 3U_x F F_{U_x} F_{U U_x} + 3U_x F F_U F_{U_x U_x}\\
&\quad +3u_x U_x F_U F_{U_x u} + 3u_x F F_{U_x} F_{U_x u} + 6u_x U_x F F_{U U_x u} - u_x U F_U\\
&\quad +U_x^3 F_{UUU} + 3u_x F F_u F_{U_x U_x} + 3F^2 F_{U_x} F_{U_x U_x} - 2u_x U_x F_{U_x}\\
&\quad +3U_x F^2 F_{U U_x U_x} + 3u_x U_x^2 F_{U U u} + 3u_x U_x F_u F_{U U_x} + u_x^3 F_{uuu}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что переменные u_{xx}, u_{xxx} рассматриваются как независимые переменные, поэтому равенство (2.6) справедливо тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\alpha_i(U, U_x, u, u_x) = 0, \quad i = \overline{1,6}. \tag{2.7}$$

Из уравнения (2.7) при $i = 1$ и $i = 3$, находим

$$F(U, U_x, u, u_x) = F_1(U, U_x, u) u_x + F_2(U, U_x, u). \tag{2.8}$$

С учетом (2.8) равенство (2.7) при $i = 2$ принимает вид:

$$(F_1)_u + F_1 (F_1)_{U_x} = 0, \tag{2.9}$$

$$U + 3F_2(F_1)_{U_x} + 3U_x(F_1)_U = 0. \tag{2.10}$$

Выразим из (2.9) функцию $(F_1)_u$, а из (2.10) функцию F_2:

$$(F_1)_u = -F_1(F_1)_{U_x}, \tag{2.11}$$

$$F_2 = -\frac{U + 3U_x(F_1)_U}{3(F_1)_{U_x}}, \quad \text{где} \quad (F_1)_{U_x} \neq 0. \tag{2.12}$$

Действительно, предположим, что $(F_1)_{U_x} = 0$, тогда из (2.10) имеем:

$$U = 0 \quad \text{и} \quad (F_1(U, u))_U = 0.$$

Это противоречит тому, что U - динамическая переменная.

Далее, в уравнении (2.7) при $i = 4$, $i = 5$ и $i = 6$ заменим все производные функции F_1 по переменной u в силу (2.11), исключим функцию F_2 в силу (2.12) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной u_x. Таким образом, в дополнение к (2.11) имеем еще четыре уравнения

$$\begin{aligned}
&1. \quad -\frac{3U_xF_1(F_1)_{UU}}{(F_1)_{U_x}} - \frac{F_1(F_1)_U(3U_x(F_1)_U + U)(F_1)_{U_xU_x}}{(F_1)^3_{U_x}} \\
&+\frac{F_1(U + 6U_x(F_1)_U)(F_1)_{UU_x}}{(F_1)^2_{U_x}} + \frac{(F_1)_UU}{(F_1)_{U_x}} + U_x = 0,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
&2. \quad \frac{F_1(F_1)_U\left((3U_x(F_1)_U + U)(F_1)_{U_x} - 3F_1(F_1)_U\right)}{(F_1)^3_{U_x}}(F_1)_{U_xU_x} \\
&+3F_1\left(U_x - \frac{F_1}{(F_1)_{U_x}}\right)(F_1)_{UU} + F_1 - U(F_1)_U - U_x(F_1)_{U_x} \\
&+F_1\left(\frac{6F_1(F_1)_U}{(F_1)^2_{U_x}} - \frac{U + 6U_x(F_1)_U}{(F_1)_{U_x}}\right)(F_1)_{UU_x} = 0,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
&3. \quad \left(U_x^3 - \frac{6F_1U_x^2}{(F_1)_{U_x}}\right)(F_1)_{UUU} - \frac{U_x(3U_x(F_1)_U + U)^2}{(F_1)^3_{U_x}}(F_1)_{UU_x}(F_1)_{U_xU_x} \\
&+\left(\frac{F_1(9U_x(F_1)_U + 2U)}{(F_1)^2_{U_x}} - \frac{U_x(3U_x(F_1)_U - 2U)}{(F_1)_{U_x}}\right)(F_1)_{UU} \\
&+\left(\frac{2U_xF_1(2U + 9U_x(F_1)_U) - U_x^2(3U_x(F_1)_U + U)(F_1)_{U_x}}{(F_1)^2_{U_x}}\right)(F_1)_{UUU_x} \\
&+\left(\frac{U_x(3U_x(F_1)_U + U)^2}{3(F_1)^2_{U_x}} - \frac{2F_1(3U_x(F_1)_U + U)(9U_x(F_1)_U + U)}{3(F_1)^3_{U_x}}\right)(F_1)_{UU_xU_x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{2(F_1)_U F_1(3U_x(F_1)_U+U)^2}{3(F_1)_{U_x}^4}-\frac{(3U_x(F_1)_U+U)^3}{27(F_1)_{U_x}^3}\right)(F_1)_{U_xU_xU_x}\\
&+\frac{3U_x^2(5F_1-U_x(F_1)_{U_x})(F_1)_{UU_x}(F_1)_{UU}}{(F_1)_{U_x}^2}-\frac{U}{3(F_1)_{U_x}}\\
&+\left(\frac{U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)_{U_x}^2}-\frac{3U_xF_1(5U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)_{U_x}^3}\right)(F_1)_{U_xU_x}(F_1)_{UU}\\
&+\left(\frac{2U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)_{U_x}^2}-\frac{U_xF_1(30U_x(F_1)_U+7U)}{(F_1)_{U_x}^3}\right)(F_1)_{UU_x}^2\\
&+\frac{5F_1(3U_x(F_1)_U+U)(9U_x(F_1)_U+U)}{3(F_1)_{U_x}^4}(F_1)_{UU_x}(F_1)_{U_xU_x}\\
&+\frac{9U_xF_1-6U_xU(F_1)_U+18U_x^2(F_1)_U^2-2U^2}{3(F_1)_{U_x}^2}(F_1)_{UU_x}\\
&-\frac{F_1(F_1)_U(5U+18U_x(F_1)_U)}{(F_1)_{U_x}^3}(F_1)_{UU_x}+\frac{3F_1(F_1)_U^2(3U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)_{U_x}^4}(F_1)_{U_xU_x}\\
&+\frac{U^2(F_1)_U-UF_1-9U_x^2(F_1)_U^3-9U_xF_1(F_1)_U}{3(F_1)_{U_x}^3}(F_1)_{U_xU_x}\\
&+\left(\frac{(3U_x(F_1)_U+U)^3}{9(F_1)_{U_x}^4}-\frac{F_1(F_1)_U(3U_x(F_1)_U+U)^2}{3(F_1)_{U_x}^5}\right)(F_1)_{U_xU_x}^2=0,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
4.\quad&\frac{4U_x^3(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{UUUU_x}}{3(F_1)_{U_x}^2}-\frac{U_x^4(F_1)_{UUUU}}{(F_1)_{U_x}}\\
&-\frac{2U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{UUU_xU_x}}{3(F_1)_{U_x}^3}+\frac{3U_x^3((F_1)_{U_x}-U_x(F_1)_{U_xU_x})(F_1)_{UU}^2}{(F_1)_{U_x}^3}\\
&+\frac{4U_x(3U_x(F_1)_U+U)^3(F_1)_{UU_xU_xU_x}}{27(F_1)_{U_x}^4}-\frac{(3U_x(F_1)_U+U)^4(F_1)_{U_xU_xU_xU_x}}{81(F_1)_{U_x}^5}\\
&+\left(\frac{3U_x^4(F_1)_{UU_x}}{(F_1)_{U_x}^2}+\frac{U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)(2(F_1)_{U_x}-U_x(F_1)_{U_xU_x})}{(F_1)_{U_x}^3}\right)(F_1)_{UUU}\\
&+\left(\frac{6U_x^4(F_1)_{UU}+2U_x^3}{(F_1)_{U_x}^2}-\frac{2U_x(3U_x(F_1)_U+U)(9U_x(F_1)_U+2U)}{3(F_1)_{U_x}^3}\right.\\
&\left.+\frac{5U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{U_xU_x}}{3(F_1)_{U_x}^4}-\frac{7U_x^3(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{UU_x}}{(F_1)_{U_x}^3}\right)(F_1)_{UUU_x}\\
&+\left(\frac{11U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{UU_x}}{3(F_1)_{U_x}}-\frac{7U_x(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{U_xU_x}}{9(F_1)_{U_x}^2}-\frac{4}{3}U_x^2\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2(3U_x(F_1)_U+U)(9U_x(F_1)_U+U)}{9(F_1)_{U_x}}-4U_x^3(F_1)_{UU}\biggr)\frac{(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{UU_xU_x}}{(F_1)_{U_x}^3}\\
&+\biggl(\frac{2}{3}U_x-\frac{5U_x(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{UU_x}}{3(F_1)_{U_x}}-\frac{2(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_U}{3(F_1)_{U_x}}\\
&+\frac{(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{U_xU_x}}{3(F_1)_{U_x}^2}+2U_x^2(F_1)_{UU}\biggr)\frac{(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{U_xU_xU_x}}{3(F_1)_{U_x}^4}\\
&-\frac{5U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{U_xU_x}^2(F_1)_{UU}}{3(F_1)_{U_x}^5}-\frac{9U_x^4(F_1)_{UU_x}^2(F_1)_{UU}}{(F_1)_{U_x}^3}\\
&+\frac{(3U_x^2(F_1)_{U_x}-(3U_x(F_1)_U+U)(6U_x(F_1)_U+U))(F_1)_{UU}}{3(F_1)_{U_x}^3}\\
&-\frac{U_x^2(27U_x(F_1)_U+8U)(F_1)_{UU_x}(F_1)_{UU}}{(F_1)_{U_x}^3}+\frac{6U_x^3(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{UU_x}^3}{(F_1)_{U_x}^4}\\
&+\frac{10U_x^3(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{UU_x}(F_1)_{UU}(F_1)_{U_xU_x}}{(F_1)_{U_x}^4}\\
&+\frac{U_x((3U_x(F_1)_U+U)(21U_x(F_1)_U+4U)-6U_x^2(F_1)_{U_x})(F_1)_{U_xU_x}}{3(F_1)_{U_x}^4}\\
&-\frac{19U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{UU_x}^2(F_1)_{U_xU_x}}{3(F_1)_{U_x}^5}-\frac{U_x^2(F_1)_{U_xU_x}}{3(F_1)_{U_x}^3}\\
&+\frac{(U_x(3U_x(F_1)_U+U)(14U_x(F_1)_U+3U)-3U_x^3(F_1)_{U_x})(F_1)_{UU_x}^2}{(F_1)_{U_x}^4}\\
&+\frac{16U_x(3U_x(F_1)_U+U)^3(F_1)_{UU_x}(F_1)_{U_xU_x}^2}{9(F_1)_{U_x}^6}-\frac{4(3U_x(F_1)_U+U)^4(F_1)_{U_xU_x}^3}{27(F_1)_{U_x}^7}\\
&+\frac{10U_x^2(F_1)_{U_x}(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{UU_x}(F_1)_{U_xU_x}}{3(F_1)_{U_x}^4}\\
&-\frac{(3(19U_x(F_1)_U+2U)(F_1)_{UU_x}(F_1)_{U_x}+6(F_1)_U^2)(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{U_xU_x}}{9(F_1)_{U_x}^5}\\
&+\left(\frac{(F_1)_U(3U_x(F_1)_U+U)(4U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)_{U_x}^4}-\frac{U_x(15U_x(F_1)_U+4U)}{3(F_1)_{U_x}^3}\right)(F_1)_{UU_x}\\
&+\frac{(6(F_1)_U(3U_x(F_1)_U+U)-5U_x(F_1)_{U_x})(3U_x(F_1)_U+U)^2(F_1)_{U_xU_x}^2}{9(F_1)_{U_x}^6}\\
&+\frac{(12U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{U_x}(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{U_xU_x}}{9(F_1)_{U_x}^5}=0.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Умножим уравнение (2.13) на $(3F_1(F_1)_U-(3U_x(F_1)_U+U)\,(F_1)_{U_x})$ и вычтем из него уравнение (2.14) умноженное на $(3U_x(F_1)_U + U)$, в результате получим:

$$\frac{3(F_1)_U^2}{(F_1)_{U_x}} + \frac{3F_1(F_1)_{UU}}{(F_1)_{U_x}} - \frac{3F_1(F_1)_U(F_1)_{UU_x}}{(F_1)_{U_x}^2} - 1 = 0.$$

Проинтегрируем полученное равенство по переменной U и разрешим относительно $(F_1)_U$:

$$(F_1)_U = \frac{(F_1)_{U_x}(U + F_3)}{3F_1}, \quad F_3 = F_3(U_x, u). \tag{2.17}$$

Далее проверим на совместность уравнения (2.11) и (2.17):

$$\left.\frac{\partial}{\partial U}(F_1)_u - \frac{\partial}{\partial u}(F_1)_U\right|_{(2.11),(2.17)} = 0. \tag{2.18}$$

Таким образом, в силу уравнений (2.11) и (2.17) равенство (2.18) принимает вид:

$$\frac{(F_1)_{U_x}\left(F_1(F_3)_{U_x} + (F_3)_u\right)}{3F_1} = 0,$$

из которого заключаем, что $F_3(U_x, u) = c_1$, где c_1- произвольная постоянная.

Далее в уравнениях (2.13)–(2.16) заменим все прозводные функции F_1 по переменной U в силу (2.17). Тогда получим, что уравнения (2.13) и (2.14) тождественно выполняются. Далее из уравнения (2.15) выразим $(F_1)_{U_xU_xU_x}$:

$$\begin{aligned}(F_1)_{U_xU_xU_x} = \frac{3(F_1)_{U_xU_x}^2}{(F_1)_{U_x}} - \frac{3(6F_1U_x + U^2 - c_1^2)(F_1)_{U_x}^3}{U^2F_1^2} + \frac{9(F_1)_{U_x}^2}{U^2} \\ + \frac{9((F_1)_{U_x}U_x - F_1)(F_1)_{U_xU_x}}{U^2} + \frac{3U_x(3F_1U_x + U^2 - c_1^2)(F_1)_{U_x}^4}{U^2F_1^3}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Пользуясь условием совместности уравнений (2.17) и (2.19) приходим к двум возможным ситуациям:

$$3U_xF_1(F_1)_{U_x} + c_1U(F_1)_{U_x} + U^2(F_1)_{U_x} - 3F_1^2 = 0, \tag{2.20}$$

либо

$$c_1^2(F_1)_{U_x}^3 - 3U_xF_1(F_1)_{U_x}^3 + 3F_1^2(F_1)_{U_x}^2 - 3F_1^3(F_1)_{U_xU_x} = 0. \tag{2.21}$$

Предположим, что выполняется уравнение (2.20), тогда

$$F_1 = \frac{U_x}{2F_4} + \frac{\sqrt{9U_x^2 + 6F_4U(c_1 + U)}}{6F_4}, \quad F_4 = F_4(U, u). \tag{2.22}$$

Подставляя полученное равенство (2.22) в уравнения (2.11) и (2.17) определяем, что

$$c_1 = 0 \quad \text{и} \quad F_4 = u + c_2.$$

Следовательно, в случае (2.20), искомая функция F имеет вид:

$$F = \frac{u_xU_x}{2(u + c_2)} + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u + c_2)U^2}}{6(u + c_2)} - \frac{2}{3}(u + c_2)U. \tag{2.23}$$

Рассмотрим теперь случай (2.21). Перепишем его в виде:

$$(F_1)_{U_xU_x} = \frac{(F_1)^2_{U_x}(c_1^2(F_1)_{U_x} - 3U_xF_1(F_1)_{U_x} + 3F_1^2)}{3F_1^3}. \tag{2.24}$$

Подставим (2.24) в уравнение (2.16) и получим:

$$c_1 = 0 \quad \text{или} \quad 3U_xF_1 + 2Uc_1 + U^2 = 0. \tag{2.25}$$

Второе уравнение (2.25) противоречит равенству (2.17), поэтому выберем $c_1 = 0$.

Заметим, что при $c_1 = 0$, уравнение (2.21) явно решается:

$$F_1 = \frac{U_x}{2F_5} + \frac{\sqrt{U_x^2 + 4F_5F_6}}{2F_5}, \quad F_5 = F_5(U, u), F_6 = F_6(U, u). \tag{2.26}$$

Вид функций F_5 и F_6 определим при помощи уравнений (2.11) и (2.17). Подставим (2.26) в (2.11) и (2.17), получим:

$$F_5 = u + c_3, \quad F_6 = \frac{1}{6}U^2 + c_4.$$

Таким образом, в случае выполнения условия (2.21), имеем

$$F = \frac{u_xU_x}{2(u + c_3)} + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u + c_3)(U^2 + 6c_4)}}{6(u + c_3)} - \frac{2}{3}(u + c_3)U, \tag{2.27}$$

где c_3 и c_4 произвольные постоянные. Следовательно, (2.23) и (2.27) представляют собой два нелинейных обобщенных инвариантных многообразия. Однако, заметим, что (2.23) является частным случаем (2.27), поэтому фактически уравнение (2.4) имеет ровно одно решение

$$U_{xx} = \frac{u_x U_x}{2(u+c_1)} + \frac{u_x \sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_1)(U^2+6c_2)}}{6(u+c_1)} - \frac{2}{3}(u+c_1)U, \tag{2.28}$$

зависящее от двух произвольных постоянных $c_3 := c_1$, $c_4 := c_2$. □

Следствие 1. *Обобщенное инвариантное многообразие* (2.28) *не является тривиальным.*

Действительно, предположим, что произвольное решение уравнения (2.28) имеет вид:

$$U = \varphi(x, t, u, u_x, \ldots, u_j), \quad \text{где} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \neq 0. \tag{2.29}$$

Найдем U_x и U_{xx} из уравнения (2.29):

$$U_x = \varphi_u u_x + \varphi_{u_x} u_{xx} + \cdots + \varphi_{u_j} u_{j+1}, \tag{2.30}$$

$$U_{xx} = \varphi_{uu} u_x^2 + \varphi_u u_{xx} + \cdots + \varphi_{u_j} u_{j+2}. \tag{2.31}$$

Заменим в уравнении (2.28) функции U, U_x, U_{xx} в силу равенств (2.29), (2.30) и (2.31):

$$\begin{aligned}
&\varphi_{uu} u_x^2 + \varphi_u u_{xx} + \cdots + \varphi_{u_j} u_{j+2} \\
&= \frac{u_x}{2(u+c_1)} \left(\varphi_u u_x + \varphi_{u_x} u_{xx} + \cdots + \varphi_{u_j} u_{j+1}\right) - \frac{2}{3}(u+c_1)\varphi \\
&+ \frac{u_x \sqrt{9\left(\varphi_u u_x + \varphi_{u_x} u_{xx} + \cdots + \varphi_{u_j} u_{j+1}\right)^2 + 6(u+c_1)(\varphi^2+6c_2)}}{6(u+c_1)}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Приравнивая коэффициенты при старшей производной u_{j+2} имеем равенство

$$\varphi_{u_j} = 0,$$

которое противоречит предположению (2.29).

Воспользуемся найденным обобщенным инвариантным многообразием (2.28) для построения пары Лакса и оператора рекурсии. Начнем с пары Лакса. Положим в (2.28) $c_2 = 0$, тогда подкоренное выражение в (2.28) будет квадратичной формой от U, U_x с коэффициентом зависящим от u, c_1

$$U_{xx} = \frac{u_x U_x}{2(u+c_1)} + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_1)U^2}}{6(u+c_1)} - \frac{2}{3}(u+c_1)U. \tag{2.33}$$

Перепишем линеаризацию уравнения КдФ (2.2) с учетом (2.33)

$$U_t = \frac{u_{xx}\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_1)U^2}}{6(u+c_1)} + \left(\frac{u_{xx}}{2(u+c_1)} + \frac{u-2c_1}{3}\right)U_x. \tag{2.34}$$

Отметим, что пара, составленная из уравнений (2.33) и (2.34) является парой Лакса для уравнения КдФ (2.1), но представленной в нелинейной форме. Покажем, что полученная таким образом пара Лакса линеаризуется при помощи подходящей замены переменных. Для приведения этой пары к линейному виду, выразим переменные U и U_x как некоторые квадратичные формы от новых переменных φ и ψ, так чтобы подкоренное выражение в уравнении (2.33) было полным квадратом. Такую квадратичную форму можно выбрать несколькими способами. Поскольку произвольная квадратичная форма $w(U, U_x) = cU_x^2 + rUU_x + sU^2$ при помощи линейного преобразования может быть преобразована к каноническому виду, будем рассматривать $w(P, Q) = P^2 + Q^2$. Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Квадратичная форма $w(P, Q) = P^2 + Q^2$, где*

$$P = \alpha_1\varphi^2 + \beta_1\varphi\psi + \gamma_1\psi^2, \quad Q = \alpha_2\varphi^2 + \beta_2\varphi\psi + \gamma_2\psi^2 \tag{2.35}$$

может быть записана в виде $P^2 + Q^2 = (\alpha_3\varphi^2 + \beta_3\psi^2)^2$ тогда и только тогда, когда коэффициенты формы (2.35) удовлетворяют одному из следующих двух условий

1) $\beta_2 = \alpha_1 = \gamma_1 = 0$, $\beta_1^2 + 4\alpha_2\gamma_2 = 0$;

2) существует функция h такая что $\alpha_2 = h\alpha_1$, $\gamma_2 = h\gamma_1$, $\beta_1 = -h\beta_2$, $\beta_2^2 + 4\alpha_1\gamma_1 = 0$.

Доказательство. Подставим представление (2.35) в квадратичную форму $P^2 + Q^2 = (\alpha_3\varphi^2 + \beta_3\psi^2)^2$:

$$(\alpha_1\varphi^2 + \beta_1\varphi\psi + \gamma_1\psi^2)^2 + (\alpha_2\varphi^2 + \beta_2\varphi\psi + \gamma_2\psi^2)^2 = (\alpha_3\varphi + \beta_3\psi)^2. \tag{2.36}$$

Раскроем скобки в (2.36) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях функций φ и ψ:

$$\begin{aligned}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\varphi^4 + (\beta_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 + \beta_2^2 + 2\alpha_2\gamma_2)\varphi^2\psi^2 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\psi^4 \\ +2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\varphi^3\psi + 2(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)\varphi\psi^3 \\ = \alpha_3^2\varphi^4 + 2\alpha_3\beta_3\varphi^2\psi^2 + \beta_3^2\psi^4.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Сравнивая коэффициенты при φ и ψ в (2.37) получаем следующие пять равенств:

$$\begin{aligned}&1.\quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0,\\ &2.\quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0,\\ &3.\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha_3^2,\\ &4.\quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \beta_3^2,\\ &5.\quad \beta_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1 + \beta_2^2 + 2\alpha_2\gamma_2 = 2\alpha_3\beta_3.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Из уравнений 1 и 2 в (2.38) имеем две возможные ситуации:

$$a)\quad \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_1 = 0, \tag{2.39}$$

$$b)\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = h, \tag{2.40}$$

где h - некоторая произвольная функция.

В случае (2.39) из оставшихся условий в (2.38) найдем:

$$\alpha_3^2 = \alpha_2^2, \quad \beta_3^2 = \gamma_2^2, \quad \beta_1^2 + 4\alpha_2\gamma_2 = 0. \tag{2.41}$$

Аналогично, случай (2.40) порождает следующие три равенства:

$$\alpha_3^2 = (h^2 + 1)\alpha_1^2, \quad \beta_3^2 = (h^2 + 1)\gamma_1^2, \quad \beta_2^2 + 4\alpha_1\gamma_1 = 0. \tag{2.42}$$

□

Следуя Лемме 2.1 выберем следующую замену переменных

$$U = \frac{2}{\sqrt{6}}\tilde{\varphi}\tilde{\psi}, \tag{2.43}$$

$$U_x = \frac{1}{3}\sqrt{u+c_1}(\tilde{\varphi}^2 - \tilde{\psi}^2). \tag{2.44}$$

Из условия совместности равенств (2.43) и (2.44), имеем

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\tilde{\varphi}_x\tilde{\psi} + \tilde{\varphi}\tilde{\psi}_x\right) = \frac{1}{3}\sqrt{u+c_1}(\tilde{\varphi}^2 - \tilde{\psi}^2). \tag{2.45}$$

Получим еще одно равенство на переменные $\tilde{\varphi}_x$ и $\tilde{\psi}_x$. Запишем условие совместности уравнений (2.44) и (2.33), в котором переменные U_x и U заменим в силу (2.43) и (2.44):

$$\begin{aligned}\frac{u_x}{6\sqrt{u+c_1}}&(\tilde{\varphi}^2 - \tilde{\psi}^2) + \frac{2}{3}\sqrt{u+c_1}(\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_x - \tilde{\psi}\tilde{\psi}_x)\\ &= \frac{1}{6}\frac{u_x(\tilde{\varphi}^2 + \tilde{\psi}^2)}{\sqrt{u+c_1}} + \frac{1}{6}\frac{u_x(\tilde{\varphi}^2 - \tilde{\psi}^2)}{\sqrt{u+c_1}} - \frac{2\sqrt{6}}{9}(u+c_1)\tilde{\varphi}\tilde{\psi}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Комбинируя равенства (2.45) и (2.46) получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_x = \dfrac{u_x}{4(u+c_1)}\tilde{\varphi} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{u+c_1}\tilde{\psi}, \\ \tilde{\psi}_x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{u+c_1}\tilde{\varphi} - \dfrac{u_x}{4(u+c_1)}\tilde{\psi}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Действуя аналогичным образом, при помощи равенств (2.43), (2.44) и (2.34), находим эволюцию по времени переменных $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_t = \left(\dfrac{3u_{xxx} + u_x(u-2c_1)}{12(u+c_1)}\right)\tilde{\varphi} - \dfrac{\sqrt{6}}{18}(u-2c_1)\sqrt{u+c_1}\tilde{\psi}, \\ \tilde{\psi}_t = \left(\dfrac{u_{xx}}{\sqrt{6}\sqrt{u+c_1}} + \dfrac{\sqrt{6}}{18}(u-2c_1)\sqrt{u+c_1}\right)\tilde{\varphi} - \left(\dfrac{3u_{xxx} + u_x(u-2c_1)}{12(u+c_1)}\right)\tilde{\psi}. \end{cases} \tag{2.48}$$

Пара (2.47), (2.48) представляет собой линейную пару Лакса для уравнения КдФ (2.1). Приведем пару (2.47), (2.48) к известной паре Лакса. Исключим в системе (2.47) зависимость от u_x. С этой целью сделаем замену переменных

$\tilde{\varphi} = \alpha\varphi$ и $\tilde{\psi} = \beta\psi$, которое приводит (2.47) к виду

$$\begin{cases} \varphi_x = \left(\dfrac{u_x}{4(u+c_1)} - \dfrac{\alpha_x}{\alpha}\right)\varphi - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{u+c_1}\dfrac{\beta}{\alpha}\psi, \\ \psi_x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{u+c_1}\dfrac{\alpha}{\beta}\varphi - \left(\dfrac{u_x}{4(u+c_1)} + \dfrac{\beta_x}{\beta}\right)\psi. \end{cases}$$

Потребуем выполнения равенств

$$\frac{\alpha_x}{\alpha} = \frac{u_x}{4(u+c_1)}, \quad \frac{\beta_x}{\beta} = -\frac{u_x}{4(u+c_1)}.$$

Откуда имеем $\alpha = (u+c_1)^{\frac{1}{4}}$, $\beta = (u+c_1)^{-\frac{1}{4}}$ и следовательно

$$\begin{cases} \varphi_x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\psi, \\ \psi_x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(u+c_1)\varphi. \end{cases} \tag{2.49}$$

Перейдем от системы (2.49) к уравнению второго порядка на переменную φ, т.е. имеем

$$\varphi_{xx} = \left(\frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{6}u\right)\varphi, \quad \lambda = -\frac{2}{3}c_1. \tag{2.50}$$

В результате указанных выше преобразований система (2.48) перейдет к уравнению вида

$$\varphi_t = \left(\frac{1}{3}u + \lambda\right)\varphi_x - \frac{1}{6}u_x\varphi. \tag{2.51}$$

Пара уравнений (2.50), (2.51) совпадает с известной парой Лакса для уравнения КдФ.

