На правах рукописи

Хакимова Айгуль Ринатовна

ОБОБЩЕННЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа 2020

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный университет»

Научный руководитель:	**Хабибуллин Исмагил Талгатович**, доктор физико-математических наук, профессор.
Официальные оппоненты:	**Смирнов Александр Олегович**, доктор физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, заведующий кафедрой высшей математики и механики;
	Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», проректор по учебной работе.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук

Защита состоится 13 мая 2020 г. в 13 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:
`http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.01/`

Автореферат разослан «____» ____________ 2020 года

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук Костоусова Елена Кирилловна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Нелинейные дифференциальные и дискретные уравнения представляют собой важный инструмент решения различных проблем математики и других разделов естествознания (см., например, монографии В.Е. Захарова, С.В. Манакова, С.П. Новикова, Л.П. Питаевского; Н.Х. Ибрагимова; Л.А. Тахтаджяна, Л.Д. Фаддеева; М. Абловица, Х. Сигура; А. Ньюэлла). Такие уравнения с большим успехом используются при изучении широкого класса моделей математической физики и прикладных дисциплин (см. монографии Н.А. Кудряшова; А.Б. Борисова, В.В. Киселева; М.А. Шамсутдинова, И.Ю. Ломакиной, В.Н. Назарова, А.Т. Харисова, Д.М. Шамсутдинова). Например, при изучении локализованных структур в магнетиках, при решении задач связанных с передачей информации, при исследовании структуры белковых молекул, различных задач компьютерного моделирования и др.

В современной теории интегрируемости, основанной на методе обратной задачи рассеяния, ключевым свойством уравнения является существование для этого уравнения пары операторов Лакса. Представление Лакса – это эффективное средство изучения нелинейных уравнений, позволяющее находить интегралы движения, высшие симметрии, точные и асимптотические решения и т.д. Первый пример представления Лакса появился в пионерской работе П.Д. Лакса. Проблеме построения пар Лакса посвящено множество исследований начиная с метода одевания Захарова–Шабата и структур продолжения Уолквиста и Эстабрука до метода теста Пенлеве и подхода, основанного на свойстве 3D–совместности. Отметим здесь также работы Н.Х. Ибрагимова и А.Б. Шабата, А.В. Михайлова, Р.И. Ямилова, П. Ксенитидиса, В.Э. Адлера и В.В. Постникова, в которых были найдены новые пары Лакса. Способ построения пары Лакса исходя из структуры алгебры Каца–Муди можно найти в работе В.Г. Дринфельда и В.В. Соколова. Несмотря на то, что проблема построения пары Лакса для заданного интегрируемого уравнения интенсивно изучается в течение последних пятидесяти лет многими авторами, она до сих пор остается нерешенной. В подтверждение приведем цитату из статьи известного специалиста в этой области А.В. Михайлова и его учеников[1]: «В настоящее время не существует общего метода нахождения представления Лакса для заданного уравнения». Поэтому задача разработки эффективных методов построения пар

[1]Ханизаде Ф., Михайлов А.В., Ванг Дж.П. Преобразования Дарбу и рекурсионные операторы для дифференциально-разностных уравнений // ТМФ, 2017. Т. 177, № 3. С. 387–440.

Лакса является актуальной.

Другие атрибуты интегрируемых уравнений, такие как, симметрии и локальные законы сохранения компактно описываются с помощью оператора рекурсии. Задаче построения оператора рекурсии посвящено множество работ, в которых большинство авторов использует определяющее уравнение
$$\frac{d}{dt}R = [F^*, R]\,,$$
где R – оператор рекурсии, F^* – оператор линеаризации рассматриваемого интегрируемого уравнения. Среди специалистов, использующих такой подход построения оператора рекурсии, следует упомянуть Н.Х. Ибрагимова и А.Б. Шабата, С.И. Свинолупова и Р.И. Ямилова, И.С. Красильщика. Другой подход, применяющийся для построения рекурсионного оператора основывается на представлении Лакса. Он используется в работах К. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала и Р. Миуры, А.С. Фокаса, Р.Л. Андерсона и П.М. Сантини, А.П. Форди и Д. Гиббонса, М. Гюрсеса, А. Карасу и В.В. Соколова и др. Для построения рекурсионного оператора также используется мульти–гамильтонов подход (см., например, работы И.М. Гельфанда и Л.А. Дикого, С.П. Царева, О.И. Мохова и Е.В. Ферапонтова, А.Я. Мальцева и С.П. Новикова.). В рамках этого подхода используется представление оператора рекурсии в виде отношения $R = H_2 H_1^{-1}$ двух гамильтоновых операторов H_1 и H_2. Развитию такого подхода посвящены работы Ф. Магри; А.С. Фокаса и Б. Фухштайнера; В.В. Соколова; А.В. Михайлова, Ф. Ханизаде и Дж.П. Ванг. В диссертации предлагается метод, который принципиально отличается от перечисленных выше. Он основан на понятии симметрии и обобщенного инвариантного многообразия. Существует большое количество интегрируемых уравнений, для которых оператор рекурсии неизвестен. К ним относятся некоторые нелинейные цепочки и полностью дискретные уравнения, в частности, дискретные системы, соответствующие аффинным алгебрам Ли. Отсюда ясна необходимость поиска новых способов построения рекурсионных операторов.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью настоящей диссертации является разработка эффективных методов построения пар Лакса и операторов рекурсии с помощью обобщенных инвариантных многообразий, апробирование алгоритмов на примерах и их применение к уравнениям, для которых такие объекты как пара Лакса и оператор рекурсии ранее не были построены.

