На правах рукописи

Ким Инна Геральдовна

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель:	**Зайцев Василий Александрович,** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Щеглова Алла Аркадьевна,** доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, заместитель директора по научной работе, главный научный сотрудник лаборатории дифференциальных уравнений и управляемых систем **Малыгина Вера Владимировна,** кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», доцент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики
Ведущая организация:	Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Защита состоится 28 сентября 2022 г. в $14^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:
http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.01/

Автореферат разослан “___” ____________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Костоусова Елена Кирилловна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Одной из трудных задач математической теории систем управления является задача управления спектром (или, по-другому, задача модального управления), в частности, задача стабилизации линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad u \in \mathbb{K}^m, \tag{1}$$

$$y = C^* x, \quad y \in \mathbb{K}^k, \tag{2}$$

посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу (static output feedback)

$$u = Uy \tag{3}$$

(здесь $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Замкнутая система (1), (2), (3) имеет вид

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{4}$$

При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) в задаче управления спектром для произвольного набора $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ (для произвольного набора $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ вещественного типа, то есть набора инвариантного относительно комплексного сопряжения) требуется построить матрицу $U \in M_{m,k}(\mathbb{C})$ (матрицу $U \in M_{m,k}(\mathbb{R})$) обратной связи так, чтобы для собственных значений матрицы системы (4) были выполнены равенства $\lambda_j(A + BUC^*) = \mu_j$, $j = \overline{1,n}$. В задаче модального управления для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, требуется построить матрицу $U \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ обратной связи так, чтобы характеристический многочлен $\chi(A + BUC^*; \lambda)$ матрицы системы (4) совпадал с многочленом $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$. Задача управления спектром системы (4) равносильна задаче модального управления.

В случае когда $\operatorname{rank} C = n$, решение задачи модального управления хорошо известно с конца 1960-х годов (V. M. Popov, W. Wonham): спектр системы (4) может быть назначен произвольным образом тогда и только тогда, когда система (1) вполне управляема (т. е. $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$). Задача управления спектром системы (4) исследуется с 1970-х годов (A. Jameson, E. J. Davison, R. A. Chatterjee, B. Sridhar, D. P. Lindorff, S. H. Wang, H. Kimura, R. Hermann, C. Martin), наилучшие теоретические результаты были получены в работе[1] для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и в работе[2] для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Несмотря на то, что большое количество работ посвящено задачам стабилизации и модального управления линейных систем посредством статической

[1] **Brockett R.W., Byrnes C.I.** Multivariable Nyquist criteria, root loci and pole placement: a geometric viewpoint // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. Vol. AC-26, №1. P. 271–284.

[2] **Wang X.** Pole placement by static output feedback // Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control. 1992. Vol. 2, №2. P. 205–218.

обратной связи по выходу, тем не менее, как отмечено в обзоре[3], до сих пор не было найдено точного решения этой важной проблемы в общем случае, которое может для заданной системы либо обеспечить конструктивное построение статической обратной связи по выходу, либо определить, что такой обратной связи не существует.

В работах В. А. Зайцева[4,5] задача модального управления посредством статической обратной связи по выходу была решена положительно в нескольких важных специальных случаях, в частности, когда система (1), (2) задается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = b_{p1} u_1^{(n-p)} + b_{p+1,1} u_1^{(n-p-1)} + \ldots \\ + b_{n1} u_1 + \ldots + b_{pm} u_m^{(n-p)} + b_{p+1,1} u_m^{(n-p-1)} + \ldots + b_{nm} u_m,$$

$$y_1 = c_{11} x + c_{21} x' + \ldots + c_{p1} x^{(p-1)}, \quad \ldots, \\ y_k = c_{1k} x + c_{2k} x' + \ldots + c_{pk} x^{(p-1)}.$$

В представленной диссертации результаты работ[4,5] распространяются на системы более общего вида — системы с запаздываниями, системы высших порядков, системы с переменными неопределенными коэффициентами.

Задачам устойчивости систем с запаздываниями и стабилизации управляемых систем с запаздываниями посвящено большое количество работ (см. обзоры в работах D.-K. Gu, L. Pekař, Q. Gao, J.-P. Richard, R. Sipahi, S.-I. Niculescu, C. T. Abdallah). Один из методов исследования задач устойчивости и стабилизации управляемых систем с запаздываниями исторически восходит ко второму методу Ляпунова. Этот метод известен как метод функционала Ляпунова–Красовского[6,7]. Он позволяет получать достаточные условия асимптотической и экспоненциальной стабилизации систем с запаздываниями[7,8,9]. Другой подход восходит к первому методу Ляпунова и представляется в терминах собственных значений системы[10]. В нем требуется найти условия, обеспечивающие размещение спектра системы (множество нулей характеристической функции системы) желаемым образом.

[3]**Sadabadi M. S., Peaucelle D.** From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey // Annual Reviews in Control. 2016. Vol. 42. P. 11–26.

[4]**Зайцев В. А.** Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 1. С. 133–135.

[5]**Зайцев В. А.** Согласованные системы и управление спектром собственных значений: I // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 1. С. 117–131.

[6]**Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Наука, 1959.

[7]**Kharitonov V. L.** Time-Delay Systems. Boston: Birkäuser, 2013.

[8]**Egorov A. V., Cuvas C., Mondié S.** Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // Automatica. 2017. Vol. 80. P. 218–224

[9]**Kharitonov V. L., Zhabko A. P.** Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39, №1. P. 15–20.

[10]**Michiels W., Niculescu S.-I.** Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based Approach. Philadelphia: SIAM, 2007.