Перейдем теперь к задаче построения оператора рекурсии для уравнения КдФ. Ранее, во введении, было отмечено, что обобщенное инвариантное многообразие

$$U_{xx} = \frac{u_x U_x}{2(u+c_1)} + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_1)(U^2+6c_2)}}{6(u+c_1)} - \frac{2}{3}(u+c_1)U \tag{2.52}$$

связано с линейным обобщенным инвариантным многообразием

$$U_{xxx} = \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} - \frac{2}{3}(u+c_1)U_x + \left(\frac{2(u+c_1)u_{xx}}{3u_x} - u_x\right)U. \tag{2.53}$$

Действительно, покажем, что путем исключения параметра c_2 из уравнения (2.52) и его дифференциального следствия, можно получить линейное по U, U_x, U_{xx} обобщенное инвариантное многообразие третьего порядка (2.53). Перепишем (2.52) в виде

$$U_{xx} - \frac{u_x U_x}{2(u+c_1)} + \frac{2}{3}(u+c_1)U = \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_1)(U^2+6c_2)}}{6(u+c_1)}. \tag{2.54}$$

Возведем в квадрат обе части равенства (2.54) и разрешим полученное выражение относительно постоянной c_2:

$$\begin{aligned} c_2 = \frac{u+c_1}{u_x^2}U_{xx}^2 + \left(\frac{4(u+c_1)^2}{3u_x^2}U - \frac{1}{u_x}U_x\right)U_{xx} \\ -\frac{2(u+c_1)}{3u_x}UU_x + \left(\frac{4(u+c_1)^3}{9u_x^2} - \frac{1}{6}\right)U^2. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Продифференцируем равенство (2.55) по переменной x:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2(u+c_1)}{u_x^2}U_{xx} - \frac{1}{u_{xx}}U_x + \frac{4(u+c_1)^2}{3u_x^2}U\right)U_{xxx} \\ &-\frac{2(u+c_1)u_{xx}}{u_x^3}U_{xx}^2 - \left(\frac{8(u+c_1)u_{xx}}{3u_x^3} - \frac{2(u+c_1)}{u_x}\right)UU_{xx} \\ &+\left(\frac{u_{xx}}{u_x^2} + \frac{4(u+c_1)^2}{3u_x^2}\right)U_xU_{xx} + \left(\frac{4(u+c_1)^2}{3u_x} - \frac{8(u+c_1)^3u_{xx}}{9u_x^3}\right)U^2 \\ &-\frac{2(u+c_1)}{3u_x}U_x^2 + \left(\frac{2(u+c_1)u_{xx}}{3u_x^2} + \frac{8(u+c_1)^3}{9u_x^2} - 1\right)UU_x = 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Упростим полученное выражение и перепишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2(u+c_1)}{u_x^2}U_{xx} - \frac{1}{u_{xx}}U_x + \frac{4(u+c_1)^2}{3u_x^2}U\right)\times \\ &\quad\left(U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} + \frac{2}{3}(u+c_1)U_x - \left(\frac{2(u+c_1)u_{xx}}{3u_x} - u_x\right)U\right) = 0. \end{aligned}$$

Это выражение распадается на следующие два уравнения:

1. $$\frac{2(u+c_1)}{u_x^2}U_{xx} - \frac{1}{u_{xx}}U_x + \frac{4(u+c_1)^2}{3u_x^2}U = 0, \tag{2.57}$$

2. $$U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} + \frac{2}{3}(u+c_1)U_x - \left(\frac{2(u+c_1)u_{xx}}{3u_x} - u_x\right)U = 0. \tag{2.58}$$

Предположим, что выполняется условие (2.57). Тогда, с учетом (2.54), имеем равенство

$$\left(\frac{1}{u_{xx}} - \frac{1}{u_x}\right) U_x - \frac{\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_1)(U^2+6c_2)}}{3u_x} = 0,$$

которое противоречит тому, что переменные U_x, U, u, u_x, u_{xx}, c_1, c_2 являются свободными переменными, принимающими произвольные значения (см. Замечание, §1). Следовательно, имеет место только (2.58), т.е.

$$U_{xxx} = \frac{u_{xx}}{u_x} U_{xx} - \frac{2}{3}(u+c_1)U_x + \left(\frac{2(u+c_1)u_{xx}}{3u_x} - u_x\right) U. \tag{2.59}$$

Удивительный факт состоит в том, что полученное уравнение третьего порядка оказалось линейным.

Покажем, что многообразие (2.59) связано с известным оператором рекурсии для уравнения КдФ (см. [54])

$$R = D_x^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_x D_x^{-1}.$$

Перепишем (2.59) в следующем виде

$$U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} + \frac{2}{3}uU_x - \left(\frac{2uu_{xx}}{3u_x} - u_x\right) U = \lambda \left(U_x - \frac{u_{xx}}{u_x}U\right),$$

где $\lambda = -\frac{2}{3}c_1$. Последнее равенство может быть представлено следующим образом

$$L_2 U = \lambda L_1 U, \tag{2.60}$$

где $L_2 = D_x^3 - \frac{u_{xx}}{u_x}D_x^2 + \frac{2}{3}uD_x - \left(\frac{2uu_{xx}}{3u_x} - u_x\right)$ и $L_1 = u_x D_x \frac{1}{u_x}$ – дифференциальные операторы. Подействуем на обе части равенства (2.60) оператором $L_1^{-1} = u_x D_x^{-1} \frac{1}{u_x}$ и после некоторых элементарных преобразований получим:

$$\left(D_x^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_x D_x^{-1}\right) U = \lambda U. \tag{2.61}$$

Заметим, что оператор в левой части равенства (2.61) совпадает с оператором рекурсии для уравнения КдФ. Таким образом, получено, что оператор рекурсии для уравнения КдФ представляется в виде отношения двух дифференциальных операторов L_1 и L_2:

$$R = L_1^{-1} L_2.$$

Следует отметить, что оператор L_1 связан с классической симметрией уравнения КдФ $u_\tau = u_x$, а именно равенство $L_1 U = 0$ совпадает с тривиальным обобщенным инвариантным многообразием $U_x - \frac{u_{xx}}{u_x} U = 0$, который был рассмотрен выше (см. §1).

Оказалось, что такой же феномен наблюдается и при исследовании других уравнений.

§3. Обобщенные инвариантные многообразия для некоторых уравнений типа КдФ и их приложения.

Рассмотрим уравнения

$$u_t = u_{xxx} + \frac{1}{2} u_x^3 - \frac{3}{2} u_x \sin^2 u, \tag{3.1}$$

$$u_\tau = u_{yyy} - \frac{3 u_y u_{yy}^2}{2(1 + u_y^2)} + \frac{1}{2} u_y^3, \tag{3.2}$$

найденные в работе [24] в процессе симметрийной классификации интегрируемых уравнений типа КдФ. Позже стало ясно, что эти уравнения являются симметриями следующего интегрируемого уравнения гиперболического типа, впервые появившегося в более общем виде в работе [3]

$$u_{xy} = \sqrt{1 + u_y^2} \sin u.$$

Рассмотрим сначала уравнение (3.1) и пользуясь определением 1.5 построим для него обобщенное инвариантное многообразие. Линеаризуем уравнение (3.1) в окрестности его произвольного решения $u = u(x, t)$:

$$U_t = U_{xxx} + \frac{3}{2}(u_x^2 - \sin^2 u) U_x - 3 u_x \sin u \cos u \, U \tag{3.3}$$

и будем искать совместное с ним обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$U_m = F(x, t, U, U_x, U_{xx}, \ldots, U_{m-1}; u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_n). \tag{3.4}$$

В зависимости от выбора m и n в (3.4) можно построить различные обобщенные инвариантные многообразия. Приведем несколько примеров ОИМ для уравнения (3.1):

$$\begin{aligned}
&1)\, U_x = (\sin u)\sqrt{U^2 + c};\\
&2)\, U_x = (\cos u)\sqrt{c - U^2};\\
&3)\, U_{xx} = (\cot u) u_x U_x + (\sin^2 u)U - \frac{c}{\sin u} u_x;\\
&4)\, U_{xx} = -(\tan u) u_x U_x - (\cos^2 u)U + \frac{c}{\cos u} u_x;
\end{aligned} \tag{3.5}$$

которые, однако, не подходят для построения пары Лакса[1]. Здесь c - произвольная постоянная.

Аналогично рассмотренному выше примеру (§2), предположим, что обобщенное инвариантное многообразие (3.4) имеет следующий нелинейный вид

$$c + \Sigma_{i,j=0}^{m} \alpha_{ij} U_i U_j = 0, \tag{3.6}$$

где α_{ij} - функция зависящая от переменных u, u_x, u_{xx}, $\ldots$, u_n, c - произвольная постоянная.

Выберем m и n в (3.6). Положим $m = 2$ и поскольку коэффициенты линеаризованного уравнения (3.3) зависят от u, u_x предположим, что коэффициенты α_{ij} квадратичной формы (3.6) зависят от тех же переменных, т.е. $n = 1$. Для удобства перепишем уравнение (3.6) в виде разрешенном относительно U_{xx}:

$$U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x) \tag{3.7}$$

где $F = aU_x + bU + R$, $R = \sqrt{cUU_x + rU_x^2 + sU^2 + v}$. Функции a, b, $\ldots$, v зависят от u, u_x.

[1] Случай 4) был найден независимо Р.Н. Гарифуллиным (частная беседа).

Замечание 3.2. *Вырожденный случай когда F рациональная функция от U, U_x приводит к линейным обобщенным инвариантным многообразиям* 3) *и* 4) *из (3.5).*

Очевидно, что условие совместности уравнений (3.3) и (3.7) приводит к следующему уравнению

$$D_t F - D_x U_t|_{(3.1),(3.3),(3.7)} = 0. \tag{3.8}$$

Сделаем все дифференцирования в уравнении (3.8) и заменим переменные u_t, $u_{x,t}$ в силу (3.1), переменные U_t, $U_{x,t}$ в силу (3.3) и переменные U_{xx}, U_{xxxx} в силу (3.7), тогда получим переопределенную систему уравнений на искомую функцию F. Здесь мы приводим ее в сокращенном виде

$$\begin{aligned} F_{u_x u_x} u_{xx} u_{xxx} + \Big(u_x U_x + U_x F_{U u_x} + F F_{U_x u_x} + u_x F_{u u_x} - \sin u \cos u\, U\Big) u_{xxx} \\ = G(U, U_x, u, u_x, u_{xx}). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Приравнивая коэффициенты при $u_{xx}u_{xxx}$ мы получим уравнение $F_{u_x u_x} = 0$, которое благодаря представлению $F = a(u,u_x)U_x + b(u,u_x)U + \sqrt{c(u,u_x)UU_x + r(u,u_x)U_x^2 + s(u,u_x)U^2 + v(u,u_x)}$ принимает вид

$$\begin{aligned} & a_{u_x u_x} U_x + b_{u_x u_x} U + \frac{1}{4R^3}\big((2rr_{u_x u_x} - r_{u_x}^2)U_x^4 + 2(rc_{u_x u_x} - c_{u_x} r_{u_x} + cr_{u_x u_x})U_x^3 U \\ & +(2sr_{u_x u_x} + 2cc_{u_x u_x} - c_{u_x}^2 + 2rs_{u_x u_x} - 2s_{u_x} r_{u_x})U^2 U_x^2 \\ & +2(r_{u_x u_x} v + v_{u_x u_x} r - v_{u_x} r_{u_x})U_x^2 + 2(c_{u_x u_x} v + v_{u_x u_x} c - v_{u_x} c_{u_x})U_x U \\ & +2(sc_{u_x u_x} - c_{u_x} s_{u_x} + cs_{u_x u_x})U^3 U_x + 2(s_{u_x u_x} v + v_{u_x u_x} s - v_{u_x} s_{u_x})U^2 \\ & +(2vv_{u_x u_x} - v_{u_x}^2) + (2ss_{u_x u_x} - s_{u_x}^2)U^4\big) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку переменные U, U_x, R предполагаются независимыми мы будем приравнивать коэффициенты при этих переменных и их произведениях. В результате мы получим следующие уравнения

$$
\begin{aligned}
&1)\, a_{u_x u_x} = 0;\\
&2)\, b_{u_x u_x} = 0;\\
&3)\, 2r r_{u_x u_x} - r_{u_x}^2 = 0;\\
&4)\, 2s s_{u_x u_x} - s_{u_x}^2 = 0;\\
&5)\, 2v v_{u_x u_x} - v_{u_x}^2 = 0;\\
&6)\, r c_{u_x u_x} - c_{u_x} r_{u_x} + c r_{u_x u_x} = 0;\\
&7)\, s c_{u_x u_x} - c_{u_x} s_{u_x} + c s_{u_x u_x} = 0;\\
&8)\, 2s r_{u_x u_x} + 2c c_{u_x u_x} - c_{u_x}^2 + 2r s_{u_x u_x} - 2 s_{u_x} r_{u_x} = 0;\\
&9)\, r_{u_x u_x} v + v_{u_x u_x} r - v_{u_x} r_{u_x} = 0;\\
&10)\, c_{u_x u_x} v + v_{u_x u_x} c - v_{u_x} c_{u_x} = 0;\\
&11)\, s_{u_x u_x} v + v_{u_x u_x} s - v_{u_x} s_{u_x} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Первые пять из этих уравнений легко интегрируются в квадратурах

$$
\begin{aligned}
&1')\, a(u, u_x) = a_1(u) u_x + a_2(u);\\
&2')\, b(u, u_x) = b_1(u) u_x + b_2(u);\\
&3')\, r(u, u_x) = \frac{1}{4} \left(r_1(u) u_x + r_2(u)\right)^2;\\
&4')\, s(u, u_x) = \frac{1}{4} \left(s_1(u) u_x + s_2(u)\right)^2;\\
&5')\, v(u, u_x) = \frac{1}{4} \left(v_1(u) u_x + v_2(u)\right)^2.
\end{aligned}
$$

Исследуем оставшиеся шесть уравнений $6) - 11)$. Воспользовавшись формулой $3')$ можно легко решить уравнение $6)$. В зависимости от $r_1(u)$ существуют две возможности:

$$
\begin{aligned}
&6a)\, c(u, u_x) = c_1(u) u_x + c_2(u) \quad \text{при} \quad r_1(u) = 0;\\
&6b)\, c(u, u_x) = c_3(u) \left(u_x + \frac{r_2(u)}{r_1(u)}\right)^2 + c_4(u) \left(u_x + \frac{r_2(u)}{r_1(u)}\right) \quad \text{для} \quad r_1(u) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Сосредоточимся на случае 6a). Тогда благодаря условию 4$'$) уравнение 7) дает

$$a)\, s_1(u) = 0 \qquad \text{или} \qquad b)\, c_1(u)s_2(u) = s_1(u)c_2(u). \tag{3.11}$$

В случае a) в (3.11) благодаря уравнению 8) получим $c_1(u) = 0$. Исследование следующего уравнения 9) дает:

$$9a)\, v_1(u) = 0 \qquad \text{или} \qquad 9b)\, r_2(u) = 0. \tag{3.12}$$

В случае 9a) оставшиеся уравнения 10) и 11) тождественно равны нулю. Поэтому искомая функция F имеет вид

$$\begin{aligned} F(U, U_x, u, u_x) = (a_1(u)u_x + a_2(u))U_x + (b_1(u)u_x + b_2(u))U \\ + \frac{1}{2}\sqrt{r_2^2(u)U_x^2 + 4c_2(u)U_xU + s_2^2(u)U^2 + v_2^2(u)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

В случае 9b) из уравнений 10) и 11) имеем $c_2(u) = 0$ и $s_2(u) = 0$, соответственно. Тогда получаем функцию F следующего вида:

$$\begin{aligned} F(U, U_x, u, u_x) = (a_1(u)u_x + a_2(u))U_x + (b_1(u)u_x + b_2(u))U \\ + \frac{1}{2}\left(v_1(u)u_x + v_2(u)\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

В случае b) в (3.11) из того же уравнения 8) получим $c_1(u) = \frac{1}{2}\varepsilon s_1(u)r_2(u)$, $\varepsilon = \pm 1$. Уравнение 9) дает те же два условия:

$$9a)\, v_1(u) = 0 \qquad \text{или} \qquad 9b)\, r_2(u) = 0. \tag{3.15}$$

Рассматривая случай 9a) получаем, что уравнение 10) тождественно равно нулю, а из 11) имеем 2 возможных случая

$$11a)\, s_1(u) = 0 \qquad \text{или} \qquad 11b)\, v_2(u) = 0. \tag{3.16}$$

При условии, что выполняется случай 11a), получаем

$$\begin{aligned} F(U, U_x, u, u_x) = (a_1(u)u_x + a_2(u))U_x + (b_1(u)u_x + b_2(u))U \\ + \frac{1}{2}\sqrt{(r_2(u)U_x + \varepsilon s_2(u)U)^2 + v_2^2(u)}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

а в случае 11b), функция F представляется в виде

$$F(U,U_x,u,u_x)=\left(a_1(u)u_x+a_2(u)\right)U_x+\left(b_1(u)u_x+b_2(u)\right)U \\ +\frac{1}{2}\left((s_1(u)u_x+s_2(u))U+\varepsilon r_2(u)U_x\right). \tag{3.18}$$

В случае 9b), уравнение 10) также тождественно равно нулю, а 11) приводит к равенству

$$v_1(u)s_2(u)=s_1(u)v_2(u). \tag{3.19}$$

Тогда

$$F(U,U_x,u,u_x)=(a_1(u)u_x+a_2(u))U_x+(b_1(u)u_x+b_2(u))U \\ +\frac{1}{2}\sqrt{(s_1(u)u_x+s_2(u))^2U^2+(v_1(u)u_x+v_2(u))^2}, \tag{3.20}$$

где коэффициенты $s_1(u)$, $s_2(u)$, $v_1(u)$ и $v_2(u)$ связаны соотношением (3.19)

Перейдем к случаю 6b). Теперь из уравнения 7) в силу 4$'$) находим

$$a)\, r_1(u)s_2(u)=s_1(u)r_2(u); \tag{3.21}$$

$$b)\, s_1(u)c_3(u)r_2(u)+s_1(u)c_4(u)r_1(u)-r_1(u)s_2(u)c_3(u)=0.$$

В случае a) в (3.21) уравнение 8) дает $c_4(u)=0$, а из 9) имеем равенство $r_1(u)v_2(u)-v_1(u)r_2(u)=0$. В силу последних двух равенств, уравнения 10) и 11) тождественно равны нулю. Следовательно

$$F(U,U_x,u,u_x)=(a_1(u)u_x+a_2(u))U_x+(b_1(u)u_x+b_2(u))U \\ +\frac{1}{2}\left(u_x+\frac{r_2(u)}{r_1(u)}\right)\sqrt{r_1^2(u)U_x^2+4c_3(u)U_xU+s_1^2(u)U^2+v_1^2(u)}. \tag{3.22}$$

В случае b) в (3.21) благодаря уравнению 8) должны быть выполнены следующие два условия

$$c_4(u)=\frac{1}{2}\varepsilon(r_1(u)s_2(u)-s_1(u)r_2(u)) \qquad \text{и} \qquad c_3(u)=\frac{1}{2}\varepsilon r_1(u)s_1(u).$$

Далее из уравнения 9) имеем, что $v_2(u)=\frac{v_1(u)r_2(u)}{r_1(u)}$, уравнение 10) дает тождественный нуль, а 11) приводит к двум возможным вариантам:

$$11a)\, v_1(u)=0 \qquad \text{или} \qquad 11b)\, r_1(u)s_2(u)-s_1(u)r_2(u)=0. \tag{3.23}$$

Тогда, в случае 11a), функция F представляется в виде

$$F(U,U_x,u,u_x) = (a_1(u)u_x + a_2(u) + \frac{1}{2}(r_1(u)u_x + r_2(u)))U_x \\ + (b_1(u)u_x + b_2(u) + \frac{1}{2}\varepsilon(s_1(u)u_x + s_2(u)))U, \tag{3.24}$$

а в случае 11b)

$$F(U,U_x,u,u_x) = (a_1(u)u_x + a_2(u))U_x + (b_1(u)u_x + b_2(u))U \\ +\frac{1}{2}\left(u_x + \frac{r_2(u)}{r_1(u)}\right)\sqrt{(r_1(u)U_x + \varepsilon s_1(u)U)^2 + v_1^2(u)}. \tag{3.25}$$

Подведем итоги рассуждений выше. Мы нашли восемь возможных представления функции F, три из которых линейны относительно U, U_x и, следовательно, совпадают с тем, что дано (3.5) выше, в то время как пять остальных содержат квадратный корень, и они нуждаются в дальнейшем исследовании.

Покажем, что случай (3.13) противоречивый. Подставим (3.13) в уравнение (3.9) и соберем коэффициенты при независимых переменных u_{xxx}, u_{xx}, u_x, U, U_x и R. В результате мы получим набор уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $a_1(u)$, $a_2(u)$, $b_1(u)$, $\ldots$. Оказывается, что некоторые из этих уравнений противоречат друг другу. Например, коэффициенты при $u_{xxx}R$ и $u_{xxx}U$ порождают уравнения $a_1(u) = 0$ и $a_1(u)b_2(u) - \sin u \cos u = 0$ которые противоречат друг другу. Многообразия (3.17) и (3.20) также являются противоречивыми, аналогично случаю (3.13).

Рассмотрим два оставшихся возможных случая (3.22) и (3.25). Начнем с уравнения (3.22). Подставим анзац (3.22) в уравнение (3.9) и затем разделим (3.9) на набор уравнений сравнивая коэффициенты при независимых переменных u_{xxx}, u_{xx}, u_x, U, U_x, R и их произведениях. На первом этапе будем использовать следующие пять из них

$$
\begin{aligned}
&1)\, r_2(u)a_1(u)v_1^2(u) = 0;\\
&2)\, 2c_3(u)r_1(u)b_2(u) + s_1^2(u)a_1(u)r_2(u) = 0;\\
&3)\, 2a_1(u)b_2(u)r_1(u) + c_3(u)r_2(u) - 2r_1(u)\sin u \cos u = 0;\\
&4)\, 2c_3(u) + r_1^2(u)a_2(u) + a_1(u)r_1(u)r_2(u) = 0;\\
&5)\, 2c_3'(u) + r_1^2(u)b_1(u) + 6a_1(u)c_3(u) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Как это очевидно следует из уравнения 1) есть три следующие возможности:

$$1a)\, r_2(u) = 0, \quad 1b)\, a_1(u) = 0, \quad 1c)\, v_1(u) = 0. \tag{3.27}$$

Начнем с $1a)$ в (3.27). Тогда в силу 2) мы имеем два возможных случая $c_3(u) = 0$ или $b_2(u) = 0$. Однако в силу уравнения 3) должно быть $a_1(u) \neq 0$ и $b_2(u) \neq 0$, следовательно $c_3(u) = 0$. Далее из уравнений 4) и 5) находим $a_2(u) = b_1(u) = 0$. Благодаря этим характеристикам из набора уравнений, упомянутых выше, мы имеем

$$b_2'(u) + a_1(u)b_2(u) - 3\sin u \cos u = 0. \tag{3.28}$$

Сравнивая (3.28) и третье уравнение в (3.26) мы получим

$$b_2(u) = \sin^2 u + k, \quad k = const.$$

Далее третье уравнение в (3.26) позволяет определить $a_1(u)$:

$$a_1(u) = \frac{\sin u \cos u}{\sin^2 u + k}.$$

Перепишем уравнение (3.9) на основании найденных характеристик и рассмотрим коэффициент при $u_{xxx}u_xU_x^2$. Это позволяет найти

$$r_1(u) = \frac{k_1}{2\sin^2 u + 2k}, \quad k_1 = const.$$

Используя коэффициенты при $u_{xxx}u_xU^2$ в (3.9) мы получим

$$s_1(u) = \frac{k_2}{\sqrt{2\sin^2 u + 2k}}, \quad k_2 = const.$$

Продолжая тем же путем и собирая коэффициенты при $u_{xxx}u_xU_xR$ и $u_{xxx}UU_x$ мы устанавливаем связь между постоянными параметрами:

$$k_1^2 + 16(k^2 + k) = 0 \quad \text{и} \quad k_2^2 - 8(k^2 + k) = 0.$$

И наконец, приравнивая коэффициенты при $u_{xxx}u_x$ находим последнюю искомую функцию $v_1(u)$:

$$v_1(u) = \frac{k_3}{\sqrt{\sin^2 u + k}}, \quad k_3 = const.$$

Обобщая все вышеприведенные рассуждения, находим окончательный вид искомого обобщенного инвариантного многообразия (3.7):

$$\begin{aligned} U_{xx} = {} & \frac{u_x \sin u \cos u}{\sin^2 u + c_0} U_x + (\sin^2 u + c_0)U \\ & + \frac{u_x}{2(\sin^2 u + c_0)} \sqrt{4c_0(c_0+1)((\sin^2 u + c_0)U^2 - U_x^2) + c_1(\sin^2 u + c_0)}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

где $k := c_0$, $k_3^2 := c_1$. Очевидно при $c_0 = 0$ и $c_0 = -1$ мы получаем линейные инвариантные поверхности 3) и соответственно 4) обсужденные в начале раздела (см. (3.5)).