Методология и методы исследования. При решении поставленных задач используется метод дифференциальных связей, на основе которого разработаны методы построения операторов рекурсии и пар Лакса для нелинейных интегрируемых уравнений.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. В диссертации разработаны новые эффективные методы построения пар Лакса и рекурсионных операторов для нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных, а также их дискретных вариантов. Отметим, что эти два понятия, пара Лакса и рекурсионный оператор, являются базовыми в теории интегрируемости. Традиционные способы построения рекурсионного оператора используют мульти-гамильтоновы структуры, поиск которых представляет значительные трудности. Предлагаемые в диссертации методы основаны на понятии классической и высшей симметрии, для поиска которых существуют простые алгоритмы. Эти методы могут найти приложение при изучении нелинейных моделей математической физики.

Результаты диссертации позволяют прояснить суть понятия пары Лакса. Установлено, что пара Лакса рассматриваемого нелинейного уравнения порождается двумя основными объектами, такими как линеаризованное уравнение и рекурсионный оператор. В диссертации показано, что переход от этой пары объектов к общепринятой паре Лакса осуществляется путем понижения порядка.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Дано полное описание обобщенных инвариантных многообразий второго порядка для уравнения Кортевега-де Фриза и для одного интегрируемого уравнения третьего порядка из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова[2].

2. Разработан метод построения пары Лакса при помощи обобщенных инвариантных многообразий. Построены пары Лакса для двух уравнений из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова и для одной системы дифференциально–разностных уравнений.

3. Разработан симметрийный метод построения оператора рекурсии для интегрируемых моделей. Построен рекурсионный оператор для одной системы дифференциально–разностных уравнений.

[2]Свинолупов С.И., Соколов В.В. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения // Функц. анализ и его прил., 1982. Т. 16, № 4. С. 86–87.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов диссертации гарантируется строгостью математических доказательств и апробированием на многочисленных примерах.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах: XXII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ» (Москва, 2015); Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (Уфа, 2015); Уфимская математическая конференция с международным участием (Уфа, 2016); XXIV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ» (Москва, 2017); Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2017); Международная научная конференция «Современные методы в теории обратных задач и смежные вопросы», посвященная 80-летию А.Б. Шабата (Теберда, 2017); Международная научная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы» (Уфа, 2018); Семинар кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем УГАТУ под рук. проф. Р.К. Газизова (Уфа, 2017); Семинар отдела математической физики ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, 2016 и 2017); Семинар лаборатории теории нелинейных явлений Института физики металлов имени М.Н. Михеева Уральского отделения РАН под рук. чл.-корр. РАН, проф. А. Б. Борисова (Екатеринбург, 2018); XXVII научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике, Институт Океанологии им. П.П. Ширшова РАН (Москва, 2018); Международная научная конференция, посвященная 80-летию академика В.А. Садовничего «Современные проблемы математики и механики», МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2019).

Публикации. По теме диссертации имеется 14 публикаций, из них статьи [1]–[7] опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus и таким образом приравненных к изданиям из Перечня ВАК.

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[7]. В работе [1], выполненной совместно с И.Т. Хабибуллиным и М.Н. Попцовой, диссертанту принадлежат результаты касающиеся обобщенных инвариантных многообразий для гиперболических уравнений (разделы 3, 4). В опубликованных совместно с научным руководителем работах [2]–[5] И.Т. Хабибуллину принадлежат постановка задачи и общее руководство, диссертанту - точные формулировки и доказательства результатов. В работе [7], выполненной совместно с И.Т. Хабибуллиным и Е.В. Павловой, диссертантом построены законы сохранения для дискретных цепочек (разделы 3, 4). Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 94 наименования. Объем диссертации составляет 115 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, проведен обзор литературы по теме диссертации, сформулирована цель, аргументирована научная новизна исследований и приведено краткое содержание работы.

В первой главе определяется понятие обобщенного инвариантного многообразия (ОИМ) для дифференциальных уравнений в частных производных, приводятся алгоритмы построения пары Лакса и оператора рекурсии при помощи ОИМ.

В литературе широко известен метод построения решений нелинейных уравнений в частных производных, основанный на применении метода дифференциальных связей (или инвариантных многообразий)[3]. Идея метода состоит в том, что к заданному уравнению добавляется совместное с ним уравнение, как правило, более простое. Такой прием позволяет найти частные решения исследуемого уравнения. Мы используем некоторое обобщение этого метода, накладывая дифференциальную связь не к самому уравнению, а к его линеаризации. Эту дифференциальную связь мы и называем обобщенным инвариантным многообразием. Дадим строгое определение этого понятия.

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных вида

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_k), \quad u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Линеаризуем уравнение (1)

$$U_t = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_x} D_x + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} D_x^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k} D_x^k \right) U. \tag{2}$$

[3] Яненко Н.Н. Об инвариантных дифференциальных связях для гиперболических систем квазилинейных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1961. № 3. С. 185–194.; Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_m = F(x, t, U, U_x, U_{xx}, \ldots, U_{m-1}; u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_n), \tag{3}$$

где $U = U(x,t)$ искомая функция, а функция $u = u(x,t)$, являющаяся некоторым решением уравнения (1), входит в (3) в качестве функционального параметра.