Для систем с запаздываниями взаимосвязь между задачей назначения произвольного спектра и задачей модального управления (то есть задачей назначения коэффициентов характеристической функции) является более сложной, чем для систем без запаздываний, и эти задачи не являются равносильными. Для систем с запаздываниями (даже с одним) задача назначения произвольного спектра в общем случае выглядит непреодолимой по различным причинам: во-первых, в силу бесконечности спектра; во-вторых, в силу отсутствия простой взаимосвязи между корнями характеристического уравнения и коэффициентами характеристического уравнения.

В различных постановках задачи модального управления и стабилизации линейных систем с запаздываниями были изучены в работах Н.Н. Красовского, Ю.С. Осипова, В.Л. Харитонова, Ю.Ф. Долгого, А.Н. Сесекина, А.В. Метельского, И.К. Асмыковича, В.М. Марченко, И.М. Борковской, В.Е. Хартовского, А.Т. Павловской, A. Olbrot, A. Manitius, S.-I. Niculescu, C. T. Abdallah, E. Kamen, K. Watanabe, M. Ito, M. Kaneko, E. Lee, S. Zak, B. Zhou, F. Mazenc, и других авторов.

Для систем высших порядков задачи назначения произвольного спектра в различных формулировках и в специальных случаях исследовали B. Shafai, L. H. Keel, G. R. Duan, E. K. Chu, B. Zhou, Y. Kim, H. S. Kim, J. L. Junkins, D. Henrion, M. Šebek, V. Kučera, H. H. Yu, G. R. Duan, D. Bi, Е. А. Перепелкин и другие авторы.

Задачи робастной устойчивости и стабилизации линейных систем с переменными коэффициентами исследовали B. R. Barmish, P. A. Bliman, G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, A. Vicino, J. C. Geromel, P. Colaneri, H. Gritli, S. Belghith, T. Hu, F. Blanchini, V. F. Montagner, P. L. D. Peres, D. C. Ramos, L. Xie, S. Shishkin, M. Fu, А. А. Щеглова, А. Х. Гелиг, И. Е. Зубер и другие авторы.

Цели и задачи. Целью диссертации является исследование проблемы модального управления, задачи назначения спектра и стабилизации посредством линейной статической обратной связи по выходу для различных классов линейных систем управления: а) систем с запаздываниями; б) систем высших порядков; в) систем с переменными неопределенными коэффициентами; и нахождение необходимых и достаточных условий разрешимости этих задач.

Научная новизна. Все полученные в работе результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования задач стабилизации и управления асимптотикой решений линейных и нелинейных систем, в том числе систем с запаздываниями, систем высших порядков, систем с переменными коэффициентами, систем с дискретным временем, а также для разработки численных методов их решения.

Введенное впервые понятие разрешимости задачи назначения матричного спектра и первые результаты, полученные в этом направлении, могут служить отправными пунктами для развития новой теории — теории назначения матричного спектра для систем высших порядков.

Методология и методы исследования. В работе использовались методы асимптотической теории линейных систем, методы качественной теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, теории устойчивости, теории матриц.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты состоят в следующем.

1. Для линейной стационарной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка, с сосредоточенными и (или) распределенными запаздываниями в состоянии получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Получены следствия о стабилизации рассматриваемых систем.

2. Для линейных стационарных управляемых систем с сосредоточенными запаздываниями исследована задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Для систем с сосредоточенными и распределенными запаздываниями изучена задача назначения произвольного конечного спектра. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих задач в случае, когда коэффициенты систем имеют специальный вид. Получены следствия о стабилизации рассматриваемых систем.

3. Для линейных стационарных управляемых систем высших порядков вводится постановка задачи назначения произвольного матричного спектра. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости такой задачи посредством статической обратной связи по выходу. Установлена связь между задачей назначения произвольного спектра и задачей назначения произвольного матричного спектра системы.

4. Получены достаточные условия экспоненциальной стабилизации линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию и по выходу.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации приведены в виде строгих математических утверждений, а также примеров, иллюстрирующих применение этих утверждений. Достоверность полученных результатов подтверждена строгостью математических доказательств, проведенных с использованием методов асимптотической теории линейных систем, методов качественной теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, теории устойчивости, теории матриц. Результаты диссертации обсуждались на Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям и математической теории управления (руководитель — профессор Н. Н. Петров, 2016–2021 гг.), на семинаре отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук (руководители — член-корреспондент РАН В. Н. Ушаков, профессор А. М. Тарасьев, 2022 г.), а также представлялись на Международных (49-й, 50-й Всероссийских) молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2018, 2019), XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения-2017» (Минск, 2017), Международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2017), 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (Ekaterinburg, 2018), XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Москва, 2018), Международной конференции «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посвященной 95-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 2019), III Международном семинаре, посвященном 75-летию академика А.И. Субботина «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби» (Екатеринбург, 2020), Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н. Н. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, 2020).

Публикации. Основной материал диссертации опубликован в 19 научных работах [1–19]. Из них 10 работ опубликованы в изданиях, входящих в Международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus, и тем самым приравненных к изданиям из Перечня ВАК. Статьи [2–8] опубликованы в журналах, входящих в Web of Science и Scopus, [1] — в журнале, входящем в Scopus. Работы [9] и [10] опубликованы в сборниках материалов международных конференций, входящих в Web of Science и/или Scopus. Остальные работы [11–19] — это тезисы докладов на международных и всероссийских конференциях.