Рассмотрим теперь случай $1b)$ в (3.27). Выпишем еще несколько уравнений в дополнение к (3.26):

$$\begin{aligned} & i)\, r_1^2(u) + 4 = 0; \\ & ii)\, v_1'(u) = 0; \\ & iii)\, c_3(u) + 2b_1'(u) = 0; \\ & iv)\, r_1(u)r_2(u) + 4b_1(u) = 0; \\ & v)\, r_1^2(u)b_2(u) + 2c_3(u)a_2(u) + s_1^2(u) = 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Очевидно, из $i)$ и $ii)$ следует, что $r_1(u) = \pm 2i$ и $v_1(u) = k_4$, $k_4 = const$. Исследование уравнений 2) и 3) в (3.26) приводит к равенству $b_2(u) = 0$. Из пятого уравнения в (3.26) и третьего в (3.30) находим:

$$b_1(u) = k_5 \sin u + k_6 \cos u;$$

$$c_3(u) = -2k_5 \cos u + 2k_6 \sin u.$$

Четвертые уравнения в (3.26) и (3.30) позволяют найти вид функций $a_2(u)$ и $r_2(u)$:

$$a_2(u) = -k_5 \cos u + k_6 \sin u;$$

$$r_2(u) = \pm 2i(k_5 \sin u + k_6 \cos u).$$

Вид функции $s_1(u)$ определяем пользуясь уравнением $v)$ в (3.30):

$$s_1(u) = \pm 2i(k_5 \cos u - k_6 \sin u).$$

Из уравнения 3) в (3.26) находим условия на постоянные параметры:

$$k_5 = \sqrt{k_6^2 - 1} \quad \text{и} \quad k_6\sqrt{k_6^2 - 1} = 0.$$

Таким образом, в зависимости от постоянного параметра k_6 получаем различные многообразия. В случае, если $k_6 = 0$ многообразие (3.7) имеет вид:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= -i \cos u U_x + i u_x \sin u U \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_x + i \sin u)\sqrt{4(iU_x - \cos u U)^2 + c_1}, \quad k_4^2 := c_1. \end{aligned} \tag{3.31}$$

В случае, если $k_6 = \pm 1$ поверхность (3.7) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= \pm \sin u U_x \pm \cos u u_x U \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_x \pm \cos u)\sqrt{-4(U_x \pm \sin u U)^2 + c_1}, \quad k_4^2 := c_1. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Здесь остается рассмотреть случай $1c)$ в (3.27). Однако, как оказалось, этот случай приводит к многообразиям, являющимися частными случаями уравнений (3.29), (3.31), (3.32). В силу этого вычисления приводить не будем.

Перейдем теперь к исследованию уравнения (3.25). Подставим (3.25) в уравнение (3.9) и выведем набор необходимых уравнений, как и в предыдущем случае. Выпишем несколько из них

$$
\begin{aligned}
&1)\, r_2(u)a_1(u)v_1^2(u) = 0;\\
&2)\, s_1(u)(\varepsilon a_1(u)r_2(u)s_1(u) + r_1^2(u)b_2(u)) = 0;\\
&3)\, 4a_1(u)b_2(u) + \varepsilon s_1(u)r_2(u) - 4\sin u\cos u = 0;\\
&4)\, r_1^2(u)b_2(u) + \varepsilon a_2(u)s_1(u)r_1(u) + s_1^2(u) + 2\varepsilon a_1(u)s_1(u)r_2(u) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

В силу 1) необходимо рассмотреть три возможные ситуации:

$$
1a)\, v_1(u) = 0, \quad 1b)\, r_2(u) = 0, \quad 1c)\, a_1(u) = 0. \tag{3.34}
$$

В случае выполнения условия $1a$) многообразие (3.25) становится линейным по переменным U_x и U, и не представляет интереса. Рассмотрим второй случай, когда $r_2(u) = 0$. В силу этого, из второго уравнения списка (3.33) видно, что либо $s_1(u) = 0$, либо $b_2(u) = 0$. С учетом уравнения 3) из (3.33) имеем, что $s_1(u) = 0$. Далее, в силу найденного, из уравнения 4) следует, что $b_2(u) = 0$, что противоречит уравнению 3) из (3.33).

Предположим теперь, что выполняется третье условие $a_1(u) = 0$ в (3.34). Тогда из уравнений 2) и 3) в (3.33) находим $b_2(u) = 0$. Заметим, что многообразие с такими условиями ранее уже было рассмотрено и найдены соответствующие уравнения (3.31) и (3.32), поэтому этот случай не требует дальнейшего изучения. Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.1. *Предположим, что уравнение вида*

$$
U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x)
$$

где $F = aU_x + bU + R$, $R = \sqrt{cUU_x + rU_x^2 + sU^2 + v}$, *функции* a, b, c, r, s, v *зависят от* u, u_x, *задает обобщенное инвариантное многообразие для уравнения*

(3.1). *Тогда оно совпадает с одним из следующих уравнений:*

$$
\begin{aligned}
&1)\, U_{xx} = (\cot u) u_x U_x + (\sin^2 u) U - \frac{c_0}{\sin u} u_x,\\
&2)\, U_{xx} = -(\tan u) u_x U_x - (\cos^2 u) U + \frac{c_0}{\cos u} u_x,\\
&3)\, U_{xx} = -i \cos u U_x + i u_x \sin u U + (u_x + i \sin u)\sqrt{(iU_x - \cos u U)^2 + c_1},\\
&4)\, U_{xx} = \pm \sin u U_x \pm \cos u u_x U + (u_x \pm \cos u)\sqrt{-(U_x \pm \sin u U)^2 + c_1},\\
&5)\, U_{xx} = \frac{u_x \sin u \cos u}{\sin^2 u + c_0} U_x + (\sin^2 u + c_0) U\\
&\qquad + \frac{u_x \sqrt{(c_0^2 + c_0)((\sin^2 u + c_0)U^2 - U_x^2) + c_1(\sin^2 u + c_0)}}{\sin^2 u + c_0},
\end{aligned}
$$

где c_0, c_1 произвольные постоянные.

Замечание 3.3. *Отметим, что пятое уравнение из Теоремы 3.1 требует дальнейшего исследования. В то время, как остальные уравнения из Теоремы 3.1 не вызывают интереса, поскольку они не содержат достаточного количества произвольных постоянных и при помощи них нельзя построить такие объекты как пара Лакса и оператор рекурсии.*

Построим сначала пару Лакса для уравнения (3.1). Воспользуемся обобщенным инвариантным многообразием уравнения (3.1), найденным выше

$$
\begin{aligned}
U_{xx} = &\frac{u_x \sin u \cos u}{\sin^2 u + c_0} U_x + (\sin^2 u + c_0) U\\
&+ \frac{u_x \sqrt{c_0^2 + c_0}\sqrt{(\sin^2 u + c_0)U^2 - U_x^2}}{\sin^2 u + c_0},
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

где произвольную постоянную c_1 положили равным нулю. Перепишем линеаризованное уравнение (3.3) с учетом (3.35):

$$
\begin{aligned}
U_t = &\left(\frac{u_{xx} \sin 2u}{2(\sin^2 u + c_0)} - \frac{\sin^2 u - u_x^2}{2} + c_0\right) U_x\\
&+ \frac{u_{xx} \sqrt{c_0^2 + c_0}\sqrt{(\sin^2 u + c_0)U^2 - U_x^2}}{(\sin^2 u + c_0)}.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Пара (3.35), (3.36) определяет нелинейную пару Лакса для уравнения (3.1). Приведем данную пару к линейному виду подходящей заменой переменных. В силу Леммы выберем:

$$U = 2\tilde{\varphi}\tilde{\psi}, \quad U_x = \sqrt{\sin^2 u + c_0}(\tilde{\varphi}^2 + \tilde{\psi}^2). \tag{3.37}$$

Тогда пара уравнений (3.35) и (3.36) в силу (3.37) сведется к следующей паре

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_x = \dfrac{1}{2}\dfrac{i\sqrt{c_0^2+c_0}u_x}{\sin^2 u + c_0}\tilde{\varphi} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\sin^2 u + c_0}\tilde{\psi}, \\ \tilde{\psi}_x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sin^2 u + c_0}\tilde{\varphi} - \dfrac{1}{2}\dfrac{i\sqrt{c_0^2+c_0}u_x}{\sin^2 u + c_0}\tilde{\psi}, \end{cases} \tag{3.38}$$

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_t = \dfrac{1}{4}\dfrac{i\sqrt{c_0^2+c_0}(2u_{xxx} + u_x^3 - u_x\sin^2 u + 2c_0 u_x)}{\sin^2 u + c_0}\tilde{\varphi} \\ \quad - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2\left(i\sqrt{c_0^2+c_0} - \sin u\cos u\right)u_{xx}}{\sqrt{\sin^2 u + c_0}} + \sqrt{\sin^2 u + c_0}(\sin^2 u - u_x^2 - 2c_0)\right)\tilde{\psi}, \\ \tilde{\psi}_t = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2\left(i\sqrt{c_0^2+c_0} + \sin u\cos u\right)u_{xx}}{\sqrt{\sin^2 u + c_0}} - \sqrt{\sin^2 u + c_0}(\sin^2 u - u_x^2 - 2c_0)\right)\tilde{\varphi} \\ \quad - \dfrac{1}{4}\dfrac{i\sqrt{c_0^2+c_0}(2u_{xxx} + u_x^3 - u_x\sin^2 u + 2c_0 u_x)}{\sin^2 u + c_0}\tilde{\psi}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Система уравнений (3.38), (3.39) определяет линейную пару Лакса уравнения (3.1). Приведем эту пару к стандартному виду. Сделаем замену $\tilde{\varphi} = \alpha\varphi$ и $\tilde{\psi} = \beta\psi$, с целью исключения переменной u_x из (3.38). Тогда из (3.38) получим:

$$\begin{cases} \varphi_x = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{i\sqrt{c_0^2+c_0}u_x}{\sin^2 u + c_0} - \dfrac{\alpha_x}{\alpha}\right)\varphi + \dfrac{\beta}{2\alpha}\sqrt{\sin^2 u + c_0}\psi, \\ \psi_x = \dfrac{\alpha}{2\beta}\sqrt{\sin^2 u + c_0}\varphi - \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{i\sqrt{c_0^2+c_0}u_x}{\sin^2 u + c_0} + \dfrac{\beta_x}{\beta}\right)\psi. \end{cases} \tag{3.40}$$

Пусть выполнены равенства

$$\frac{\alpha_x}{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{i\sqrt{c_0^2+c_0}u_x}{\sin^2 u + c_0}, \quad \frac{\beta_x}{\beta} = -\frac{1}{2}\frac{i\sqrt{c_0^2+c_0}u_x}{\sin^2 u + c_0}.$$

Из которых имеем $\alpha = e^{\frac{1}{2}i\arctan\left(\frac{\sqrt{c_0+1}}{\sqrt{c_0}}\tan u\right)}$, $\beta = e^{-\frac{1}{2}i\arctan\left(\frac{\sqrt{c_0+1}}{\sqrt{c_0}}\tan u\right)}$. Тогда система (3.40) перепишется в виде

$$\begin{cases} \varphi_x = \dfrac{1}{2} e^{-i \arctan\left(\frac{\sqrt{c_0+1}}{\sqrt{c_0}} \tan u\right)} \sqrt{\sin^2 u + c_0} \psi, \\ \psi_x = \dfrac{1}{2} e^{i \arctan\left(\frac{\sqrt{c_0+1}}{\sqrt{c_0}} \tan u\right)} \sqrt{\sin^2 u + c_0} \varphi. \end{cases} \tag{3.41}$$

Перейдем от системы (3.41) к линейному уравнению на φ:

$$\varphi_{xx} = \frac{(\sin u \cos u - \sqrt{\lambda - \lambda^2}) u_x}{\sin^2 u - \lambda} \varphi_x + \frac{\sin^2 u - \lambda}{4} \varphi, \quad \lambda = -c_0. \tag{3.42}$$

Система (3.39) при помощи тех же преобразований приводится к следующему линейному уравнению

$$\varphi_t = \left(\frac{(\sin u \cos u - \sqrt{\lambda - \lambda^2}) u_{xx}}{\sin^2 u - \lambda} - \frac{\sin^2 u - u_x^2}{2} - \lambda \right) \varphi_x + \frac{u_x \sqrt{\lambda - \lambda^2}}{2} \varphi. \tag{3.43}$$

Пара (3.42), (3.43) определяет пару Лакса для уравнения (3.1).

Найдем теперь оператор рекурсии для уравнения (3.1) при помощи обобщенного инвариантного многообразия из (3.35)

$$\begin{aligned} U_{xx} = &\frac{u_x \sin u \cos u}{\sin^2 u + c_0} U_x + (\sin^2 u + c_0) U \\ &+ \frac{u_x \sqrt{(c_0^2 + c_0)((\sin^2 u + c_0) U^2 - U_x^2) + c_1 (\sin^2 u + c_0)}}{\sin^2 u + c_0}. \end{aligned}$$

Исключим постоянный параметр c_1 из рассматриваемого уравнения. Для этого запишем его в виде

$$\begin{aligned} U_{xx} - &\frac{u_x \sin u \cos u}{\sin^2 u + c_0} U_x - (\sin^2 u + c_0) U \\ &= \frac{u_x \sqrt{(c_0^2 + c_0)((\sin^2 u + c_0) U^2 - U_x^2) + c_1 (\sin^2 u + c_0)}}{(\sin^2 u + c_0)} \end{aligned}$$

и возведем в квадрат обе части этого уравнения

$$\begin{aligned} U_{xx}^2 - &2 \frac{u_x \sin u \cos u}{\sin^2 u + c_0} U_x U_{xx} - 2(\sin^2 u + c_0) U U_{xx} \\ &+ \frac{u_x^2 \sin^2 u \cos^2 u}{(\sin^2 u + c_0)^2} U_x^2 + 2 u_x \sin u \cos u U U_x + (\sin^2 u + c_0)^2 U^2 \\ &= \frac{u_x^2 (c_0 (c_0 + 1)((\sin^2 u + c_0) U^2 - U_x^2) + c_1 (\sin^2 u + c_0))}{(\sin^2 u + c_0)^2}. \end{aligned}$$

Перепишем последнее равенство в виде разрешенном относительно переменной c_1:

$$
\begin{aligned}
c_1 = \frac{\sin^2 u + c_0}{u_x^2} U_{xx}^2 + \frac{\sin^2 u \cos^2 u}{\sin^2 u + c_0} U_x^2 + \frac{(\sin^2 u + c_0)^3}{u_x^2} U^2 \\
-\frac{2(\sin^2 u + c_0)^2}{u_x^2} U U_{xx} + \frac{2(\sin^2 u + c_0)\sin u \cos u}{u_x} U U_x \\
-\frac{2\sin u \cos u}{u_x} U_x U_{xx} - \frac{c_0(c_0+1)((\sin^2 u + c_0)U^2 - U_x^2)}{\sin^2 u + c_0}.
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

Подействуем оператором D_x на (3.44) и после некоторых элементарных преобразований получим:

$$
\left(\frac{\sin^2 u + c_0}{u_x^2} U_{xx} - \frac{\sin u \cos u}{u_x} U_x - \frac{(\sin^2 u + c_0)^2}{u_x^2} U\right) \times
$$
$$
\left(U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x} U_{xx} + (u_x^2 - \sin^2 u - c_0) U_x + \frac{u_{xx}(\sin^2 u + c_0) - 3u_x^2 \sin u \cos u}{u_x} U\right) = 0.
$$

Из последнего равенства видно, что имеет место два случая:

$$
\begin{aligned}
&1. \quad \frac{\sin^2 u + c_0}{u_x^2} U_{xx} - \frac{\sin u \cos u}{u_x} U_x - \frac{(\sin^2 u + c_0)^2}{u_x^2} U = 0, \\
&2. \quad U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x} U_{xx} + (u_x^2 - \sin^2 u - c_0) U_x \\
&\qquad + \frac{u_{xx}(\sin^2 u + c_0) - 3u_x^2 \sin u \cos u}{u_x} U = 0.
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

Предположим, что выполняется первое уравнение в (3.45). Тогда, в силу равенства (3.44) находим уравнение

$$
c_0(c_0+1)((\sin^2 u + c_0)U^2 - U_x^2) + c_1(\sin^2 u + c_0) = 0,
$$

которое противоречит тому, что переменные U_x, U независимые. Следовательно, выполняется второе уравнение в (3.45):

$$
\begin{aligned}
U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x} U_{xx} + (u_x^2 - \sin^2 u - c_0) U_x \\
+ \frac{u_{xx}(\sin^2 u + c_0) - 3u_x^2 \sin u \cos u}{u_x} U = 0.
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

Легко проверить, что найденное уравнение (3.46) определяет линейное обобщенное инвариантное многообразие для уравнения (3.1). Воспользуемся теперь поверхностью (3.46) для построения оператора рекурсии. Перепишем уравнение (3.46) в следующем виде

$$U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} + (u_x^2 - \sin^2 u)U_x + \frac{u_{xx}\sin^2 u - 3u_x^2 \sin u \cos u}{u_x}U = c_0\left(U_x - \frac{u_{xx}}{u_x}U\right).$$

Заметим, что линейное обобщенное инвариантное многообразие уравнения (3.1), как и в случае уравнения КдФ, представимо в виде

$$L_2 U = \lambda L_1 U,$$

где $L_1 = D_x - \frac{u_{xx}}{u_x}$ и $L_2 = D_x^3 - \frac{u_{xx}}{u_x}D_x^2 + (u_x^2 - \sin^2 u)D_x + \frac{u_{xx}\sin^2 u - 3u_x^2 \sin u \cos u}{u_x}$ – дифференциальные операторы, $\lambda := c_0$ – спектральный параметр.

Подействуем обратным к L_1 оператором $L_1^{-1} = u_x D_x^{-1}\frac{1}{u_x}$ на обе части последнего равенства, получим выражение

$$RU = \lambda U,$$

где

$$R := L_1^{-1}L_2 = D_x^2 + u_x^2 - \sin^2 u - u_x D_x^{-1}(\sin u \cos u + u_{xx})$$

– оператор рекурсии для уравнения (3.1).

Применяя R к классической симметрии $u_{t_1} = u_x$ находим само уравнение (3.1)

$$u_t = u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3 - \frac{3}{2}u_x \sin^2 u.$$

Отметим, что найденный оператор R удовлетворяет определяющему для рекурсионного оператора уравнению.

В рассмотренных выше примерах был отмечено, что путем исключения постоянного параметра из нелинейного (в нашем случае квадратичного) обобщенного инвариантного многообразия можно получить линейное. Можно показать, что верно и обратное утверждение: понижением порядка линейного обобщенного инвариантного многообразия, можно вывести нелинейное ОИМ. Покажем это на примере уравнения

$$u_\tau = u_{yyy} - \frac{3u_y u_{yy}^2}{2(1+u_y^2)} + \frac{1}{2}u_y^3. \tag{3.47}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Уравнение (см. [60])*

$$\begin{aligned} U_{yyy} = {} & \frac{(3u_y^2+1)u_{yy}}{u_y(1+u_y^2)}U_{yy} \\ & + \left(\frac{u_y u_{yyy}}{1+u_y^2} - \frac{3u_y^2 u_{yy}^2}{(1+u_y^2)^2} - u_y^2 + \frac{1}{c_0}\right) U_y - \frac{u_{yy}}{c_0 u_y} U, \end{aligned} \tag{3.48}$$

задающее линейное обобщенное инвариантное многообразие для уравнения (3.47)*, допускает понижение порядка, которое сводит его к уравнению*

$$\begin{aligned} U_{yy} = {} & \frac{u_y u_{yy}}{1+u_y^2} U_y + \frac{1+u_y^2}{c_0} U \\ & + \frac{u_y \sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2 - c_0 U_y^2) + c_1(1+u_y^2)}}{c_0}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Здесь c_0, c_1 *– произвольные постоянные.*

Стоит отметить, что понижение порядка происходит на произвольном решении $u = u(y,t)$ уравнения (3.47).

Доказательство. Покажем, как при помощи линейного обобщенного инвариантного многообразия (3.48) найти нелинейное ОИМ (3.49). Для этого наложим дополнительное условие уменьшающее порядок уравнения (3.48). На самом деле, будем искать условие связи вида

$$U_{yy} = F(U_y, U, u_{yy}, u_y, u) \tag{3.50}$$

совместное с уравнением (3.48) для всех значений переменных u, u_y, u_{yy}, $\ldots$. Таким образом, пользуясь условием совместности равенств (3.48) и (3.50) получим уравнение на неизвестную функцию F:

$$F_{U_y}U_{yy} + F_U U_y + F_{u_{yy}}u_{yyy} + F_{u_y}u_{yy} + F_u u_y - \frac{(3u_y^2+1)u_{yy}}{u_y(1+u_y^2)}F$$
$$- \left(\frac{u_y u_{yyy}}{1+u_y^2} - \frac{3u_y^2u_{yy}^2}{(1+u_y^2)^2} - u_y^2 + \frac{1}{c_0}\right)U_y + \frac{u_{yy}}{c_0 u_y}U = 0, \tag{3.51}$$

в котором переменные U_{yy} и U_{yyy} заменены в силу равенства (3.50). Приравняем коэффициенты при переменной u_{yyy} в равенстве (3.51), получим:

$$F_{u_{yy}}u_{yyy} - \frac{u_y}{1+u_y^2}U_y = 0,$$

из которого имеем

$$F = \frac{u_y u_{yy}}{1+u_y^2}U_y + F_1(U_y, U, u_y, u). \tag{3.52}$$

Далее, в силу найденного (3.52), в равенстве (3.51) можем приравнять коэффициенты при переменной u_{yy}. Тогда найдем

$$F_1 = \frac{1}{c_0}(1+u_y^2)U + u_y U_y F_2\left(U, u, \frac{1+u_y^2}{U_y^2}\right). \tag{3.53}$$

Подставим (3.53) в уравнение (3.51) и введем новую переменную θ так, что $\theta = \frac{1+u_y^2}{U_y^2}$. Воспользуемся этой заменой и исключим в полученном равенстве переменную u_y. Тогда можем собрать коэффициенты при переменной U_y и получим следующее решение

$$F_2 = \sqrt{\frac{1+u_y^2}{c_0U_y^2}}F_3\left(u, \frac{c_0U_y^2 - (1+u_y^2)U^2}{c_0(1+u_y^2)}\right), \tag{3.54}$$

в котором переменная θ исключена в силу введенной замены. Подставим (3.54) в (3.51) и исключим из полученного выражения переменную U_y путем введения новой переменной $\delta = \frac{c_0U_y^2-(1+u_y^2)U^2}{c_0(1+u_y^2)}$. Тогда равенство (3.51) запишется в виде:

$$\left(2F(F_3)_\delta + 1 + c_0\right)\sqrt{U^2+\delta c_0} + (F_3)_u = 0.$$

Из последнего уравнения получаем следующее решение

$$F_3 = \sqrt{\frac{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2 - c_0U_y^2)}{c_0(1+u_y^2)} + c_1},$$

которое записано в старых переменных. Здесь c_1 – произвольная постоянная. Подводя итог вышеизложенных рассуждений находим, что функция F имеет вид

$$F = \frac{u_y u_{yy}}{1+u_y^2} U_y + \frac{1+u_y^2}{c_0} U + \frac{u_y \sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2 - c_0 U_y^2) + c_1(1+u_y^2)}}{c_0}.$$

□

Непосредственным вычислением легко проверить, что уравнение (3.49) совместно с линеаризацией уравнения (3.47)

$$U_\tau = U_{yyy} - \frac{3u_y u_{yy}}{1+u_y^2} U_{yy} + \frac{3}{2}\left(u_y^2 + \frac{(u_y^2-1)u_{yy}^2}{(u_y^2+1)^2}\right) U_y \tag{3.55}$$

тогда и только тогда, когда выполняется уравнение (3.47). Таким образом, получаем, что пара составленная из уравнений (3.49) и (3.55) образует нелинейную пару Лакса для уравнения (3.47), которая при помощи замены переменных

$$U = 2\sqrt{c_0}\tilde{\varphi}\tilde{\psi}, \quad U_y = \sqrt{1+u_y^2}(\tilde{\varphi}^2 + \tilde{\psi}^2)$$

сводится к следующей линейной паре Лакса

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_y = \dfrac{1}{2}\dfrac{i\sqrt{c_0+1}\,u_y}{\sqrt{c_0}}\tilde{\varphi} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{1+u_y^2}}{\sqrt{c_0}}\tilde{\psi}, \\ \tilde{\psi}_y = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{1+u_y^2}}{\sqrt{c_0}}\tilde{\varphi} - \dfrac{1}{2}\dfrac{i\sqrt{c_0+1}\,u_y}{\sqrt{c_0}}\tilde{\psi}, \end{cases} \tag{3.56}$$