Замечание 1. *Предполагается, что в равенстве* (3) *переменные* x, t, U, U_x, U_{xx}, ..., U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, ..., u_n, u_{n+1}, ... *являются независимыми переменными, принимающими произвольные значения.*

Определение 2. *Уравнение* (3) *определяет обобщенное инвариантное многообразие (ОИМ) для уравнения* (1), *если условие*

$$D_x^m U_t - D_t U_m|_{(1),(2),(3)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $\{u_j\}$ *и* U, U_x, ..., U_{m-1}.

Здесь переменные u_t, U_t и их производные по x заменяются в силу уравнений (1) и (2), а переменные $U_m, U_{m+1}, \ldots$ – в силу равенства (3). Поскольку переменные x, t, U, U_x, U_{xx}, ..., U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, ..., u_n, u_{n+1}, ... в уравнении (3) являются независимыми, задача отыскания функции $F(x, t, U, U_x, \ldots, U_{m-1}; u, u_x, \ldots, u_n)$ является переопределенной и эффективно решается.

Следует отметить, что для заданного интегрируемого уравнения существует необозримое множество обобщенных инвариантных многообразий. Среди которых в диссертации рассматриваются следующие два класса:

- $\sum_{i,j=0}^{s} \alpha_{ij}(\lambda, u, u_1, \ldots) U_i U_j + k = 0$;
- $\sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\lambda, u, u_1, \ldots) U_j = 0$,

где k, λ – произвольные постоянные. Отметим, что линейные обобщенные инвариантные многообразия больше подходят для построения оператора рекурсии, а нелинейные – для построения пары Лакса для заданного интегрируемого уравнения.

Во втором параграфе дается полное описание ОИМ второго порядка для уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + u u_x. \tag{4}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть уравнение $U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x, u_{xx})$ определяет обобщенное инвариантное многообразие для уравнения КдФ (4), тогда оно имеет вид*

$$U_{xx} = \frac{u_x}{2(u+c_1)}U_x - \frac{2}{3}(u+c_1)U + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_1)(U^2+6c_2)}}{6(u+c_1)}, \qquad (5)$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.

Исследования показали, что обобщенное инвариантное многообразие (5) позволяет построить пару Лакса и оператор рекурсии для уравнения КдФ (4). Во–первых, уравнение (5) в паре с линеаризацией

$$U_t = U_{xxx} + uU_x + u_x U$$

уравнения КдФ образует нелинейную пару Лакса для уравнения (4), которая при $c_2 = 0$ и при помощи точечной замены $U = \frac{2}{\sqrt{6}}\tilde{\varphi}\tilde{\psi}$, $U_x = \frac{1}{3}\sqrt{u+c_1}(\tilde{\varphi}^2 - \tilde{\psi}^2)$ сводится к ранее известной паре Лакса

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = \left(\frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{6}u\right)\varphi, \quad \lambda = -\frac{2}{3}c_1, \\ \varphi_t = \left(\frac{1}{3}u + \lambda\right)\varphi_x - \frac{1}{6}u_x\varphi, \end{cases}$$

где переменные φ и $\tilde{\varphi}$, ψ и $\tilde{\psi}$ связаны соотношениями $\tilde{\varphi} = (u+c_1)^{\frac{1}{4}}\varphi$ и $\tilde{\psi} = (u+c_1)^{-\frac{1}{4}}\psi$.

Во–вторых, путем дифференцирования и исключения постоянной c_2 ОИМ (5) сводится к линейному уравнению

$$U_{xxx} = \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} - \frac{2}{3}(u+c_1)U_x + \left(\frac{2(u+c_1)u_{xx}}{3u_x} - u_x\right)U, \qquad (6)$$

которое, в свою очередь, позволяет построить оператор рекурсии уравнения КдФ

$$R = D_x^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_x D_x^{-1}.$$

В третьем параграфе первой главы рассматриваются уравнения

$$u_t = u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3 - \frac{3}{2}u_x\sin^2 u, \qquad (7)$$

$$u_\tau = u_{yyy} - \frac{3u_y u_{yy}^2}{2(1+u_y^2)} + \frac{1}{2}u_y^3, \qquad (8)$$

найденные в работе [4] в процессе симметрийной классификации интегрируемых уравнений типа КдФ. Позже стало ясно, что эти уравнения являются симметриями следующего интегрируемого уравнения гиперболического типа, впервые появившегося в более общем виде в работе А.Б. Борисова и С.А. Зыкова[5]

$$u_{xy} = \sqrt{1 + u_y^2}\sin u.$$

Отметим, что для уравнений (7), (8) пара Лакса ранее не была известна.

В диссертации для уравнения (7) получено полное описание обобщенных инвариантных многообразий второго порядка.