Личный вклад соискателя. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, В. А. Зайцеву принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю И. Г. Ким — точные формулировки и доказательства результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, включающих двадцать параграфов (нумерация параграфов сквозная), заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 133 страницы, включая библиографический список из 154 ссылок.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность работы, приведен обзор литературы, относящейся к рассматриваемым в диссертации вопросам, определяются цели исследования, раскрывается научная новизна полученных результатов и формулируются основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена задачам модального управления и задачам назначения произвольного конечного спектра для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с m входами и k выходами, с запаздываниями

$$\begin{gathered}x^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}a_{ij}x^{(n-i)}(t-h_j)+\\+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}}g_{i\eta}(\tau)x^{(n-i)}(t+\tau)\,d\tau=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n}b_{l\alpha}u_\alpha^{(n-l)}(t),\quad t>0,\end{gathered}\tag{5}$$

$$y_\beta(t)=\sum_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t),\quad \beta=\overline{1,k},\tag{6}$$

посредством линейной статической обратной связи по выходу с запаздываниями

$$u(t)=\sum_{\rho=0}^{\theta}Q_\rho y(t-\sigma_\rho)+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}}R_\varkappa(\tau)y(t+\tau)\,d\tau.\tag{7}$$

Здесь начальные условия — $x^{(n-i)}(\tau)=\phi_i(\tau)$ ($\tau\in[-h_s,0]$), $\phi_i:[-h_s,0]\to\mathbb{K}$ — непрерывные функции; $y(t)=0$ ($t<-h_s$); $0=h_0<h_1<\ldots<h_s$, $0=\sigma_0<\sigma_1<\ldots<\sigma_\theta$ — постоянные запаздывания; $a_{ij},b_{l\alpha},c_{\nu\beta}\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,s}$, $l=\overline{p,n}$, $\alpha=\overline{1,m}$, $\nu=\overline{1,p}$, $\beta=\overline{1,k}$; $g_{i\eta}:[-h_\eta,-h_{\eta-1}]\to\mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($i=\overline{1,n},\eta=\overline{1,s}$); $u=\operatorname{col}(u_1,\ldots,u_m)\in\mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y=\operatorname{col}(y_1,\ldots,y_k)\in\mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p\in\{\overline{1,n}\}$; $Q_\rho=\{q^\rho_{\alpha\beta}\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы ($\rho=\overline{0,\theta}$), $R_\varkappa(\tau)=\{r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r^\varkappa_{\alpha\beta}\colon[-\sigma_\varkappa,-\sigma_{\varkappa-1}]\to\mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($\varkappa=\overline{1,\theta}$), $\alpha=\overline{1,m}$, $\beta=\overline{1,k}$; $M_{m,k}(\mathbb{K})$ — пространство $m\times k$-матриц с элементами из

$\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$. Обозначим характеристическую функцию замкнутой системы (5), (6), (7) через $\varphi(\lambda)$. Тогда

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\Big(\sum_{j=0}^{s} a_{ij}e^{-\lambda h_j} + \sum_{\eta=1}^{s}\int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big) -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha}\Big(\sum_{\nu=1}^{p}\Big[\sum_{\beta=1}^{k}\big(\sum_{\rho=0}^{\theta} q_{\alpha\beta}^{\rho}\overline{c}_{\nu\beta}e^{-\lambda\sigma_\rho}\big) +$$

$$+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)\overline{c}_{\nu\beta}e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big]\lambda^{n-l+\nu-1}\Big).$$

По системе (5), (6) построим матрицы $B = \{b_{l\alpha}\} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $l = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $C = \{c_{\nu\beta}\} \in M_{n,k}(\mathbb{K})$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,k}$, где $b_{l\alpha} = 0$ при $l < p$ и $c_{\nu\beta} = 0$ при $\nu > p$. Через J обозначим первый единичный косой ряд, то есть $J := \sum\limits_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}^* \in M_n(\mathbb{K})$, где $e_1 = \mathrm{col}\,(1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = \mathrm{col}\,(0,0,\ldots,1)$ — канонический базис в $\mathbb{K}^n$; $*$ — операция эрмитова сопряжения вектора (или матрицы), т.е. $f^* = \overline{f}^T$. В первой главе получены критерии разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра системы (5), (6) посредством линейной статической обратной связи по выходу (7). Критерии выражены в терминах коэффициентов матриц B, C и J (см. (17)).

В **первом параграфе** для системы (5), (6) с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний, т.е. при

$$h_\eta = \eta h, \quad g_{i\eta}(\tau) = 0, \quad \tau \in [-\eta h, -(\eta-1)h], \quad i = \overline{1,n}, \quad \eta = \overline{1,s}, \tag{8}$$

исследуется задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу (7) с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний, т.е. при

$$\sigma_\varkappa = \varkappa h, \quad R_\varkappa(\tau) = 0, \quad \tau \in [-\varkappa h, -(\varkappa-1)h], \quad \varkappa = \overline{1,\theta}. \tag{9}$$

Для системы (5), (6), (8) вводятся определения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (7), (9). Получено следствие о стабилизации системы (5), (6), (8) посредством линейной статической обратной связи по выходу (7), (9).