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_\tau = -\dfrac{\sqrt{c_0+1}}{4i\sqrt{c_0}}\left(2u_{yyy} - 3\dfrac{u_y u_{yy}^2}{1+u_y^2} + \dfrac{(c_0 u_y^2+2)u_y}{c_0}\right)\tilde{\varphi} \\ \quad + \dfrac{1}{\sqrt{1+u_y^2}}\left(\dfrac{u_y u_{yyy}}{2\sqrt{c_0}} - \dfrac{(3u_y^2+1)u_{yy}^2}{4\sqrt{c_0}(1+u_y^2)} + \dfrac{\sqrt{c_0+1}u_{yy}}{2ic_0} + \dfrac{(c_0u_y^2+2)(u_y^2+1)}{4c_0\sqrt{c_0}}\right)\tilde{\psi}, \\ \tilde{\psi}_\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1+u_y^2}}\left(\dfrac{u_y u_{yyy}}{2\sqrt{c_0}} - \dfrac{(3u_y^2+1)u_{yy}^2}{4\sqrt{c_0}(1+u_y^2)} + \dfrac{\sqrt{c_0+1}u_{yy}}{2ic_0} + \dfrac{(c_0u_y^2+2)(u_y^2+1)}{4c_0\sqrt{c_0}}\right)\tilde{\varphi} \\ \quad + \dfrac{\sqrt{c_0+1}}{4i\sqrt{c_0}}\left(2u_{yyy} - 3\dfrac{u_y u_{yy}^2}{1+u_y^2} + \dfrac{(c_0 u_y^2+2)u_y}{c_0}\right)\tilde{\psi}. \end{cases}$$

(3.57)

Упростим полученную пару Лакса аналогично примеру выше. Положим $\tilde{\varphi} = e^{\frac{1}{2}\frac{i\sqrt{c_0+1}u}{\sqrt{c_0}}}\varphi$, $\tilde{\psi} = e^{-\frac{1}{2}\frac{i\sqrt{c_0+1}u}{\sqrt{c_0}}}\psi$ в (3.56), (3.57) и переходя от систем к уравнениям получим пару Лакса для уравнения (3.47)

$$\begin{cases} \varphi_{yy} = \left(\dfrac{u_y u_{yy}}{1+u_y^2} - \dfrac{\sqrt{1-\lambda}u_y}{\sqrt{\lambda}}\right)\varphi_y - \dfrac{1+u_y^2}{4\lambda}\varphi, \quad \lambda = -c_0, \\ \varphi_\tau = \left(\dfrac{u_y u_{yyy}}{1+u_y^2} - \dfrac{(3u_y^2+1)u_{yy}^2}{2(1+u_y^2)^2} + \dfrac{\sqrt{1-\lambda}u_{yy}}{\sqrt{\lambda}(1+u_y^2)} + \dfrac{\lambda u_y^2 - 2}{2\lambda}\right)\varphi_y - \dfrac{\sqrt{1-\lambda}u_y}{2\lambda^{3/2}}\varphi. \end{cases}$$

Следует отметить, что линейное обобщенное инвариантное многообразие

$$U_{yyy} - \frac{(3u_y^2+1)u_{yy}}{u_y(1+u_y^2)}U_{yy} - \left(\frac{u_y u_{yyy}}{1+u_y^2} - \frac{3u_y^2 u_{yy}^2}{(1+u_y^2)^2} - u_y^2 + \frac{1}{c_0}\right)U_y + \frac{u_{yy}}{c_0 u_y}U = 0,$$

так же может быть записано в виде

$$L_2 U = \lambda L_1 U \tag{3.58}$$

где

$$L_1 = u_y D_y \frac{1}{u_y}, \quad L_2 = D_y^3 - \frac{u_{yy}}{u_y}D_y^2 + (u_y^2 - \sin^2 u)D_y + \left(\frac{u_{yy}}{u_y}\sin^2 u - 3u_y \sin u \cos u\right).$$

В итоге пользуясь отношением $R = L_1^{-1}L_2$ найдем оператор

$$R = D_y^2 - \frac{2u_y u_{yy}}{1+u_y^2}D_y + u_y D_y^{-1}\left(\frac{u_{yyy}}{1+u_y^2} - \frac{u_y u_{yy}^2}{(1+u_y^2)^2} + u_y\right)D_y,$$

который является оператором рекурсии для уравнения (3.47). Применяя R к правой части классической симметрии $u_{\tau_1} = u_y$ получим само уравнение (3.47).

§4. Формальная диагонализация найденных пар Лакса и локальные законы сохранения.

В этом разделе найдем формальные асимптотические разложения для собственных функций пар Лакса (3.38), (3.39) и (3.56), (3.57) в окрестности особого значения спектрального параметра $\lambda =: c_0$. Из этих асимптотических разложений выведем законы сохранения для уравнений (3.1) и (3.2). Известно, что пара Лакса, дающая бесконечный ряд сохраняющихся плотностей, является настоящей парой Лакса.

Начнем с системы (3.38), (3.39). Линейным преобразованием $\Phi = \tilde{T}Y$ где $\Phi = (\varphi, \psi)^T$ и $\tilde{T} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ приведем (3.38), (3.39) к следующему виду

$$Y_x = AY, \quad Y_t = GY. \tag{3.59}$$

Здесь матрицы A, G имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 u + \lambda} & -\frac{1}{2}\frac{u_x\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}{\sin^2 u+\lambda} \\ \frac{1}{2}\frac{u_x\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}{\sin^2 u+\lambda} & -\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 u + \lambda} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\frac{u_{xx}\sin 2u+(\sin^2 u+\lambda)(u_x^2-\sin^2 u+2\lambda)}{\sqrt{\sin^2 u+\lambda}} & -\frac{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}{4\sqrt{\sin^2 u+\lambda}}\left(2u_{xx} + \frac{2u_{xxx}+u_x(u_x^2-\sin^2 u+2\lambda)}{\sqrt{\sin^2 u+\lambda}}\right) \\ \frac{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}{4\sqrt{\sin^2 u+\lambda}}(g_0 - 2u_{xx}) & -\frac{1}{4}\frac{u_{xx}\sin 2u+(\sin^2 u+\lambda)(u_x^2-\sin^2 u+2\lambda)}{\sqrt{\sin^2 u+\lambda}} \end{pmatrix},$$

$g_0 = \frac{2u_{xxx}+u_x(u_x^2-\sin^2 u+2\lambda)}{\sqrt{\sin^2 u+\lambda}}$, $\lambda = c_0$. Матрица A имеет особенности в точках $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ и $\lambda = \infty$.

Разложим A в окрестности $\lambda = \infty$:

$$A = \sum_{j=-1}^{\infty} A_j \lambda^{-j/2}, \qquad A_{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

В соответствии с общей теорией (см. [5, 8]) будем искать формальную замену переменных $\Psi = TY$ преобразующую (3.59) к виду

$$\Psi_x = h\Psi, \quad \Psi_t = S\Psi, \tag{3.61}$$

где T, h и S формальные степенные ряды:

$$T = \sum_{j=0}^{\infty} T_j\lambda^{-j/2}, \qquad h = \sum_{j=-1}^{\infty} h_j\lambda^{-j/2}, \qquad S = \sum_{j=-3}^{\infty} S_j\lambda^{-j/2}. \tag{3.62}$$

Матрицы h_j предполагаются диагональными. Положим T_0 диагональной матрицей с единичными элементами и предполагая, что для $\forall\, i \geq 1$ все диагональные элементы T_i обращаются в нуль, найдем коэффициенты рядов T и h из уравнения $T_x = AT - Th$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в равенстве

$$\sum_{j=1}^{\infty} D_x(T_j)\lambda^{-j/2} = \sum_{j=-1}^{\infty} A_j\lambda^{-j/2}\sum_{j=0}^{\infty} T_j\lambda^{-j/2} - \sum_{j=0}^{\infty} T_j\lambda^{-j/2}\sum_{j=-1}^{\infty} h_j\lambda^{-j/2} \tag{3.63}$$

получим последовательность уравнений для определения T_j, h_j :

$$\begin{aligned}
&h_{-1} = A_{-1},\\
&[A_{-1}, T_1] - h_0 = -A_0,\\
&[A_{-1}, T_2] - h_1 = D_x(T_1) - A_0T_1 - A_1 + T_1h_0,\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Система уравнений (3.64) решается последовательно. Опуская вычисления дадим только ответ

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\lambda^{\frac{1}{2}} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(u_x^2 - \sin^2 u) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(u_x^2 - \sin^2 u) \end{pmatrix}\lambda^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u_xu_{xx} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}u_xu_{xx} \end{pmatrix}\lambda^{-1} + \begin{pmatrix} h_{3,11} & 0 \\ 0 & -h_{3,11} \end{pmatrix}\lambda^{-\frac{3}{2}} + \ldots,$$

где $h_{3,11} = \frac{5}{8}u_x^2\sin^2 u - \frac{1}{4}u_x^2 - \frac{1}{16}u_x^4 - \frac{1}{4}u_xu_{xxx} - \frac{1}{16}\sin^4 u$,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}u_x \\ \frac{1}{2}u_x & 0 \end{pmatrix}\lambda^{-\frac{1}{2}} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}u_{xx} \\ -\frac{1}{2}u_{xx} & 0 \end{pmatrix}\lambda^{-1}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}u_{xxx} + \frac{1}{4}u_x + \frac{1}{8}u_x^3 - \frac{3}{4}u_x\sin^2 u \\ \frac{1}{2}u_{xxx} + \frac{1}{4}u_x + \frac{1}{8}u_x^3 - \frac{3}{4}u_x\sin^2 u & 0 \end{pmatrix}\lambda^{-\frac{3}{2}} + \ldots.$$

Для известных T и h ряд S определяется следующим образом

$$S = T^{-1}GT - T^{-1}T_t = \sum_{j=-3}^{\infty} S_j \lambda^{-j/2}. \tag{3.65}$$

Напомним, что в окрестности особой точки $\lambda = \infty$ матрица G представляется асимптотическим рядом $G = \sum_{j=-3}^{\infty} G_j \lambda^{-j/2}$. Можно показать, что коэффициенты ряда S диагональны:

$$\begin{aligned} S = &\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \lambda^{\frac{3}{2}} + \begin{pmatrix} S_{1,11} & 0 \\ 0 & -S_{1,11} \end{pmatrix} \lambda^{-\frac{1}{2}} \\ &+ \begin{pmatrix} S_{2,11} & 0 \\ 0 & S_{2,11} \end{pmatrix} \lambda^{-1} + \begin{pmatrix} S_{3,11} & 0 \\ 0 & -S_{3,11} \end{pmatrix} \lambda^{-\frac{3}{2}} + \ldots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_{1,11} &= \frac{1}{16} u_x^2 (14 \sin^2 u - 3u_x^2 - 4) - \frac{1}{2} u_x u_{xxx} + \frac{1}{4} u_{xx}(u_{xx} + \sin 2u) - \frac{3}{16} \sin^4 u, \\ S_{2,11} &= \frac{1}{4} u_x u_{xxxx} - \frac{3}{8} u_x u_{xx} \sin^2 u + \frac{3}{8} u_x^3 u_{xx} - \frac{3}{8} u_x^3 \sin 2u, \\ S_{3,11} &= -\frac{1}{4} u_x u_{xxxxx} + \frac{1}{4} u_{xx} u_{xxxx} - \frac{1}{4} u_{xxx}^2 + \frac{1}{8}(13 \sin^2 u - 4 - 5u_x^2) u_x u_{xxx} + \\ &\quad \frac{1}{8}(2 - 3u_x^2 - 5 \sin^2 u) u_{xx}^2 + \frac{1}{16} \sin^6 u + \frac{1}{8}(7u_x^2 - \sin^2 u) u_{xx} \sin 2u - \\ &\quad \frac{1}{16} u_x^6 + \frac{1}{4}(3 \cos^2 u - \frac{1}{4} \sin^2 u - 1) u_x^4 - \frac{1}{16}(23 \sin^2 u - 12) u_x^2 \sin^2 u. \end{aligned}$$

Из условия совместности системы (3.61) получаем равенство

$$D_t h = D_x S, \tag{3.66}$$

которое показывает, что h и S являются производящими функциями локальных законов сохранения. Уравнение (3.66) порождает бесконечную серию локальных законов сохранения для уравнения (3.1). Дадим два из них в явном виде

$$
\begin{aligned}
&D_t\left(u_x^2-\sin^2 u\right)=\\
&D_x\left(2u_xu_{xxx}-u_{xx}^2-u_{xx}\sin 2u+\tfrac{3}{4}u_x^4+u_x^2-\tfrac{7}{2}u_x^2\sin^2 u+\tfrac{3}{4}\sin^4 u\right),\\
&D_t\left(4u_{xx}^2+10u_x^2\sin^2 u-4u_x^2-u_x^4-\sin^4 u\right)=\\
&D_x\left(8u_{xx}u_{xxxx}-4u_{xxx}^2-4u_x(u_x^2-5\sin^2 u+2)u_{xxx}+\sin^6 u+\right.\\
&\quad 4(3u_x^2-4\sin^2 u+1)u_{xx}^2-2\sin 2u(\sin^2 u+5u_x^2)u_{xx}+\\
&\quad\left.(11\sin^2 u-4-u_x^2)u_x^4-(23\sin^2 u-12)u_x^2\sin^2 u\right).
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом можно исследовать пару Лакса (3.56), (3.57). Здесь мы даем только два локальных закона сохранения для уравнения (3.2), вычисленных тем же методом формальных рядов

$$
\begin{aligned}
&D_t\left(\frac{u_{xx}}{u_x\sqrt{u_x^2+1}}\right)=D_x\left(\frac{u_{xxxx}}{u_x\sqrt{u_x^2+1}}-\frac{3u_{xx}u_{xxx}}{(u_x^2+1)^{3/2}}+\frac{3(u_x^2-1)u_{xx}^3}{2u_x(u_x^2+1)^{5/2}}+\frac{3u_xu_{xx}}{2\sqrt{u_x^2+1}}\right),\\
&D_t\left(\frac{u_{xx}^2}{u_x^2+1}-u_x^2\right)=\\
&\qquad D_x\left(\frac{2u_{xx}u_{xxxx}}{1+u_x^2}-\frac{u_{xxx}^2}{1+u_x^2}-\left(\frac{4u_xu_{xx}^2}{(1+u_x^2)^2}+2u_x\right)u_{xxx}+\frac{(9u_x^2-11)u_{xx}^4}{4(1+u_x^2)^3}+\frac{(11u_x^2+2)u_{xx}^2}{2(1+u_x^2)}-\frac{3}{4}u_x^4\right).
\end{aligned}
$$

Насколько нам известно, эти законы сохранения ранее не встречались в литературе.

Глава 2. Обобщенные инвариантные многообразия для дифференциально-разностных уравнений.

§5. Основные определения.

Рассмотрим нелинейное интегрируемое дифференциально-разностное уравнение (цепочку) вида

$$\frac{du_n}{dt} = f(u_{n+k}, u_{n+k-1}, \ldots, u_{n-k}), \tag{4.1}$$

где искомая функция $u = u_n(t)$ зависит от $t \in \mathbf{R}$ и $n \in Z$. При работе с уравнением (4.1) будем пользоваться стандартным набором динамических переменных, состоящим из $\{u_j\}_{j=-\infty}^{j=\infty}$.

Определение 4.4. *Уравнение вида*

$$u_{n+s} = g^{(1)}(u_{n+s-1}, u_{n+s-2}, \ldots, u_n) \tag{4.2}$$

определяет инвариантное многообразие для цепочки (4.1), если выполняется следующее условие

$$\frac{d}{dt} g^{(1)} - D_n^s f \Big|_{(4.1),(4.2)} = 0, \tag{4.3}$$

где предполагается, что $\frac{dg^{(1)}}{du_n}$ *не равен нулю тождественно, а оператор сдвига* D_n *действует по правилу* $D_n u_n = u_{n+1}$.

Применим к равенству (4.2) оператор D_n^{-1} и запишем результат в виде, разрешенном относительно u_{n-1}

$$u_{n-1} = g^{(-1)}(u_{n+s-1}, u_{n+s-2}, \dots, u_n). \tag{4.4}$$

Предположим, что функция $g^{(1)}$ неизвестна. Выразим в равенстве (4.3) все производные $\frac{du_j}{dt}$ в силу уравнения (4.1), затем выразим все u_j, при $j < n$ и $j > n + s - 1$, через переменные $u_{n+s-1}, u_{n+s-2}, \dots, u_n$ в силу уравнений (4.2), (4.4) и их сдвигов. В результате получим некоторое, вообще говоря, нелинейное функционально-дифференциальное уравнение на искомую функцию $g^{(1)}$. Это уравнение не является переопределенным и поэтому оно, как правило, не решается в явном виде.

Мы имеем совсем другую картину при работе с линеаризованным уравнением, т.е. уравнением, полученным из (4.1) посредством линеаризации в окрестности его произвольного решения $u = u_n(t)$:

$$\frac{dU_n}{dt} = \sum_{j=-k}^{k} A(j) U_{n+j}, \tag{4.5}$$

где $A(j) = \frac{\partial f}{\partial u_j}$.

Определение 4.5. *Поверхность, заданную уравнением вида*

$$U_{n+i} = F(U_{n+i-1}, U_{n+i-2}, \dots, U_{n+1}, U_n, u_n, u_{n\pm1}, u_{n\pm2}, \dots, u_{n\pm j}), \tag{4.6}$$

будем называть обобщенным инвариантным многообразием для уравнения (4.1), если выполняется условие

$$\left. \frac{d}{dt} U_{n+i} - D_n^i \frac{dU_n}{dt} \right|_{(4.1),(4.5),(4.6)} = 0. \tag{4.7}$$

Если в уравнении (4.7) производные переменных U_j и u_j по t заменить в силу уравнений (4.1) и (4.5), а значения переменной U_j при $j < n$, а так же при $j > n + i - 1$ в силу уравнения (4.6), то получится равенство, которое должно выполняться тождественно по всем $u_j, -\infty < j < +\infty$, которые рассматриваются как параметры. В силу этого, система (4.7) является переопределенной и эффективно решается.

§6. Построение пары Лакса и оператора рекурсии для нелинейной цепочки при помощи обобщенного инвариантного многообразия.

Проиллюстрируем изложенные рассуждения на примере цепочки [42]

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{1}{u_{n+1} - u_{n-1}}, \tag{5.1}$$

которая является симметрией уравнения H_1 из списка Адлера-Бобенко-Суриса [45] (см. также [63,77]). Заметим, что коэффициенты линеаризованного уравнения

$$\frac{dU_n}{dt} = -p_n^2(U_{n+1} - U_{n-1}) \tag{5.2}$$

зависят только от $p_n = \frac{1}{u_{n+1}-u_{n-1}}$. Легко проверить, что $p_n = p_n(t)$ является решением модифицированной цепочки Вольтерра

$$\frac{dp}{dt} = -p_n^2(p_{n+1} - p_{n-1}). \tag{5.3}$$

Для простоты опустим n и в дальнейшем будем использовать короткую запись $U_n = U$, $U_{n+1} = U_1$, $U_{n-1} = U_{-1}$, $p_n = p$, $p_{n+1} = p_1$, $p_{n-1} = p_{-1}$ и так далее.

Поскольку правая часть линеаризованного уравнения (5.2) зависит только от переменной p, будем искать обобщенное инвариантное многообразие в виде

$$U_1 = F(U, U_{-1}, p). \tag{5.4}$$

Неизвестная функция F находится из определяющего уравнения

$$\frac{d}{dt}U_1 - D_nU_t\Big|_{(5.2),(5.3),(5.4)} = 0. \tag{5.5}$$

Для исключения $U_{\pm 2}$ будем использовать связи

$$U_2 = F(F(U, U_{-1}, p), U, p_1) \quad \text{и} \quad U_{-2} = G(U, U_{-1}, p_{-1}),$$

где G является найденной как “обратная” к F:

$$U_{-1} = G(U_1, U, p).$$

Действуя операторами дифференцирования по t и сдвига по n и подставляя выражения для всех участвующих переменных в терминах динамических переменных в (5.5) получим сравнительно простое уравнение на неизвестные F и G

$$\begin{aligned}&F_{U_{-1}}(U, U_{-1}, p)\Big(G(U, U_{-1}, p_{-1}) - U\Big)p_{-1}^2 + F_p(U, U_{-1}, p)p^2p_{-1}\\ &-F_p(U, U_{-1}, p)p^2p_1 + \Big(F(F(U, U_{-1}, p), U, p_1) - U\Big)p_1^2\\ &-F_U(U, U_{-1}, p)p^2\Big(F(U, U_{-1}, p) - U_{-1}\Big) = 0.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Применяя оператор $\frac{\partial^3}{\partial p_{-1}^3}$ к (5.6) найдем

$$\begin{aligned}&F_{U_{-1}}(U, U_{-1}, p)\Big(p_{-1}^2\frac{\partial^3}{\partial p_{-1}^3}G(U, U_{-1}, p_{-1})\\ &+6p_{-1}\frac{\partial^2}{\partial p_{-1}^2}G(U, U_{-1}, p_{-1}) + 6\frac{\partial}{\partial p_{-1}}G(U, U_{-1}, p_{-1})\Big) = 0.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Поскольку $F_{U_{-1}}(U, U_{-1}, p) \neq 0$, то (5.7) задает уравнение Эйлера на G которое легко решается:

$$G(U, U_{-1}, p_{-1}) = G_1(U, U_{-1}) + \frac{G_2(U, U_{-1})}{p_{-1}^2} + \frac{G_3(U, U_{-1})}{p_{-1}}.$$

Подставим последнее в (5.6), продифференцируем его дважды по p_{-1} и найдем:

$$G_1(U, U_{-1}) = U.$$

Далее дифференцируя равенство (5.6) трижды по p_1 получим снова уравнение Эйлера, решение которого имеет вид

$$F(U, U_{-1}, p) = F_1(U, U_{-1}) + \frac{F_2(U, U_{-1})}{p} + \frac{F_3(U, U_{-1})}{p^2}.$$

Применяя оператор $\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}$ к уравнению (5.6) мы найдем

$$F_1(U, U_{-1}) = U_{-1}.$$

Затем подставим найденные равенства в уравнение (5.6) и продифференцируем по переменной p_{-1}. В результате мы получим следующие три соотношения

$$1)\frac{\partial F_3(U, U_{-1})}{\partial U_{-1}} G_3(U, U_{-1}) = 0,$$
$$2)G_3(U, U_{-1}) = F_2(U, U_{-1}),$$
$$3)F_3(U, U_{-1}) = \frac{1}{2}\frac{\partial F_2(U, U_{-1})}{\partial U_{-1}} G_3(U, U_{-1}).$$

Сосредоточимся на первом уравнении. Из которого следует, что либо $\frac{\partial F_3(U,U_{-1})}{\partial U_{-1}} = 0$, либо $G_3(U, U_{-1}) = 0$. В случае выполнения условия $G_3(U, U_{-1}) = 0$ в силу равенств 2) и 3) имеем $F_2(U, U_{-1}) = F_3(U, U_{-1}) = 0$, что приводит к отрицательному результату. Следовательно выполняется равенство $\frac{\partial F_3(U,U_{-1})}{\partial U_{-1}} = 0$. Таким образом, получаем:

$$1)F_3(U, U_{-1}) = F_3(U),$$

$$2)G_3(U, U_{-1}) = F_2(U, U_{-1}),$$

$$3)F_2(U, U_{-1}) = \sqrt{4F_3(U)U_{-1} + F_4(U)}.$$

В силу этих равенств можно уточнить вид функций F и G:

$$U_1 = F(U, U_{-1}, p) = U_{-1} + \frac{F_3(U)}{p^2} + \frac{\sqrt{4F_3(U)U_{-1} + F_4(U)}}{p}, \tag{5.8}$$

$$U_{-2} = G(U, U_{-1}, p_{-1}) = U + \frac{G_2(U, U_{-1})}{p_{-1}^2} + \frac{\sqrt{4F_3(U)U_{-1} + F_4(U)}}{p_{-1}}. \tag{5.9}$$

Выразим U_{-1} из уравнения (5.8) и найдем U_{-2} применяя к нему оператор D_n^{-1}

$$U_{-2} = U + \frac{F_3(U_{-1})}{p_{-1}^2} + \frac{\sqrt{4F_3(U_{-1})U + F_4(U_{-1})}}{p_{-1}}. \tag{5.10}$$

Сравнивая уравнения (5.9) и (5.10) получим:

$$
\begin{aligned}
&1) G_2(U, U_{-1}) = F_3(U_{-1}),\\
&2) 4F_3(U)U_{-1} + F_4(U) = 4F_3(U_{-1})U + F_4(U_{-1}).
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Из уравнения (5.11) находим, что функции F_3, F_4 линейны:

$$F_3(U) = c_1U + c_2, \quad F_4(U) = 4c_2U + c_4,$$

где c_1, c_2, c_4 произвольные постоянные.

Подведем итоги рассуждений выше и получим, что искомая функция F имеет вид:

$$F = U_{-1} + \frac{c_1U + c_2}{p^2} + \frac{\sqrt{4(c_1U + c_2)U_{-1} + 4c_2U + c_4}}{p}.$$

Здесь постоянный параметр c_2 может быть легко удален при помощи точечной замены $c_1U \to c_1\tilde{U} = c_1U + c_2$, поэтому положим $c_2 = 0$.