Теорема 4. *Предположим, что уравнение вида*

$$U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x)$$

где $F = aU_x + bU + R$, $R = \sqrt{cUU_x + rU_x^2 + sU^2 + v}$, *функции* a, b, c, r, s, v *зависят от* u, u_x, *задает обобщенное инвариантное многообразие для уравнения* (7). *Тогда оно совпадает с одним из следующих уравнений:*

$$1)\, U_{xx} = (\cot u)u_x U_x + (\sin^2 u)U - \frac{c_0}{\sin u}u_x,$$

$$2)\, U_{xx} = -(\tan u)u_x U_x - (\cos^2 u)U + \frac{c_0}{\cos u}u_x,$$

$$3)\, U_{xx} = -i\cos u U_x + iu_x \sin u U + (u_x + i\sin u)\sqrt{(iU_x - \cos u U)^2 + c_1},$$

$$4)\, U_{xx} = \pm\sin u U_x \pm \cos u u_x U + (u_x \pm \cos u)\sqrt{-(U_x \pm \sin u U)^2 + c_1},$$

$$5)\, U_{xx} = \frac{u_x \sin u \cos u}{\sin^2 u + c_0}U_x + (\sin^2 u + c_0)U + \frac{u_x\sqrt{c_0(c_0+1)((\sin^2 u + c_0)U^2 - U_x^2) + c_1(\sin^2 u + c_0)}}{\sin^2 u + c_0},$$

где c_0, c_1 *произвольные постоянные.*

При помощи обобщенного инвариантного многообразия 5) из Теоремы 4 и линеаризации уравнения (7) построена пара Лакса

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = \dfrac{(\sin u\cos u - \sqrt{\lambda}\sqrt{1-\lambda})u_x}{\sin^2 u - \lambda}\varphi_x + \dfrac{1}{4}(\sin^2 u - \lambda)\varphi, \quad \lambda = -c_0, \\ \varphi_t = \left(\dfrac{(\sin u\cos u - \sqrt{\lambda}\sqrt{1-\lambda})u_{xx}}{\sin^2 u - \lambda} - \dfrac{1}{2}\sin^2 u + \dfrac{1}{2}u_x^2 - \lambda\right)\varphi_x \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}\sqrt{1-\lambda}u_x\varphi \end{cases}$$

[4] Свинолупов С.И., Соколов В.В. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения // Функц. анализ и его прил., 1982. Т. 16, № 4. С. 86–87.

[5] Борисов А.Б., Зыков С.А. Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // ТМФ, 1998. Т. 115, № 2. С. 199–214.

для уравнения (7). Следует пояснить, что уравнения 1) – 4) из Теоремы 4 не подходят для построения пары Лакса, поскольку они не содержат достаточного количества произвольных параметров.

Обобщенное инвариантное многообразие

$$U_{yy} = \frac{u_y u_{yy}}{1+u_y^2} U_y + \frac{1+u_y^2}{c_0} U - \frac{u_y \sqrt{(c_0+1)((1+u_y^2)U^2 - c_0 U_y^2) + c_1(1+u_y^2)}}{c_0}$$

уравнения (8) в паре с линеаризацией того же уравнения образует нелинейную пару Лакса для уравнения (8), которая соответствующей заменой переменных сводится к следующей паре Лакса

$$\begin{cases} \varphi_{yy} = \left(\dfrac{u_y u_{yy}}{1+u_y^2} - \dfrac{\sqrt{1-\lambda} u_y}{\sqrt{\lambda}} \right) \varphi_y - \dfrac{1+u_y^2}{4\lambda} \varphi, \quad \lambda = -c_0, \\ \varphi_t = \left(\dfrac{u_y u_{yyy}}{1+u_y^2} - \dfrac{(3u_y^2+1)u_{yy}^2}{2(1+u_y^2)^2} + \dfrac{\sqrt{1-\lambda} u_{yy}}{\sqrt{\lambda}(1+u_y^2)} + \dfrac{\lambda u_y^2 - 2}{2\lambda} \right) \varphi_y - \dfrac{\sqrt{1-\lambda} u_y}{2\lambda^{3/2}} \varphi \end{cases}$$

для уравнения (8). Здесь λ спектральный параметр.

В §4 первой главы при помощи метода формальной диагонализации пары Лакса построены законы сохранения для уравнений (7) и (8). Это подтверждает, что построенная пара Лакса не является ложной.

Во второй главе понятие обобщенного инвариантного многообразия распространяется на нелинейные интегрируемые дифференциально–разностные уравнения (цепочки) вида

$$\frac{du_n}{dt} = f(u_{n+k}, u_{n+k-1}, \ldots, u_{n-k}), \tag{9}$$

где искомая функция $u = u_n(t)$ зависит от $t \in \mathbf{R}$ и $n \in Z$.

Эффективность алгоритма построения пары Лакса и оператора рекурсии при помощи ОИМ для дифференциально–разностных уравнений иллюстрируется в §6. В седьмом параграфе алгоритм применяется к системе

$$\begin{cases} u_{n,t} = \dfrac{1}{v_{n+1}} + u_n^2 v_n, \\ v_{n,t} = -\dfrac{1}{u_{n-1}} - u_n v_n^2, \end{cases} \tag{10}$$

для которой такие объекты как пара Лакса и оператор рекурсии ранее не были известны.