Во **втором параграфе** для системы (5), (6) с произвольными (не обязательно соизмеримыми) сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний, т.е. при

$$g_{i\eta}(\tau) = 0, \quad \tau \in [-h_\eta, -h_{\eta-1}], \quad i = \overline{1,n}, \quad \eta = \overline{1,s}, \tag{10}$$

исследуется задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу (7) с произвольными сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний, т.е. при

$$R_{\varkappa}(\tau) = 0, \quad \tau \in [-\sigma_{\varkappa}, -\sigma_{\varkappa-1}], \quad \varkappa = \overline{1, \theta}. \tag{11}$$

Для системы (5), (6), (10) вводятся определения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (7), (11). Получено следствие о стабилизации системы (5), (6), (10) посредством линейной статической обратной связи по выходу (7), (11).

В **третьем параграфе** для системы (5), (6) с распределенными запаздываниями без сосредоточенных запаздываний, т.е. при

$$a_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, s}, \tag{12}$$

исследуется задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу (7) с распределенными запаздываниями без сосредоточенных запаздываний, т.е. при

$$Q_{\rho} = 0, \quad \rho = \overline{1, \theta}. \tag{13}$$

Для системы (5), (6), (12) вводятся определения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (7), (13). Получено следствие о стабилизации системы (5), (6), (12) посредством линейной статической обратной связи по выходу (7), (13).

В **четвертом параграфе** для системы (5), (6) с соизмеримыми запаздываниями, т.е. при

$$h_{\eta} = \eta h, \quad \eta = \overline{1, s}, \tag{14}$$

исследуется задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу (7) с соизмеримыми запаздываниями, т.е. при

$$\sigma_{\varkappa} = \varkappa h, \quad \varkappa = \overline{1, \theta}. \tag{15}$$

Для системы (5), (6), (14) вводятся определения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (7), (15). Получено следствие о стабилизации системы (5), (6), (14) посредством линейной статической обратной связи по выходу (7), (15).

В **пятом параграфе** для системы (5), (6) исследуется задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу (7) в общем случае.

Определение 5.1. Для системы (5), (6) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (7), если для любого $\ell \geqslant 0$, любых чисел $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$, любых чисел $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{0,\ell}$, и любых интегрируемых функций $\delta_{i\xi} : [-\omega_\xi, -\omega_{\xi-1}] \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\xi = \overline{1,\ell}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, матрицы $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, и интегрируемые функции $R_\varkappa : [-\sigma_\varkappa, -\sigma_{\varkappa-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, такие, что характеристическая функция замкнутой системы (5), (6), (7) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Big(\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\omega_\mu} + \sum_{\xi=1}^{\ell} \int_{-\omega_\xi}^{-\omega_{\xi-1}} \delta_{i\xi}(\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau \Big).$$

Определение 5.2. Для системы (5), (6) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (7), если для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, матрицы $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, и интегрируемые функции $R_\varkappa : [-\sigma_\varkappa, -\sigma_{\varkappa-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, такие, что характеристическая функция замкнутой системы (5), (6), (7) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n. \tag{16}$$

Теорема 5.1. *Задача модального управления для системы* (5), (6) *посредством регулятора* (7) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*B, \quad C^*JB, \quad \ldots, \quad C^*J^{n-1}B \tag{17}$$

линейно независимы.

Теорема 5.2. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (5), (6) *посредством регулятора* (7) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (17) *линейно независимы.*

Следствие 5.1. *Если матрицы* (17) *линейно независимы, то система* (5), (6) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (7).

В **шестом параграфе** приведены примеры, иллюстрирующие результаты, представленные в четвертом, пятом параграфах.

Вторая глава посвящена задачам модального управления и задачам назначения произвольного конечного спектра для линейной стационарной системы с запаздываниями

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{s} A_j x(t-h_j) + \int_{-h_s}^{0} S(\tau)x(t+\tau)\,d\tau + Bu(t), \quad t>0, \tag{18}$$

$$y(t) = C^* x(t), \tag{19}$$

посредством линейной статической обратной связи по выходу с запаздываниями

$$u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t-\sigma_\rho) + \int_{-\sigma_\theta}^{0} R(\tau)y(t+\tau)\,d\tau. \tag{20}$$

Здесь начальные условия — $x(\tau)=\phi(\tau)$ ($\tau\in[-h_s,0]$), $\phi:[-h_s,0]\to\mathbb{K}^n$ — непрерывная функция; $y(\tau)=0$ ($\tau<-h_s$); $0=h_0<h_1<\ldots<h_s$, $0=\sigma_0<\sigma_1<\ldots<\sigma_\theta$ — постоянные запаздывания, $A_j\in M_n(\mathbb{K})$ ($j=\overline{0,s}$), $B\in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C\in M_{n,k}(\mathbb{K})$, $S:[-h_s,0]\to M_n(\mathbb{K})$ — интегрируемая матричная функция, $Q_\rho=\{q^\rho_{\alpha\beta}\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$ ($\rho=\overline{0,\theta}$) — постоянные матрицы, $R(\tau)=\{r_{\alpha\beta}(\tau)\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r_{\alpha\beta}\colon[-\sigma_\theta,0]\to\mathbb{K}$ — интегрируемые функции, $\alpha=\overline{1,m}$, $\beta=\overline{1,k}$. Обозначим через $\varphi(\lambda)$ характеристическую функцию замкнутой системы (18), (19), (20).