Таким образом, возвращаясь к переменным u, находим, что обобщенное инвариантное многообразие для уравнения (5.1) принимает вид:

$$U_1 = U_{-1} + (u_1 - u_{-1})^2c_1U + (u_1 - u_{-1})\sqrt{4c_1UU_{-1} + c_4}. \tag{5.12}$$

Воспользуемся теперь поверхностью (5.12) для построения оператора рекурсии и пары Лакса. Подействуем на равенство (5.12) оператором D_n и перепишем его в виде

$$U_2 - U - (u_2 - u)^2c_1U_1 = (u_2 - u)\sqrt{4c_1U_1U + c_4}.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат

$$
\begin{aligned}
&U_2^2 + U^2 + (u_2 - u)^4c_1^2U_1^2 - 2UU_2 - 2(u_2 - u)^2c_1U_1U_2\\
&\quad + 2(u_2 - u)^2c_1U_1U = (u_2 - u)^2(4c_1U_1U + c_4).
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Далее исключим в (5.13) произвольную постоянную c_4. Для этого подействуем на него оператором $(D_n - 1)\frac{1}{(u_2-u)^2}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(u_3-u_1)^2}(U_3^2+U_1^2)+(u_3-u_1)^2c_1^2U_2^2-\frac{2}{(u_3-u_1)^2}U_1U_3\\
&-2c_1U_2U_3-2c_1U_2U_1-\frac{1}{(u_2-u)^2}U_2^2-\frac{1}{(u_2-u)^2}U^2\\
&-(u_2-u)^2c_1^2U_1^2+\frac{2}{(u_2-u)^2}UU_2+2c_1U_1U_2+2c_1U_1U=0.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

При помощи некоторых элементарных преобразований приведем равенство (5.14) к виду:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{u_3-u_1}U_3-\left((u_3-u_1)c_1-\frac{1}{u_2-u}\right)U_2\\
&\qquad+\left((u_2-u)c_1-\frac{1}{u_3-u_1}\right)U_1-\frac{1}{u_2-u}U=0.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Таким образом, при помощи квадратичного обобщенного инвариантного многообразия (5.12) выведено линейное (5.15), которое, в свою очередь, позволяет строить оператор рекурсии. Для этого необходимо представить уравнение (5.15) в виде

$$RU=\lambda U,$$

где R – оператор рекурсии, λ – спектральный параметр. Подействуем оператором D_n^{-1} на (5.15) и запишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{u_2-u}U_2+\frac{1}{u_1-u_{-1}}U_1-\frac{1}{u_2-u}U-\frac{1}{u_1-u_{-1}}U_{-1}\\
&\qquad=c_1\left((u_2-u)U_1-(u_1-u_{-1})U\right).
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Заметим, что уравнение (5.16) представлено в виде

$$L_2U=\lambda L_1U,$$

где $L_2=\frac{1}{u_2-u}D_n^2+\frac{1}{u_1-u_{-1}}D_n-\frac{1}{u_2-u}-\frac{1}{u_1-u_{-1}}D_n^{-1}$, $L_1=(u_2-u)D_n-(u_1-u_{-1})$ – разностные операторы, $c_1:=\lambda$ – спектральный параметр. Умножим последнее равенство на $L_1^{-1} = \frac{1}{u_1-u_{-1}}(D_n-1)^{-1}$ и после некоторых элементарных преобразований получим

$$\left(\frac{1}{(u_{n+1}-u_{n-1})^2}\left(D_n+D_n^{-1}\right)+\frac{2}{(u_{n+1}-u_{n-1})(u_n-u_{n-2})}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{u_{n+1}-u_{n-1}}(D_n-1)^{-1}\left(\frac{1}{u_n-u_{n-2}}-\frac{1}{u_{n+2}-u_n}\right)\right)U=\lambda U.$$

Видим, что оператор в левой части полученного выражения совпадает с оператором рекурсии для уравнения (5.1)

$$R_n=\frac{1}{(u_1-u_{-1})^2}\left(D_n+D_n^{-1}\right)+\frac{2}{(u_1-u_{-1})(u-u_{-2})}$$
$$+\frac{2}{u_1-u_{-1}}(D_n-1)^{-1}\left(\frac{1}{u-u_{-2}}-\frac{1}{u_2-u}\right).$$

Построим теперь пару Лакса для уравнения (5.1). Положим в (5.12) $c_4=0$ и перепишем линеаризованное уравнение (5.2) с учетом (5.12):

$$\frac{dU}{dt}=-c_1U-\frac{\sqrt{4c_1UU_{-1}}}{(u_1-u_{-1})}. \tag{5.17}$$

Легко проверить, что пара (5.12), (5.17) составляет нелинейную пару Лакса для уравнения (5.1). Приведем эту пару к линейному виду при помощи подходящей замены переменных. Поскольку в данной паре есть квадратный корень, введем замену переменных $U=\varphi^2$, для того чтобы избавиться от корня. Тогда равенство (5.12) примет вид

$$\varphi_1^2=\varphi_{-1}^2+(u_1-u_{-1})^2c_1\varphi^2-2(u_1-u_{-1})\sqrt{c_1}\varphi\varphi_{-1}. \tag{5.18}$$

Взяв квадратный корень с обеих сторон в (5.18) находим

$$\varphi_1=(u_1-u_{-1})\sqrt{c_1}\varphi-\varphi_{-1}. \tag{5.19}$$

Применяя ту же замену переменных $U=\varphi^2$ в уравнении (5.17), получаем

$$\varphi_t=-\frac{1}{2}c_1\varphi+\frac{\sqrt{c_1}}{u_1-u_{-1}}\varphi_{-1}. \tag{5.20}$$

При помощи замены $\varphi_n = (-1)^n c_1^{n/2} e^{-\frac{c_1}{2}t}\psi_n$ и $c_1 = -\frac{1}{\lambda}$ система уравнений (5.19), (5.20) сводится к хорошо известной паре Лакса для уравнения (5.1):

$$\begin{cases} \psi_1 = -(u_1 - u_{-1})\psi + \lambda\psi_{-1}, \\ \psi_t = -\dfrac{1}{u_1 - u_{-1}}\psi_{-1}. \end{cases}$$

§7. Построение пары Лакса и оператора рекурсии для системы дифференциально-разностных уравнений при помощи обобщенного инвариантного многообразия.

Приведенный выше алгоритм может быть применен также к интегрируемым уравнениям более высокого порядка и системам. Проиллюстрируем на примере системы

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{v_1} + u^2 v, \\ v_t = -\dfrac{1}{u_{-1}} - uv^2 \end{cases} \tag{6.1}$$

найденной в [56].

Очевидно, линеаризация (6.1) задается системой вида

$$\begin{cases} U_t = -\dfrac{1}{v_1^2}V_1 + 2uvU + u^2V, \\ V_t = \dfrac{1}{u_{-1}^2}U_{-1} - v^2U - 2uvV. \end{cases} \tag{6.2}$$

Обобщенное инвариантное многообразие для системы (6.1) будем искать в виде

$$U_1 = F(U, V, u, v, u_1, v_1), \qquad V_1 = G(U, V, u, v, u_1, v_1)$$

аналогично примеру выше (см. Глава 2, §6). Опуская вычисления, приведем только ответ. Таким образом, имеем, что поверхность заданная уравнениями

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{(1+\lambda uv_1)^2}{u^2v_1^2}U + \lambda u^2 V - \dfrac{1+\lambda uv_1}{v_1}\sqrt{4\lambda UV + c}, \\ V_1 = \lambda v_1^2 U + u^2v_1^2 V - uv_1^2\sqrt{4\lambda UV + c} \end{cases} \tag{6.3}$$

определяет обобщенное инвариантное многообразие для системы (6.1). Здесь λ, c – произвольные постоянные. Уравнение (6.2) в силу (6.3) примет вид:

$$\begin{cases} U_t = (2uv-\lambda)U + u\sqrt{4\lambda UV + c}, \\ V_t = (\lambda - 2uv)V + v\sqrt{4\lambda UV + c}. \end{cases} \tag{6.4}$$

Прямым вычислением можно проверить, что система (6.3), (6.4) совместна тогда и только тогда, когда функции u, v являются решениями системы (6.1) и следовательно (6.3), (6.4) определяет нелинейную пару Лакса для системы (6.1). Для получения пары Лакса обычного вида, положим $c = 0$, $U = \varphi^2$, $V = \lambda\psi^2$. Опуская вычисления, выпишем только ответ

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\dfrac{1+\lambda uv_1}{uv_1}\varphi + \lambda u\psi, \\ \psi_1 = v_1\varphi - uv_1\psi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_t = \left(uv - \dfrac{1}{2}\lambda\right)\varphi + \lambda u\psi, \\ \psi_t = v\varphi + \left(\dfrac{1}{2}\lambda - uv\right)\psi. \end{cases}$$

Приведем теперь систему (6.3) к линейному виду и построим оператор рекурсии для (6.1). Умножим первое уравнение системы (6.3) на uv_1^2 и вычтем из него второе, умноженное на $\frac{1+\lambda uv_1}{v_1}$. Тогда получим

$$uv_1^2U_1 - \frac{1+\lambda uv_1}{v_1}V_1 - \frac{1+\lambda uv_1}{u}U + u^2v_1V = 0. \tag{6.5}$$

Перепишем второе уравнение системы (6.3) в виде

$$V_1 - \lambda v_1^2U - u^2v_1^2V = -uv_1^2\sqrt{4\lambda UV + c}$$

и возведем в квадрат обе части этого равенства

$$V_1^2 + \lambda^2v_1^4U^2 + u^4v_1^4V^2 - 2\lambda v_1^2UV_1 - 2u^2v_1^2VV_1 + 2\lambda u^2v_1^4UV = u^2v_1^4(4\lambda UV + c). \tag{6.6}$$

Подействуем оператором $(D_n - 1)\frac{1}{u^2v_1^4}$ на (6.6) и заменим в полученном равенстве переменную U_1 в силу (6.5). Тогда получим следующее линейное уравнение

$$\frac{1}{v_2^2}V_2 - \frac{(u_1v_1-\lambda)(uu_1v_1^2 - \lambda uv_1 - 1)}{uv_1^3}V_1 + \frac{\lambda(uu_1v_1^2 - \lambda uv_1 - 1)}{u^2v_1^2}U - \frac{u(u_1v_1-\lambda)}{v_1}V = 0.$$

$$(6.7)$$

Подействуем оператором D_n^{-1} на (6.7):

$$\frac{1}{v_1^2}V_1 - \frac{(uv-\lambda)(u_{-1}uv^2-\lambda u_{-1}v-1)}{u_{-1}v^3}V \\ +\frac{\lambda(u_{-1}uv^2-\lambda u_{-1}v-1)}{u_{-1}^2v^2}U_{-1} - \frac{u_{-1}(uv-\lambda)}{v}V_{-1} = 0 \tag{6.8}$$

и заменим в нем переменную V_{-1} пользуясь равенством (6.5) сдвинутым назад на единицу. Тогда (6.8) запишется в виде

$$\frac{1}{v_1^2}V_1 - (uv+\lambda)U - \frac{u(uv+\lambda)}{v}V + \frac{u}{u_{-1}^2v}U_{-1} = 0. \tag{6.9}$$

Перепишем пару (6.5) и (6.9) в следующем виде

$$L_2\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \xi L_1 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

где

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_n + \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 1 & \frac{u}{v} \end{pmatrix},$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} uv_1^2 & -\frac{1}{v_1} \\ 0 & \frac{1}{v_1^2} \end{pmatrix} D_n + \begin{pmatrix} -\frac{1}{u} & u^2v_1 \\ -uv & -u^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{u}{u_{-1}^2v} & 0 \end{pmatrix} D_n^{-1}.$$

Представим равенство (6.10) в виде

$$R\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix},$$

где R – рекурсионный оператор. Для этого умножим обе части равенства (6.10) на оператор, найденный как обратный к L_1:

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} -u(D_n-1)^{-1}\frac{1}{uv_1} & 1+u(D_n-1)^{-1}\frac{1}{u} \\ v(D_n-1)^{-1}\frac{1}{uv_1} & -v(D_n-1)^{-1}\frac{1}{u} \end{pmatrix}.$$

После некоторых элементарных преобразований получим, что оператор рекурсии для системы (6.1) имеет вид

$$\begin{aligned} R = &\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{v_1^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_n + \begin{pmatrix} -2uv & \frac{2u}{u_{-1}v^2} - u^2 \\ v^2 & -\frac{2}{u_{-1}v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{u_{-1}^2} & 0 \end{pmatrix} D_n^{-1} \\ &- 2 \begin{pmatrix} -u \\ v \end{pmatrix} (D_n - 1)^{-1} \left(\frac{1}{u^2 v_1} - v, \frac{1}{u_{-1}v^2} - u \right). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Применение оператора рекурсии (6.11) к правой части классической симметрии

$$u_\tau = -u, \quad v_\tau = v$$

уравнения (6.1) порождает само уравнение (6.1).

Глава 3. Обобщенные инвариантные многообразия для уравнений гиперболического типа.

§8. Основные определения.

Понятие инвариантного многообразия можно обобщить на случай интегрируемых уравнений гиперболического типа. Рассмотрим уравнение вида

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{7.1}$$

Сосредоточимся на уравнении, которое определяет поверхность в пространстве динамических переменных $u, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, \ldots$ уравнения (7.1)

$$g(u_k, u_{k-1}, \ldots, u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m) = 0. \tag{7.2}$$

Здесь используются обозначения $u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}, \bar{u}_j = \frac{\partial^j u}{\partial y^j}$. Запишем дифференциальные следствия уравнения (7.2):

$$g_1(u_{k+1}, u_k, \ldots, u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{m-1}) = 0, \tag{7.3}$$

$$g_2(u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m, \bar{u}_{m+1}) = 0 \tag{7.4}$$

полученные применением операторов полного дифференцирования D_x и D_y по x и соответственно y: $g_1 = D_x g$ и $g_2 = D_y g$ и путем исключения всех смешанных производных функции u в силу уравнения (7.1). Также исключены переменные $\bar{u}_m$ из $D_x g$ и u_k из $D_y g$ в силу уравнения (7.2).

Определение 7.6. *Поверхность* (7.2) *называется инвариантным многообразием для уравнения* (7.1), *если выполняется следующее условие*

$$D_x D_y g|_{(7.1)-(7.4)} = 0. \tag{7.5}$$

Предположим, что ни одна из функций g_1, g_2 не равна нулю тождественно. Тогда очевидно, что инвариантная поверхность имеет конечную размерность.

Пример 1.2. Уравнение

$$u_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 \tan u = 0 \tag{7.6}$$

определяет инвариантное многообразие для уравнения синус–Гордон

$$u_{xy} = \sin u.$$

Здесь $g = u_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 \tan u, \quad g_1 = D_x g = u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3$ и $g_2 = D_y g = \frac{u_x}{\cos u} + \frac{u_x^2 u_y}{2(\cos u)^2}$. Легко проверить, что

$$D_x D_y g = D_x \left(\frac{u_x}{\cos u} + \frac{u_x^2 u_y}{2(\cos u)^2} \right) \Bigg|_{g=0, g_1=0, g_2=0} = 0.$$

Поэтому уравнение (7.5) справедливо и, таким образом уравнение (7.6) определяет инвариантное многообразие для уравнения синус–Гордон.

Определим теперь понятие обобщенного инвариантного многообразия для дифференциального уравнения гиперболического типа. Линеаризуем уравнение (7.1) в окрестности его произвольного решения $u = u(x, y)$:

$$U_{xy} = aU_x + bU_y + cU, \tag{7.7}$$

где $a = \frac{\partial f}{\partial u_x}, b = \frac{\partial f}{\partial u_y}, c = \frac{\partial f}{\partial u}$.

Рассмотрим поверхность, определенную уравнением

$$G(U_k, \ldots, U, \bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_m; u, u_1, \ldots, u_{k_1}; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{m_1}) = 0, \quad k, m \geq 0 \tag{7.8}$$

где $U_s = \frac{\partial^s}{\partial x^s}U, \bar{U}_s = \frac{\partial^s}{\partial y^s}U$ динамические переменные уравнения (7.7). Здесь динамические переменные уравнения (7.1) $u, u_1, \bar{u}_1, \dots$ рассматриваются как параметры. Дифференциальные следствия уравнения (7.8)

$$G_1(U_{k+1}, \dots, U, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{m-1}; u, u_1, \dots, u_{k_1+1}; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{m_1}) = 0, \quad m > 0, \quad (7.9)$$

и

$$G_2(U_{k-1}, \dots, U, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{m+1}; u, u_1, \dots, u_{k_1}; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{m_1+1}) = 0, \quad k > 0 \quad (7.10)$$

получаются применением операторов D_x, D_y к функции G так что $G_1 = D_x G$, $G_2 = D_y G$ и исключением всех смешанных производных u и U в силу уравнений (7.1) и, соответственно, (7.7). Также в уравнениях (7.9) и (7.10) исключены переменные $\bar{U}_m$ и, соответственно, U_k в силу уравнения (7.8).

Определение 7.7. *Поверхность* (7.8) *определяет обобщенное инвариантное многообразие для гиперболического уравнения* (7.1), *если следующее условие*

$$D_x D_y G|_{(7.1),(7.7)-(7.10)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $u, u_1, \bar{u}_1, \dots$.

Фактически уравнения (7.9), (7.10) образуют альтернативные параметризации обобщенного инвариантного многообразия, заданного уравнением (7.8). Они получаются путем применения операторов D_x и D_y к (7.8) и некоторых дополнительных элементарных преобразований. Очевидно, что повторяя эту процедуру можно найти параметризации специального вида, которые задаются как обыкновенные дифференциальные уравнения на функцию $U(x, y)$ следующего вида

$$G_3(U_{k+m}, U_{k+m-1}, \dots, U; u, u_1, u_2, \dots) = 0 \quad (7.11)$$

и

$$G_4(\bar{U}_{k+m}, \bar{U}_{k+m-1} \dots, U; u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots) = 0. \quad (7.12)$$

Отметим, что G_3 зависит только от U и u и их производных по x, в то время как G_4 зависит от U и u и их производных по y.

В некоторых случаях условие $D_xG = 0$ (или условие $D_yG = 0$) выполняется тождественно и поэтому не определяет никакой параметризации многообразия. На самом деле это означает, что G является x-интегралом (или y-интегралом) для линеаризованного уравнения (7.7). Поэтому, в силу хорошо известной теоремы (см., обзор [9]) уравнение (7.1) также допускает нетривиальный x-интеграл (соответственно y-интеграл). В дальнейшем будем предполагать, что уравнение (7.1) не допускает никаких нетривиальных x- и y-интегралов.

Отметим, что обобщенные инвариантные многообразия специального вида (7.11), (7.12) тесно связаны с симметриями уравнения (7.1).

Отметим, что дифференциальное уравнение вида

$$u_t = g(u, u_1, u_2, ...u_l). \tag{7.13}$$

называется симметрией уравнения (7.1) по направлению x, если следующее условие

$$D_xD_yg - D_tf|_{(7.1),(7.13)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений динамических переменных $u, u_1, \bar{u}_1, \ldots$. Аналогичным путем определяется симметрия по направлению y.

Напомним определение понятия обобщенного инвариантного многообразия для дифференциального уравнения вида (7.13). Линеаризуем уравнение (7.13)

$$U_t = a_lU_l + a_{l-1}U_{l-1} + \cdots + a_0U. \tag{7.14}$$

Здесь $a_j = \frac{\partial g}{\partial u_j}$ для $j = 1, ...l$. Определим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_k = H(U_{k-1}, U_{k-2}, \ldots, U; u, u_1, u_2, \ldots) \tag{7.15}$$

где $U = U(x,t)$ является неизвестной функцией и динамические переменные $u, u_1, u_2, \ldots$ уравнения (7.13) рассматриваются как параметры.

Будем говорить, что уравнение (7.15) определяет обобщенное инвариантное многообразие для уравнения (7.13), если уравнение

$$D_t H - D_x^k U_t\big|_{(7.13),(7.14),(7.15)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $U, U_1, \ldots U_{k-1}; u, u_1, u_2, \ldots$.

Гипотеза 1. Пусть уравнение (7.13) является симметрией уравнения (7.1). Тогда (7.15) определяет обобщенное инвариантное многообразие для (7.13) тогда и только тогда, когда оно определяет обобщенное инвариантное многообразие для уравнения (7.1).

§9. Обобщенные инвариантные многообразия для одного нелинейного уравнения гиперболического типа.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим уравнение [3]

$$u_{xy} = \sqrt{1 + u_y^2}\sin u, \tag{8.1}$$

симметрии которого

$$u_t = u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3 - \frac{3}{2}u_x \sin^2 u,$$

$$u_\tau = u_{yyy} - \frac{3u_y u_{yy}^2}{2(1 + u_y^2)} + \frac{1}{2}u_y^3,$$

были исследованы выше (см. §3). Линеаризуем уравнение (8.1)

$$U_{xy} = \sqrt{1 + u_y^2}(\cos u)U + \frac{u_y \sin u}{\sqrt{1 + u_y^2}}U_y. \tag{8.2}$$

Ранее в работе [60] для уравнения (8.1) было построено обобщенное инвариантное многообразие

$$U_{xx} - \frac{u_x \cos u}{\sin u} U_x + \frac{c_0 u_x}{\sin u \sqrt{1+u_y^2}} U_y + (c_0 + \sin^2 u) U = 0 \tag{8.3}$$

и его следствие вида

$$U_{yy} - u_y \left(\frac{u_{yy}}{1+u_y^2} + \frac{\cos u}{\sin u} \right) U_y + \frac{u_y \sqrt{1+u_y^2}}{c_0 \sin u} U_x - \frac{1+u_y^2}{c_0} U = 0. \tag{8.4}$$

Отметим, что уравнения (8.3) и (8.4) были получены непосредственно по определению обобщенного инвариантного многообразия для уравнений гиперболического типа. В данной работе воспользуемся гипотезой 1 изложенной выше, а именно обобщенными инвариантными многообразиями для симметрий уравнения (8.1)

$$\begin{aligned} U_{xx} = {} & \frac{u_x \sin u \cos u}{\sin^2 u + c_0} U_x + (\sin^2 u + c_0) U \\ & + \frac{u_x \sqrt{c_0(c_0+1)((\sin^2 u + c_0) U^2 - U_x^2) + c_1(\sin^2 u + c_0)}}{(\sin^2 u + c_0)}, \end{aligned} \tag{8.5}$$

и

$$\begin{aligned} U_{yy} = {} & \frac{u_y u_{yy}}{1+u_y^2} U_y + \frac{1+u_y^2}{c_0} U \\ & - \frac{u_y \sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2) U^2 - c_0 U_y^2) + c_1(1+u_y^2)}}{c_0}, \end{aligned} \tag{8.6}$$

найденными выше (см. §3). Добавим к ним еще одно уравнение, являющееся дифференциальным следствием уравнений (8.5) и (8.6):

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+u_y^2} U_x - c_0 \cos u U_y \\ & \quad - \sin u \sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2) U^2 - c_0 U_y^2) + c_1(1+u_y^2)} = 0. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Уравнение (8.7) получается путем применения оператора D_y к (8.5), либо D_x к (8.6) в силу уравнений (8.1) и (8.2). Заметим, что уравнение (8.7) является симметричным относительно переменных x и y.

Теорема 8.1. *Уравнение* (8.7) *определяет обобщенное инвариантное многообразие уравнения* (8.1).

Доказательство. Как было сказано выше, уравнение (8.7) может быть получено из (8.5), либо из (8.6) простым дифференцированием. Для доказательства теоремы достаточно показать, что имеет место и обратное утверждение. А именно покажем, что из (8.7) можно получить уравнение, например, (8.6), при помощи дифференцирования первого по y. Перепишем уравнение (8.7) в виде

$$U_x - \frac{c_0\cos u}{\sqrt{1+u_y^2}}U_y - \frac{\sin u}{\sqrt{1+u_y^2}}\sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2 - c_0U_y^2) + c_1(1+u_y^2)} = 0 \tag{8.8}$$

Применим оператор D_y к (8.8)

$$\begin{gathered}
U_{xy} + \left(\frac{c_0u_y\sin u}{\sqrt{1+u_y^2}} + \frac{c_0u_yu_{yy}\cos u}{(1+u_y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)U_y - \frac{c_0\cos u}{\sqrt{1+u_y^2}}U_{yy} \\
-\left(\frac{u_y\cos u}{\sqrt{1+u_y^2}} - \frac{u_yu_{yy}\sin u}{(1+u_y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2 - c_0U_y^2) + c_1(1+u_y^2)} \\
-\frac{\sin u\left((c_0+1)(2(1+u_y^2)UU_y + 2u_yu_{yy}U^2 - 2c_0U_yU_{yy}) + 2c_1u_yu_{yy}\right)}{\sqrt{1+u_y^2}} = 0.
\end{gathered}$$

Заменим в полученном равенстве переменную U_{xy} в силу линеаризованного уравнения (8.2) и после некоторых элементарных преобразований получим:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{c_0(c_0+1)\sin u\,U_y}{\sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2 - c_0U_y^2) + c_1(1+u_y^2)}} - c_0\cos u\right)\times \\
\left(U_{yy} - \frac{u_yu_{yy}}{1+u_y^2}U_y - \frac{1+u_y^2}{c_0}U\right. \\
\left.+\frac{u_y\sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2 - c_0U_y^2) + c_1(1+u_y^2)}}{c_0}\right) = 0.
\end{gathered} \tag{8.9}$$

Из равенства (8.9) видно, что возможны два случая:

1. $$\frac{c_0(c_0+1)\sin u\, U_y}{\sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2-c_0U_y^2)+c_1(1+u_y^2)}}-c_0\cos u=0,$$

2. $$U_{yy}-\frac{u_yu_{yy}}{1+u_y^2}U_y-\frac{1+u_y^2}{c_0}U + \frac{u_y\sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2-c_0U_y^2)+c_1(1+u_y^2)}}{c_0}=0.$$

Первое уравнение задает связь между переменными U и U_y, что противоречит (8.7), следовательно, выполняется второе уравнение, которое совпадает с (8.6).

□

Рекурсионные операторы описывающие иерархию высших симметрий по обоим направлениям уравнения (8.1) были построены выше (см. §3).