Нелинейная пара Лакса для системы (10) задается ее линеаризацией

$$\begin{cases} U_{n,t} = -\dfrac{1}{v_{n+1}^2} V_{n+1} + 2u_n v_n U_n + u_n^2 V_n, \\ V_{n,t} = \dfrac{1}{u_{n-1}^2} U_{n-1} - v_n^2 U_n - 2u_n v_n V_n \end{cases} \tag{11}$$

и обобщенным инвариантным многообразием

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{(1+\xi u_n v_{n+1})^2}{u_n^2 v_{n+1}^2} U_n + \xi u_n^2 V_n - \dfrac{1+\xi u_n v_{n+1}}{v_{n+1}} \sqrt{4\xi U_n V_n + c}, \\ V_{n+1} = \xi v_{n+1}^2 U_n + u_n^2 v_{n+1}^2 V_n - u_n v_{n+1}^2 \sqrt{4\xi U_n V_n + c}. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь ξ, c – произвольные постоянные. При помощи замены переменных $U_n = \varphi_n^2$, $V_n = \xi\psi_n^2$ и при $c = 0$ пара (11), (12) сводится к следующей линейной паре Лакса для системы (10)

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = -\dfrac{1+\xi u_n v_{n+1}}{u_n v_{n+1}} \varphi_n + \xi u_n \psi_n, \\ \psi_{n+1} = v_{n+1}\varphi_n - u_n v_{n+1}\psi_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_{n,t} = \left(u_n v_n - \dfrac{1}{2}\xi\right)\varphi_n + \xi u_n \psi_n, \\ \psi_{n,t} = v_n \varphi_n + \left(\dfrac{1}{2}\xi - u_n v_n\right)\psi_n. \end{cases}$$

Оператор рекурсии для системы (10) представляется в виде

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{v_{n+1}^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_n + \begin{pmatrix} -2u_n v_n & \frac{2u_n}{u_{n-1}v_n^2} - u_n^2 \\ v_n^2 & -\frac{2}{u_{n-1}v_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{u_{n-1}^2} & 0 \end{pmatrix} D_n^{-1}$$
$$- 2\begin{pmatrix} -u_n \\ v_n \end{pmatrix} (D_n - 1)^{-1} \left(\frac{1}{u_n^2 v_{n+1}} - v_n, \frac{1}{u_{n-1}v_n^2} - u_n\right).$$

В третьей главе исследуются интегрируемые уравнения гиперболического типа следующего вида

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{13}$$

В данном случае понятие обобщенного инвариантного многообразия слегка видоизменяется. Линеаризуем уравнение (13) в окрестности его произвольного решения $u = u(x,y)$:

$$U_{xy} = aU_x + bU_y + cU, \tag{14}$$

где $a = \frac{\partial f}{\partial u_x}, b = \frac{\partial f}{\partial u_y}, c = \frac{\partial f}{\partial u}$.

Рассмотрим поверхность, определяемую уравнением вида

$$G(U_k, U_{k-1}, \ldots, U, \bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_m; u, u_1, \ldots, u_{k_1}; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{m_1}) = 0, \tag{15}$$

где $k,m \geq 0$, $u_s = \frac{\partial^s}{\partial x^s}u, \bar{u}_s = \frac{\partial^s}{\partial y^s}u, U_s = \frac{\partial^s}{\partial x^s}U, \bar{U}_s = \frac{\partial^s}{\partial y^s}U$. Здесь $U_s, \bar{U}_s$ динамические переменные уравнения (14), а динамические переменные уравнения (13) $u, u_1, \bar{u}_1, \ldots$ рассматриваются как параметры. Дифференциальные следствия уравнения (15)

$$G_1(U_{k+1}, U_k, \ldots, U, \bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_{m-1}; u, u_1, \ldots, u_{k_1+1}; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{m_1}) = 0 \qquad (16)$$

и

$$G_2(U_{k-1}, U_{k-2}, \ldots, U, \bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_{m+1}; u, u_1, \ldots, u_{k_1}; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{m_1+1}) = 0, \qquad (17)$$

где $m > 0$ и $k > 0$, получаются применением операторов D_x, D_y к функции G так что $G_1 = D_x G$, $G_2 = D_y G$ и исключением всех смешанных производных u и U в силу уравнений (13) и, соответственно, (14). Также в уравнениях (16) и (17) исключены переменные $\bar{U}_m$ и, соответственно, U_k в силу уравнения (15).

Определение 5. *Поверхность* (15) *определяет обобщенное инвариантное многообразие для гиперболического уравнения* (13)*, если следующее условие*

$$D_x D_y G|_{(13),(14)-(17)} = 0 \qquad (18)$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $u, u_1, \bar{u}_1, \ldots$.

В качестве иллюстративного примера рассмотрено уравнение вида

$$u_{xy} = \sqrt{1 + u_y^2}\sin u. \qquad (19)$$

В диссертации для этого уравнения при помощи обобщенного инвариантного многообразия построена пара Лакса

$$\begin{cases} \varphi_y = \dfrac{1}{\lambda - \lambda^{-1}}\left(\sqrt{1+u_y^2} - \dfrac{u_y}{2}(\lambda + \lambda^{-1})\right)\psi, \\ \psi_y = \dfrac{1}{\lambda - \lambda^{-1}}\left(\sqrt{1+u_y^2} + \dfrac{u_y}{2}(\lambda + \lambda^{-1})\right)\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_x = -\dfrac{1}{4}(\lambda + \lambda^{-1})\sin u\varphi + \dfrac{1}{4}(\lambda - \lambda^{-1})\cos u\psi, \\ \psi_x = \dfrac{1}{4}(\lambda - \lambda^{-1})\cos u\varphi + \dfrac{1}{4}(\lambda + \lambda^{-1})\sin u\psi. \end{cases}$$

Отметим, что эту пару Лакса можно построить и по-другому, используя связь уравнения (19) с уравнением синус-Гордона[6].