Пусть коэффициенты A_0, B, C системы (18), (19) имеют следующий специальный вид: матрица A_0 имеет форму Хессенберга с ненулевыми элементами наддиагонали; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю, то есть

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{i,i+1}\neq 0, \quad i=\overline{1,n}, \tag{21}$$

$$\begin{gathered} B=\begin{bmatrix} O_1 \\ L \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} N \\ O_2 \end{bmatrix}, \quad O_1=0\in M_{p-1,m}(\mathbb{K}), \quad L\in M_{n-p+1,m}(\mathbb{K}), \\ N\in M_{p,k}(\mathbb{K}), \quad O_2=0\in M_{n-p,k}(\mathbb{K}), \quad p\in\{1,\ldots,n\}. \end{gathered} \tag{22}$$

Будем предполагать, что матрицы A_j ($j=\overline{1,s}$), $S(\tau)$ также имеют специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_j, $S(\tau)$ равны нулю, то есть

$$\begin{gathered} A_j=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_j & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\tau)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{S}(\tau) & 0 \end{bmatrix}, \\ \widehat{A}_j\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad j=\overline{1,s}, \quad \widehat{S}(\tau)\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}). \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь число p то же самое, что и в (22).

В **седьмом параграфе** для системы (18), (19) с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний, т.е. при

$$h_j = jh, \quad j = \overline{1,s}, \quad S(\tau) = 0, \quad \tau \in [-sh, 0], \tag{24}$$

исследуется задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу (20) с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний, т.е. при

$$\sigma_\rho = \rho h, \quad \rho = \overline{1,\theta}, \quad R(\tau) = 0, \quad \tau \in [-\theta h, 0]. \tag{25}$$

Для системы (18), (19), (24) вводятся определения разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (20), (25). Для системы (18), (19), (24) с коэффициентами, имеющими специальный вид (21), (22), (23), получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (20), (25). Получено следствие о стабилизации системы (18), (19), (24) с коэффициентами, имеющими специальный вид (21), (22), (23), посредством линейной статической обратной связи по выходу (20), (25).

В **восьмом параграфе** для системы (18), (19) с произвольными (не обязательно соизмеримыми) сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний, т.е. при

$$S(\tau) = 0, \quad \tau \in [-h_s, 0], \tag{26}$$

исследуется задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной обратной связи по выходу (20) с произвольными сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний, т.е. при

$$R(\tau) = 0, \quad \tau \in [-\sigma_\theta, 0]. \tag{27}$$

Определение 8.1. Для системы (18), (19), (26) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (20), (27), если для любого целого $\ell \geqslant 0$, для любых наперед заданных чисел $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$ и для любых наперед заданных $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{0,\ell}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ и матрицы $Q_0, \ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ замкнутой системы (18), (19), (26), (20), (27) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} \lambda^{n-i} e^{-\lambda\omega_\mu}.$$

Определение 8.2. Для системы (18), (19), (26) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (20), (27), если для любых наперед заданных $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ и матрицы $Q_0, \ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ замкнутой системы (18), (19), (26), (20), (27) удовлетворяет равенству (16).

Теорема 8.1. *Пусть матрицы* A_j, $j = \overline{0, s}$, B, C *системы* (18), (19), (26) *имеют специальный вид* (21), (22), (23). *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы*

$$C^*B, \quad C^*A_0B, \quad \ldots, \quad C^*A_0^{n-1}B \tag{28}$$

линейно независимы.

2. *Для системы* (18), (19), (26) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (20), (27).

Теорема 8.2. *Для системы* (18), (19), (26) *с коэффициентами, имеющими специальный вид* (21), (22), (23), *задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (20), (27) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (28) *линейно независимы.*

Получено следствие о стабилизации системы (18), (19), (26) с коэффициентами, имеющими специальный вид (21), (22), (23), посредством линейной статической обратной связи по выходу (20), (27).

В **девятом параграфе** для системы (18), (19) с сосредоточенными и распределенными запаздываниями исследуется задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной обратной связи по выходу (20) с запаздываниями в тех же узлах, т.е. при

$$\theta = s, \quad \sigma_\rho = h_\rho, \quad \rho = \overline{1, s}. \tag{29}$$

Определение 9.1. Для системы (18), (19) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (20), (29), если для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, найдется регулятор вида (20), (29), при котором характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ замкнутой системы (18), (19), (20), (29) имеет вид (16).

Теорема 9.1. *Пусть коэффициенты системы* (18), (19) *имеют специальный вид* (21), (22), (23). *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы* (28) *линейно независимы.*

2. *Задача назначения произвольного конечного спектра системы* (18), (19) *посредством регулятора* (20), (29) *разрешима.*

Получено следствие о стабилизации системы (18), (19) с коэффициентами, имеющими специальный вид (21), (22), (23), посредством регулятора (20), (29).

Третья глава посвящена исследованию проблемы назначения произвольного матричного спектра для системы высших порядков

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} A_i x^{(n-i)} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} B_{l\alpha} u_{\alpha}^{(n-l)}, \tag{30}$$

$$y_{\beta} = \sum_{\nu=1}^{p} C_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}, \quad \beta = \overline{1,k}, \tag{31}$$

посредством статической обратной связи по выходу

$$u = Qy. \tag{32}$$

Здесь $s, n, m, k \in \mathbb{N}$ — заданные числа, $p \in \{\overline{1,n}\}$; $x \in \mathbb{K}^s$ — фазовый вектор, $u_{\alpha} \in \mathbb{K}^s$ — векторы управления, $y_{\beta} \in \mathbb{K}^s$ — векторы выходных сигналов, A_i, $B_{l\alpha}$, $C_{\nu\beta} \in M_s(\mathbb{K})$, $Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$, $Q_{\alpha\beta} \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{p,n}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. Построим векторы $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^{ms}$, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^{ks}$. По системе (30), (31) построим блочные матрицы $B = \{B_{l\alpha}\} \in M_{ns,ms}(\mathbb{K})$, $l = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $C = \{C_{\nu\beta}\} \in M_{ns,ks}(\mathbb{K})$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,k}$, где $B_{l\alpha} = 0$ при $l < p$ и $C_{\nu\beta} = 0$ при $\nu > p$.