Построим теперь пару Лакса для уравнения (8.1). Отметим, что тройка уравнений (8.2), (8.6), (8.7), составляют нелинейную пару Лакса уравнения (8.1). Приведем эти уравнения к линейному виду. С этой целью введем новые переменные φ, ψ вместо U, U_y используя следующие квадратичные формы

$$U=\varphi^2+\psi^2, \tag{8.10}$$

$$U_y=\frac{2}{\sqrt{c_0}}\sqrt{1+u_y^2}\varphi\psi. \tag{8.11}$$

Условие совместности равенств (8.10), (8.11) порождает уравнение

$$\varphi_y\varphi+\psi_y\psi-\frac{1}{\sqrt{c_0}}\sqrt{1+u_y^2}\varphi\psi=0. \tag{8.12}$$

Аналогично совместность (8.6) и (8.11) дает

$$\varphi_y\psi+\psi_y\varphi+\frac{1}{2\sqrt{c_0}}\left(u_y\sqrt{c_0+1}\sqrt{(\varphi-\psi)^2(\varphi+\psi)^2}-\sqrt{u_y^2+1}(\varphi^2+\psi^2)\right)=0. \tag{8.13}$$

Удивительно, что из (8.12), (8.13) получаем линейную систему

$$\begin{cases} \varphi_y = \dfrac{1}{2\sqrt{c_0}}\left(\sqrt{1+u_y^2} - \sqrt{c_0+1}u_y\right)\psi, \\ \psi_y = \dfrac{1}{2\sqrt{c_0}}\left(\sqrt{1+u_y^2} + \sqrt{c_0+1}u_y\right)\varphi. \end{cases} \tag{8.14}$$

Система (8.14) определяет часть пары Лакса по направлению y. Для того, чтобы получить x-часть мы применим оператор D_x к обеим частям уравнений (8.10), (8.11) и упростим в силу уравнений (8.2), (8.7). В результате получим следующую линейную систему

$$\begin{cases} \varphi_x = -\dfrac{1}{2}\sqrt{c_0+1}\sin u\varphi + \dfrac{1}{2}\sqrt{c_0}\cos u\psi, \\ \psi_x = \dfrac{1}{2}\sqrt{c_0}\cos u\varphi + \dfrac{1}{2}\sqrt{c_0+1}\sin u\psi, \end{cases} \tag{8.15}$$

которая определяет вторую часть пары Лакса по направлению x. Уравнения (8.14), (8.15) определяют пару Лакса для уравнения (8.1).

Путем введения нового спектрального параметра λ, в силу отношения $c_0 = \frac{1}{4}(\lambda - \lambda^{-1})^2$ перепишем найденную пару Лакса в следующей рациональной форме:

$$\Phi_y = \frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+u_y^2} - \frac{u_y}{2}(\lambda+\lambda^{-1}) \\ \sqrt{1+u_y^2} + \frac{u_y}{2}(\lambda+\lambda^{-1}) & 0 \end{pmatrix} \Phi, \tag{8.16}$$

$$\Phi_x = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -(\lambda+\lambda^{-1})\sin u & (\lambda-\lambda^{-1})\cos u \\ (\lambda-\lambda^{-1})\cos u & (\lambda+\lambda^{-1})\sin u \end{pmatrix} \Psi. \tag{8.17}$$

Она имеет особенности $\lambda = \infty; 0; \pm 1$.

В работе [9] было отмечено, что уравнение (8.1) связано с уравнением синус-Гордон

$$v_{xy} = \sin v \tag{8.18}$$

следующей дифференциальной подстановкой

$$v = u + iarsinh(u_y), \tag{8.19}$$

где функция $y = arsinh(x)$ определяется уравнением $x = \sinh y$.

Поэтому можно вывести пару Лакса для уравнения (8.1) при помощи замены переменных v, v_y в силу (8.19) в паре Лакса уравнения синус-Гордон

$$\Psi_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi & -v_x \\ v_x & -\xi \end{pmatrix}\Psi, \qquad \Psi_y = \frac{1}{2\xi}\begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ \sin v & -\cos v \end{pmatrix}\Psi. \tag{8.20}$$

В результате получим

$$\Psi_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi & -u_x - i\sin u \\ u_x + i\sin u & -\xi \end{pmatrix}\Psi, \tag{8.21}$$

$$\Psi_y = \frac{1}{2\xi}\begin{pmatrix} \sqrt{1+u_y^2}\cos u - iu_y\sin u & \sqrt{1+u_y^2}\sin u + iu_y\cos u \\ \sqrt{1+u_y^2}\sin u + iu_y\cos u & -\sqrt{1+u_y^2}\cos u + iu_y\sin u \end{pmatrix}\Psi. \tag{8.22}$$

Легко проверить, что условие совместности систем (8.21), (8.22) эквивалентно уравнению (8.1).

Пары Лакса (8.16), (8.17) и (8.21), (8.22) связаны друг с другом следующим калибровочным преобразованием $\Psi = S\Phi$ где

$$S = \begin{pmatrix} \lambda p + iq & \lambda q + ip \\ \lambda q - ip & -\lambda p + iq \end{pmatrix}.$$

Здесь $p = \cos\frac{u}{2} - \sin\frac{u}{2}$ и $q = \cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}$. Спектральные параметры λ и ξ удовлетворяют следующему уравнению $\xi = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^{-1})$.

Глава 4. Симметрийный метод построения рекурсионного оператора.

Известно несколько методов построения оператора рекурсии для заданного интегрируемого уравнения, основанные на использовании пары Лакса либо Гамильтонова формализма. История вопроса кратко обсуждалась во введении. Мы используем альтернативный метод построения оператора рекурсии, основанный на понятии симметрии. Симметрия является одним из фундаментальных понятий теории нелинейных уравнений (см., например, [48, 49, 55, 70, 74, 85, 93, 94]). В последнее время появились работы, в которых симметрийный подход распространяется на уравнения с дробными производными (см., например, [58]).

§10. Симметрии и оператор рекурсии.

Предположим, что рекурсионный оператор можно представить в виде слабо нелокального псевдодифференциального оператора вида [73]

$$R = R_0 + \sum_{i=1}^{m} g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)} \tag{9.1}$$

где R_0 дифференциальный оператор. Нелокальная часть равенства (9.1) состоит из комбинаций генераторов симметрий $u_{\tau_j} = g^{(j)}$ и вариационных производных $h^{(j)}$ плотностей законов сохранения. Появление генераторов симметрии в (9.1) легко объяснить. Действительно, применяя оператор R к генератору тривиальной симметрии $u_{\tau_0} = 0$ находим уравнение вида

$$u_\tau = c_1 g^{(1)} + c_2 g^{(2)} + \cdots + c_m g^{(m)},$$

которое является симметрией данного уравнения при любом выборе констант $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Поэтому каждое из уравнений $u_{\tau_j} = g^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m$ также определяет симметрию. Аналогичным образом можно доказать утверждение о коэффициентах $\left\{h^{(j)}\right\}$. Здесь необходимо использовать известный факт, что сопряженный оператор R^* преобразует вариационную производную плотности закона сохранения в вариационную производную другой плотности закона сохранения. Более детально см. [82, 86].

Ранее наблюдалось, что в большинстве случаев оператор рекурсии можно привести к виду (9.1). Заметим, что упомянутые выше симметрии $u_{\tau_j} = g^{(j)}$ являются членами иерархии симметрий, начатые с классических $g^{(1)} = u_x$, $g^{(2)} = u_t$, за которыми следуют высшие симметрии, расположенные в порядке возрастания

$$g^{(1)} = u_x,\ g^{(2)} = u_t,\ g^{(3)} = u_{\tau_3},\ \ldots,\ g^{(m)} = u_{\tau_m}, \ldots, \tag{9.2}$$

такие что порядки симметрий удовлетворяют неравенствам $ord\, g^{(j)} < ord\, g^{(j+1)}$. Обратимся к множеству $S = \{g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(m)}\}$ генераторов в (9.1) как набор затравочных симметрий. В простейшем случае $m = 1$ иллюстрируемом уравнением Кортевега-де Фриза S содержит единственный генератор $g^{(1)} = u_x$. Для уравнения Каупа-Купершмидта [64]

$$u_t = u_5 + 10uu_3 + 25u_1u_2 + 20u^2u_1$$

имеем $m = 2$ и S состоит из двух генераторов $g^{(1)} = u_x$ и $g^{(2)} = u_5 + 10uu_3 + 25u_1u_2 + 20u^2u_1$. Для уравнения Кричевера-Новикова [66]

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{P(u)}{u_x} \quad \text{при} \quad P'''''(u) = 0$$

существуют два различных операторов рекурсии R_1 и R_2. Для первого имеем $m = 2$ и затравочные симметрии $g^{(1)} = u_x$ и $g^{(2)} = u_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{P(u)}{u_x}$. Для второго рекурсионного оператора имеем $m = 3$, а S в дополнение к этим двум генераторам содержит также генератор симметрии пятого порядка уравнения Кричевера-Новикова

$$\begin{aligned} g^{(3)} = u_5 - 5\frac{u_2u_4}{u_1} - \frac{5}{2}\frac{u_3^2}{u_1} + \frac{25}{2}\frac{u_3u_2^2}{u_1^2} - \frac{45}{8}\frac{u_2^4}{u_1^3} - \frac{5}{18}\frac{P^2(u)}{u_1^3} \\ +\frac{5}{3}\left(\frac{5}{2}\frac{u_2^2}{u_1^3} - \frac{u_3}{u_1^2}\right)P(u) - \frac{5}{3}P'(u)\frac{u_2}{u_1} + \frac{5}{9}u_1P''(u). \end{aligned}$$

Отметим, что для уравнения Гарри Дима $u_t = u^3u_{xxx}$ оператор рекурсии $R = u^3D_x^3uD_x^{-1}\frac{1}{u^2}$ найденный в [69] переписывается в следующем виде

$$R = u^4D_x^2\frac{1}{u^2} + 3u^2u_1D_x\frac{1}{u^2} + 3uu_2 + u_tD_x^{-1}\frac{1}{u^2}.$$

Таким образом, для уравнения Гарри Дима имеем единственную затравочную симметрию совпадающую с правой частью самого уравнения $S = \left\{g^{(2)} = u^3u_{xxx}\right\}$, следовательно $m = 1$.

Обозначим через L_1 дифференциальный оператор порядка m который аннулирует все функции $g^{(i)}$, $i = 1, 2...m$, в множестве S. Теорема 10.1 утверждает, что тогда оператор $L_2 = L_1R$ также является дифференциальным. Таким образом, мы приходим к следующему представлению оператора рекурсии как отношения двух дифференциальных операторов

$$R = L_1^{-1}L_2.$$

Замечательно, что это представление является эффективным инструментом для решения определяющего уравнения (10.6).

Замечание 9.4. *Число m нелокальностей в (9.1) определяет действие оператора рекурсии на иерархию (9.2), точнее мы имеем*

$$Rg^{(j)} = g^{(j+m)}.$$

Поэтому можно восстановить всю иерархию высших симметрий путем повторного применения R к множеству S.

§11. Построение оператора рекурсии для дифференциальных уравнений эволюционного типа.

Рассмотрим интегрируемое уравнение вида

$$u_t = f(u, u_1, u_2, ..., u_k), \qquad \frac{\partial f}{\partial u_k} \neq 0, \tag{10.1}$$

где $u_j = D_x^j u$ и D_x оператор полного дифференцирования по переменной x. Порядок k, высший порядок производной u в правой части уравнения (10.1), называется порядком уравнения (10.1). Уравнение эволюционного типа порядка r

$$u_\tau = g(t, x, u, u_1, \ldots, u_r) \tag{10.2}$$

называется симметрией уравнения (10.1) если потоки, определяемые этими двумя уравнениями, коммутируют, т.е.

$$D_t g - D_\tau f|_{(10.1),(10.2)} = 0.$$

Как известно, любое интегрируемое уравнение (10.1) допускает бесконечную иерархию симметрий, которая полностью описывается в компактной форме через оператор рекурсии R. В дальнейшем будем предполагать, что уравнение (10.1) допускает оператор рекурсии вида (9.1).

Теорема 10.1. *Для любого слабо нелокального псевдодифференциального оператора R вида (9.1) существует пара дифференциальных операторов L_1 и L_2, для которых выполняется следующее уравнение*

$$L_1 R = L_2.$$

Доказательство. Определим дифференциальный оператор

$$L_1 = D_x^m + \alpha_1 D_x^{m-1} + \cdots + \alpha_m$$

такой что $L_1 g^{(i)} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Очевидно такой оператор существует. Покажем, что $L_1 R$ также является дифференциальным оператором. Сначала покажем, что композиция вида $L_1 g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)}$ является дифференциальным оператором. Действительно, в силу правила Лейбница имеем

$$D_x^j g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)} = D_x^j (g^{(i)}) D_x^{-1} h^{(i)} + \sum_{k=1}^{j} c_j^k D_x^{j-k} (g^{(i)}) D_x^{k-1} h^{(i)}, \tag{10.3}$$

где c_j^k, $k = 1, 2, \ldots, j$ - биномиальные коэффициенты. Легко видеть, что только первое слагаемое в (10.3) содержит нелокальный член $D_x^{-1} h^{(i)}$. Поэтому можем написать

$$D_x^j g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)} = D_x^j (g^{(i)}) D_x^{-1} h^{(i)} + H_{ij},$$

где H_{ij} для любого i и j является дифференциальным оператором. Применим L_1 к $g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)}$ и в силу вышеизложенного получаем

$$L_1 g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)} = L_1 (g^{(i)}) D_x^{-1} h^{(i)} + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{m-j} H_{ij}.$$

Поскольку $L_1(g^{(i)}) = 0$ найдем отношение

$$L_1 g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)} = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{m-j} H_{ij}$$

из которого вытекает

$$L_2 = L_1 R_0 + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{m-j} H_{ij}.$$

Поэтому L_2 также является дифференциальным оператором. □

Предположим, что уравнение вида (10.1) допускает оператор рекурсии (9.1) и обсудим способ его поиска.

Примеры представленные выше убеждают, что обычно множество S затравочных симметрий содержит один или два классических симметрий $g^{(1)} = u_x$ и/или $g^{(2)} = u_t$ и только для самого сложного уравнения Кричевера-Новикова второй рекурсионный оператор содержит три генератора $g^{(1)} = u_x$, $g^{(2)} = u_t$ и $g^{(3)} = u_\tau$. Следовательно, когда мы ищем оператор рекурсии, мы должны изучить, по крайней мере, все эти возможные варианты множества S:

$$S_1 = \{g^{(1)}\}, \quad S_2 = \{g^{(2)}\}, \quad S_3 = \{g^{(1)}, g^{(2)}\}, \quad S_4 = \{g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}\},$$

где $u_\tau = g^{(3)}$ является следующей симметрией уравнения (10.1).

Для выбранного S возьмем оператор $L_1 = L_1(S)$ как дифференциальный оператор минимального порядка, который аннулирует все генераторы в S. Очевидно, что такой оператор не является единственным, он определяется с точностью до умножения на произвольную функцию. Мы можем представить L_1 в явном виде через следующий определитель

$$L_1 U = \rho \begin{vmatrix} D_x^m g^{(1)} & D_x^{m-1} g^{(1)} & \dots & g^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_x^m g^{(m)} & D_x^{m-1} g^{(m)} & \dots & g^{(m)} \\ D_x^m U & D_x^{m-1} U & \dots & U \end{vmatrix}, \tag{10.4}$$

где ρ функция динамических переменных u, u_1, ... Как только L_1 найден мы начинаем искать оператор L_2. Как следует из замечания выше, порядок оператора L_2 определяется следующим образом

$$m_2 = m + ord\, g^{(m+1)} - ord\, g^{(1)}. \tag{10.5}$$

Чтобы найти L_2 мы используем представление $R = L_1^{-1} L_2$. Подставим его в определяющее уравнение для R (см. [15, 81])

$$\frac{d}{dt} R = [F^*, R]\,. \tag{10.6}$$

Здесь F^* оператор линеаризации уравнения (10.1):

$$F^* = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_1} D_x + \frac{\partial f}{\partial u_2} D_x^2 + ... + \frac{\partial f}{\partial u_k} D_x^k. \tag{10.7}$$

Подставим $R = L_1^{-1} L_2$ в уравнение (10.6) и после некоторых простых преобразований получим

$$\frac{d}{dt}(L_2)L_2^{-1} + L_2 F^* L_2^{-1} = \frac{d}{dt}(L_1)L_1^{-1} + L_1 F^* L_1^{-1} =: A. \tag{10.8}$$

Непосредственно из (10.8) следует, что операторы L_1 и L_2 являются решениями одного и того же уравнения

$$\frac{d}{dt}(L_j) = AL_j - L_j F^*, \quad j = 1, 2. \tag{10.9}$$

Легко проверить, что для любого выбора S оператор A, определяемый равенством (10.8), является дифференциальным оператором. Действительно, по построению следующее уравнение

$$L_1 U = 0 \tag{10.10}$$

совместно с линеаризованным уравнением

$$\frac{d}{dt}U = F^* U. \tag{10.11}$$

Применяя оператор $\frac{d}{dt}$ к уравнению (10.10) и воспользовавшись (10.11) получим, что

$$\left(\frac{d}{dt}L_1 + L_1 F^*\right) U = 0$$

для любого решения U уравнения (10.10). Следовательно, ядра операторов L_1 и $\frac{d}{dt}L_1 + L_1 F^*$ удовлетворяют соотношению $\ker L_1 \subset \ker(\frac{d}{dt}L_1 + L_1 F^*)$. Поэтому последний оператор делится на первый, т.е. существует дифференциальный оператор A такой, что $\frac{d}{dt}L_1 + L_1 F^* = AL_1$.

Начнем с S_1, ищем A как обсуждалось выше. Как только оператор A найден, можем использовать (10.9) при $j = 2$ для построения оператора L_2 порядка m_2. Если L_2 найден, тогда можем определить $R = L_1^{-1} L_2$, если такого L_2 не существует, переходим к следующему выбору S.

При помощи найденных операторов L_1 и L_2 можем легко определить $R = L_1^{-1}L_2$. Удобный способ это сделать - подставить явные выражения операторов L_1, L_2 и анзац (9.1) в уравнение $L_1R = L_2$, а затем искать неизвестный оператор R_0 и неизвестные коэффициенты $h^{(j)}$ в (9.1) путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях оператора D_x.

Следует отметить, что операторы L_1 и L_2 позволяют получить пару Лакса для уравнения (10.1):

$$L_2\psi = \lambda L_1\psi, \tag{10.12}$$

$$\frac{d}{dt}\psi = F^*\psi, \tag{10.13}$$

где λ спектральный параметр. Пара Лакса (10.12), (10.13) не является "фейковой", поскольку она порождается оператором рекурсии. О "фейковых" парах Лакса см. [46].

Пример 1. В качестве иллюстрирующего примера возьмем хорошо известное уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t = u_3 + uu_1. \tag{10.14}$$

Среди потенциальных значений параметра m сначала выберем $m = 1$ и возьмем $S = u_x$. Таким образом, первый возможный L_1 выглядит следующим образом

$$L_1U = \rho \begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ U_1 & U \end{vmatrix}.$$

Для простоты положим $\rho = -1$, таким образом

$$L_1 = u_1D_x - u_2.$$

Прямые вычисления показывают, что оператор $A = \frac{d}{dt}(L_1)L_1^{-1} + L_1F^*L_1^{-1}$, где

$$F^* = D_x^3 + uD_x + u_1, \tag{10.15}$$

дифференциальный оператор третьего порядка вида

$$A = D_x^3 - \frac{3u_2}{u_1}D_x^2 + \left(u + \frac{3u_2^2}{u_1^2}\right)D_x + 3\left(\frac{u_4}{u_1} + u_1 - \frac{u_2u_3}{u_1^2}\right). \tag{10.16}$$

Благодаря предположению (10.5) соответствующий оператор L_2 должен быть третьего порядка

$$L_2 = \beta^{(3)} D_x^3 + \beta^{(2)} D_x^2 + \beta^{(1)} D_x + \beta^{(0)}. \tag{10.17}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $\beta^{(i)}$ подставим (10.15), (10.16) и (10.17) в уравнение

$$\frac{d}{dt}(L_2) = AL_2 - L_2 F^*$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях оператора D_x найдем уравнения для определения $\beta^{(3)}$, ..., $\beta^{(0)}$. Опуская вычисления дадим только ответ:

$$L_2 = u_1 D_x^3 - u_2 D_x^2 + \frac{2}{3} u u_1 D_x + u_1^2 - \frac{2}{3} u u_2.$$

Имея операторы L_1 и L_2 легко найти рекурсионный оператор $R = L_1^{-1} L_2$. Поскольку $m = 1$ можем заключить, что R имеет только одно нелокальное выражение. Также можем вычислить порядок оператора R_0 – дифференциальная часть R, в этом случае разность m_2 и m равна двум. Таким образом, получаем

$$R = r^{(2)} D_x^2 + r^{(1)} D_x + r^{(0)} + u_1 D_x^{-1} h.$$

Подставим L_1, L_2 и R в уравнение $L_2 = L_1 R$:

$$\begin{aligned} u_1 D_x^3 - u_2 D_x^2 + \frac{2}{3} u u_1 D_x + u_1^2 - \frac{2}{3} u u_2 \\ = (u_1 D_x - u_2) \left(r^{(2)} D_x^2 + r^{(1)} D_x + r^{(0)} + u_1 D_x^{-1} h \right). \end{aligned}$$

Из последнего находим $r^{(2)} = 1$, $r^{(1)} = 0$, $r^{(0)} = \frac{2}{3} u$, $h = 1$ и поэтому имеем (см. также [54])

$$R = D_x^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_1 D_x^{-1}.$$

Отметим, что обычное представление R через гамильтоновы операторы $H_1 = D_x$, $H_2 = D_x^3 + 4uD_x + 2u_1$ имеет вид

$$R = H_2 H_1^{-1}.$$

Пример 2. В качестве второго иллюстрирующего примера рассмотрим уравнение Каупа-Купершмидта

$$u_t = u_5 + 10uu_3 + 25u_1u_2 + 20u^2u_1. \tag{10.18}$$

В дальнейшем нам понадобится оператор линеаризации

$$F^* = D_x^5 + 10uD_x^3 + 25u_1D_x^2 + \left(25u_2 + 20u^2\right) D_x + 10u_3 + 40uu_1.$$

Чтобы найти множество S затравочных симметрий для уравнения (10.18) необходимо рассмотреть возможные случаи $S_1 = \{u_x\}$, $S_2 = \{u_t\}$, $S_3 = \{u_x, u_t\}$, $S_4 = \{u_x, u_t, u_\tau\}$, где $u_\tau = g^{(3)}$ является следующей симметрией уравнения Каупа-Купершмидта, которая имеет седьмой порядок.

Начнем с случая $S = S_1$. Для соответствующего L_1 находим A из уравнения (10.8), тогда в силу (10.5) $m_2 = 1 + 5 - 1 = 5$ ищем дифференциальный оператор L_2 пятого порядка, удовлетворяющий уравнению $\frac{d}{dt}L_2 = AL_2 - L_2F^*$ и заметим, что такого оператора не существует. Аналогичным образом проверено, что случай $S = S_2$ также не подходит.

Затем рассматриваем случай $S = S_3$ и приходим к успеху. Оператор L_1 находим из соотношения

$$L_1U = \begin{vmatrix} u_3 & u_2 & u_1 \\ u_{2t} & u_{1t} & u_t \\ U_2 & U_1 & U \end{vmatrix}$$

в виде

$$L_1 = \alpha D_x^2 + \beta D_x + \gamma,$$

где

$$\alpha = u_2u_5 + 10uu_2u_3 - u_1u_6 - 35u_1^2u_3 - 10uu_1u_4 - 40uu_1^3,$$

$$\beta = 10uu_1u_5 - u_3u_5 + 45u_1^2u_4 - 10uu_3^2 + 120uu_1^2u_2$$

$$+60u_1u_2u_3 + 40u_1^4 + u_1u_7,$$

$$\gamma = -120uu_1u_2^2 - 10uu_2u_5 + u_3u_6 + 35u_1u_3^2 - 60u_2^2u_3$$

$$-40u_1^3u_2 - u_2u_7 + 10uu_3u_4 + 40uu_1^2u_3 - 45u_1u_2u_4.$$

Затем ищем оператор

$$A = \sum_{j=0}^{5} A^{(j)} D_x^j$$

из уравнения:

$$\frac{d}{dt}(L_1) = AL_1 - L_1F^*. \tag{10.19}$$

Отметим, что операторы A и F^* всегда имеют один и тот же порядок. Таким образом, при помощи уравнения (10.19) находим все коэффициенты $A^{(j)}$, однако некоторые из них оказались большими, и поэтому дадим только первые три из них:

$$A^{(5)} = 1,\ A^{(4)} = -5\frac{\alpha_x}{\alpha},$$
$$A^{(3)} = 20\frac{\alpha_x^2}{\alpha^2} + 5\frac{\beta\alpha_x}{\alpha^2} - 5\frac{\beta_x}{\alpha} - 10\frac{\alpha_{xx}}{\alpha} + 10u.$$

На следующем шаге ищем дифференциальный оператор L_2 восьмого порядка (напомним, что $m_2 = m + ord\, g^{(m+1)} - ord\, g^{(1)} = 2 + ord\, g^{(3)} - ord\, g^{(1)} = 2 + 7 - 1 = 8$)

$$L_2 = \sum_{k=0}^{8} b^{(k)} D_x^k$$

при помощи уравнения $\frac{d}{dt}(L_2) = AL_2 - L_2F^*$. Оказалось, что такой оператор существует. Опуская вычисления выпишем только ответ:

$$
\begin{aligned}
&b^{(8)} = \alpha,\ b^{(7)} = \beta,\ b^{(6)} = 12u\alpha + \gamma,\ b^{(5)} = 36u_1\alpha + 12u\beta,\\
&b^{(4)} = (133u_2 + 36u^2)\alpha + 48u_1\beta + 12u\gamma,\\
&b^{(3)} = (169u_3 + 264uu_1)\alpha + (85u_2 + 36u^2)\beta + 36u_1\gamma,\\
&b^{(2)} = (132u_4 + 394uu_2 + 381u_1^2 + 32u^3)\alpha + (84u_3 + 192uu_1)\beta + (49u_2 + 36u^2)\gamma,\\
&b^{(1)} = (63u_5 + 304uu_3 + 852u_1u_2 + 240u^2u_1)\alpha\\
&\qquad + (48u_4 + 202uu_2 + 189u_1^2 + 32u^3)\beta + (35u_3 + 120uu_1)\gamma,\\
&b^{(0)} = (17u_6 + 122uu_4 + 444u_1u_3 + 324u_2^2 + 192u^2u_2 + 368uu_1^2)\alpha\\
&\qquad + (15u_5 + 102uu_3 + 272u_1u_2 + 144u^2u_1)\beta + (13u_4 + 82uu_2 + 69u_1^2 + 32u^3)\gamma.
\end{aligned}
$$

Найдем теперь искомый оператор рекурсии R. Известно, что порядок его дифференциальной части равен $6 = m_2 - m$ и имеет два нелокальных члена:

$$
R = \sum_{j=0}^{6} r^{(j)} D_x^j + u_1 D_x^{-1} h_1 + u_t D_x^{-1} h_2. \tag{10.20}
$$

Соотношение $L_1 R = L_2$ позволяет найти все функциональные параметры равенства (10.20):

$$
\begin{aligned}
&r^{(6)} = 1,\ r^{(5)} = 0,\ r^{(4)} = 12u,\ r^{(3)} = 36u_1,\ r^{(2)} = 49u_2 + 36u^2,\\
&r^{(1)} = 35u_3 + 120uu_1,\ r^{(0)} = 13u_4 + 82uu_2 + 69u_1^2 + 32u^3,\\
&h_1 = 2u_2 + 8u^2,\ h_2 = 2.
\end{aligned}
$$

Итак, мы имеем окончательную форму R, совпадающую с найденной ранее в [59]:

$$
\begin{aligned}
R = D_x^6 + 12uD_x^4 + 36u_1D_x^3 + \left(49u_2 + 36u^2\right) D_x^2 + \left(35u_3 + 120uu_1\right) D_x\\
+13u_4 + 82uu_2 + 69u_1^2 + 32u^3 + u_1D_x^{-1}(2u_2 + 8u^2) + 2u_tD_x^{-1}.
\end{aligned}
$$

Имея операторы L_1 и L_2, мы можем сразу записать пару Лакса вида (10.12), (10.13), которая не совпадает с известной.