[6] Жибер А.В., Соколов В.В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // УМН, 2001. Т. 56, № 1(337). С. 63–106.

В четвертой главе предлагается алгоритм построения оператора рекурсии с помощью классических и нескольких высших симметрий заданного нелинейного интегрируемого уравнения. Рассмотрим уравнение

$$u_t = f(u, u_1, u_2, ..., u_k), \qquad \frac{\partial f}{\partial u_k} \neq 0, \tag{20}$$

где $u_j = D_x^j u$. Предположим, что рекурсионный оператор можно представить в виде слабо нелокального псевдодифференциального оператора вида

$$R = R_0 + \sum_{i=1}^{m} g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)} \tag{21}$$

где R_0 – дифференциальный оператор. Нелокальная часть состоит из комбинаций генераторов симметрий $u_{\tau_j} = g^{(j)}$ и вариационных производных $h^{(j)}$ плотностей законов сохранения[7]. Известно, что в большинстве случаев оператор рекурсии можно привести к виду (21). Заметим, что упомянутые выше симметрии $u_{\tau_j} = g^{(j)}$ являются членами иерархии симметрий, начатой с классических $g^{(1)} = u_x$, $g^{(2)} = u_t$, за которыми следуют высшие симметрии, расположенные по возрастанию порядка

$$g^{(1)} = u_x,\ g^{(2)} = u_t,\ g^{(3)} = u_{\tau_3},\ \ldots,\ g^{(m)} = u_{\tau_m}, \ldots, \tag{22}$$

так что порядки симметрий удовлетворяют неравенствам $ord\, g^{(j)} \leq ord\, g^{(j+1)}$. Введем множество $S = \{g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(m)}\}$ генераторов затравочных симметрий в (21). В простейшем случае $m = 1$, иллюстрируемом уравнением КдФ, S содержит единственный генератор $g^{(1)} = u_x$. Для уравнения Каупа–Купершмидта $m = 2$ и S состоит из двух функций: $g^{(1)} = u_x$ и правой части $g^{(2)} = u_5 + 10uu_3 + 25u_1u_2 + 20u^2u_1$ самого уравнения Каупа–Купершмидта. Для уравнения Кричевера–Новикова

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{P(u)}{u_x} \quad \text{при} \quad P'''''(u) = 0$$

существуют два различных оператора рекурсии R_1 и R_2. Для первого имеем $m = 2$ и затравочные симметрии: $g^{(1)} = u_x$ и $g^{(2)} = u_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{P(u)}{u_x}$. Для второго рекурсионного оператора имеем $m = 3$, а S в дополнение к этим двум генераторам содержит также генератор симметрии пятого порядка уравнения Кричевера–Новикова.

[7]Sokolov V.V. Symmetry approach to integrability and non-associative algebraic structures // arXiv:1711.10624 [nlin.SI], 2017.

Отметим, что для уравнения Гарри Дима $u_t = u^3 u_{xxx}$ оператор рекурсии $R = u^3 D_x^3 u D_x^{-1} \frac{1}{u^2}$ переписывается в следующем виде

$$R = u^4 D_x^2 \frac{1}{u^2} + 3u^2 u_1 D_x \frac{1}{u^2} + 3uu_2 + u_t D_x^{-1} \frac{1}{u^2}.$$

Таким образом, для уравнения Гарри Дима имеем единственную затравочную симметрию совпадающую с правой частью самого уравнения $S = \left\{ g^{(2)} = u^3 u_{xxx} \right\}$, следовательно $m = 1$.

Замечание 6. *Число m нелокальностей в (21) определяет действие оператора рекурсии на симметрии (22), точнее мы имеем*

$$Rg^{(j)} = g^{(j+m)}.$$

Следовательно, можно восстановить всю иерархию высших симметрий путем кратного применения R к множеству S.

Обозначим через L_1 дифференциальный оператор порядка m, который аннулирует все функции $g^{(i)}$, $i = 1, 2...m$, из множества S. Следующая теорема утверждает, что тогда оператор $L_2 = L_1 R$ также является дифференциальным.

Теорема 7. *Для любого слабо нелокального псевдодифференциального оператора R вида (21) существует пара дифференциальных операторов L_1 и L_2, для которых выполняется следующее уравнение*

$$L_1 R = L_2.$$

Таким образом, мы приходим к представлению оператора рекурсии в виде отношения двух дифференциальных операторов

$$R = L_1^{-1} L_2. \tag{23}$$

Замечательно, что это представление является эффективным инструментом для решения определяющего уравнения для R

$$\frac{d}{dt} R = \left[F^*, R \right]. \tag{24}$$

Здесь F^* оператор линеаризации уравнения (20)

$$F^* = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_1} D_x + \frac{\partial f}{\partial u_2} D_x^2 + ... + \frac{\partial f}{\partial u_k} D_x^k.$$

Подставим представление (23) в определяющее уравнение (24) и после некоторых простых преобразований получим

$$\frac{d}{dt}(L_2)L_2^{-1} + L_2F^*L_2^{-1} = \frac{d}{dt}(L_1)L_1^{-1} + L_1F^*L_1^{-1} =: A. \tag{25}$$

Непосредственно из (25) следует, что операторы L_1 и L_2 являются решениями одного и того же уравнения

$$\frac{d}{dt}(L_j) = AL_j - L_jF^*, \quad j = 1, 2, \tag{26}$$

где A является вспомогательным дифференциальным оператором.