В **десятом параграфе** вводится постановка задачи назначения произвольного матричного спектра для системы (30), (31) посредством статической обратной связи по состоянию $u = Qx$, т.е. когда $m = 1$, $p = n$, $k = n$, $C = I \in M_{ns}(\mathbb{K})$, $B = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, B_{n1}) \in M_{ns,s}(\mathbb{K})$, и $y = x$. Приводится решение этой задачи.

В **одиннадцатом параграфе** вводится постановка задачи назначения произвольного матричного спектра для системы (30), (31) посредством статической обратной связи по выходу (32).

Определение 11.2. Скажем, что для системы (30), (31) *разрешима задача назначения произвольного матричного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу* (32), если для любых матриц $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, существует матрица обратной связи $Q \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$ такая, что замкнутая система (30), (31), (32) имеет вид

$$x^{(n)} + \Gamma_1 x^{(n-1)} + \ldots + \Gamma_n x = 0. \tag{33}$$

Используя стандартную замену $z_1 = x$, $z_2 = x'$, $\ldots$, $z_n = x^{(n-1)}$, можно переписать систему (30), (31), (32) в виде большой системы

$$\dot{z} = Fz + Gv, \quad \xi = Hz, \quad v = L\xi,$$

где $z \in \mathbb{K}^r$, $v \in \mathbb{K}^q$, $\xi \in \mathbb{K}^d$, $r = ns$, $q = ms$, $d = ks$.

Определение 11.3. Говорят, что для системы (30), (31) *разрешима задача назначения произвольного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу* (32), если для любых чисел $\delta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, ns}$, существует матрица $Q \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$ обратной связи такая, что характеристический многочлен соответствующей замкнутой большой системы $\dot{z} = (F + GLH)z$ имеет вид $\chi(F + GLH; \lambda) = \lambda^r + \delta_1 \lambda^{r-1} + \ldots + \delta_r, \quad \delta_i \in \mathbb{K}, \quad i = \overline{1, r}$.

В **двенадцатом параграфе** вводятся вспомогательные обозначения, определения, утверждения, которые понадобятся для доказательства основных результатов третьей главы.

Зафиксируем $s, n, m, k \in \mathbb{N}$ и $p \in \{\overline{1, n}\}$. Обозначим $\mathcal{J} := J \otimes I \in M_{ns}(\mathbb{K})$, где $I \in M_s(\mathbb{K})$, $J \in M_n(\mathbb{K})$ — первый единичный косой ряд, $\otimes$ — прямое (кронекерово) произведение матриц.

Определение 12.3. Пусть X, Y — блочные матрицы с блоками размерности s такие, что число (блочных) столбцов матрицы X совпадает с числом (блочных) строк матрицы Y:

$$X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K}), \ \ X_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \ \ i = \overline{1, q}, \ \ j = \overline{1, r};$$
$$Y = \{Y_{j\nu}\} \in M_{rs,ts}(\mathbb{K}), \ \ Y_{j\nu} \in M_s(\mathbb{K}), \ \ j = \overline{1, r}, \ \ \nu = \overline{1, t}.$$

Для матриц X и Y определим операцию блочного умножения по следующему правилу:

$$Z = X \star Y := \{Z_{i\nu}\}, \quad Z_{i\nu} := \sum_{j=1}^{r} X_{ij} \otimes Y_{j\nu} \quad i = \overline{1, q}, \quad \nu = \overline{1, t}.$$

Имеем $Z_{i\nu} \in M_{s^2}(\mathbb{K})$, $i = \overline{1, q}$, $\nu = \overline{1, t}$, поэтому $Z := X \star Y \in M_{qs^2,ts^2}(\mathbb{K})$.

Введем отображение $\mathrm{VECRR}_s : M_{qs,rs}(\mathbb{K}) \to M_{s,qrs}(\mathbb{K})$, которое разворачивает матрицу $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K})$ блочным строкам в блочную строку с блоками размерности s: $\mathrm{VECRR}_s X = [X_{11}, \ldots, X_{1r}, \ldots, X_{q1}, \ldots, X_{qr}]$.

В **тринадцатом параграфе** получен критерий назначения произвольного матричного спектра системы (30), (31) посредством обратной связи по выходу (32).

Рассмотрим матрицы $C^T \star B$, $C^T \star \mathcal{J}B$, ..., $C^T \star \mathcal{J}^{n-1}B$.

Имеем $C^T \in M_{ks,ns}(\mathbb{K})$, $B \in M_{ns,ms}(\mathbb{K})$, следовательно, $C^T \star \mathcal{J}^{i-1}B \in M_{ks^2,ms^2}(\mathbb{K})$ для всех $i = \overline{1, n}$. Построим матрицы $\mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{i-1}B) \in M_{s^2,kms^2}(\mathbb{K})$, $i = \overline{1, n}$, и матрицу

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star B) \\ \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}B) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{n-1}B) \end{bmatrix} \in M_{ns^2,kms^2}(\mathbb{K}).$$

Т е о р е м а 13.2. *Для системы* (30), (31) *разрешима задача назначения произвольного матричного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу* (32) *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank}\Theta = ns^2.$$

В **четырнадцатом параграфе** получены достаточные условия назначения произвольного спектра системы (30), (31) посредством обратной связи по выходу (32).