§12. Построение оператора рекурсии для дифференциально-разностных уравнений.

Сосредоточимся на интегрируемых цепочках вида

$$u_{n,t} = f(u_{n+k}, u_{n+k-1}, \dots, u_{n-k}), \quad \frac{\partial f}{\partial u_{n+k}} \frac{\partial f}{\partial u_{n-k}} \neq 0 \tag{11.1}$$

где искомая функция $u = u_n(t)$ зависит от целого n и вещественного t. Неотрицательное целое число k в (11.1) называется порядком уравнения (11.1). Цепочка такого же вида

$$u_{n,\tau} = g(u_{n+m}, u_{n+m-1}, \dots, u_{n-m}) \tag{11.2}$$

называется симметрией цепочки (11.1), если выполняется следующее условие

$$D_t g - D_\tau f|_{(11.1),(11.2)} = 0.$$

Поскольку цепочка (11.1) предполагается интегрируемой, тогда она допускает бесконечную иерархию симметрий

$$u_{\tau_1} = g^{(1)}, u_{\tau_2} = g^{(2)}, \dots, u_{\tau_j} = g^{(j)}, \dots. \tag{11.3}$$

Первые несколько членов иерархии - это классические симметрии, а другие - высшие. Иерархия эффективно описывается оператором рекурсии. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы оператор рекурсии R был псевдоразностным оператором со слабой нелокальностью, т.е. его можно свести к следующему виду

$$R = R_0 + \sum_{j=1}^{m} g^{(j)} (D_n - 1)^{-1} h^{(j)} \tag{11.4}$$

где D_n оператор сдвига, действующий по правилу $D_n q_n = q_{n+1}$, R_0 разностный оператор

$$R_0 = \gamma^{(s)} D_n^s + \gamma^{(s-1)} D_n^{s-1} + \dots + \gamma^{(-s)} D_n^{-s}, \quad s > 0,$$

коэффициенты $h^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m$ функции переменных $u_n, u_{n\pm1}, \ldots$, множество коэффициентов $S = \left\{g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(m)}\right\}$ является подмножеством генераторов симметрий из иерархии (11.3). Предполагается, что генераторы $\left\{g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(m)}\right\}$ составляют линейное независимое множество над полем комплексных чисел.

Теорема 11.1. *Пусть R слабо нелокальный разностный оператор вида (11.4). Тогда существует пара разностных операторов L_1 и L_2 вида*

$$L_1 = \alpha^{(0)} D_n^m + \alpha^{(1)} D_n^{m-1} + \cdots + \alpha^{(m)}, \tag{11.5}$$

$$L_2 = \beta^{(p)} D_n^p + \beta^{(p-1)} D_n^{p-1} + \cdots + \beta^{(-q)} D_n^{-q}, \quad p > m, \quad q > 0 \tag{11.6}$$

так что выполняется следующее условие

$$L_1 R = L_2.$$

Доказательство. В качестве L_1 берем разностный оператор минимального порядка аннулирующий все генераторы из множества S. Другими словами, необходимо восстановить разностный оператор (11.5) для заданной фундаментальной системы его решений $\left\{g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(m)}\right\}$. Очевидно, что ответ можно дать в следующем явном виде

$$L_1 U = \rho \begin{vmatrix} g_m^{(1)} & g_{m-1}^{(1)} & \ldots & g_1^{(1)} & g^{(1)} \\ g_m^{(2)} & g_{m-1}^{(2)} & \ldots & g_1^{(2)} & g^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_m^{(m)} & g_{m-1}^{(m)} & \ldots & g_1^{(m)} & g^{(m)} \\ U_m & U_{m-1} & \ldots & U_1 & U \end{vmatrix}, \tag{11.7}$$

где $g_m^{(j)} := D_n^m(g^{(j)})$, $U_j = D_n^j U$ и ρ произвольная функция динамических переменных u_n, $u_{n\pm1}$, ... Покажем, что для такого выбора L_1 оператор $L_2 := L_1 R$ также является разностным, т.е. L_2 не содержит нелокального члена. На самом деле достаточно доказать, что произведение вида $L_1 g(D_n-1)^{-1}h$ является разностным оператором всякий раз, когда $L_1 g = 0$. В силу (11.5) это произведение может быть записано следующим образом

$$\begin{aligned} & g_m(D_n-1)^{-1}D_n^m h + \alpha^{(1)}g_{m-1}(D_n-1)^{-1}D_n^{m-1}h + \cdots + \alpha^{(m)}(D_n-1)^{-1}h \\ & \quad = g_m(D_n-1)^{-1}(D_n^m-1)h + \alpha^{(1)}g_{m-1}(D_n-1)^{-1}(D_n^{m-1}-1)h \\ & \qquad + \alpha^{(m-1)}h + L_1(g)(D_n-1)h, \end{aligned} \tag{11.8}$$

где $g_m := D_n^m(g)$. Заметим, что последний член в (11.8) равен нулю, поскольку $L_1(g) = 0$. Все остальные члены в (11.8) содержат линейные комбинации произведения $(D_n-1)^{-1}(D_n^j-1)$, которые не производят нелокальности для любого целого $j \geq 0$. $\square$

Для дифференциально-разностного интегрируемого уравнения (11.1) множество S имеет одну из следующих форм

$$\begin{aligned} & S_1 = \left\{g^{(0)}\right\},\ S_2 = \{f\},\ S_3 = \left\{g^{(0)},\ f\right\}, \\ & \quad S_4 = \left\{f,\ g^{(1)}\right\},\ S_5 = \left\{g^{(0)}, f,\ g^{(1)}\right\},\ S_6 = \left\{f,\ g^{(1)},\ g^{(2)}\right\}. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Здесь $u_{\tau_0} = g^{(0)}$ является классической симметрией нулевого порядка уравнения (11.1), если цепочка допускает такую симметрию, $u_t = f$ - само уравнение (11.1), $u_{\tau_1} = g^{(1)}$ и $u_{\tau_2} = g^{(2)}$ ближайшие высшие симметрии. Множество S_1 определяет множество затравочных симметрий для системы двух цепочек (см. [30]), случай S_2 соответствует цепочке Вольтерра (см., пример ниже), множество S_3 связано с примером рассмотренным ниже, S_4 соответствует дискретизации Ямилова уравнения Кричевера-Новикова (YdKN), а случай S_6 соответствует второму оператору рекурсии для YdKN (см. [39, 75]).

Предположим теперь, что цепочка (11.1) допускает слабо нелокальный псевдоразностный оператор рекурсии (11.4) и обсудим вопрос о том, как его найти.

Необходимо определить соответствующий набор затравочных симметрий. С этой целью мы должны рассмотреть возможные множества, перечисленные в (11.9). Начнем с простейшего S_1 (или S_2, если цепочка не допускает симметрии нулевого порядка). Затем мы определяем оператор L_1 из представления определителя (11.7) и ищем оператор L_2 такой, что отношение $R = L_1^{-1}L_2$ является решением определяющего уравнения для оператора рекурсии

$$\frac{d}{dt}R = [F^*, R]$$

где F^* производная Фреше (или оператор линеаризации) для уравнения (11.1):

$$F^* = \frac{\partial f}{\partial u_{n+k}}D_n^k + \frac{\partial f}{\partial u_{n+k-1}}D_n^{k-1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_{n-k}}D_n^{-k}.$$

Натуральные числа m, p и q в формулах (11.5) и (11.6) связаны друг с другом следующим образом

$$p = m + l, \quad q = l, \quad l = ord\, g^{(m+1)} - ord\, g^{(1)}. \tag{11.10}$$

Для построения оператора L_2 воспользуемся схемой предложенной выше в предыдущем параграфе. Для оператора L_1, найденного в силу (11.7), определим оператор A из уравнения

$$\frac{d}{dt}L_1 = AL_1 - L_1F^*. \tag{11.11}$$

На следующем шаге рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}L_2 = AL_2 - L_2F^* \tag{11.12}$$

и выясним имеет ли оно решение L_2 вида (11.6) с параметрами p и q заданными (11.10). Если ответ положительный, тогда можно заключить, что $R = L_1^{-1}L_2$ является оператором рекурсии цепочки (11.1). В противном случае, переходим к следующему члену последовательности (11.9) и так далее.

Как следует из рассуждений выше (см. Теорему 11.1), если цепочка (11.1) допускает слабо нелокальный оператор рекурсии, то ее можно найти, используя эту процедуру. Другими словами, для некоторого выбора множества затравочных симметрий существует оператор L_2, удовлетворяющий уравнению (11.12). Предположим, что такой L_2 найден, то для определения неизвестных коэффициентов в (11.4) мы используем уравнение $L_2 = L_1 R$, написанное в развернутом виде

$$\begin{aligned}
&\beta^{(p)} D_n^p + \beta^{(p-1)} D_n^{p-1} + \cdots + \beta^{(-q)} D_n^{-q} \\
&= (\alpha^{(0)} D_n^m + \alpha^{(1)} D_n^{m-1} + \cdots + \alpha^{(m)})(\gamma^{(s)} D_n^s + \cdots + \gamma^{(-s)} D_n^{-s}) \\
&\quad + (\alpha^{(0)} D_n^m + \alpha^{(1)} D_n^{m-1} + \cdots + \alpha^{(m)}) \\
&\qquad \times (g^{(1)} (D_n - 1)^{-1} h^{(1)} + \cdots + g^{(m)} (D_n - 1)^{-1} h^{(m)}).
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Сравнение коэффициентов при различных степенях D_n в (11.13) позволяет найти коэффициенты $h^{(j)}$ и $\gamma^{(j)}$.

Пример 1. В качестве иллюстративного примера применения вышеизложенного алгоритма возьмем известную цепочку Вольтерра

$$\frac{d}{dt} u_n = u_n (u_{n+1} - u_{n-1}).$$

Найдем его линеаризацию

$$\frac{d}{dt} U_n = F^* U_n, \quad \text{где} \quad F^* = u_n D_n + (u_{n+1} - u_{n-1}) - u_n D_n^{-1}.$$

Поскольку цепочка Вольтерра не допускает никакой автономной симметрии нулевого порядка, начинаем с множества S_2. Определим оператор L_1 через представление (11.7)

$$L_1 U_n = -\frac{1}{u_{n,t} u_{n+1,t}} \begin{vmatrix} u_{n+1,t} & u_{n,t} \\ U_{n+1} & U_n \end{vmatrix}$$

или точнее

$$L_1 = (D_n - 1) \frac{1}{u_{n,t}}. \tag{11.14}$$

Затем ищем оператор A вида

$$A = A^{(1)}D_n + A^{(0)} + A^{(-1)}D_n^{-1}$$

из уравнения (11.11):

$$\frac{1}{(u_{n+1,t})_t}D_n - \frac{1}{(u_{n,t})_t} = \left(A^{(1)}D_n + A^{(0)} + A^{(-1)}D_n^{-1}\right)\left(\frac{1}{u_{n+1,t}}D_n - \frac{1}{u_{n,t}}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{u_{n+1,t}}D_n - \frac{1}{u_{n,t}}\right)\left(u_nD_n + (u_{n+1} - u_{n-1}) - u_nD_n^{-1}\right).$$

Сравнивая коэффициенты при степенях оператора D_n в последнем уравнении, получим

$$A^{(1)} = \frac{u_{n+1}u_{n+2,t}}{u_{n+1,t}},\ A^{(0)} = \frac{u_{n+1}u_{n,t}}{u_{n+1,t}} - \frac{u_nu_{n+1,t}}{u_{n,t}},\ A^{(-1)} = -\frac{u_nu_{n-1,t}}{u_{n,t}}.$$

В силу гипотезы (11.10) соответствующий оператор L_2 должен иметь вид

$$L_2 = b^{(2)}D_n^2 + b^{(1)}D_n + b^{(0)} + b^{(-1)}D_n^{-1}. \tag{11.15}$$

Подставим анзац (11.15) в уравнение (11.12) и найдем

$$b_t^{(2)}D_n^2 + b_t^{(1)}D_n + b_t^{(0)} + b_t^{(-1)}D_n^{-1} =$$
$$\left(A^{(1)}D_n + A^{(0)} + A^{(-1)}D_n^{-1}\right)\left(b^{(2)}D_n^2 + b^{(1)}D_n + b^{(0)} + b^{(-1)}D_n^{-1}\right)$$
$$-\left(b^{(2)}D_n^2 + b^{(1)}D_n + b^{(0)} + b^{(-1)}D_n^{-1}\right)\left(u_nD_n + (u_{n+1} - u_{n-1}) - u_nD_n^{-1}\right).$$

Собирая коэффициенты при разных степенях D_n, мы можем получить некоторые уравнения на коэффициенты $b^{(j)}$. Опустим детали и дадим только ответ

$$b^{(2)} = \frac{c_1}{u_{n+2} - u_n}, \quad b^{(1)} = \frac{c_3 + c_1(u_{n+2} + u_{n+1})}{u_{n+1}(u_{n+2} - u_n)} - \frac{c_1}{u_{n+1} - u_{n-1}},$$
$$b^{(0)} = \frac{c_1}{u_{n+2} - u_n} - \frac{c_3 + c_1(u_n + u_{n-1})}{u_n(u_{n+1} - u_{n-1})}, \quad b^{(-1)} = -\frac{c_1}{u_{n+1} - u_{n-1}}.$$

Без ограничения общности положим $c_1 = 1$ и $c_3 = 0$ и получим

$$L_2 = \frac{1}{u_{n+2} - u_n}D_n^2 + \left(\frac{u_{n+2} + u_{n+1}}{u_{n+1}(u_{n+2} - u_n)} - \frac{1}{u_{n+1} - u_{n-1}}\right)D_n +$$
$$\frac{1}{u_{n+2} - u_n} - \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n(u_{n+1} - u_{n-1})} - \frac{1}{u_{n+1} - u_{n-1}}D_n^{-1}.$$

Таким образом, мы имеем оба оператора L_1 и L_2 и готовы построить оператор рекурсии R:

$$R = r^{(1)} D_n + r^{(0)} + r^{(-1)} D_n^{-1} + u_{n,t}(D_n - 1)^{-1} h. \tag{11.16}$$

Подставим в уравнение $L_2 = L_1 R$ подробные представления множителей (11.14), (11.15), (11.16). В результате получим

$$\begin{aligned} & b^{(2)} D_n^2 + b^{(1)} D_n + b^{(0)} + b^{(-1)} D_n^{-1} \\ & = \left(\frac{1}{u_{n+1,t}} D_n - \frac{1}{u_{n,t}} \right) \left(r^{(1)} D_n + r^{(0)} + r^{(-1)} D_n^{-1} + u_{n,t}(D_n - 1)^{-1} h \right), \end{aligned}$$

который легко решается

$$r^{(1)} = u_n, \quad r^{(0)} = (u_{n+1} + u_n), \quad r^{(-1)} = u_n, \quad h = \frac{1}{u_n}.$$

Поэтому оператор рекурсии выглядит следующим образом

$$R = u_n D_n + (u_{n+1} + u_n) + u_n D_n^{-1} + u_{n,t}(D_n - 1)^{-1} \frac{1}{u_n}.$$

Он совпадает с R, найденным ранее в [15], [94]. Заметим, что в [94] этот оператор представлен как отношение $R = H_2 H_1^{-1}$ двух гамильтоновых операторов

$$H_1 = u_n(D - D^{-1})u_n, \; H_2 = u_n(D u_n D + u_n D + D u_n - u_n D^{-1} - D^{-1} u_n - D^{-1} u_n D^{-1}) u_n.$$

Пример 2. В настоящее время интенсивно изучаются неавтономные интегрируемые уравнения. Условия интегрируемости симметрии для этого класса уравнений сформулированы в [71]. Симметрийный алгоритм для построения рекурсионного оператора может быть эффективно применен и к неавтономным уравнениям. Рассмотрим следующее неавтономное уравнение

$$u_{n,t} = h_n h_{n-1}(a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) \tag{11.17}$$

где $h_n = u_{n+1} u_n - 1$, а коэффициент a_n является произвольной периодической функцией $a_{n+2} = a_n$. Эта цепочка была найдена в рамках классификации интегрируемых дискретных уравнений на квадратных графах. А именно, это симметрия по направлению n уравнения

$$u_{n+1,m+1}(u_{n,m} - u_{n,m+1}) - u_{n+1,m}(u_{n,m} + u_{n,m+1}) + 2 = 0. \tag{11.18}$$

Отметим, что уравнения (11.17) и (11.18) были найдены Р.Н. Гарифуллиным и Р.И. Ямиловым в [57]. В работе [6] рекурсионный оператор для неавтономного уравнения (11.17) был построен необычным способом. Авторы заметили, что уравнение (11.17) можно свести к автономной системе найденной в [88], для которой оператор рекурсии уже найден в [39]. В [6] известный оператор рекурсии был соответствующим образом пересчитан в скалярную форму.

Построим оператор рекурсии непосредственно с использованием симметрийного алгоритма, рассмотренного выше.

Как было отмечено в [6], уравнение (11.17) обладает довольно большой иерархией симметрий. Поскольку уравнение не является автономным, то множество S затравочных симметрий, очевидно, также может содержать неавтономные симметрии. Первые два члена иерархии симметрии следующие

$$u_{n,\tau_1} = (-1)^n u_n, \tag{11.19}$$

$$u_{n,\tau_2} = h_n h_{n-1}(c_n u_{n+2} - c_{n-1} u_{n-2}), \quad c_{n+2} = c_n, \tag{11.20}$$

где c_n является произвольной периодической функцией по n с периодом равным двум.

В качестве возможных наборов затравочных симметрий рассмотрим следующие три набора:

$$S_1 = \{u_{n,\tau_1}\}, \quad S_2 = \{u_{n,\tau_2}\}, \quad S_3 = \{u_{n,\tau_1}; u_{n,\tau_2}\}.$$

Путем проверки было получено, что первые два набора не подходят, но последний, несомненно, является необходимым набором затравочных симметрий.

Оператор L_1 соответствующий S_3 задается формулой

$$L_1 U_n = \begin{vmatrix} D_n^2(u_{n,\tau_1}) & D_n(u_{n,\tau_1}) & u_{n,\tau_1} \\ D_n^2(u_{n,\tau_2}) & D_n(u_{n,\tau_2}) & u_{n,\tau_2} \\ U_{n+2} & U_{n+1} & U_n \end{vmatrix}.$$

В результате получим

$$L_1 = \alpha D_n^2 + \beta D_n + \gamma,$$

где

$$\alpha = (-1)^{n+1} h_n \left(u_{n+1} h_{n-1}(c_n u_{n+2} - c_{n-1} u_{n-2}) + u_n h_{n+1}(c_{n-1} u_{n+3} - c_n u_{n-1}) \right),$$
$$\beta = (-1)^{n+1} \left(u_{n+2} h_n h_{n-1}(c_n u_{n+2} - c_{n-1} u_{n-2}) - u_n h_{n+1} h_{n+2}(c_n u_{n+4} - c_{n-1} u_n) \right),$$
$$\gamma = (-1)^n h_{n+1} \left(u_{n+1} h_{n+2}(c_n u_{n+4} - c_{n-1} u_n) + u_{n+2} h_n (c_{n-1} u_{n+3} - c_n u_{n-1}) \right).$$

Очевидно, линеаризация уравнения (11.17) имеет вид

$$U_{n,t} = F^* U_n,$$

где

$$\begin{aligned} F^* &= a_n h_n h_{n-1} D_n^2 + u_n h_{n-1}(a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) D_n \\ &\quad + (u_{n+1} h_{n-1} + u_{n-1} h_n)(a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) \\ &\qquad + u_n h_n (a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) D_n^{-1} - a_{n-1} h_n h_{n-1} D_n^{-2}. \end{aligned}$$

Чтобы найти оператор

$$A = A^{(2)} D_n^2 + A^{(1)} D_n + A^{(0)} + A^{(-1)} D_n^{-1} + A^{(-2)} D_n^{-2}$$

решаем уравнение

$$\frac{d}{dt} L_1 = A L_1 - L_1 F^*,$$

которое эквивалентно следующему

$$
\begin{aligned}
&\alpha_t D_n^2 + \beta_t D_n + \gamma_t \\
&\quad = (A^{(2)} D_n^2 + A^{(1)} D_n + A^{(0)} + A^{(-1)} D_n^{-1} + A^{(-2)} D_n^{-2})(\alpha D_n^2 + \beta D_n + \gamma) \\
&\qquad -(\alpha D_n^2 + \beta D_n + \gamma) \big(a_n h_n h_{n-1} D_n^2 + u_n h_{n-1}(a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) D_n \\
&\qquad\quad +(u_{n+1} h_{n-1} + u_{n-1} h_n)(a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) \\
&\qquad\qquad +u_n h_n (a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) D_n^{-1} - a_{n-1} h_n h_{n-1} D_n^{-2} \big) .
\end{aligned}
\tag{11.21}
$$

Легко проверить, что из (11.21) вытекает

$$
\begin{aligned}
A^{(2)} &= \frac{a_n h_{n+1} h_{n+2}(u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1})}{u_{n+3} g_{n+2} + u_{n+2} g_{n+3}}, \\
A^{(1)} &= \frac{a_{n-1} h_{n+1}(u_n h_n g_{n+2} + u_n^2 u_{n+2} g_{n+1} + u_{n+2} g_n)}{u_{n+2} g_{n+1} + u_{n+1} g_{n+2}} \\
&\quad - \frac{a_n h_{n+1}(u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1})(u_{n+4} g_{n+2} + u_{n+2}^2 u_{n+4} g_{n+3} + u_{n+2} h_{n+2} g_{n+4})}{(u_{n+2} g_{n+1} + u_{n+1} g_{n+2})(u_{n+3} g_{n+2} + u_{n+2} g_{n+3})}, \\
A^{(0)} &= \frac{d}{dt} \ln(u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}) + \Bigg(\frac{u_{n+1} u_{n+3} h_n (u_{n+2} g_n - u_n g_{n+2})}{u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}} \\
&\quad - \frac{h_{n+1}(u_{n+2} g_n - u_n g_{n+2})(u_{n+1} g_{n+3} - u_{n+3} g_{n+1})}{(u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1})(u_{n+2} g_{n+1} + u_{n+1} g_{n+2})} \\
&\quad - \frac{u_n^2 h_{n+1}(u_{n+1} g_{n+3} - u_{n+3} g_{n+1})}{u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}} - u_n (u_{n+3} h_{n+1} + u_{n+1} h_{n+2}) \Bigg) a_{n-1} \\
&\quad + \Bigg(\frac{h_{n+1}(u_{n+1} g_{n+3} - u_{n+3} g_{n+1})(u_{n+4} g_{n+2} + u_{n+4} u_{n+2}^2 g_{n+3} + u_{n+2} h_{n+2} g_{n+4})}{(u_{n+3} g_{n+2} + u_{n+2} g_{n+3})(u_{n+2} g_{n+1} + u_{n+1} g_{n+2})} \\
&\quad - \frac{u_{n+1} u_{n-1} h_n (u_{n+2} g_n - u_n g_{n+2})}{u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}} - \frac{h_{n-1} h_n (u_{n+2} g_{n+1} + u_{n+1} g_{n+2})}{u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}} \\
&\quad + \frac{h_{n+1} h_{n+2}(u_{n+3} g_{n+4} + u_{n+4} g_{n+3})}{u_{n+3} g_{n+2} + u_{n+2} g_{n+3}} + u_{n+4}(u_{n+3} h_{n+1} + u_{n+1} h_{n+2}) \Bigg) a_n \\
A^{(-1)} &= - \frac{a_n h_n (u_n g_{n+2} + u_{n+2} h_{n+1} g_n + u_n u_{n+2}^2 g_{n+1})}{u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}} \\
&\quad + \frac{a_{n-1} h_n (u_{n+2} g_{n+1} + u_{n+1} g_{n+2})(u_{n-2} g_n + u_n h_{n-1} g_{n-2} + u_{n-2} u_n^2 g_{n-1})}{(u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1})(u_{n-1} g_n + u_n g_{n-1})}, \\
A^{(-2)} &= - \frac{a_{n-1} h_n h_{n-1}(u_{n+2} g_{n+1} + u_{n+1} g_{n+2})}{u_{n-1} g_n + u_n g_{n-1}},
\end{aligned}
$$

где $g_n = h_n h_{n-1}(c_n u_{n+2} - c_{n-1} u_{n-2})$.