Обсудим теперь алгоритм построения операторов L_1 и L_2. Сначала мы выбираем множество затравочных симметрий S. Примеры, представленные выше убеждают, что обычно множество S содержит одну или две классические симметрии $g^{(1)} = u_x$ и/или $g^{(2)} = u_t$ и только для самого сложного уравнения Кричевера–Новикова второй рекурсионный оператор содержит три генератора $g^{(1)} = u_x$, $g^{(2)} = u_t$ и $g^{(3)} = u_\tau$. Следовательно, когда мы ищем оператор рекурсии, мы должны изучить, по крайней мере, все эти возможные варианты множества S:

$$S_1 = \{g^{(1)}\}, \quad S_2 = \{g^{(2)}\}, \quad S_3 = \{g^{(1)}, g^{(2)}\}, \quad S_4 = \{g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}\},$$

где $u_\tau = g^{(3)}$ является ближайшей высшей симметрией уравнения (20). После того, как множество S выбрано, переходим к построению оператора L_1. Он находится при помощи следующего определителя

$$L_1U = \rho \begin{vmatrix} D_x^m g^{(1)} & D_x^{m-1} g^{(1)} & \dots & g^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_x^m g^{(m)} & D_x^{m-1} g^{(m)} & \dots & g^{(m)} \\ D_x^m U & D_x^{m-1} U & \dots & U \end{vmatrix}, \tag{27}$$

где ρ произвольная функция динамических переменных u, u_1, …, $S = \left\{g^{(1)}, \dots, g^{(m)}\right\}$ – набор затравочных симметрий. Как только оператор L_1 найден, мы переходим к построению оператора L_2. Для этой цели мы пользуемся формулой (26). Отметим, что не для любого множества S существует оператор L_2. В том случае, если оператор L_2 по выбранному множеству S не удается построить, мы переходим к рассмотрению другого возможного варианта множества затравочных симметрий S.

Следует отметить, что операторы L_1 и L_2 позволяют получить пару Лакса для уравнения (20):

$$L_2\psi = \lambda L_1\psi, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\psi = F^*\psi, \tag{29}$$

где λ спектральный параметр. Пара Лакса (28), (29) это настоящая пара Лакса, т.е. она не является “фейковой”, поскольку порождается оператором рекурсии.

Изложенный выше алгоритм построения рекурсионного оператора апробирован на различных примерах. Среди которых, в качестве иллюстративных рассмотрены хорошо известные уравнения Кортевега-де Фриза, Каупа-Купершмидта и цепочка Вольтерра. Алгоритм применим также и к неавтономным моделям:

$$u_{n,t} = h_n h_{n-1}(a_n u_{n+2} - a_{n-1} u_{n-2}) \tag{30}$$

где $h_n = u_{n+1}u_n - 1$, а коэффициент a_n является произвольной периодической функцией $a_{n+2} = a_n$. Это уравнение было найдено в рамках классификации интегрируемых дискретных уравнений на квадратных графах. А именно, (30) является симметрией по направлению n уравнения

$$u_{n+1,m+1}(u_{n,m} - u_{n,m+1}) - u_{n+1,m}(u_{n,m} + u_{n,m+1}) + 2 = 0.$$

Ранее[8] оператор рекурсии для неавтономного уравнения (30) был построен необычным образом. Авторы заметили, что (30) сводится к автономной системе, для которой оператор рекурсии уже был найден. В силу чего известный оператор рекурсии был соответствующим образом пересчитан в скалярную форму.

В диссертации оператор рекурсии для уравнения (30) был построен при помощи изложенного выше алгоритма. Он имеет вид:

$$\begin{aligned}
R = {} & c_n h_n h_{n-1} D_n^2 + \frac{u_n g_n}{h_n} D_n + \frac{u_{n-1} g_n - u_n g_{n-1}}{h_{n-1}} + c_n h_{n-1} h_{n+1} + \\
& c_{n-1} h_n h_{n-2} + s_n - \frac{u_n g_n}{h_{n-1}} D_n^{-1} + c_{n-1} h_n h_{n-1} D_n^{-2} - \\
& u_{n,\tau_1}(D_n - 1)^{-1}(-1)^n \left(\frac{g_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{g_{n+1}}{h_n} \right) + u_{n,\tau_2}(D_n - 1)^{-1} \left(\frac{u_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{u_{n+1}}{h_n} \right).
\end{aligned}$$

где $g_n = h_n h_{n-1}(c_n u_{n+2} - c_{n-1} u_{n-2})$, множество затравочных симметрий $S = \{u_{n,\tau_1}, u_{n,\tau_2}\}$ состоит из следующих симметрий цепочки (30)

$$\begin{aligned}
& u_{n,\tau_1} = (-1)^n u_n, \\
& u_{n,\tau_2} = h_n h_{n-1}(c_n u_{n+2} - c_{n-1} u_{n-2}), \quad c_{n+2} = c_n,
\end{aligned}$$

где c_n является произвольной периодической функцией по n с периодом равным двум.