Т е о р е м а 14.3. *Если для системы* (30), (31) *разрешима задача назначения произвольного матричного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу* (32), *то для системы* (30), (31) *разрешима задача назначения произвольного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу* (32).

В **пятнадцатом параграфе** получены критерии назначения произвольного матричного спектра и достаточные условия назначения произвольного спектра, когда блоки матрицы B и (или) C являются скалярными матрицами.

В **шестнадцатом параграфе** доказано одно свойство системы, для которой разрешима задача назначения произвольного матричного спектра.

Т е о р е м а 16.1. *Для любых различных* $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$, $\xi = \overline{1, ns}$, *и любых линейно независимых векторов* $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}^s$ *существуют матрицы* $\Gamma_j \in M_s(\mathbb{R})$, $j = \overline{1, n}$, *такие, что общее решение системы* (33) *имеет вид*

$$\begin{aligned} x = {} & C_1 h_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 h_2 \exp(\lambda_2 t) + \ldots + C_s h_s \exp(\lambda_s t) \\ & + C_{s+1} h_1 \exp(\lambda_{s+1} t) + \ldots + C_{2s} h_s \exp(\lambda_{2s} t) + \ldots \\ & + C_{(n-1)s+1} h_1 \exp(\lambda_{(n-1)s+1} t) + \ldots + C_{ns} h_s \exp(\lambda_{ns} t). \end{aligned}$$

В **семнадцатом параграфе** приведены примеры, иллюстрирующие результаты, полученные в §§ 13, 15.

Четвертая глава посвящена исследованию задачи экспоненциальной стабилизации с произвольным наперед заданным показателем устойчивости для линейного нестационарного дифференциального уравнения

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) x^{(n-i)} = \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} b_{l\tau} w_\tau^{(n-l)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad b_{l\tau} \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \qquad (34)$$

$$y_j = \sum_{\nu=1}^{p} c_{\nu j} x^{(\nu-1)}, \quad j = \overline{1, k}, \quad c_{\nu j} \in \mathbb{R}, \qquad (35)$$

посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу

$$w = Uy. \tag{36}$$

Здесь $w = \mathrm{col}(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления; $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ — выходной вектор. Функции $p_i(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, являются измеримыми и ограниченными: $\alpha_i \leqslant p_i(t) \leqslant \beta_i$, $t \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, n}$, но точные значения этих функций в моменты времени t неизвестны, известны только нижние и верхние границы α_i и β_i.

По системе (34), (35) построим матрицы $B = \{b_{l\tau}\} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $l = \overline{1, n}$, $\tau = \overline{1, m}$, $C = \{c_{\nu j}\} \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $\nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, k}$, где $b_{l\tau} = 0$ при $l < p$ и $c_{\nu j} = 0$ при $\nu > p$.

В **восемнадцатом параграфе** приводится постановка задачи экспоненциальной стабилизации дифференциального уравнения (34), (35) посредством линейной статической обратной связи по состоянию $w = Ux$, т.е. когда

$$m = 1, \quad p = n, \quad k = n, \quad C = I \in M_n(\mathbb{R}), \quad B = e_n, \tag{37}$$

$$y = x, \quad U = [u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1] \in M_{1,n}. \tag{38}$$

Исследуется следующая задача: *требуется построить постоянные u_1, $\ldots$, $u_n \in \mathbb{R}$ так, чтобы все решения замкнутой системы* (34), (35), (36), (37), (38) *были экспоненциально устойчивы с наперед заданным показателем.*

В **девятнадцатом параграфе** доказана разрешимость задачи экспоненциальной стабилизации для линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами (34), (35), (37) посредством линейной обратной связи по состоянию (36), (38).

Т е о р е м а 19.2. *Всякая система* (34), (35), (37) *экспоненциально стабилизируема с произвольным наперед заданным показателем $\theta > 0$ посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию* (36), (38).

В **двадцатом параграфе** исследована задача экспоненциальной стабилизации с наперед заданным показателем устойчивости для линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами уравнения (34), (35) посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу (36). Получены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи.

О п р е д е л е н и е 20.1. Будем говорить, что система (34), (35) *экспоненциально стабилизируема с показателем $\theta > 0$ посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу* (36), если существует постоянная матрица $U \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ такая, что всякое решение $x(t)$ замкнутой системы (34), (35), (36) экспоненциально устойчиво с показателем θ, т.е. $x(t)$ вместе с производными до $(n-1)$-го порядка имеет вид $O(e^{-\theta t})$ при $t \to +\infty$.

Теорема 20.2. *Система* (34), (35) *экспоненциально стабилизируема с произвольным наперед заданным показателем* $\theta > 0$ *посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу* (36), *если матрицы*

$$C^T B, \quad C^T J B, \quad \ldots, \quad C^T J^{n-1} B$$

линейно независимы.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Для линейной стационарной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка, с сосредоточенными и (или) распределенными запаздываниями в состоянии получен критерий разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Получены следствия о стабилизации рассматриваемых систем.

2. Получен критерий разрешимости задачи модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу для линейных стационарных управляемых систем с сосредоточенными запаздываниями и задачи назначения произвольного конечного спектра для систем с сосредоточенными и (или) распределенными запаздываниями в случае, когда коэффициенты систем имеют специальный вид. Получены следствия о стабилизации рассматриваемых систем.

3. Для линейных стационарных управляемых систем высших порядков введена постановка задачи назначения произвольного матричного спектра и получен критерий разрешимости этой задачи посредством статической обратной связи по выходу. Установлена связь между задачей назначения произвольного спектра и задачей назначения произвольного матричного спектра.