Далее ищем оператор L_2, который должен иметь вид

$$L_2 = b^{(4)} D_n^4 + b^{(3)} D_n^3 + b^{(2)} D_n^2 + b^{(1)} D_n + b^{(0)} + b^{(-1)} D_n^{-1} + b^{(-2)} D_n^{-2}. \quad (11.22)$$

Действительно, в (11.6) в силу (11.10) имеем $p = m + l$, $q = l$ где $m = 2$, $l = 2$.

Поэтому определяющее уравнение

$$\frac{d}{dt} L_2 = A L_2 - L_2 F^*$$

принимает вид:

$$\begin{aligned}
& b_t^{(4)} D_n^4 + b_t^{(3)} D_n^3 + b_t^{(2)} D_n^2 + b_t^{(1)} D_n + b_t^{(0)} + b_t^{(-1)} D_n^{-1} + b_t^{(-2)} D_n^{-2} \\
& = \left(A^{(2)} D_n^2 + A^{(1)} D_n + A^{(0)} + A^{(-1)} D_n^{-1} + A^{(-2)} D_n^{-2} \right) \\
& \quad \times \left(b^{(4)} D_n^4 + b^{(3)} D_n^3 + b^{(2)} D_n^2 + b^{(1)} D_n + b^{(0)} + b^{(-1)} D_n^{-1} + b^{(-2)} D_n^{-2} \right) \\
& \quad - \left(b^{(4)} D_n^4 + b^{(3)} D_n^3 + b^{(2)} D_n^2 + b^{(1)} D_n + b^{(0)} + b^{(-1)} D_n^{-1} + b^{(-2)} D_n^{-2} \right) \\
& \qquad \times \big(a_n h_n h_{n-1} D_n^2 + u_n h_{n-1} (a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) D_n \\
& \qquad\quad + (u_{n+1} h_{n-1} + u_{n-1} h_n)(a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) \\
& \qquad\qquad + u_n h_n (a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) D_n^{-1} - a_{n-1} h_n h_{n-1} D_n^{-2} \big) .
\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях D_n, получаем несколько уравнений, из которых находим

$$\begin{aligned}
b^{(4)} &= (-1)^{n+1} \mu c_n h_{n+1} h_{n+2} (u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}), \\
b^{(3)} &= (-1)^{n+1} \mu c_{n-1} h_n h_{n+1} (u_{n+2} g_n - u_n g_{n+2}) \\
& \quad + (-1)^{n+1} \mu \frac{u_{n+2} g_{n+2} (u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1})}{h_{n+2}}, \\
b^{(2)} &= (-1)^{n+1} \mu (u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}) \left(\frac{u_{n+1} g_{n+2} - u_{n+2} g_{n+1}}{h_{n+1}} + c_n (h_{n+1} h_{n+3} - 1) + \right. \\
& \quad \left. c_{n-1} (h_n h_{n+2} - 1) \right) + (-1)^{n+1} \mu \frac{u_{n+1} g_{n+1} (u_{n+2} g_n - u_n g_{n+2})}{h_{n+1}} + \\
& \quad (-1)^n \mu c_n h_n h_{n-1} (u_{n+1} g_{n+2} + u_{n+2} g_{n+1}) + (s_n^{(1)} + (-1)^n s_n^{(2)}) (u_{n+1} g_n + u_n g_{n+1}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b^{(1)} = &(-1)^{n+1}\mu(u_{n+2}g_n - u_n g_{n+2})\left(\frac{u_n g_{n+1} - u_{n+1}g_n}{h_n} + c_n(h_{n-1}h_{n+1} - 1) + \right.\\
&\left. c_{n-1}(h_n h_{n+2} - 1)\right) + (-1)^n\mu\frac{u_n g_n(u_{n+1}g_{n+2} + u_{n+2}g_{n+1})}{h_n} + \\
&(-1)^{n+1}\mu(u_{n+1}g_n + u_n g_{n+1})\frac{u_n h_{n+1}g_{n+2} + u_{n+2}h_n g_{n+2} + u_{n+2}h_{n+1}g_n}{h_n h_{n+1}} - \\
&(s_n^{(1)} + (-1)^n s_n^{(2)})(u_n g_{n+2} - u_{n+2}g_n),\\
b^{(0)} = &(-1)^n\mu(u_n g_{n+2} - u_{n+2}g_n)\left(\frac{u_{n+1}g_{n+1}}{h_n} + \frac{u_{n-1}g_{n+1} + u_{n+1}g_{n-1}}{h_{n-1}}\right) + \\
&(-1)^{n+1}\mu(u_{n+1}g_n + u_n g_{n+1})\left(c_{n-1}h_{n+1}h_{n+2} + \frac{u_{n+1}g_{n+2} - u_{n+2}g_{n+1}}{h_n} + \right.\\
&\left.\frac{u_{n-1}g_{n+2} - u_{n+2}g_{n-1}}{h_{n-1}}\right) + (-1)^n\mu(u_{n+1}g_{n+2} + u_{n+2}g_{n+1})\left(\frac{u_{n-1}g_n - u_n g_{n-1}}{h_{n-1}} + \right.\\
&\left. c_n(h_{n-1}h_{n+1} - 1) + c_{n-1}(h_n h_{n-2} - 1)\right)\\
&- (s_n^{(1)} + (-1)^n s_n^{(2)})(u_{n+1}g_{n+2} + u_{n+2}g_{n+1}),\\
b^{(-1)} = &(-1)^{n+1}\mu c_n h_n h_{n+1}(u_{n+2}g_n - u_n g_{n+2})\\
&+ (-1)^{n+1}\mu\frac{u_n g_n(u_{n+1}g_{n+2} + u_{n+2}g_{n+1})}{h_{n-1}},\\
b^{(-2)} = &(-1)^n\mu c_{n-1}h_n h_{n-1}(u_{n+1}g_{n+2} + u_{n+2}g_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Здесь μ - произвольная постоянная, коэффициенты $s_n^{(1)}$, $s_n^{(2)}$ – произвольные периодические функции с периодом равным 2. Подставляя коэффициенты в (11.22) находим искомый оператор L_2. Таким образом, мы имеем оба оператора L_1, L_2. Можем заключить, что оператор рекурсии имеет вид

$$
\begin{aligned}
R = r^{(2)}D_n^2 + r^{(1)}D_n + r^{(0)} + r^{(-1)}D_n^{-1} + r^{(-2)}D_n^{-2}\\
+ u_{n,\tau_1}(D_n - 1)^{-1}\tilde{q} + u_{n,\tau_2}(D_n - 1)^{-1}\tilde{p}
\end{aligned}
$$

с неизвестными множителями $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ и $r^{(i)}$, $i = \overline{2, -2}$. Чтобы найти эти коэффициенты решаем уравнение $L_2 = L_1 R$ или то же самое

$$
\begin{aligned}
&b^{(4)}D_n^4 + b^{(3)}D_n^3 + b^{(2)}D_n^2 + b^{(1)}D_n + b^{(0)} + b^{(-1)}D_n^{-1} + b^{(-2)}D_n^{-2} \\
&\quad = (\alpha D_n^2 + \beta D_n + \gamma)\Big(r^{(2)}D_n^2 + r^{(1)}D_n + r^{(0)} + r^{(-1)}D_n^{-1} \\
&\qquad + r^{(-2)}D_n^{-2} + u_{n,\tau_1}(D_n - 1)^{-1}\tilde{q} + u_{n,\tau_2}(D_n - 1)^{-1}\tilde{p}\Big).
\end{aligned}
$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях оператора D_n, находим:

$$
\begin{aligned}
&r^{(2)} = \mu c_n h_n h_{n-1}, \qquad r^{(1)} = \frac{\mu u_n g_n}{h_n}, \\
&r^{(0)} = \frac{\mu(u_{n-1}g_n - u_n g_{n-1})}{h_{n-1}} + \mu c_n(h_{n-1}h_{n+1} - 1) + \mu c_{n-1}(h_n h_{n-2} - 1) \\
&\qquad - ((-1)^n s_n^{(1)} + s_n^{(2)}), \\
&r^{(-1)} = -\frac{\mu u_n g_n}{h_{n-1}}, \qquad r^{(-2)} = \mu c_{n-1} h_n h_{n-1}, \\
&\tilde{p} = \mu\left(\frac{u_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{u_{n+1}}{h_n}\right), \qquad \tilde{q} = (-1)^{n+1}\mu\left(\frac{g_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{g_{n+1}}{h_n}\right).
\end{aligned}
$$

Наконец, положим $\mu = 1$ и найдем оператор рекурсии

$$
\begin{aligned}
R = {} & c_n h_n h_{n-1} D_n^2 + \frac{u_n g_n}{h_n} D_n + \frac{u_{n-1}g_n - u_n g_{n-1}}{h_{n-1}} + c_n h_{n-1} h_{n+1} \\
&+ c_{n-1} h_n h_{n-2} + s_n - \frac{u_n g_n}{h_{n-1}} D_n^{-1} + c_{n-1} h_n h_{n-1} D_n^{-2} \\
&+ u_{n,\tau_1}(D_n - 1)^{-1}(-1)^{n+1}\left(\frac{g_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{g_{n+1}}{h_n}\right) + u_{n,\tau_2}(D_n - 1)^{-1}\left(\frac{u_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{u_{n+1}}{h_n}\right),
\end{aligned}
$$

где $g_n = h_n h_{n-1}(c_n u_{n+2} - c_{n-1}u_{n-2})$, множители u_{n,τ_1} и u_{n,τ_2} определяются уравнением (11.19) и, соответственно, уравнением (11.20). Обозначим $s_n = (-1)^{n+1}s_n^{(1)} - s_n^{(2)}$. Очевидно, что в формуле для R функция s_n рассматривается как произвольная, удовлетворяющая условию периодичности $s_n = s_{n+2}$.

Заключение

В диссертации проведены исследования, реализующие идею работы [60] об обобщенном инвариантном многообразии. На основе этого понятия разработаны оригинальные методы построения таких важных объектов теории интегрируемости, как пара Лакса и рекурсионный оператор.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Дано полное описание обобщенных инвариантных многообразий второго порядка для уравнения Кортевега-де Фриза и для одного интегрируемого уравнения третьего порядка из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова (см. [24]).
2. Разработан метод построения пар Лакса для нелинейных интегрируемых уравнений, основанный на применении обобщенного инвариантного многообразия. Построены пары Лакса для двух уравнений из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова (см. [24]) и для одной системы дифференциально-разностных уравнений. Ранее эти объекты не были известны. Для упомянутых уравнений С.И. Свинолупова и В.В. Соколова, с помощью предложенных в работе пар Лакса, построены серии локальных законов сохранения. Это служит подтверждением того, что пары Лакса являются настоящими.
3. Разработан симметрийный метод построения оператора рекурсии для нелинейных интегрируемых дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Доказано, что слабо нелокальный оператор рекурсии может быть представлен в виде отношения двух дифференциальных (соответственно, двух дискретных, в случае дифференциально-разностных

уравнений) операторов. Поэтому поиск оператора рекурсии сводится к построению двух дифференциальных (дискретных) операторов. Предложенным методом построен рекурсионный оператор для одной системы дифференциально-разностных уравнений, который ранее не был известен.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы исследования. Исследование обобщенных инвариантных многообразий может быть продолжено по трем следующим направлениям:

1. Изучение ОИМ интегрируемых уравнений более высокого порядка и систем уравнений. Адаптация метода построения пары Лакса и оператора рекурсии для таких уравнений и систем;

2. Разработка метода построения частных решений интегрируемых уравнений при помощи обобщенных инвариантных многообразий;

3. Разработка метода построения оператора рекурсии в случае, когда рекурсионный оператор не является слабо нелокальным.

Литература

[1] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.

[2] Богданов Л.В., Ферапонтов Е.В. Нелокальный гамильтонов формализм полугамильтоновых систем гидродинамического типа // ТМФ, 1998. Т. 116, № 1. С. 113–121.

[3] Борисов А.Б., Зыков С.А. Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // ТМФ, 1998. Т. 115, № 2. С. 199–214.

[4] Борисов А.Б., Киселев В.В. Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т.1. Квазиодномерные магнитные солитоны. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 512 с.

[5] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 465 с.

[6] Гарифуллин Р.Н., Михайлов А.В., Ямилов Р.И. Дискретное уравнение на квадратной решетке с нестандартной структурой высших симметрий // ТМФ, 2014. Т. 180, № 1. С. 17–34.

[7] Гельфанд И.М., Дикий Л.А. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы // Функц. анализ и его прил., 1976. Т. 10, № 4. С. 13–29.

[8] Дринфельд В.Г., Соколов В.В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., ВИНИТИ, М., 1984. Т. 24. С. 81–180.

[9] Жибер А.В., Соколов В.В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // УМН, 2001. Т. 56, № 1(337). С. 63–106.

[10] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М. : Наука, 1980. 319 с.

[11] Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функц. анализ и его прил., 1974. Т. 8, № 3. С. 43–53.

[12] Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // Функц. анализ и его прил., 1979. Т. 13, № 3. С. 13–22.

[13] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 281 с.

[14] Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Уравнение Кортевега—де Фриза с групповой точки зрения // Докл. АН СССР, 1979. Т. 244, № 1. С. 57–61.

[15] Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли–Беклунда // Функц. анализ и его прил., 1980. Т. 14, № 1. С. 25–36.

[16] Киселев О.М. Асимптотика решений многомерных интегрируемых уравнений и их возмущений // Уравнения математической физики, СМФН, МАИ, М., 2004. Т. 11. С. 3–149.

[17] Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 360 с.

[18] Марихин В.Г. О некоторых интегрируемых случаях двумерного движения заряженной частицы в электромагнитном поле // Письма в ЖЭТФ, 2017. Т. 106, № 9. С. 577–580.

[19] Мешков А.Г., Соколов В.В. Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка // ТМФ, 2011. Т. 166, № 1. С. 51–67.

[20] Михайлов А.В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода // Письма в ЖЭТФ, 1979. Т. 30, № 7. С. 443–448.

[21] Мохов О.И., Ферапонтов Е.В. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны // УМН, 1990. Т. 45, № 3(273). С. 191–19.

[22] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 328 с.

[23] Свинолупов С.И. Йордановы алгебры и обобщенные уравнения Кортевега–де Фриза // ТМФ, 1991. Т. 87, № 3. С. 391–403.

[24] Свинолупов С.И., Соколов В.В. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения // Функц. анализ и его прил., 1982. Т. 16, № 4. С. 86–87.

[25] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.

[26] Соколов В.В. О гамильтоновости уравнения Кричевера–Новикова // Докл. АН СССР, 1984. Т. 277, № 1. С. 48–50.

[27] Сулейманов Б.И. «Квантовая» линеаризация уравнений Пенлеве как компонента их L, A пар // Уфимск. матем. журн., 2012. Т. 4, № 2. С. 127–135.

[28] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.

[29] Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек // ТМФ, 2017. Т. 191, № 3. С.369–388.

[30] Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей // ТМФ, 2018, Т. 196, № 2. С. 294–312.

[31] Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Метод построения пар Лакса для интегрируемых уравнений гиперболического типа // Тезисы докладов Международной математической конференции по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. Уфа, 2017. С. 159–160.

[32] Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Метод построения рекурсионного оператора и пары Лакса для интегрируемого уравнения // Тезисы докладов Международной математической конференции «Современные методы в теории обратных задач и смежные вопросы», посвященная 80-летию А.Б. Шабата. Карачаевск: КЧГУ; Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017. С. 92.

[33] Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Рекурсионные операторы для интегрируемых уравнений // Сборник тезисов Международной научной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы». Уфа: Изд-во БГПУ, 2018. С. 161.

[34] Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Алгоритм построения пары Лакса и оператора рекурсии для интегрируемых уравнений // Океанологические исследования, 2019, Т. 47, № 1. С. 123–126.

[35] Хакимова А.Р. К задаче описания обобщенных инвариантных многообразий нелинейных уравнений // Уфимск. матем. журн., 2018, Т. 10, № 3. С. 110–122.

[36] Хакимова А.Р. Законы сохранения и частные решения одного уравнения в конечных разностях // Тезисы докладов XXII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ–2015». [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2015.

[37] Хакимова А.Р. Прямой алгоритм построения пары Лакса для интегрируемых уравнений // Тезисы докладов XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ–2017». [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2017.

[38] Хакимова А.Р. Об одном методе построения пары Лакса // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего. Москва:МАКС Пресс, 2019. С. 395.

[39] Ханизаде Ф., Михайлов А.В., Ванг Дж.П. Преобразования Дарбу и рекурсионные операторы для дифференциально-разностных уравнений // ТМФ, 2017. Т. 177, № 3. С. 387–440.

[40] Царев С.П. О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа // Докл. АН СССР, 1985. Т. 282, № 3. С. 534–537.

[41] Шамсутдинов М.А., Ломакина И.Ю., Назаров В.Н., Харисов А.Т., Шамсутдинов Д.М. Ферро – и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М.: Наука, 2009. 456 с.

[42] Ямилов Р.И. Классификация дискретных эволюционных уравнений // УМН, 1983. Т. 38, № 6. С. 155–156.

[43] Яненко Н.Н. О инвариантных дифференциальных связях для гиперболических систем квазилинейных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1961. № 3. С. 185–194.

[44] Adler V.E., Postnikov V.V. Differential–difference equations associated with the fractional Lax operators // J. Phys. A: Math. Theor., 2011. Vol. 44, no. 41. Art. no. 415203. 17 p.

[45] Adler V.E., Bobenko A.I., Suris Yu.B. Classification of integrable equations on quadgraphs. The consistency approach // Commun. Math. Phys., 2003. Vol. 233, no. 3. P. 513–543.

[46] Butler S., Hay M. Two definitions of fake Lax pairs // AIP Conference Proceedings, 2015. Vol. 1648, no. 1. Art. no. 180006.

[47] Bobenko A.I., Suris Yu.B. Integrable systems on quad-graphs // Int. Math. Res. Notes, 2002. No. 11. P. 573–611.

[48] Fokas A.S., Anderson R.L. On the use of isospectral eigenvalue problems for obtaining hereditary symmetries for Hamiltonian systems // J. Math. Phys., 1982. Vol. 23, no. 6. P. 1066–1073.

[49] Fokas A.S. Symmetries and integrability // Stud. Appl. Math., 1987, Vol. 77, no. 3. P. 253–299.

[50] Fokas A.S., Fuchssteiner B. On the structure of symplectic operators and hereditary symmetries // Lettere al Nuovo Cimento, 1980. Vol. 28, no. 8. P. 299–303.

[51] Fokas A.S., Santini P.M. Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions. I // Commun. Math. Phys., 1988. Vol. 115, no. 3. P. 375–419.

[52] Fokas A.S., Santini P.M. Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions. II // Commun. Math. Phys., 1988. Vol. 116, no. 3. P. 449–474.

[53] Fordy A.P., Gibbons J. Factorization of operators.II // J. Math. Phys., 1981. Vol. 22, no. 6. P. 1170–1175.

[54] Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Korteweg-devries equation and generalizations. VI. methods for exact solution // Comm. Pure Appl. Math., 1974. Vol. 27, no. 1. P. 97–133.

[55] Garifullin R.N., Gudkova E.V., Habibullin I.T. Method for searching higher symmetries for quad–graph equations // J. Phys. A, Math. Theor., 2011. Vol. 44, no. 32. Art. no. 325202. 16 p.

[56] Garifullin R.N., Habibullin I.T., Yangubaeva M.V. Affine and finite Lie algebras and integrable Toda field equations on discrete space-time // SIGMA, 2012. Vol. 8, no. 062. 33 p.

[57] Garifullin R.N., Yamilov R.I. Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters // J. Phys. A, Math. Theor., 2012. Vol. 45, no. 34. Art. no. 345205. 23 p.

[58] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Y. Symmetry properties of fractional diffusion equations // Physica Scripta, 2009. Vol. T136, Art. no. 014016. 5 p.

[59] G*ü*rses M., Karasu A., Sokolov V. V. On construction of recursion operators from Lax representation // J. Math. Phys., 1999. Vol. 40, no. 12. P. 6473–6490.

[60] Habibullin I.T., Khakimova A.R., Poptsova M.N. On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations // J. Phys. A, Math. Theor., 2016. Vol. 49, no. 3. Art. no. 035202. 35 p.

[61] Habibullin I.T., Khakimova A.R. On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz // J. Phys. A, Math. Theor., 2017. Vol. 50, no. 30. Art. no. 305206. 19 p.

[62] Habibullin I.T., Khakimova A.R. On the recursion operators for integrable equations // J. Phys. A, Math. Theor., 2018. Vol. 51, no. 42. Art. no. 425202. 22 p.

[63] Hirota R., Tsujimoto S. Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations // J. Phys. Soc. Jpn., 1995. Vol. 64, no. 9. P. 3125–3127.

[64] Kaup D. On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx}+6Q\psi_x+6R\psi=\lambda\psi$ // Stud. Appl. Math., 1980. Vol. 62, no. 3. P. 189–216.

[65] Krasil'shchik J.S. Cohomology background in geometry of PDE // Contemporary Mathematics, 1998. Vol. 219. P. 121–140.

[66] Krichever I.M., Novikov S.P. Holomorphic bundles over algebraic curves and non-linear equations // Russian Math. Surveys, 1980. Vol. 35, no. 6. P. 53–79.

[67] Kuniba A., Nakanishi T., Suzuki J. T–systems and Y–systems in integrable systems // J. Phys. A, Math. Theor., 2011. Vol. 44, no. 10. Art. no. 103001.

[68] Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math., 1968. Vol. 21, no. 5. P. 467–490 .

[69] Leo M., Leo R.A., Soliani G., Solombrino L. Lie–B*ä*cklund symmetries for the Harry-Dym equation // Physical Review D, 1983. Vol. 27, no. 6. P. 1406–1408.

[70] Levi D., Ragnisco O. Nonlinear differential-difference equations with N dependent coefficients: I, II // J. Phys. A, Math. Gen., 1979. Vol. 12, no. 7. P. 157–167.

[71] Levi D., Yamilov R. Conditions for the existence of higher symmetries of evolutionary equations on the lattice //J. Math. Phys., 1997. Vol. 38, no. 12. P. 6648–6674.

[72] Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys., 1978. Vol. 19, no. 5. P. 1156–1170.

[73] Maltsev A.Ya., Novikov S.P. On the local Hamiltonian systems in the weakly non-local Poisson brackets // Physica D: Nonlinear Phenomena, 2001. Vol. 156, no. 1–2. P. 53–80.

[74] Mikhailov A.V., Shabat A.B., Yamilov R.I. Extension of the module of invertible transformations. Classification of integrable systems // Commun. Math. Phys., 1988. Vol. 115, no. 1. P. 1–19.

[75] Mikhailov A.V., Wang J.P. A new recursion operator for the Viallet equation // Physics Letters A, 2011. Vol. 375, no. 45. P. 3960–3963.

[76] Musette M., Conte R. Algorithmic method for deriving Lax pairs from the invariant Painlevé analysis of nonlinear partial differential equations // J. Math. Phys., 1991. Vol. 32, no. 6. P. 1450–1457.

[77] Nijhoff F., Capel H. The discrete Korteweg-de Vries equation // Acta Applicandae Mathematica, 1995. Vol. 39, no. 1-3. P. 133–158.

[78] Nijhoff F.W., Walker A.J. The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier system // Glasgow Mathematical Journal, 2001. Vol. 43, no. A. P. 109–123.

[79] Nijhoff F.W. Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system // Physics Letters A, 2002. Vol. 297, no. 1–2. P. 49–58.

[80] Oevel W., Zhang H., Fuchssteiner B. Mastersymmetries and multi-Hamiltonian formulations for some integrable lattice systems // Progress of theoretical physics, 1989. Vol. 81, no. 2. P. 294–308.

[81] Olver P.J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries // J. Math. Phys., 1977. Vol. 18, no. 6. P. 1212–1215.

[82] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. Second edition. Graduate Texts in Mathematics Springer–Verlag, New York, 1993. Vol. 107, no. 2. 513 p.

[83] Pavlova E.V., Habibullin I.T., Khakimova A.R. On one integrable discrete system // J. Math. Sci., 2019. Vol. 241, no. 4. P. 409–422.

[84] Pavlov M.V. Elliptic coordinates and multi-Hamiltonian structures of systems of hydrodynamic type // Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 1995. Vol. 59, no. 3. P. 374–377.

[85] Sanders J.A., Wang J.P. On the integrability of homogeneous scalar evolution equations // Journal of differential equations, 1998. Vol. 147, no. 2. P. 410–434.

[86] Sokolov V.V. Symmetry approach to integrability and non-associative algebraic structures // arXiv:1711.10624 [nlin.SI], 2017. 149 p.
Sokolov V.V. Algebraic structures related to integrable differential equations // arXiv:1711.10613, 2017. 107 p.

[87] Svinolupov S.I., Yamilov R.I. The multi-field Schrodinger lattices // Physics Letters A, 1991. Vol. 160, no. 6. P. 548–552.

[88] Tsuchida T. Integrable discretizations of derivative nonlinear Schr$\ddot{o}$dinger equations // J. Phys. A, Math. Gen., 2002. Vol. 35, no. 36. P. 7827–7847.

[89] Wahlquist H.D., Estabrook F.B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phys., 1975. Vol. 16, no. 1. P. 1–7.

[90] Ward R.S. Discrete Toda field equations // Physics Letters A, 1995. Vol. 199, no. 1–2. P. 45–48.

[91] Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations // J. Math. Phys., 1983. Vol. 24, no. 3. P. 522–526.

[92] Xenitidis P. Integrability and symmetries of difference equations: the Adler-Bobenko-Suris case // Proc. 4th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems", 2009. arXiv:0902.3954. P. 226–42.

[93] Yamilov R.I. Symmetries as integrability criteria for differential difference equations // J. Phys. A, Math. Gen., 2006. Vol. 39, no. 45. P. R541–R623.

[94] Zhang H., Tu G.Z., Oevel W., Fuchssteiner B. Symmetries, conserved quantities, and hierarchies for some lattice systems with soliton structure // J. Math. Phys., 1991. Vol. 32, no. 7. P. 1908–1918.