[8]Гарифуллин Р.Н., Михайлов А.В., Ямилов Р.И. Дискретное уравнение на квадратной решетке с нестандартной структурой высших симметрий // ТМФ, 2014. Т. 180, № 1. С. 17–34.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации проведены исследования, реализующие идею работы [1] об обобщенном инвариантном многообразии. На основе этого понятия разработаны оригинальные методы построения таких важных объектов теории интегрируемости, как пара Лакса и рекурсионный оператор.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Дано полное описание обобщенных инвариантных многообразий второго порядка для уравнения Кортевега-де Фриза и для одного интегрируемого уравнения третьего порядка из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова[9].

2. Разработан метод построения пар Лакса для нелинейных интегрируемых уравнений, основанный на применении обобщенного инвариантного многообразия. Построены пары Лакса для двух уравнений из списка С.И. Свинолупова и В.В. Соколова и для одной системы дифференциально-разностных уравнений. Ранее эти объекты не были известны. Для упомянутых уравнений С.И. Свинолупова и В.В. Соколова, с помощью предложенных в работе пар Лакса, построены серии локальных законов сохранения. Это служит подтверждением того, что пары Лакса являются настоящими.

3. Разработан симметрийный метод построения оператора рекурсии для нелинейных интегрируемых дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Доказано, что слабо нелокальный оператор рекурсии может быть представлен в виде отношения двух дифференциальных (соответственно, двух дискретных, в случае дифференциально-разностных уравнений) операторов. Поэтому поиск оператора рекурсии сводится к построению двух дифференциальных (дискретных) операторов. Предложенным методом построен рекурсионный оператор для одной системы дифференциально-разностных уравнений, который ранее не был известен.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы исследования. Исследование обобщенных инвариантных многообразий может быть продолжено по трем следующим направлениям:

1. Изучение ОИМ интегрируемых уравнений более высокого порядка и систем уравнений. Адаптация метода построения пары Лакса и оператора рекурсии для таких уравнений и систем;

[9] Свинолупов С.И., Соколов В.В. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения // Функц. анализ и его прил., 1982. Т. 16, № 4. С. 86–87.

2. Разработка метода построения частных решений интегрируемых уравнений при помощи обобщенных инвариантных многообразий;

3. Разработка метода построения оператора рекурсии в случае, когда рекурсионный оператор не является слабо нелокальным.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Исмагилу Талгатовичу Хабибуллину за предложенную тему исследований, постоянное внимание, неоценимую помощь и всестороннюю поддержку в процессе работы над диссертацией.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России:

1. Habibullin I.T., Khakimova A.R., Poptsova M.N. On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2016. Vol. 49, no. 3. Art. no. 035202. 35 p. DOI: 10.1088/1751-8113/49/3/035202.

2. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек // Теоретическая и математическая физика, 2017. Т. 191, № 3. С. 369–388. DOI: 10.4213/tmf9216.

3. Habibullin I.T., Khakimova A.R. On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2017. Vol. 50, no. 30. Art. no. 305206. 19 p. DOI: 10.1088/1751-8121/aa7582.

4. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей // Теоретическая и математическая физика, 2018. Т. 196, № 2. С. 294–312. DOI: 10.4213/tmf9471.

5. Habibullin I.T., Khakimova A.R. On the recursion operators for integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018. Vol. 51, no. 42. Art. no. 425202. 22 p. DOI: 10.1088/1751-8121/aade08.

6. Хакимова А.Р. К задаче описания обобщенных инвариантных многообразий нелинейных уравнений // Уфимский математический журнал, 2018. Т. 10, № 3. С. 110–122. DOI: 10.13108/2018-10-3-106.

7. Pavlova E.V., Habibullin I.T., Khakimova A.R. On one integrable discrete system // Journal of Mathematical Sciences, 2019. Vol. 241, no. 4. P. 409–422. DOI: 10.1007/s10958-019-04433-4.

Публикации в других изданиях:

8. Хакимова А.Р. Законы сохранения и частные решения одного уравнения в конечных разностях // Тезисы докладов XXII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015». [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2015.

9. Хакимова А.Р. Прямой алгоритм построения пары Лакса для интегрируемых уравнений // Тезисы докладов XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2017». [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2017.

10. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Метод построения пар Лакса для интегрируемых уравнений гиперболического типа // Тезисы докладов Международной математической конференции по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. Уфа, 2017. С. 159–160.

11. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Метод построения рекурсионного оператора и пары Лакса для интегрируемого уравнения // Тезисы докладов Международной математической конференции «Современные методы в теории обратных задач и смежные вопросы», посвященная 80-летию А.Б. Шабата. Карачаевск: КЧГУ; Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017. С. 92.

12. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Рекурсионные операторы для интегрируемых уравнений // Сборник тезисов Международной научной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы». Уфа: Изд-во БГПУ, 2018. С. 161.

13. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Алгоритм построения пары Лакса и оператора рекурсии для интегрируемых уравнений // Океанологические исследования, 2019. Т. 47, № 1. С. 123–126. DOI: 10.29006/1564-2291.JOR-2019.47(1).38.

14. Хакимова А.Р. Об одном методе построения пары Лакса // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего. Москва:МАКС Пресс, 2019. С. 395.