4. Получены достаточные условия экспоненциальной стабилизации линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию и по выходу.

Перечислим некоторые возможные направления развития исследований, проведенных в диссертационной работе.

1. На основе методики, разработанной в главах I, II, распространить результаты о модальном управлении, назначении спектра и стабилизации на системы с дискретным временем с запаздываниями, на системы с непрерывным временем с запаздываниями в управлении и (или) в выходе, на нелинейные системы (по первому приближению).

2. На основе теории, разработанной в главе III, перенести теорию управления матричным спектром линейных систем высших порядков посредством статической обратной связи на билинейные системы высших порядков.

3. Применить разработанную в главе IV методику робастной экспоненциальной стабилизации линейных нестационарных дифференциальных уравнений посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию и по выходу к линейным квазидифференциальным уравнениям и к нелинейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами.

Автор выражает искреннюю признательность научному руководителю В. А. Зайцеву за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Исследования по теме диссертации выполнены при поддержке РФФИ (гранты 16 – 01 – 00346-а, 18 – 51 – 41005, 20 – 01 – 00293) и Минобрнауки РФ (проект FEWS-2020-0010).

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Зайцев, В. А. Задача назначения конечного спектра в линейных системах с запаздыванием по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26, вып. 4. — С. 463–473. DOI: 10.20537/vm160402.

2. Зайцев, В. А. О назначении произвольного спектра в линейных стационарных системах с соизмеримыми запаздываниями по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27, вып. 3. — С. 315–325. DOI: 10.20537/vm170303.

3. Зайцев, В. А. Назначение спектра в линейных системах с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2020. — Т. 56. — С. 5–19. DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-01.

4. Ким, И. Г. Назначение конечного спектра в линейных системах с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями посредством статической обратной связи по выходу / И. Г. Ким // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2020. — Т. 30, вып. 3. — С. 367–384. DOI: 10.35634/vm200302.

5. Zaitsev, V. Exponential stabilization of linear time-varying differential equations with uncertain coefficients by linear stationary feedback / V. Zaitsev,

I. Kim // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, issue 5. — Article 853. DOI: 10.3390/math8050853.

6. Zaitsev, V. A. Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay / V. A. Zaitsev, I. G. Kim // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2020. — Vol. 30, issue 2. — Pp. 208–220. DOI: 10.35634/vm200205.

7. Zaitsev, V. Matrix eigenvalue spectrum assignment for linear control systems by static output feedback / V. Zaitsev, I. Kim // Linear Algebra and its Applications. — 2021. — Vol. 613. — Pp. 115–150. DOI: 10.1016/j.laa.2020.12.017.

8. Zaitsev, V. Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays / V. Zaitsev, I. Kim // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, issue 17. — Article 2158. DOI: 10.3390/math9172158.

9. Kim, I. G. Spectrum assignment by static output feedback for linear systems with time delays in states / I. G. Kim, V. A. Zaitsev // 2018 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). Moscow, 30 May – 01 June 2018. DOI: 10.1109/STAB.2018.8408365.

10. Zaitsev, V. A. Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays / V. A. Zaitsev, I. G. Kim // IFAC PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, issue 32. — Pp. 810–814. DOI: 10.1016/J.IFACOL.2018.11.446.

Прочие публикации

11. Зайцев, В. А. Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с запаздываниями по состоянию с неполной обратной связью / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Еругинские чтения–2017: тезисы докладов XVII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям. Минск, 16–20 мая 2017 г. — Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2017. — С. 74.

12. Зайцев, В. А. О стабилизации линейного нестационарного дифференциального уравнения линейной стационарной обратной связью / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, 07–11 июля 2017 г. — Владимир: Аркаим, 2017. — С. 71–72.

13. Ким, И. Г. О стационарной стабилизации линейной полной обратной связью линейных нестационарных управляемых систем в форме Хессенберга / И. Г. Ким // Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (49-й Всероссийской) молодежной школы-конференции.

Екатеринбург, 04–10 февраля 2018 г. — Екатеринбург: ИММ УРО РАН, 2018. — С. 31.

14. Зайцев, В. А. О назначении спектра посредством статической обратной связи по выходу для линейных систем с непрерывным и дискретным временем с запаздываниями по состоянию / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: материалы XIV Международной научной конференции (конференция Пятницкого). Москва, 30 мая–01 июня 2018 г. — Москва: ИПУ РАН, 2018. — С. 164–166.

15. Ким, И. Г. Стабилизация двухмассовой системы статической обратной связью по выходу / И. Г. Ким // Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург, 03–09 февраля 2019 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. — С. 38–39.

16. Зайцев, В. А. О назначении спектра и стабилизации блочных систем статической обратной связью по выходу / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. — С. 142–144.

17. Зайцев, В. А. Об управлении спектром линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием посредством статической обратной связи по выходу / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 15–19 июня 2020 г. — Ижевск: Удмуртский университет, 2020. — С. 173–174.

18. Ким, И. Г. Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с соизмеримыми запаздываниями статической обратной связью по выходу / И. Г. Ким, В. А. Зайцев // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 15–19 июня 2020 г. — Ижевск: Удмуртский университет, 2020. — С. 182–184.

19. Зайцев, В. А. О назначении спектра в линейных системах с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу / В. А. Зайцев, И. Г. Ким // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020): Материалы III Международного семинара, посвященного 75-летию академика А. И. Субботина. Екатеринбург, 26–30 октября 2020 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. — С. 164–167.